



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

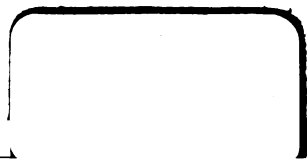
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



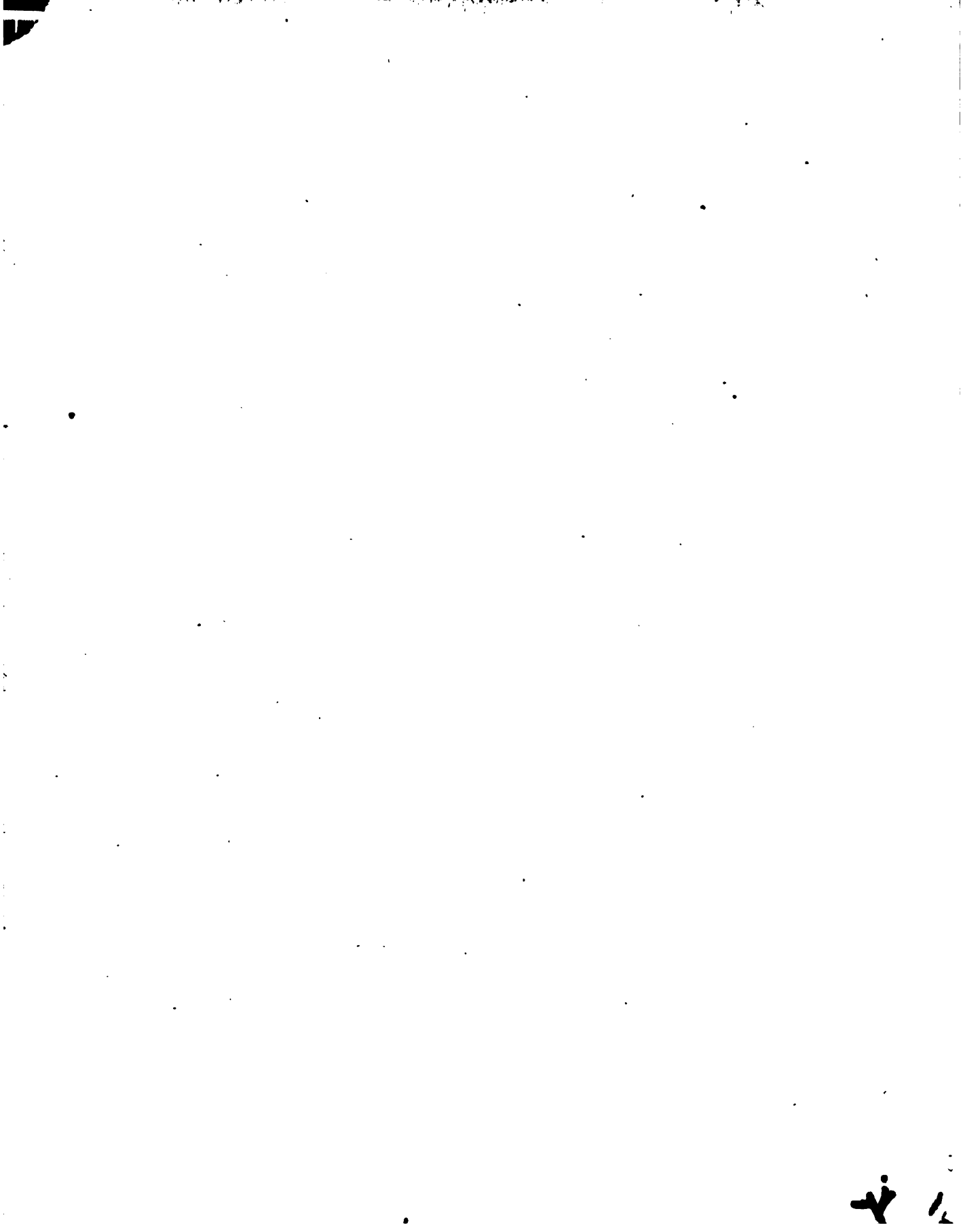
600016163N



1860 d. 69

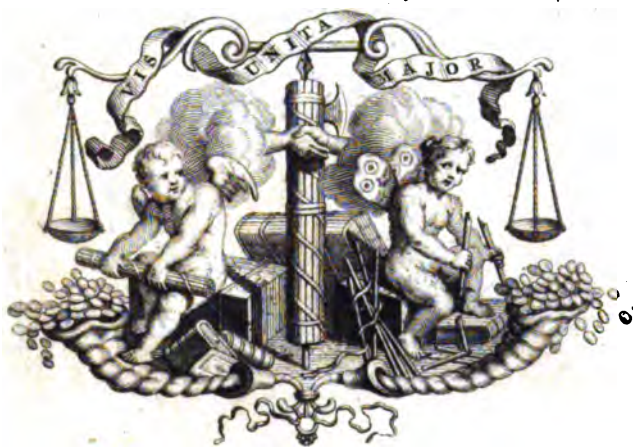






PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.
EDITIO ULTIMA
AUCTION ET EMENDATION.



AMSTÆLODAMI
SUMPTIBUS SOCIETATIS,

MDCCLXIV.

1860 d. 69

D.

h



ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVEDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIIS

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ANNÆ

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTONUS,



I N
VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI
OPUS HOC CE
MATHEMATICO-PHYSICUM

Seculi Gentisque nostræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Conderet, omnipotens sibi Leges ipse Creator
Dixerit, atque operum quæ fundamenta locarit.
Intima panduntur victi penetralia Cœli,
Nec latet, extremos quæ Vis circumrotet Orbis.
Sol folio residens ad se jubet omnia pronò
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.
Hinc patet, horrificis qua sit flexa Cometis:
Discimus hinc tandem, qua causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis eat, & cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeent Nodi, curque Auges progrediantur.
Discimus, & quantis refluxum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellat; fessis dum fluctibus ulvam
Deserit, ac nautis suspectas nudat arenas;
Alternisve ruens spumantia littora pulsat.

Quæ

Quæ toties animos veterum torfere Sophorum,
 Quæque Scholas hodie rauco certamine vexant,
 Obvia conspicimus; nubem pellente Mathesi:
 Quæ superas penetrare domos, atque ardua Cœli,
 NEWTONI auspiciis, jam dat contingere Tempora.
 Surgite Mortales, terrenas mittite curas;
 Atque hinc cœligenæ vires cognoscite Mentis,
 A pecudum vita longe longeque remotæ.
 Qui scriptis primus Tabulis compescere Cædes,
 Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
 Quive vagis populis circumdari mœnibus Urbes
 Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
 Vel qui curarum lenimen pressit ab Uva;
 Vel qui Niliaca monstravit arundine pictos
 Consociare sonos, oculisque exponere Voces;
 Humanam sortem minus extulit; utpote pauca
 In commune ferens miseræ solatia vitæ.
 Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
 Jura poli tractare licet, jamque abdita diæ
 Claustra patent Naturæ, & rerum immobilis ordo;
 Et quæ præteritis latuere incognita sæclis.
 Talia monstrantem justis celebrate Camænis,
 Vos qui cœlesti gaudetis nectare vesci,
 NEWTONUM clausi reserantem scrinia Veri,
 NEWTONUM Musis carum, qui pectore puro
 Phœbus adest, totoque incescit Numine mentem:
 Nec fas est propius Mortali attingere Divos.

ED. HALLET.

AUC.



25 June 1820.

AUCTORIS

PRÆFATIO

AD

LECTOREM.

Cum Veteres Mechanicam (uti auctor est Pappus) in rerum Naturalium investigatione maximi fecerint; & Recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phenomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu Mathesin excolere, quatenus ea ad Philosophiam spectat. Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem, quæ per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad Practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus Geometria fundatur, ad Mechanicam pertinent. Has lineas describere Geometria non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro in easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat Geometriæ; dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & Circulos describere Problemata sunt, sed non Geometrica. Ex Mechanica postulatur horum solutio, in Geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur
Geo.



600016163N



1860 d. 69



AUCTORIS PRÆFATIO.

IN hac Secunda Principiorum Editione, multa sparsim emendantur & nonnulla adjiciuntur. In Libri primi Sectione II, Inventio virium quibus corpora in Orbibus datis revolvi possint, facilior redditur & amplior. In Libri secundi Sectione VII, Theoria resistentiæ Fluidorum accuratius investigatur & novis Experimentis confirmatur. In Libro tertio Theoria Lune & Præcessio Æquinoctiorum ex Principiis suis plenius deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratius computatis Orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

29 June. E D I T O R I S

P R Æ F A T I O.

NEWTONIANÆ Philosophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque desideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex Indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philosophiæ.

Qui Physicam tractandam susceperunt, ad tres fere classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus Qualitates específicas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ Scholasticæ, ab *Aristotelo* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos Effectus ex corporum singularibus Naturis oriri; at unde sint illæ Naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; Sermonem quendam Philosophicum censendi sunt adinvenisse, Philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiae laudem consequi sperarunt, rejecta Vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam universam homogeneam esse, omnem vero Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progressio instituitur a simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit Natura. Verum ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus; quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglecta rerum constitutione vera: quæ sane frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas Observationes investigari possit. Qui speculationum

h

EDITORIS

suarum fundamentum desumunt ab Hypothesibus, etiamsi deinde secundum leges Mechanicas accuratissime procedant; Fabulam quidem elegantem forte & venustam, Fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

20. 11. 18. Relinquitur adeo tertium genus, qui Philosophiam scilicet Experimentalem profitentur. Hi, quidem, ex simplicissimis (quibus possunt) principiis, rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem Principii loco assumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in Physicam recipiunt, nisi ut Quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque Methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam Phænomenis per Analysin deducunt, ex quibus deinde per Synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est Philosophandi ratio longe optima, quam præ ceteris merito amplectendam censuit Celeberrimus Auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit Exemplum, Mundani nempe Systematis explicationem e Theoria Gravitatis felicissime deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus Ille & solus ex Apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis Viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo Principio ægre assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: Tibi potius, Benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus Tute ipse iudicium non iniquum feras.

Igitur ut Argumenti sumatur exordium a simplicissimis & proximis; despiciamus paulisper qualis sit in Terrestribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Cœlestia, longissime a sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in Terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit Experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas relativa, non est vera Levitas, sed apprens solummodo: & oritur a præpollente Gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitant in Terram, ita Terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; Gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguat^r Terræ totius

P R Æ F A T I O.

totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra Experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, Gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

≡ Pondera corporum, æqualiter a centro Terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet Aeris resistentia: accuratius autem comprobatur per Experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantibus, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in Terram & Terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis qua corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque Terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem aucta vel diminuta mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium Actionibus conflari censenda erit; atque adeo corpora omnia Terrestria se mutuo trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis sit in Coelis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; Naturæ lex est ab omnibus recepta Philosophis. Inde vero sequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, Vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo: Planetis igitur in Orbibus curvis revolventibus necessario aderit Vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter a Tangentibus deflectantur.

EDITORIS

Jam illud concedi æquum est, quod Mathematicis rationibus colligitur & certissime demonstratur; Corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano descripta, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcunque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a Viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confesso sit apud Astronomos, Planetas primarios circum Solem, secundarios vero circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut Vis illa, qua perpetuo detorquentur a Tangentibus rectilineis, & in Orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in Orbitalium centris. Hæc itaque Vis non inepte vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, Centripeta; respectu autem corporis centralis, Attractiva; a quacunque demum causa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda sunt, & Mathematicè demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in Circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum a centro communi; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in Orbitis quæ sunt Circulis finitimæ, & quiescant Orbitalium Apsides; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in Planetis universis consentiunt Astronomi. Itaque Vires centripetæ Planetarum omnium sunt reciproce ut quadrata distantiarum ab Orbium centris. Si quis objiciat Planetarum & Lunæ præsertim, Apsides non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest, etiamsi concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod Vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum Mathematicum inveniri posse & plane insensibilem esse. Ipsa enim ratio Vis centripetæ Lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit responsio, si dicamus hanc Apsidum progressionem, non ex aberratione a duplicata proportione, sed ex alia prorsus diversa causa oriri, quemadmodum egregie commonstratur in hac Philosophia. Restat ergo ut Vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt versus Solem & secundarii versus primarios suos, sint accurate ut quadrata distantiarum reciproce.

Ex

P R Æ F A T I O.

Ex iis quæ hætenus dicta sunt, constat Planetas in Orbitis suis retineri per Vim aliquam in ipsos perpetuo agentem: constat Vim illam dirigi semper versus Orbitalium centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum distantiae, diminui in eadem proportione qua distantiae quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter Planetarum Vires centripetas & Vim Gravitatis, annon ejusdem forte sint generis. Ejusdem vero generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eadem eademque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: Hoc utique consequitur ex ratiociniis Mathematicis. Erit igitur Vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis, ad Vim Gravitatis in superficie Terræ, ut spatium quod tempore quam minimo describeret Luna descendendo per Vim centripetam versus Terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium quod eodem tempore quam minimo describit grave corpus in vicinia Terræ, per Vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus a Luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui Lunæ translationem de Tangente, factam a Vi centripeta, metitur; atque adeo computari potest ex datis tum Lunæ tempore periodico tum distantia ejus a centro Terræ. Spatium posterius invenitur per Experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. In itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis ad vim Gravitatis in superficie Terræ, erit ut quadratum semidiametri Terræ ad Orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis ad vim Lunæ centripetam prope Terræ superficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ superficiem æqualis est vi Gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem: si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quam ex vi sola Gravitatis. Constat igitur Vim illam centripetam, qua Luna perpetuo de Tangente vel trahitur vel impellitur & in Orbita retinetur, ipsam esse vim Gravitatis terrestris ad Lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese Virtus extendat: cum

EDITORIS

cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutua, Terra vicissim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac Philosophia, ubi agitur de Maris æstu & Æquinoctiorum præcessione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis Gravitatis decrescat in majoribus a Tellure distantibus. Nam cum Gravitatio non diversa sit a Vi centripeta Lunari, hæc vero sit reciproce proportionalis quadrato distantiae; diminuetur & Gravitatio in eadem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & secundariorum circa Jovem & Saturnum sunt Phænomena generis ejusdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versus centrum Solis, secundariorum versus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta versus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centrīs, quemadmodum vis Lunæ est ut quadratum distantiae a Terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra vicissim in Lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim in secundarios; sic & omnes primarii in Solem, & Sol vicissim in primarios.

Igitur Sol in Planetas universos gravitat & universi in Solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum Solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipsos. Secundarios vero Planetas in Solem gravitare abunde insuper constat ex inæqualitatibus Lunaribus; quarum accuratissimam Theoriam, admiranda sagacitate patefactam, in tertio hujus Operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoersum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissime colligi potest ex motu Cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipsum proxime accedunt ut Globum ejus, in Periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum Theoriam ab Astronomis antehac frustra quæsitam, nostro tandem sæculo feliciter inventam & per Observationes certissime demonstratam, Præstantissimo nostro Auctori debemus. Patet igitur

P R Æ F A T I O.

igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce vero Phænomenis manifestum est & Mathematicè comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis suis, respicere Solem & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantum ad corpora Planetarum in datis distantiiis & in eodem fere plano collocata, sed etiam ad Cometas in diversissimis Cœlorum regionibus & in diversissimis distantiiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium; ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero sequitur, Planetas & Cometas universos se mutuo trahere, & in se mutuo graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Astronomis non incognita, & ab actionibus horum Planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo Apſidum, qui supra memoratus est, quique a causa consimili proficiscitur.

Et demum pervenimus ut dicendum sit, & Terram & Solem & corpora omnia cœlestia, quæ Solem comitantur, se mutuo attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum supra de Terreſtribus ostensum est. In diversis autem distantiiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere Globos eadem lege trahentes, Mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur Philosophis; Effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si Gravititas sit causa descensus Lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si Gravititas mutua fuerit inter Lapidem & Terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva Lapidis & Terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac Regula fundatur omnis Philosophia: quippe qua sublata nihil affirmare possumus de Universis. Constitutio rerum singularum innotescit per Observationes & Experimenta: inde vero non

EDITORIS

nisi per hanc Regulam de rerum universalium natura judicamus.

Jam cum Gravia sint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Coelis reperiuntur, de quibus Experimenta vel Observationes institui licet; omnino dicendum erit, Gravitationem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint Extensa, Mobilia, & Impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint Gravia. Corporum Extensio, Mobilitas, & impenetrabilitas non nisi per Experimenta innotescunt; eodem plane modo Gravitatio innotescit. Corpora omnia de quibus Observationes habemus, Extensa sunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus Observationes non habemus, Extensa esse & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt Gravia, de quibus Observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus Observationes non habemus, Gravia esse. Si quis dicat corpora Stellarum inerrantium non esse Gravia, quandoquidem eorum Gravitatio nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque Extensa esse, nec Mobilia, nec Impenetrabilia, cum hæc Fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? Inter primarias qualitates corporum universalium vel Gravitatio habebit locum; vel Extensio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum Gravitationem, vel non recte explicabitur per corporum Extensionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid musitare. Gravitationem scilicet Occultam esse quid, perpetuo argutari solent; occultas vero causas procul esse ablegandas a Philosophia. His autem facile respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per Observationes clarissime demonstratur, sed has solum quarum occulta est & ficta existentia nondum vero comprobata. Gravitatio ergo non erit occulta causa motuum coelestium; siquidem ex Phænomenis ostensum est, hanc virtutem revera existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas; qui nescio quos Vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omnino ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitatio occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur e Philosophia, quod causa ipsius Gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuunt absurdi,

P R Æ F A T I O.

furdi, unde totius tandem Philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent a compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? simul vero exulabunt & ab his proxime pendentibus & quæ ab illis porro pendent, usque dum a causis omnibus vacua fuerit & probe purgata Philosophia.

Sunt qui Gravitationem præter naturam esse dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in Physica præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa Philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim Gravitationem corporibus omnibus inditam esse negabunt, quod tamen dici non potest: vel eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex causis Mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones, quæ, quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis sit deinde futura Philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota Physica cœlestis vel ideo minus placet, quod cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His sua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. NEWTONIANAM itaque Philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per Phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis vere existentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit Summus Opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut a pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit Effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua vere atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in Philosophia vera. In Horologiis automatis idem Indicis horarii motus vel ab appenso Pondere vel ab intus concluso Elatere oriri potest. Quod si oblatum Horologium revera sit instructum Pondere; ridebitur

EDITORIS

ridebitur qui finget Elaterem, & ex Hypothefi fic præpropere conficta motum Indicis explicare fufcipiet: oportuit enim internam Machinæ fabricam penitus perfcruari, ut ita motus propofiti principium verum exploratum habere poffet. Idem vel non abfimile feretur iudicium de Philofophis illis, qui materia quadam fubtiliffima Cœlos effe repletos, hanc autem in Vortices indefinenter agi voluerunt. Nam fi Phænomenis vel accuratiffime fatisfacere poffent ex Hypothefibus fuis; veram tamen Philofophiam tradidiffe, & veras caufas motuum cœleftium inveniffe nondum dicendi funt; nifi vel has revera exiftere, vel faltem alias non exiftere demonftraverint. Igitur fi oftentum fuerit, univerforum corporum Attractionem habere verum locum in rerum natura; quin etiam oftentum fuerit, qua ratione motus omnes cœleftes abinde folutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, fi quis dixerit eodém motus per Vortices explicari debere, etiamfi id fieri poffe vel maxime concefferimus. Non autem concedimus: Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore noftro abunde quidem & clariffimis rationibus evincitur; ut fomniis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptiffimo figmento refarciendo, novisque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

· Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur a Vorticibus; oportet corpora delata & Vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque curfus determinatione moveri, & eandem habere denfitatem vel eandem Vim inertiae pro mole materiae. Conftat vero Planetas & Cometas, dum verfantur in iisdem regionibus Cœlorum, velocitatibus variis variaque curfus determinatione moveri. Neceffario itaque fequitur, ut Fluidi cœleftis partes illæ, quæ funt ad eafdem diftantias a Sole revolvantur eodem tempore in plagas diverfas cum diverfis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut transire poffint Planetæ; alia, ut transire poffint Cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, univerfa corpora cœleftia non deferri a materia Vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos effe non ab uno eodemque Vortice, fed a pluribus qui ab invicem diverfi funt, idemque fpatium Soli circumjectum pervadant.

· Si plures Vortices in eodem fpatio contineri, & fe fe mutuo penetrare, motibusque diverfis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent effe conformes delatorum corporum motibus, qui funt

P R Æ F A T I O.

sunt summe regulares , & peraguntur in Sectionibus Conicis, nunc valde eccentricis , nunc ad Circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur, nec ab actionibus materiæ occurrentis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sane si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficiliter explicantur, quam veri illi motus Planetarum & Cometarum; frustra mihi videntur in Philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse Effectu suo simplicior. Concessa Fabularum licentia, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmosphæris, adinstar Telluris nostræ; quæ quidem Hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam Hypothesis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmosphæras, ex natura sua, circa Solem moveri & Sectiones Conicas describere; qui sane motus multo facilius concipi potest, quam consimilis motus Vorticum se invicem permeantium. Denique Planetas ipsos & Cometas circa Solem deferri ab Atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum coelestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc Fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram Fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similis, quam Hypothesis Atmosphærarum Hypothesi Vorticum.

Docuit *Galilaus*, lapidis projecti & in parabola moti deflexionem a cursu rectilineo oriri a Gravitate lapidis in Terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris, Philosophus causam aliquam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proxime contingunt Telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo subtili natat; & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem una semitam describere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce Philosophi ingenium, ex causis Mechanicis, materia scilicet & motu, phænomena Naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non subsannabit bonum illum *Galileum*, qui magno molimine Mathematico qualitates occultas, e Philosophia feliciter exclusas, denuo revocare sustinuerit? sed pudet nugis diutius immorari.

EDITORIS

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summe regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant. Moventur in Orbibus Conicis, hi orbis sunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes Coelorum partes, & Planetarum regiones liberrime pertranseunt, & sæpe contra Signorum ordinem incedunt. Hæc Phænomena certissime confirmantur ex Observationibus Astronomicis: & per Vortices nequeunt explicari: Imo, ne quidem cum Vorticibus Planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus e Coelis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem a Vorticibus devehuntur; Vorticium partes, quæ proxime ambiunt unumquemque Planetam, ejusdem densitatis erunt ac Planeta; uti supra dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est Orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus densitatem: quæ vero jacet intra Orbem magnum atque Orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio Vorticis permanere possit, debent partes minus densæ centrum occupare, magis densæ longius a centro abire. Cum enim Planetarum tempora periodica sint in ratione sesquialicata distantiarum a Sole, oportet partium Vorticis periodos eandem rationem servare. Inde vero sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minus densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, qua partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendant minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius Vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina Fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut Fluidum, cujus major est densitas, majore vi Gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omnino dicendum est, densiores Vorticis partes majore vi centrifuga petere supremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars Vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, densitatem habebit atque adeo vim inertię pro mole materiæ, quæ non minor erit quam densitas & vis inertię Telluris: inde vero Cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse merito videatur. Constat autem ex motu Cometarum

P R Æ F A T I O.

metarum prorsus regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimum sentiri potest; atque adeo neutiquam in materiam ullam incurfare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis Inertiæ. Nam resistentia Mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sane vix observari potest in Fluidis vulgo notis, nisi valde tenacia fuerint adinstar Olei & Mellis. Resistentia quæ sentitur in Aere, Aqua, Hydrargyro, & hujusmodi Fluidis non tenacibus fere tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente Fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistentia: quemadmodum clarissime demonstratum est ab Auctore nostro in peregrina Resistentiarum Theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac secunda vice, & per Experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut Fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem Fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi a Fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio Fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in Fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa qua Fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in Fluidum, id est, nisi velocitas absoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta Fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest Fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiae. Itaque concludendum erit; Fluidi coelestis nullam esse vim inertiae, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim qua motus communicetur, cum nulla sit vis inertiae: nullam esse vim qua mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cum nulla sit vis qua motus communicetur: nullam esse omnino efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc Hypothesin, quæ fundamentoplane destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & Philosopho prorsus

EDITORIS

sus indignam. Qui coelos materia fluida repletos esse volunt, hanc vero non inertem esse statuunt; Hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nulla secerni possit ab inani Spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeo usque dediti Materiæ, ut Spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus Naturæ subsidium præsens haberi posset ab Æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex Cometarum phænomenis, nullam esse hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa Mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quadam Naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas Gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant Fato universa regi, non Providentia; Materiam ex necessitate sua semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam si necessario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa sane sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed Observando atque Experiendo addiscere debemus. Qui veræ Physicæ principia Legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet, vel statuere Mundum ex necessitate fuisse, Legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo Naturæ, se tamen, homuncionem
misellum

P R Æ F A T I O .

misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissime cernuntur Consilium optimum & Dominium summum sapientissimi & potentissimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sint futura. His vel Miracula vel Qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiose indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere Philosophiam in Atheismo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda Philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos Judices præstantissima Philosophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Observationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro Illustrissimi nostri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, merito admirantur & suspiciunt quicumque paulo profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergo referatis, aditum Nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis Mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitus perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, Rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque Naturæ majestatem propius jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, Conditorem vero ac Dominum Universorum impensius colere & venerari, qui fructus est Philosophiæ multo uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur Eximium NEWTONI Opus adversus Atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam Catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis Concionibus Anglice Latineque editis, primus egregie demonstravit Vir in omni Literarum genere præclarus idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi sui & Academiæ nostræ magnum Ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* Magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri

EDITORIS. PRÆFATIO.

debeo: Huic & Tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore Celeberrimi Auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud Posteris censeris non minoris æstimat, quam propriis Scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) Amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum Exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio coemenda superessent; suavit Ille crebris efflagitationibus & tantum non objurgando perpulit denique Virum Præstantissimum, nec modestia minus quam eruditione summa Insignem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: Mihi vero, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor *Plumianus*.

INDEX

INDEX CAPITUM.

TOTIUS OPERIS.

| | PAG. |
|--|-------|
| DEFINITIONES. | I |
| AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. | 12 |
| DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS. | |
| SECT. I. D E Methodo rationum primarum & ultimarum. | 24 |
| SECT. II. De inventione Virium centripetarum. | 34 |
| SECT. III. De motu corporum in Conicis sectionibus eccentricis. | 48 |
| SECT. IV. De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato. | 59 |
| SECT. V. De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur. | 66 |
| SECT. VI. De inventione Motuum in Orbibus datis. | 97 |
| SECT. VII. De corporum Ascensu & Descensu rectilineo. | 105 |
| SECT. VIII. De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur. | 114 |
| SECT. IX. De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Apsidum. | 121 |
| SECT. X. De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproca. | 132 |
| SECT. XI. De Motu corporum Viribus centripetis se mutuopotentium. | 147 |
| SECT. XII. De corporum Sphaericorum Viribus attractivis. | 173 |
| | SECT. |

| | |
|--|-----|
| SECT. XIII. <i>De corporum non Sphaericorum Viribus attracti-</i> <i>vis.</i> | 192 |
| SECT. XIV. <i>De Motu corporum Minimorum, quae Viribus</i> <i>centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes</i> <i>tendentibus agitantur.</i> | 203 |

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

| | |
|--|-----|
| SECT. I. D E Motu corporum quibus resistitur in ratione <i>Velocitatis.</i> | 211 |
| SECT. II. <i>De Motu corporum quibus resistitur in duplicata ra-</i> <i>tione Velocitatis.</i> | 220 |
| SECT. III. <i>De Motu corporum quibus resistitur partim in ra-</i> <i>tione Velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.</i> | 245 |
| SECT. IV. <i>De corporum Circulari motu in Mediis resistenti-</i> <i>bus.</i> | 253 |
| SECT. V. <i>De densitate & compressione Fluidorum, deque Hy-</i> <i>drostatica.</i> | 260 |
| SECT. VI. <i>De Motu & Resistentia corporum Funependulo-</i> <i>rum.</i> | 272 |
| SECT. VII. <i>De motu Fluidorum & resistentia Projectilium.</i> | 294 |
| SECT. VIII. <i>De motu per Fluida propagato.</i> | 329 |
| SECT. IX. <i>De motu Circulari Fluidorum.</i> | 345 |

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS.

| | |
|-------------------------------|-----|
| R EGULÆ PHILOSOPHANDI. | 357 |
| PHENOMENA. | 359 |
| PROPOSITIONES. | 362 |
| SCHOLIUM. | 481 |

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas Materiae est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

AER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiae conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; adeoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, & dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III.

Materia vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materia, sic ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissime Vis Inertiz dici potest. Exercet vero corpus hæc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium ejus sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiz. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex Ictu, ex Pressione, ex vi Centripeta.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utrunque tendunt.

Hujus generis est Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, qua ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circum-

actus.

actus, a circumagente manu abire ponatur, & conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua fuit de lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centro orbium recedere; & nisi adsit vis aliqua conatui illi contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi Gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in linea recta abiret in coelos; idque uniformi cum motu, si modo aeris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo & in terram perpetuo flectitur; idque magis vel minus pro gravitate sua & velocitate motus. Quo minor erit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviat a cursu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbens, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circumiret priusquam caderet; vel denique ut in terram nunquam caderet; sed in coelos abiret & motu abundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circumire, potest & Luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & absque tali vi Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire Vim, qua corpus indato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri possit, & vicissim invenire Vim curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egressum a data vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripeta Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intensiõne virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripeta Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantis a globo terræ; in æqualibus autem distantis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) subtrata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII.

Vis centripeta Quantitas Motrix est ipsius mensura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in coelis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum ex propensionibus omnium partium compositam; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causam aliquam præditam, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro

centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas & sedes Physicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus; at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuo promiscue usurpo; has vires non Physice sed Mathematice tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires vere & Physice tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerit.

Scholium.

Haftenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Nam Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hæc non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares distingui.

I. Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & natura sua absque relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apprens, & vulgare est sensibilis & externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

DEFINITIONES.

II. *Spatium Absolutum*, natura sua absque relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile: *Relativum* est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aerei vel coelestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, movetur; spatium Aeris nostri, quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus; & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. *Locus* est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; adeoque locus totius idem cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. *Motus Absolutus* est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, *Relativus* de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis passis fertur, relativus corporis Locus est navigii regio illa in qua corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur una cum navi: & *Quies relativa* est permanensio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permanensio corporis in eadem parte spatii illius immoti in qua navis ipsa una cum cavitata sua & contentis universis movetur. Unde si Terra verè quiescit, corpus quod relative quiescit in navi, movebitur verè & absolute ea cum velocitate qua navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur; orietur verus & absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terra: & si corpus etiam movetur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terra, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem

PRINCIPIA MATHEMATICA.

7

tem versus cum velocitatis parte una: movebitur Nauta vere & absolute in spatio immoto cum velocitatis partibus 1000 in orientem, & relative in terra occidentem versus cum velocitatis partibus nona.

DEFINITIONES.

Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successioneis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæc Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguantur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per Proprietates suas & Causas & Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longe ultra, quiescat absolute; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum

DEFINITIONES. quum illud datam positionem servet æcne; quies vera ex horum situ inter se defini nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyranrium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus defini nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia; præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absque translatione, de vicinia corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur una Locatum: adeoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota defini possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest absque viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

manant ut situs relativus conservetur, conservabitur ratio in qua **DEFINITIONES.**
 motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem & absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorsione admodum rigeat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quiescat; tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam, vi in aquam paulatim impressa, effecit vas, ut hæc quoque sensibilibus revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim a medio; ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatioe semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo; quiescat in eodem relative. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circulare verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative. Igitur conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus vere circularis, conatui unico tantquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Systemate eorum qui Cælos nostros infra Cælos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas secum deferre; singulæ Cælorum partes, & Planetæ qui relative quidem in Cælis suis proximis quiescunt, moventur

DEFINITIONES. tur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensurarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hæc de quantitativis mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentia, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circulaarem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augetetur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocumque globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si
 atten-

attenderetur ad filum, & deprenderetur tensionem ejus illam ipsam **DEFINI-**
esse quam motus globorum requireret; concludere liceret mo- **TIONES.**
tum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum ex
translatione globorum inter corpora, determinationem hujus mo-
tus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus,
& apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus seu
veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fu-
fius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem
composui.

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus a resistentia aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

LEX III.

LEGES
MOTUS.

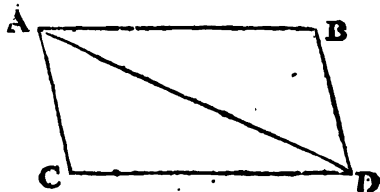
Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tanrumque impedit progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuae) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factae, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

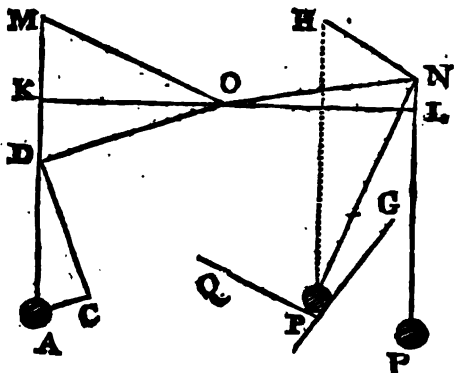
Si corpus dato tempore, vi sola M in loco A impressa, ferretur uniformi cum motu ab A ad B ; & vi sola N in eodem loco impressa, ferretur ab A ad C : compleatur parallelogrammum $ABDC$, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab A ad D . Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis per Legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD , sive vis N imprimatur, sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD . Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea CD , & idcirco in utriusque lineae concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab A ad D per Legem I.



Et hinc patet compositio vis directæ AD ex viribus quibusvis obliquis AB & BD, & vicissim resolutio vis cujusvis directæ AD in obliquas quascunque AB & BD. Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.

Ut si de rotæ alicujus centro O exeuntes radii inæquales OM , ON filis MA , NP sustineant pondera A & P , & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum O agatur recta KOL filis perpendiculariter occurrens in K & L , centroque O & intervallorum OK , OL majore OL describatur circulus occurrens filo MA in D : & actæ rectæ OD parallela sit AC , & perpendicularis DC . Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, K , L , D affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur a punctis K & L vel D & L . Ponderis autem A exponatur vis tota per lineam AD , & hæc resolveretur in vires AC , CD , quarum AC trahendo radium OD directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera DC , trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium OL ipsi OD æqualem; hoc est, idem atque pondus P , si modo pondus illud sit ad pondus A ut vis DC ad vim DA , id est (ob similia triangula ADC , DOK ,) ut OK ad OD seu OL . Pondera igitur A & P , quæ sunt reciproce ut radii in directum positi OK & OL , idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima Libræ, Vestis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo Np , partim incumbat plano obliquo pG : agantur pH , NH , prior horizonti, posterior plano pG perpendicularis; & si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam pH , resolvi potest hæc in vires pN , HN . Si filo pN perpendicularare esset planum aliquod pQ , secans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; & pondus p his planis pQ , pG solummodo incumberet; urgeret



geret illud hæc plana viribus pN , HN perpendiculariter, nimirum LEGES
MOTUS. planum pQ vi pN , & planum pG vi HN . Ideoque si tollatur planum pQ , ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendò pondus jam vicem præstat plani sublatis, tendetur illud eadem vi pN , qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN , ut pN ad pH . Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum pN , AM a centro rotæ, & ratione directæ pH ad pN ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque adeo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p , planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus p urget planum pQ sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH ; atque ad vim, qua urget planum alterum pG , ut pN ad NH . Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur Corollarii hujus latissime patet, & late patendo veritatem suam evincit; cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique ascendentes, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendò summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, adeoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphericum A sit triplo majus corpore spherico B , habeatque duas velocitatis partes; & B sequatur in eadem recta cum velocitatis

AXIOMATA
SIVE

locitatis partibus decem, adeoque motus ipſius *A* ſit ad motum ipſius *B*, ut ſex ad decem: ponantur motus illis eſſe partium ſex & partium decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus ſeptem vel ſex vel quinque, exiſtente ſemper ſumma partium ſexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoque progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptendecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum una parte progrediatur amiſſis partibus novem, vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem, vel cum una parte regrediatur amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regrediatur cum partibus duabus ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atque ita ſummæ motuum conſpirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ ſemper erunt partium ſexdecim, ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergunt, inveniatur cujuſque velocitas, ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut motus poſt eſt ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; inveniatur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motus partes ſex ante reflexionem ad motus partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quod ſi corpora vel non Sphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoscendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus: dein corporis utriuſque motus (per Corol. II.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendiculararem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendiculararem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex huiusmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia dæmonſtrare.

COROL.

COROLLARIUM IV.

LEGES
MOTUS.

Commune gravitatis Centrum, corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc postea in Lemmate xxii demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quocumque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, adeoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantia centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plarium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus

AXIOMATA, mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciproce proportionales, adeoque centrīs illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum absque motu circulari.

Nam differentiz motuum tendentium ad eandem partem, & summae tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 11 æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

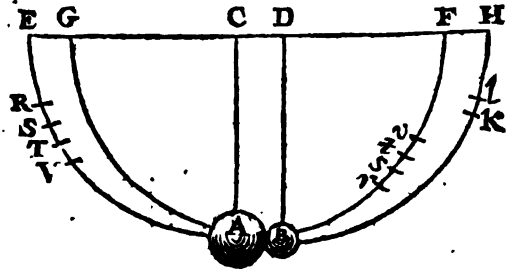
Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergunt omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitibus movendorum corporum)

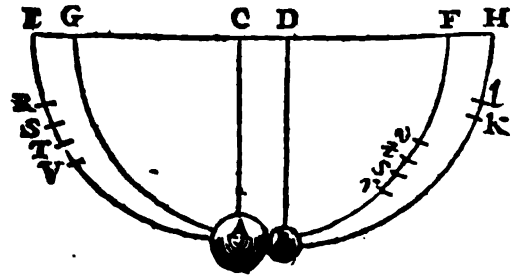
rum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per Legem 11. adeoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se. LEGES
MOTUS.

Scholium.

Haftenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per Leges duas primas & Corollaria duo prima *Galileus* invenit descensum Graviorum esse in duplicata ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aeris resistentiam aliquantulum retardantur. Ab iisdem Legibus & Corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium Pendulorum, suffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his iisdem & Lege tertia *Christophorus Wrennus* Eques Auratus, *Jobannes Wallisus S.T.D.* & *Christianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisus*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum: quod etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum Theoriis ad amissim congruat, habenda est ratio cum resistentiæ aeris, tum etiam vis Elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora *A, B* filis parallelis & æqualibus *AC, BD*, a centrīs *C, D*. His centrīs & intervallis describantur semicirculi *EAF, GBH* radiis *CA, DB* bisecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (subducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum *V*. Est *RV* retardatio ex resistentia aeris; Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta sita in medio, ita scilicet ut *RS* & *TV* æquentur, sitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et ista *ST* exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam proxime. Restituatur corpus *B* in locum suum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*, absque errore sensibili, tanta erit ac



AXIOMATA, si in vacuo cecidisset de loco T . Exponatur igitur hæc velocitas
 SIVE per chordam arcus TA . Nam velocitatem Penduli in puncto infimo esse ut chordam arcus quem cadendo descripsit, Propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum s , & corpus B ad locum k . Tollatur corpus B & inveniat locus v ; a quo si corpus A demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum r , fit st pars quarta ipsius rv sita in medio, ita videlicet ut rs & tv æquantur; & per chordam arcus tA exponatur velocitas quam corpus A proxime post reflexionem habuit in loco A . Nam t erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A , sublata aeris resistantia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus k , ad quem corpus B ascendit, & inveniendus locus l , ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus A in chordam arcus TA (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco A proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus tA , ut habeatur motus ejus in loco A proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcus Bl , ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duosimul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directe occurrebant, quod æquales erant mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque adeo quod actio & reactio semper erant æquales. Ut si corpus A incidebat in corpus B cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus B resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant A cum duodecim partibus & B cum sex, & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, facta detractio partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur partes duodecim, & restabit nihil.



nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis *B* partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de *A* in *B*. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summa motuum conspirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accurate. Difficile erat, tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca *s*, & notare, ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis pilis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

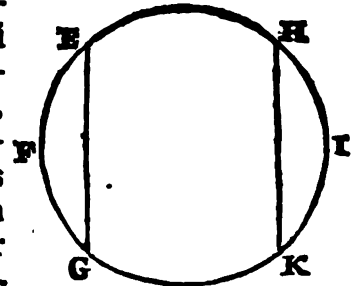
Porro nequis objiciat Regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfecte elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; addo quod Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si Regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda est, debet solummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elasticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus. Certius id affirmabitur de perfecte Elasticis. In imperfecte Elasticis velocitas reditus minuenda est simul cum vi Elasticæ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa, quæ sit ad relativam velocitatem concursus in data ratione. Id in pilis ex lana arte conglomerata & fortiter constricta sic tentavi. Primum demittendo Pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant Experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad relativam velocitatem concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata est, quæ cum experientia plane congruit.



AXIOMATA,
SIVE

In Attractionibus rem sic breviter ostende. Corporibus duobus quibusvis A , B se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur versus corpus alterum B , quam illud alterum B in prius A , obstaculum magis urgebitur possessione corporis A quam pressione corporis B ; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum & obstaculi moveatur in directum in partes versus B , motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debet systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & Ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aqua stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter Terram & ejus partes, mutua est. Secetur Terra FI plano quovis EG in partes duas EGF & EGI ; & æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio HK quod priori EG parallelum sit, pars major EGI secetur in partes duas $EGKH$ & HKI , quarum HKI æqualis sit parti prius abscissæ EGG : manifestum est quod pars media $EGKH$ pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, & quiescet. Pars autem extrema HKI toto suo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam EGF ; ideoque vis qua partium HKI & $EGKH$ summa EGI tendit versus partem tertiam EGF , æqualis est ponderi partis HKI , id est ponderi partis tertiæ EGF . Et propterea pondera partium duarum EGI , EGF in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, Terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent; quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ: sic in movendis Instrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium

virium æstimatæ; sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipol-
 lent ad movenda brachia Libræ; quæ oscillante Librâ sunt reci-
 proce ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est pondera;
 si recta ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt recipro-
 ce ut punctorum a quibus suspenduntur distantia ab axe Libræ; sin-
 planis obliquis aliivve admotis obstaculis impedita ascendunt vel
 descendunt oblique, æquipollent quæ sunt reciproce ut ascensus
 & descensus, quatenus facti secundum perpendicularum: id adeo
 ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochlea seu
 Polyspasto vis manus funem directe trahentis, quæ fit ad pondus
 vel directe vel oblique ascendens ut velocitas ascensus perpendi-
 cularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus.
 In Horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commif-
 sis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum prom-
 vendum & impediendum, si sint reciproce ut velocitates partium
 rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuo. Vis Co-
 chleæ ad premendum corpus est ad vim manus manubrium cir-
 cumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu
 urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pres-
 sum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad
 vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determina-
 tionem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes
 ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendicula-
 res. Ex par est ratio Machinarum omnium.

LEX
 MOTUS.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo ve-
 locitatem augeamus vim, & contra: unde solvitur in omni aptorum
 instrumentorum genere Problema: *Datum pondus data vi moven-
 di*, aliamve datam resistantiam vi data superandi. Nam si Machi-
 næ ita formentur, ut velocitates Agentis & Resistentis sint reci-
 proce ut vires; Agens resistantiam sustinebit: & majori cum velo-
 citatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum
 disparitas, ut vincatur etiam resistantia omnis, quæ tam ex conti-
 guorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex con-
 tinuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum
 ponderibus oriri solet; superata omni ea resistantia, vis redun-
 dans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in parti-
 bus machinæ, partim in corpore resistente producat. Ceterum
 Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tan-
 tum ostendere, quam late pateat quamque certa sit Lex tertia
 MOTUS. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & veloci-
 tate:

AXIOMATA, *tate conjunctim ; & similiter Resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione , cohæsione , pondere , & acceleratione oriundis ; erunt actio & reactio , in omni instrumentorum usu , sibi invicem semper æquales . Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens , ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria .*

DE

MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum , cujus ope sequentia demonstrantur .

LEMMA I.

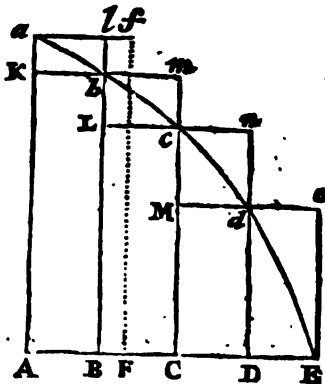
Quantitates , ut & quantitatum rationes , que ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt , & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia , fiunt ultimo æquales .

Si negas ; fiant ultimo inæquales , & sit earum ultima differentia *D* . Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D* : contra hypothesin .

LEMMA

LEMMA II.

Si in Figura quavis $AacE$, rectis Aa , AE & curva acE comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque Ab , Bc , Cd , &c. sub basibus AB , BC , CD , &c. equalibus, & lateribus Bb , Cc , Dd , &c. Figuræ lateri Aa parallelis contenta; & compleantur parallelogramma $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuat, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem Figura inscripta $AKbLcMdD$, circumscripta $AalbmcndoE$, & curvilinea $AabcdE$, sunt rationes equalitatis.



Nam Figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum Kl , Lm , Mn , Do , hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summa Aa , id est, rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) Figura inscripta & circumscripta & multo magis Figura curvilinea intermedia sunt ultimo æquales. *Q.E.D.*

LEMMA III.

Eadem rationes ultimæ sunt etiam rationes equalitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB , BC , CD , &c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $FAaf$. Hoc erit majus quam differentia Figuræ inscriptæ & Figuræ circumscriptæ; at latitudine sua AF in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum Figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis Figura rectilinea, quæ chordis evanescentium

D

centium

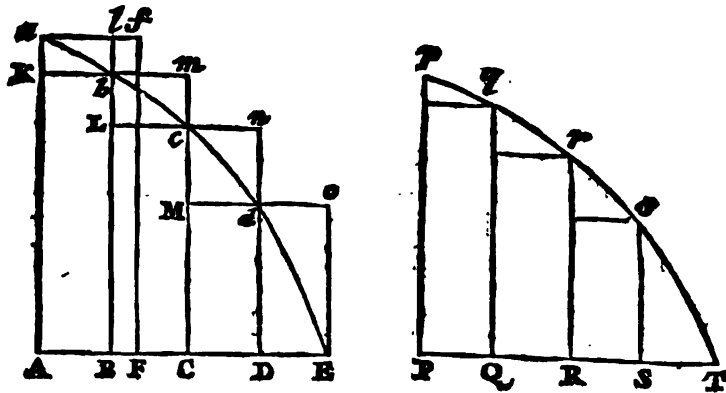
DE MOTU centium arcuum $ab, bc, cd, \&c.$ comprehenditur, coincidit ultimo
CORPORUM cum Figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & Figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ Figuræ ultimæ (quoad perimetros $a c E$.) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

L E M M A IV.

Si in duabus Figuris AacE, PprT, inscribantur (ut supra) due parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una Figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eadem; dico quod Figure due AacE, PprT, sunt ad invicem in eadem illa ratione.



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita Figura ad Figuram; existente nimirum Figura priore (per Lemma III) ad summam priorem, & Figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus Figuris sumantur parallelo-

parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothefin) in ultima ratione partis ad partem.

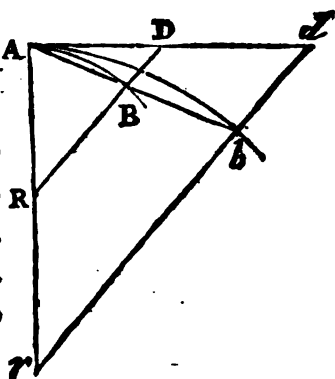
LIBER
PRIMUS

LEMMA V.

Similium Figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & arcæ sunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus AB subtendatur chorda AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continue, tangatur a recta utrinque producta AD; dein puncta A, B ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus BAD, sub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evanescet.



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus AB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothefin.

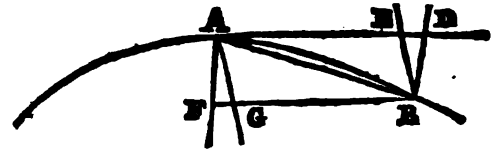
LEMMA VII.

Isdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio equalitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper A & AD ad puncta longinqua b ac d produci, & secanti BD parallela agatur bd. Sitque arcus Ab semper similis arcui AB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus dAb, per Lemma superius, evanescet; adeoque rectæ semper finitæ Ab, Ad & arcus intermedius Ab coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius AB

DE MOTU evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.
CORPORUM Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF , rectam

quamvis AF per A transeun-
tem perpetuo secans in F ,
hæc BF ultimo ad arcum eva-
nescentem AB rationem habe-
bit æqualitatis, eo quod com-
pleto parallelogrammo $AFBD$
rationem semper habet æqualitatis ad AD .



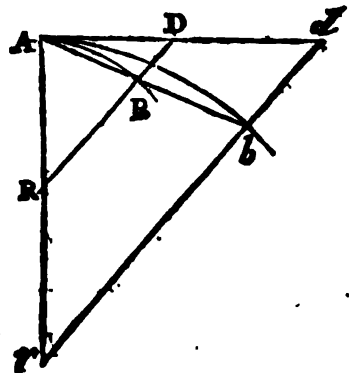
Corol. 2. Et si B & A ducantur plures rectæ BE , BD , AF ,
 AG , secantes tangentem AD & ipsius parallelam BF ; ratio ulti-
ma abscissarum omnium AD , AE , BF , BG ; chordæque & arcus
 AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ul-
timis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR , BR cum arcu AB , chorda AB & tangente AD , triangula tria ARB , ARB , ARD constituunt; dein puncta A , B accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB , AD , AR ad puncta longinqua b , d & r produci, ipsique RD parallela agi rb , & arcui AB similis semper sit arcus Ab . Et coeuntibus punctis A , B , angulus bAd evanescoet, & propterea triangula tria semper finita rAb , rAb , rAd coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia RAB , RAB , RAD fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. Q. E. D.

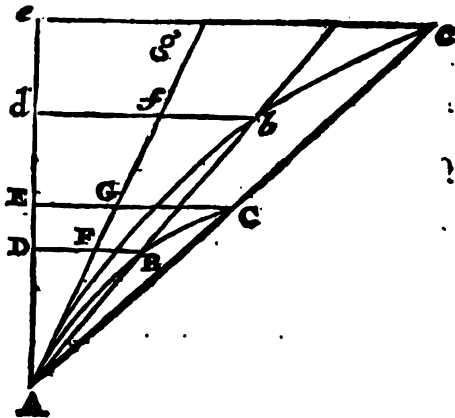


Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta AE & curva ABC positione data se mutuo secent in angulo dato A, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, CE, curvæ occurrentes in B, C; dein puncta B, C simul accedant ad punctum A: dico quod areae triangulorum ABD, ACE erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.

Etesim dum puncta *B, C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur temper *AD* produci ad puncta longinqua *d & e*, ut sint *Ad, Ae* ipsis *AD, AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db, ec* ordinatis *DB, EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB, AC* productis in *b & c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB, EC, db, ec* in *F, G, f, g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B, C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evanescente, coincident areae curvilineæ *Abd, Ace* cum rectilineis *Afd, Age*: adeoque (per Lemma v) erunt in duplicata ratione laterum *Ad, Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areae *ABD, ACE*, & his lateribus latera *AD, AE*. Ergo & areae *ABD, ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD, AE*. Q. E. D.



LEMMA X.

Spatia que corpus urgente quacunque Vi finita describit, sive Vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione Temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD, AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB, EC*; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areae *ABD, ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per Lemma IX.) in duplicata ratione temporum *AD, AE*. Q. E. D.

De Moto *Corol. 1.* Et hinc facile colligitur, quod corporum similes simi-
CORPORUM lium Figurarum partes temporibus proportionalibus describentium
Errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter ap-
plicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum a Fi-
gurarum similibus locis illis ad quæ corpora eadem temporibus
iisdem proportionalibus absque viribus istis pervenirent, sunt ut
quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes
Figurarum similibus partes similiter applicatis generantur, sunt
ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ cor-
pora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus
initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, de-
scripta directe & quadrata temporum inverse.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directe
& vires inverse.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur
inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directe
vel inverse: sensus est, quod prior augetur vel diminuitur in
eadem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si
earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directe vel
inverse; sensus est, quod prima augetur vel minuitur in ratione
quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciproca
augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directe &
C directe & D inverse: sensus est, quod A augetur vel diminuitur

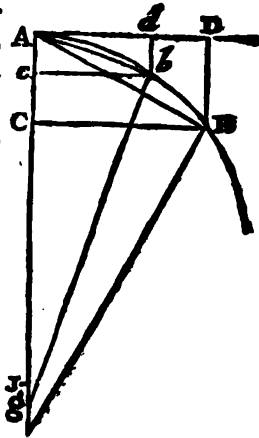
in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$, hoc est, quod A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad
invicem in ratione data.

L E M M A XI.

*Subtensa evanescentes anguli contactus, in curvis omnibus cur-
vaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ul-
timo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.*

Cas. 1. Si arcus ille AB , tangens ejus AD , subtensa anguli con-
tactus ad tangentem perpendicularis BD , subtensa arcus AB . Hæc
subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG ,
concur-

concurrentes in G ; dein accedant puncta D, B, G , ad puncta d, b, g , LIBER
 sitque γ interfectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B PRIMUS,
 accedunt usque ad A . Manifestum est quod distantia $G \gamma$ minor
 esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum
 per puncta ABG, Abg transeuntium) AB quad.
 æquale $AG \times BD$ & Ab quad. æquale $Ag \times bd$, A
 adeoque ratio AB quad. ad Ab quad. componi- c
 tur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd . Sed C
 quoniam $G \gamma$ assumi potest minor longitudine
 quavis assignata, fieri potest ut ratio AG ad
 Ag minus differat a ratione æqualitatis quam
 pro differentia quavis assignata, adeoque ut ra-
 tio AB quad. ad Ab quad. minus differat a ra-
 tione BD ad bd quam pro differentia quavis as-
 signata. Est ergo, per Lemma 1, ratio ultima
 AB quad. ad Ab quad. æqualis rationi ultimæ
 BD ad bd . Q. E. D.



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo G
 quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius,
 adeoque eadem ac AB quad. ad Ab quad. Q. E. D.

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, sed recta BD ad da-
 tum punctum convergente, vel alia quacunque lege constituatur;
 tamen anguli D, d communi lege constituti ad æqualitatem semper
 vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia qua-
 vis assignata, adeoque ultimo æquales erunt, per Lem. 1, & pro-
 pterea lineæ BD, bd sunt in eadem ratione ad invicem ac prius.
 Q. E. D.

Corol. 1. Unde cum tangentes AD, Ad , arcus AB, Ab , & eo-
 rum sinus BC, bc fiant ultimo chordis AB, Ab , æquales; erunt
 etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ BD, bd .

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum
 sagittæ quæ chordas bisecant & ad datum punctum convergent.
 Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ BD, bd .

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicata ratione temporis quo
 corpus data velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, Adb sunt ultimo in triplica-
 ta ratione laterum AD, Ad , inque sesquuplicata laterum DB, db ;
 utpote in composita ratione laterum AD , & DB , Ad & db exi-
 stentia. Sic & triangula ABC, Abc sunt ultimo in triplicata ratio-
 ne laterum BC, bc . Rationem vero sesquuplicatam voco triplicatæ
 subduplicatam, quæ nempe ex simplici & subduplicata componitur,
 quamque alias sesquialteram dicunt. Corol.

DE MOTU *Corol. 5.* Et quoniam DB , db sunt ultimo parallelæ & in dupli-
CORPORUM catura ratione ipsarum AD , Ad : erunt areæ ultimæ curvilinearæ
 ADB , Abb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulo-
rum rectilinearum ADB , Abb ; & segmenta AB , Ab partes ter-
tiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta e-
runt in triplicata ratione tum tangentium AD , Ad ; tum chorda-
rum & arcuum AB , Ab .

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec in-
finite majorem esse angulis contactuum, quos Circuli continent cum
tangentibus suis, nec infinite minorem; hoc est curvaturam
ad punctum A , nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu
intervallum Af finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut
 AD^3 : quo in casu Circulus nullus per punctum A inter tangentem
 AD & curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit
infinite minor Circularibus. Et simili argumento si fiat DB succes-
sive ut AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 , &c. habebitur series angulorum
contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infi-
nite minor priore. Et si fiat DB successive ut $AD^{\frac{1}{2}}$, $AD^{\frac{1}{3}}$,
 $AD^{\frac{1}{4}}$, $AD^{\frac{1}{5}}$, $AD^{\frac{1}{6}}$, $AD^{\frac{1}{7}}$, &c. habebitur alia series infinita an-
gulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum Cir-
cularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite ma-
jor priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series
utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inferi, quo-
rum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si
inter terminos AD^2 & AD^1 inseratur series $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$,
 $AD^{\frac{7}{2}}$, $AD^{\frac{9}{2}}$, $AD^{\frac{11}{2}}$, $AD^{\frac{13}{2}}$, $AD^{\frac{15}{2}}$, $AD^{\frac{17}{2}}$, &c. Et rursus
inter binos quosvis angulos hujus seriei inferi potest series nova an-
gulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium.
Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demon-
strata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas &
contenta. Præmissi vero hæc Lemmata, ut effugerem tædium de-
ducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum,
ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per
methodum Indivisibilium. Sed quoniam durior est Indivisibilium hy-
pothesis, & propterea methodus illa minus Geometrica censetur;
malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum
eva-

evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum Indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemma-tum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatuum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendere posset nullam esse corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatuum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatuum non antequam evanescent, non postea, sed quacum evanescent. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri & minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatuum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatuum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex Indivisibilibus, contra quam *Euclides* de Incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc Objectio falsæ innititur hypothese. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatuum ultimarum, sed limites ad quos quantitatuum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero

DE MOTU transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in
CORPORUM infinitum. Res clarius intelligitur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dantur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, si quando facili rerum conceptui consulens dixerò quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

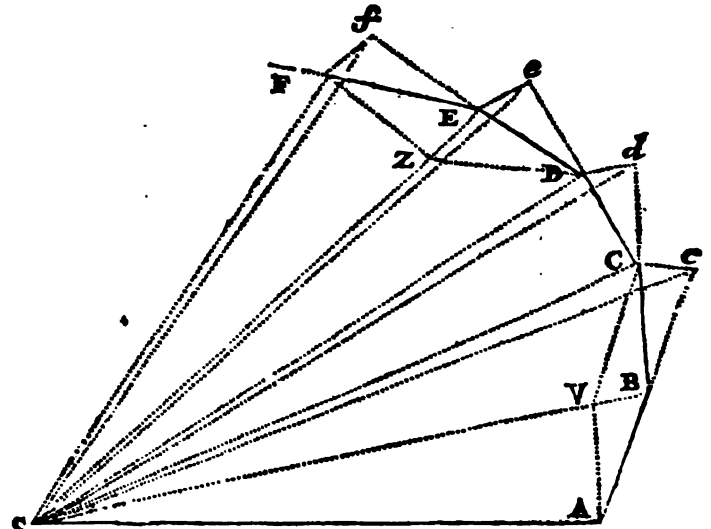
S E C T I O II.

De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam AB . Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad c , (per Leg. 1.) describens lineam Bc æqualem ipsi AB ; adeo ut radiis AS, BS, cS ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ $ASB, BS c$. Verum ubi corpus venit ad B , agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta Bc declinet & pergat in recta BC . Ipsi BS parallela agatur cC , occurrens BC in C ; & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1.) reperietur in C , in eodem



eodem plano cum triangulo ASB . Junge SC ; & triangulum SBC , ob parallelas SB, Cc , æquale erit triangulo Sbc , atque adeo etiam triangulo SAB . Simili argumento si vis centripeta successive agat in C, D, E , &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD, DE, EF , &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC , & SDE ipsi SCD , & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales aræ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS, SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF , (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: adeoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indefinenter; aræ vero quævis descriptæ $SADS, SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q.E.D.*

LIBER
PRIMUS

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciproce ut perpendicularum a centro illo in Orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E , ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF ; & hæ bases sunt reciproce ut perpendiculara in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successive descriptorum chordæ AB, BC compleantur in parallelogrammum $ABC\mathcal{U}$, & hujus diagonalis $B\mathcal{U}$ in ea positione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producat utrinque; transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3 Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma $ABC\mathcal{U}, DEFZ$; vires in B & E sunt ad invicem in ultima ratione diagonalium $B\mathcal{U}, EZ$, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum Corol. 1.) ex motibus $Bc, B\mathcal{U}$ & Ef, EZ : atqui $B\mathcal{U}$ & EZ ipsi Cc & Ff æquales, in Demonstratione Propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B & E , ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbis curvos sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bifecant

De Motu ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ sagittæ sunt se-
CORPORUM misses diagonalium de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eadem sunt ad vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum Parabolicorum quos projectilia eodem tempore describunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum Corol. iv, ubi plana in quibus corpora moventur, una cum centris virium quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano descripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima $SAB, SBC, SCD,$ &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi cC (per Prop. xl. Lib. 1 Elem. & Leg. 11.) hoc est, secundum lineam BS ; & in loco C secundum lineam ipsi dD parallelam, hoc est, secundum lineam SC , &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S . *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est si ve quiescat superficies in qua Corpus describit figuram rectilineam, si ve moveatur eadem una cum corpore, figura descripta, & puncto suo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In Spatiis vel Mediis non resistantibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radorum; sed inde declinant in consequentia seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In Mediis etiam resistantibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant a concursu radorum versus plagam in quam fit motus.

Scholium.

*Scholium.*LIBER
PRIMUS

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat perpetuo secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano sui motus; sed quantitatem superficiæ descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L* & corpus alterum *T*: & (per Legum Corol. vi.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum *T* sibi met ipsi jam relictum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id est, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per Theor. 11.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad

DE MOTU **CORPORUM** corpus alterum T , erunt areae illae temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus L radio ad alterum corpus T ducto describit areas quae, cum temporibus collatae, sunt valde inaequales; & corpus illud alterum T vel quiescit vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetae ad corpus illud alterum T tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quae restat post subtractionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

Scholium.

Quoniam aequabilis arearum descriptio Index est Centri, quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo & in orbita sua retinetur: quidni usurpemus in sequentibus aequabilem arearum descriptionem, ut Indicem Centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quae diversos circulos aequabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circularum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circularum radios.

Tendunt hae vires ad centra circularum per Prop. 11. & Corol. 11. Prop. 1; & sunt inter se ut arcuum aequalibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per Corol. 1v. Prop. 1; hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circularum applicata per Lem. VII: & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis aequalibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circularum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur, cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetae sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circularum: hoc est, ut cum Geometris loquar, vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse.

Corol.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica sint in ratione composita ex ratione radorum directe & ratione velocitatum inverse, vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; hoc est, in ratione composita ex ratione radorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

LIBER
PRIMUS.

Corol. 3. Unde, si tempora periodica æquentur & propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. Si & tempora periodica & velocitates sint in ratione subduplicata radorum; æquales erunt vires centripetæ inter se: & contra.

Corol. 5. Si tempora periodica sunt ut radii & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica sint in ratione sesquuplicata radorum & propterea velocitates reciproce in radorum ratione subduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radorum: & contra.

Corol. 7. Et universaliter, si tempus periodicum sit ut Radii R potestas quælibet R^n , & propterea velocitatis reciproce ut Radii potestas R^{n-1} ; erit vis centripeta reciproce ut Radii potestas R^{2n-1} : & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum a centris pro radiis usurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvens tempore quovis describit, medius est proportionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus (ut sensum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Halleus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrefcentem in duplicata ratione distantiarum a centris, decrevi fusius in sequentibus exponere.

Porro

DE MOTU
CORPORUM Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea Gravitatis. Nam si corpus in circulo Terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem, ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. IX. Et hujusmodi propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu de *Horologio Oscillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quotcunque. Et si corpus, in polygони lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit: ut ejus velocitas: adeoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium: adeoque, si polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, qua corpus urget circulum: & huic æqualis est vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

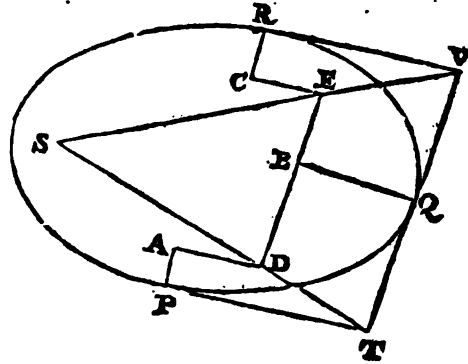
PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

Data quibuscunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT, TQ, VR , in punctis totidem P, Q, R , concurrentes in $T & V$. Ad tangentes erigantur perpendiculara PA, QB, RC , velocitati bus corporis in punctis illis P, Q, R , a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est, ita ut sit PA ad QB , ut velocitas in Q ad velocitatem in P , & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q . Per perpendicularorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentes in $D & E$: Et actæ TD, VE concurrent in centro quæsito S .

Nam

Nam perpendiculara a centro S in tangentes PT , QT demissa (per Corol. 1 Prop. 1.) sunt reciproce ut velocitates corporis in punctis P & Q ; adeoque per constructionem ut perpendiculara AP , BQ directe, id est ut perpendiculara a puncto D in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta S , D , T sunt in una recta. Et simili argumento



puncta S , E , V sunt etiam in una recta; & propterea centrum S in concursu rectarum TD , VE versatur. *Q.E.D.*

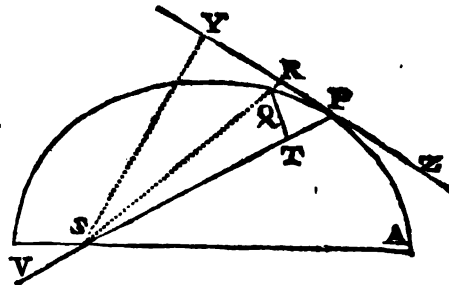
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in Orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directe & tempus bis inverse.

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4. Prop. 1.) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per Corol. 2 & 3. Lem. XI.) adeoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q.E.D.*

Idem facile demonstratur etiam per Corol. 4. Lem. X.

Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S describat lineam curvam APQ , tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P , & ad tangentem ab alio quovis Curvæ puncto Q agatur QR distantia SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam illam SP : vis centripeta erit reciproce ut solidum SP quad. \times QT quad.



$\frac{QR}{QR}$ si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q . Nam QR æqualis est

DE MOTU CORPORUM est sagittæ dupli arcus QP , in cuius medio est P , & duplum trianguli SQP five $SP \times QT$, tempore quo arcus iste duplus describitur proportionale est, ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut solidum $\frac{STq \times QPq}{QR}$, si modo ST perpendicularum sit a centro virium in Orbis tangentem PR demissum. Nam rectangula $ST \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si Orbis vel circulus est, vel angulum contactus cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum contactus P , & si PV chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum $STq \times PV$ est. Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$.

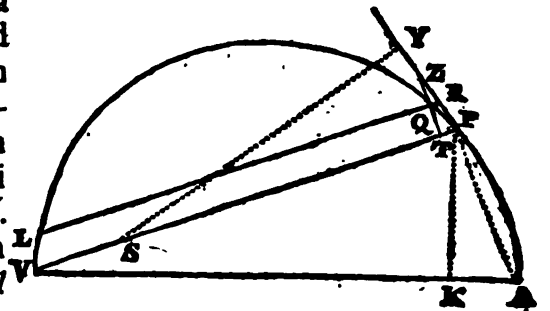
Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendicularum ST per *Corol. 1 Prop. 1.*

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ , & in ea detur etiam punctum S ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $STq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia Circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Esto Circuli circumferentia $VQP A$, punctum datum ad quod vis ceu ad centrum suum tendit S , corpus in circumferentia latum P , locus proximus in quem movebitur Q , & circuli tangens ad locum priorem PRZ . Per punctum S ducatur chorda PV , & acta circuli diametro $V A$ jungatur AP , & ad SP demittatur perpendicularum QT , quod productum occurrat tangenti PR in Z ,



DE MOTU
CORPORUM

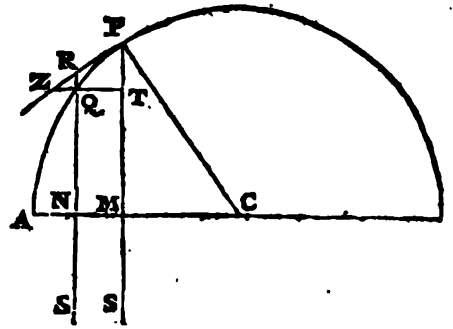
id est, ut $SP \times RP q$ ad $\frac{SP \text{ cub.} \times PV \text{ cub.}}{PT \text{ cub.}}$ five (ob similia triangula PSG , TPV) ad $SG \text{ cub.}$

Corol. 3. Vis, qua corpus P in Orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RP q$ contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro S & quadrato distantiae ejus a secundo virium centro R ad cubum rectae SG quae a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis a secundo virium centro distantiae RP parallela est. Nam vires in hoc orbe, ad ejus punctum quodvis P , eadem sunt ac in Circulo ejusdem curvaturæ.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in circulo PQA : ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetae tendentis ad punctum adeo longinquum S , ut lineae omnes PS , RS ad id ductae, pro parallelis haberi possint.

A Circuli centro C agatur femidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N , & jungatur CP . Ob similia triangula CPM , PZT & RZQ est $CP q$ ad $PM q$ ut $PR q$ ad $QT q$ & ex natura Circuli $PR q$ æquale est rectangulo $QR \times RN \times QN$ si- ve coeuntibus punctis P , Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo est $CP q$ ad $PM \text{ quad.}$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT \text{ quad.}$ adeoque $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$



æquale $\frac{2PM \text{ cub.}}{CP \text{ quad.}}$, & $\frac{QT \text{ quad.} \times SP \text{ quad.}}{QR}$ æquale $\frac{2PM \text{ cub.} \times SP \text{ qu.}}{CP \text{ quad.}}$.

Est ergo (per Corol 1 & 5. Prop. v.1.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM \text{ cub.} \times SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$ hoc est neglecta ratione determinata $\frac{2SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$

reciproce ut $PM \text{ cub.}$ Q. E. I.

Idem facile colligitur etiam ex Propositione præcedente.

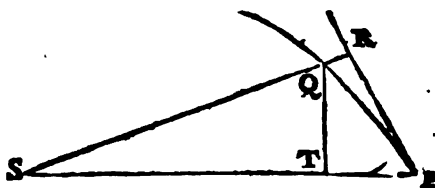
Scho-

Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in Spirali PQS secante radios omnes SP, SQ, &c. in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis.



Detur angulus indefinite parvus PSQ , & ob datos omnes angulos dabitur specie figura $SPQRT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$ estque

$\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ ut QT , hoc est ut SP . Mutetur jam utcunque angulus PSQ , & recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius PR vel QT . Ergo manebit $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut SP . Quare $\frac{QT \text{ quad.} \times SP \text{ quad.}}{QR}$ est ut $SP \text{ cub.}$ adeoque (per Corol. I & 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut cubus distantia SP . *Q.E.I.*

Idem aliter.

Perpendiculum ST in tangentem demissum, & circuli Spiralem tangentis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus, ideoque $SP \text{ cub.}$ est ut $ST \text{ quad.} \times PV$, hoc est (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia, circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta, esse inter se equalia.

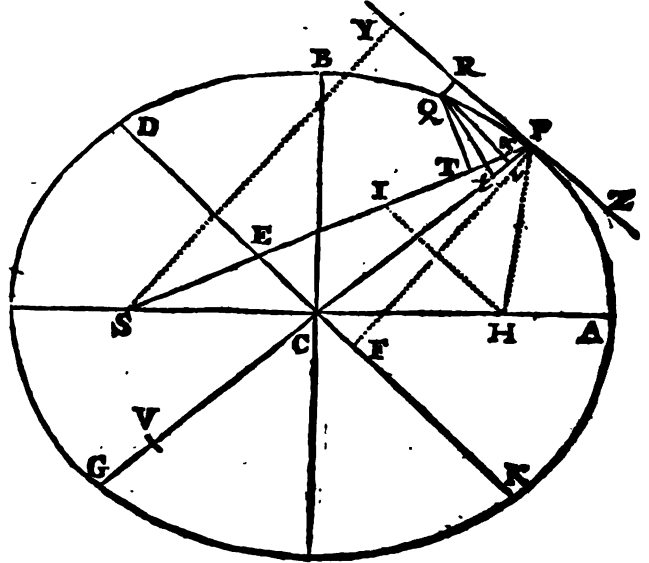
Constat ex Conicis.

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto CA, CB semiaxes Ellipseos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendiculara ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP ; & si compleatur parallelogrammum

$QvPR$, erit (ex Conicis) PvG ad Pv quad. ut PC quad. ad CD quad. & (ob similia triangula Qvt, PCF) Qv quad. est ad Qt quad. ut PC quad. ad PF quad. & conjunctis rationibus, PvG ad Qt quad. ut PC quad. ad CD quad. & PC quad. ad PF quad. id est, vG ad $\frac{Qt \text{ quad.}}{Pv}$ ut PC quad.



ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non, punctis P & Q coeuntibus, $2PC$ pro vG , & ductis extremis & mediis in se mutuo, fiet $\frac{Qt \text{ quad.} \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia PC . $Q.E.I.$

Idem aliter.

In PG ab altera parte puncti t posita intelligatur tu æqualis ipsi tv ; deinde cape uV quæ sit ad vG ut est DC quad. ad PC quad. Et quoniam ex Conicis est Qv quad. ad PvG , ut DC quad. ad PC quad.: erit Qv quad. æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chordæ

dæ arcus PQ erit æquale rectangulo VPv ; adeoque Circulus qui tangit Sectionem Conicam in P & transit per punctum Q , transibit etiam per punctum V . Coeant puncta P & Q , & hic circulus ejusdem erit curvaturæ cum sectione conica in P , & PV æqualis erit

$\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis qua corpus P in Ellipsi revolvitur erit reci-

proce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in PFq) directe ut PC . *Q.E.I.*

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro Ellipseos: & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique Ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Ellipsis universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipsis similibus æqualia sunt per Corol. 3. & 8, Prop. IV: in Ellipsis autem communem habentibus axem majorem, sunt ad invicem ut Ellipseon areæ totæ directe & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est; ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse; hæc est, ut axes illi minores directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverse; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est Theorema *Galilei*, Et si conica sectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam versa. Et quemadmodum in Circulo vel Ellipsi, si vires tendunt ad centrum figuræ in Abscissa positum, hæ vires augendo vel diminuendo Ordinatæ in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis Ordinarum ad Abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica manent æqualia: sic etiam in figuris universis, si Ordinatæ augeantur vel diminuuntur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in Abscissa positum tendentes a binis quibusvis figurarum locis, ad quæ terminantur Ordinatæ correspondentibus Abscissarum punctis insistentes, augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

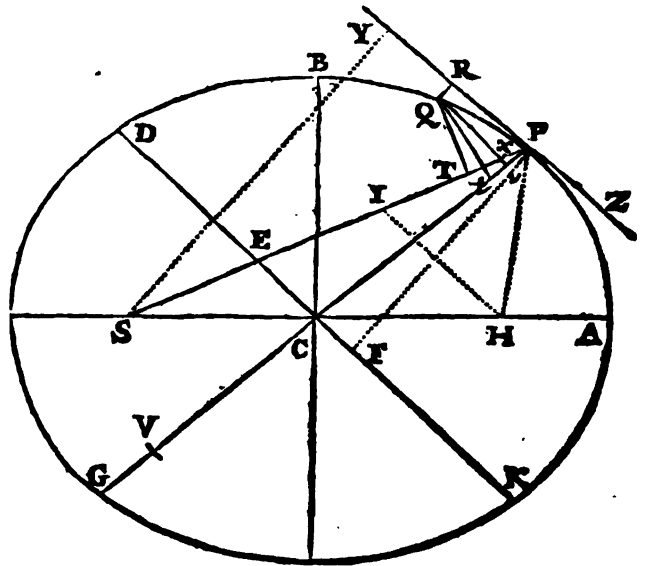
S E C T I O III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI

Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Esto Ellipseos umbilicus S . Agatur SP secans Ellipseos tum diametrum DK in E , tum ordinatim applicatam Qv in x , & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC , eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquentur ES, EI , adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI , id est (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH , quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicu-



laris QT , & Ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BCquad.}{AC}$) dicto L , erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv , id est ut PE seu AC ad PC ; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv ; & GvP ad $Qvquad.$ ut $PCquad.$ ad $CDquad.$; & (per Corol. 2 Lem. vii.) $Qvquad.$ ad $Qxquad.$ punctis, Q & P coeuntibus, est ratio æqualitatis; & $Qxquad.$ seu $Qvquad.$ est ad $QTquad.$ ut $EPquad.$ ad $PFquad.$, id est ut $CAquad.$ ad $PFquad.$ sive (per Lem. xii.) ut $CDquad.$ ad $CBquad.$ Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad $QTquad.$ ut $AC \times L \times PCq. \times CDq.$ seu $2CBq. \times PCq. \times CDq.$ ad $PC \times Gv \times CDq. \times CBq.$ sive ut $2PC$ ad Gv .

Sed,

Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquantur $2PC$ & Gv . Ergo & his LIBER
PRIMUS. proportionalia $L \times QR$ & QT quad. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$ & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$. id est, reciproce in ratione duplicata distantiz SP . *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum Ellipseos tendens qua corpus P in Ellipfi illa revolvi potest, sit (per Corol. 1 Prop. x) ut CP distantia corporis ab Ellipseos centro C ; ducatur CE parallela Ellipseos tangenti PR : & vis qua corpus idem P , circum aliud quodvis Ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E , erit ut $\frac{PE cub.}{SPq}$ (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q. E. I.*

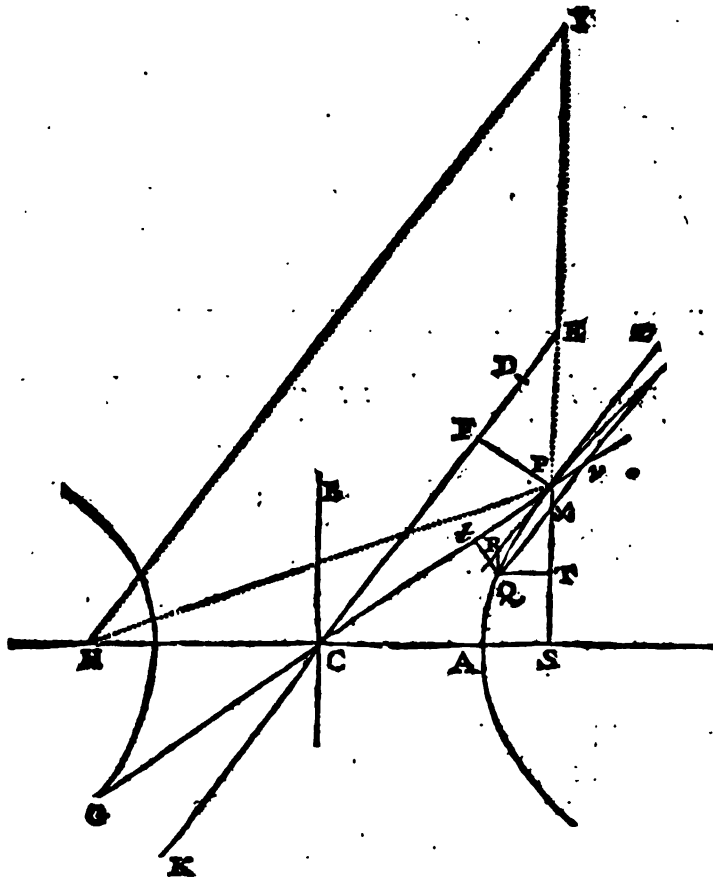
Eadem brevitae qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus ceteros demonstratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur Lex vis centripete tendentis ad umbilicum figure.

Sunto CA, CB semi-axes Hyperbolæ; PG, KD diametri conjugatæ; PF, Qf perpendicularia ad diametros; & Qp ordinatim applicata ad diametrum GP . Agatur SP secans cum diametrum DK in E , tum ordinatim applicatam Qv in x , & compleatur parallelogrammum $QRpv$. Patet EP æqualem esse semiaxi transverso AC , eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH , æquentur ES, EI ; adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI , id est (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH , quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT . Et Hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L , erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv , id est, ut PE seu AC ad PC ; Et $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv ;

DE MOTU Gv ; & GvP ad Qu quad. ut PCq . ad CDq . & (per Corol. 2. CORPORAUM Lem. VII.) Qu quad. ad Qx quad. punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx quad. seu Qu quad. est ad QTq . ut EPq . ad PFq . id est ut CAq . ad PFq . sive (per Lem. XII) ut CDq . ad CBq . & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq . ut $AC \times L \times PCq \times CDq$ seu $2 CBq \times PCq \times CDq$. ad $PC \times Gv \times CDq \times CB$ quad. sive ut $2 PC$ ad Gv . Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2 PC$ & Gv . Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq . æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$. & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. I,



& § Prop VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est reciproce in ratione duplicata distantiae SP . Q. E. I.

Idem

Idem aliter.

Inveniatur vis quæ tendit ab Hyperbolæ centro C . Prodiit hæc distantia CP proportionalis. Inde vero (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE cub}{SP q}$, hoc est, ob datam PE , reciproce ut $SP q$. *Q. E. I.*

Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam versa, movebitur in Hyperbola conjugata.

LEMMA XIII.

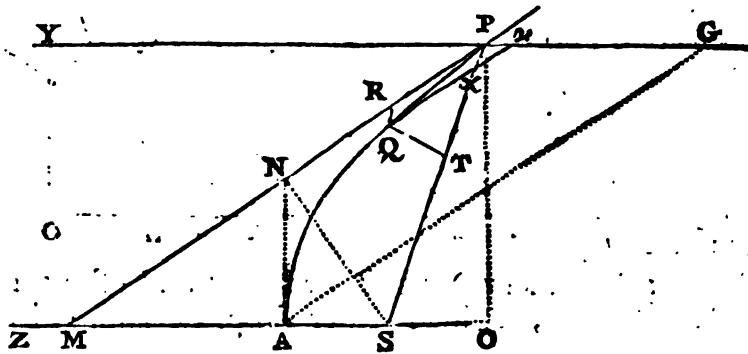
Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, est quadruplum distantia verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

LEMMA XIV.

Perpendicularum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur; medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim AQP Parabolæ, S umbilicus ejus, A vertex principa-

lis P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M , & SN , linea perpendicularis



ab umbilico in tangentem. Jungatur AN , & ob æquales MS & SP , MN & NP , MA & AO , parallelæ erunt rectæ AN & OP , & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A & simile triangulis æqualibus SNM , SNP . Ergo PS est ad SN , ut SN ad SA . *Q. E. D.*

Corol. 1. PSq est ad SNq ut PS ad SA .

Corol. 2. Et ob datam SA , est SNq ut PS .

Corol. 1. Ex tribus novissimis Propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P , secundum lineam quamvis rectam PR , quacunq; cum velocitate exeat de loco P , & vi centripeta quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico & puncto contactus & positione tangentis, describi potest sectio Conica quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: & Orbes duo se mutuo tangentes, eadem vi centripeta describi non possunt.

Corol. 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco suo P , ea sit, qua lineola PR in minima aliqua temporis particula describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR : movebitur hoc corpus in Conica aliqua sectione, cujus latus rectum principale est quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$ quæ ultimo fit ubi lineolæ PR , QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipsin, & casum excipio ubi corpus recta descendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiae locorum a centro; dico quod Orbium Latera recta principalia sunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore describunt.

Nam, per Corol. 2. Prop. XIII, Latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q . Sed lineola minima QR , dato tempore, est ut vis centripeta generans, hoc est (per Hypothesin) reciproce ut SPq . Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$. hoc est, latus rectum L in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. Q.E.D.

Corol.

DE MOTU
CORPORUM

Corol. Hinc Ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$ quæ dato tempore describitur ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Isdem positis, dico quod Tempora periodica in Ellipsis sunt in ratione sesquuplicata majorum axium.

Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & sesquuplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Prop. XIV. est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquuplicata ratio majoris axis æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsis eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

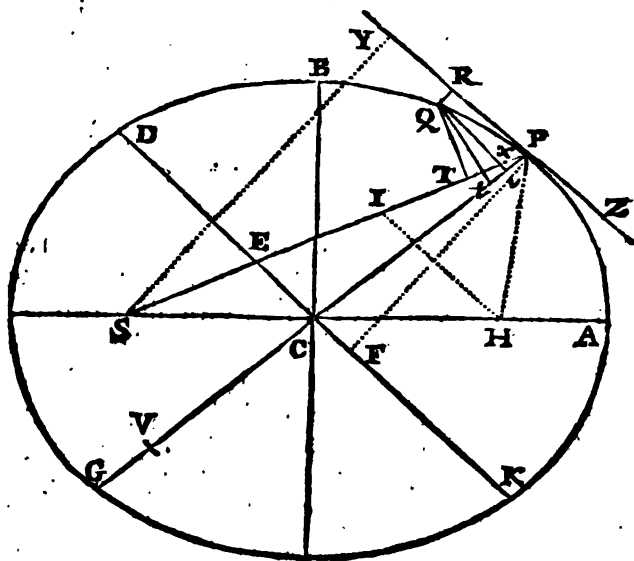
PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Isdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant Orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod Velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendicularium inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendicularum ST & velocitas corporis P erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{STq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens PR , id est (ob proportionales PR ad QT & SP ad ST) ut $\frac{SP \times QT}{ST}$, sive ut ST reciproce & $SP \times QT$ directe; estque

$$SP \times QT$$

SPXQT ut area dato tempore descripta, id est, per Prop. XLV. LIBER PRIMUS.
 in subduplicata ratione lateris recti. Q. E. D.



Corol. 1. Latera recta principalia sua in ratione composita ex duplicata ratione perpendicularium & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendiculara jam sunt ipsae distantiae.

Corol. 3. Ideoque velocitas in Conica sectione, in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in Circulo in eadem a centro distantia, in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsis gyrantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem quae corporum gyrantium in Circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol. 6. Prop. iv.) reciproce in subduplicata ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semi-axes minores; & hi sunt ut mediae proportionales inter distantias & latera recta. Componatur haec ratio inverse cum subduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio subduplicata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diversis, quarum latera

DE MOTU latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem.
CORPORUM

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in subduplicata ratione distantiae corporis ab umbilico figuræ; in Ellipsi magis variatur, in Hyperbola minus, quam in hac ratione. Nam (per *Corol. 2. Lem. xiv.*) perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in subduplicata ratione distantiae. In Hyperbola perpendicularum minus variatur, in Ellipsi magis.

Corol. 7. In Parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam, est ad velocitatem corporis revolventis in Circulo ad eandem a centro distantiam, in subduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Propositionis quartæ, servatur eadem proportio in omnibus distantis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in Circulo in distantia dimidii lateris recti principalis Sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per *Corol. 6. Prop. iv.*) velocitas gyrantis in hoc Circulo sit ad velocitatem gyrantis in Circulo quovis alio, reciproce in subduplicata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in Circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

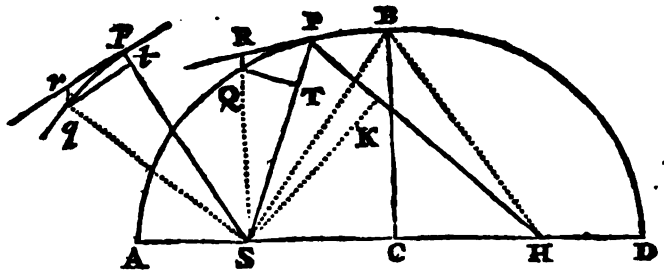
PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantie locorum a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur Linea quam corpus describit, de loco dato, cum data velocitate, secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea sit qua corpus *p* in orbita quavis data *pq* gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*.

De

De loco \mathcal{P} , secundum lineam $\mathcal{P}R$, exeat corpus \mathcal{P} , cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coni-
sectionem $\mathcal{P}Q$. Hanc igitur recta $\mathcal{P}R$ tanget in \mathcal{P} . Tangat itidem
recta aliqua $p r$ Orbitam $p q$ in p , & si ab S ad eas tangentes demitti
intelligantur perpendiculara, erit (per Corol. i. Prop. xvi.) latus rec-
tum principale Conisectionis ad latus rectum principale Orbitæ, in
ratione composita ex duplicata ratione perpendicularorum & dupli-
cata ratione velocitatum, atque adeo datur. Sit istud L . Da-
tur præterea Coni-
sectionis umbilicus S .



Anguli RPS comple-
mentum ad duos
rectos fiat angulus
 RPH , & dabitur
positione linea PH ,
in qua umbilicus alter
 H locatur. De-
missio ad PH perpen-
diculo SK , erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC , & erit

$SPq. - 2KPH + PHq. = SHq. = 4CHq. = 4BHq. - 4BCq. =$
 $\frac{SP + PH}{L} \times SP + PH = SPq. + 2SPH + PHq.$
 $- L \times SP + PH.$ Addantur utrobique $2KPH - SPq. - PHq.$
 $+ L \times SP + PH$, & fiet $L \times SP + PH = 2SPH + 2KPH$,
seu $SP + PH$, ad PH , ut $2SP + 2KP$ ad L . Unde datur PH
tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in \mathcal{P}
velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$,
jacebit PH ad eandem partem tangentis $\mathcal{P}R$ cum linea $\mathcal{P}S$, adeo-
que figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis S, H , & axe princi-
pali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta sit corporis velocitas ut latus
rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit,
& propterea figura erit Parabola axem habens SH parallelum lineæ
 PK , & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum veloci-
tate de loco suo \mathcal{P} exeat, capienda erit longitudo PH ad alte-
ram partem tangentis, adeoque tangente inter umbilicos pergente,
figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differen-
tiz linearum SP & PH , & inde dabitur. *Q. E. I.*

Corol. i. Hinc in omni Conisectione ex dato vertice principali \mathcal{D} ,
latere recto L , & umbilico S , datur umbilicus alter H capiendo $\mathcal{D}H$,
ad $\mathcal{D}S$ ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum &
 $4\mathcal{D}S$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L ,
H in

DE MOTU in casu hujus Corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4DS$ ad L &
 CORPORUM divisim DS ad DH ut $4DS - L$ ad L .

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D , invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam DS , in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in Circulo, ad distantiam DS , gyrantis (per *Corol. 3. Prop. XVI.*) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

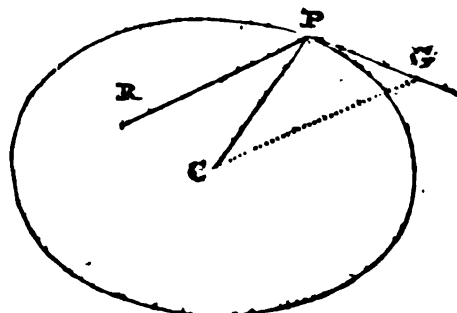
Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex Orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest Orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsu loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.

Si corpus P vi centripeta ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque Sectionis conicæ cujus centrum sit C , & requiratur Lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & Orbis tangenti PG occurrens in G ; & vis illa (per *Corol. 1 & Schol. Prop. x.*, & *Corol. 3. Prop. VII.*) erit ut CG cub.

RP quad.

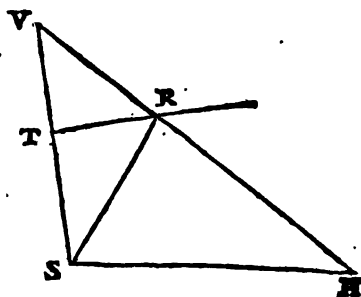


SECTIO IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab Ellipseos vel Hyperbolæ cujuscvis umbilicis duobus S, H, ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ SV, HV, quarum una HV æqualis sit axi principali figuræ, altera SV a perpendicularo TR in se demisso bisecetur in T; perpendicularum illud TR sectionem Conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit HV æqualis axi principali figuræ.



Secet enim perpendicularum TR rectam HV productam, si opus fuerit, in R ; & jungatur SR . Ob æquales TS , TV , æquales erunt & rectæ SR , VR & anguli TRS , TRV . Unde punctum R erit ad Sectionem Conicam, & perpendicularum TR tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

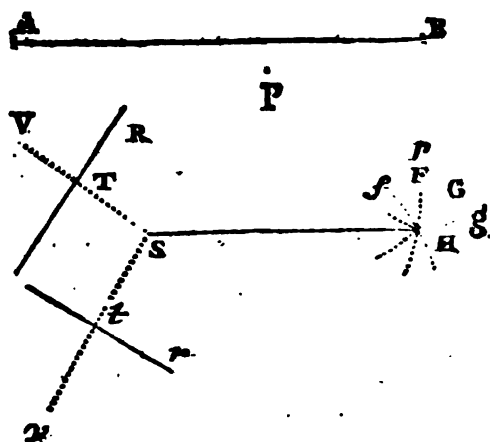
Datis umbilico & axibus principalibus describere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis Trajectoriæ cujuscvis; P punctum per quod Trajectoria debet transire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB - SP$, si orbita sit ellipsis, vel $AB + SP$, si ea sit Hyperbola, describatur circulus HG . Ad tangentem TR demittatur perpendicularum ST , & producatur idem ad V , ut sit TV æqualis ST ; centroque V & intervallo AB describatur circulus FH . Hac

DE MOTU methodo five dentur duo puncta P, p , five duæ tangentes TR, tr , five punctum P & tangens TR , describendi sunt circuli duo.

CORPORUM

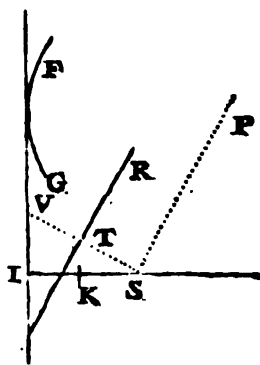
Sit H eorum interfectio communis, & umbilicis S, H , axe illo dato describatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria descripta (eo quod $PH + SP$ in Ellipsi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P , & (per Lemma superius) tanget rectam TR . Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p , vel tanget rectas duas TR, tr . Q.E.F.



PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione dadas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens Trajectoriæ describendæ. Centro P , intervallo PS describe circulum FG . Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST , & produc eam ad V , ut sit TV æqualis ST . Eodem modo describendus est alter circulum fg , si datur alterum punctum p ; vel inveniendum alterum punctum v , si datur altera tangens tr ; dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg si dantur duo puncta P, p , vel transeat per duo puncta V, v , si dantur duæ tangentes TR, tr , vel tangat circulum FG & transeat per punctum V , si datur punctum P & tangens TR . Ad FI demitte perpendicularem SI , eamque biseca in K ; & axe SK , vertice principali K describatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola, ob æquales SK & IK , SP & FP , transibit per punctum P ; & (per Lemmatis xiv. Corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR , tanget rectam TR . Q.E.F.



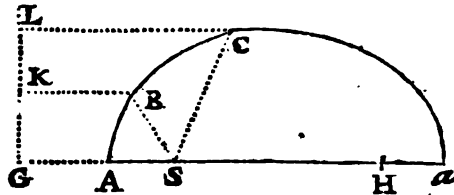
PRO-

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

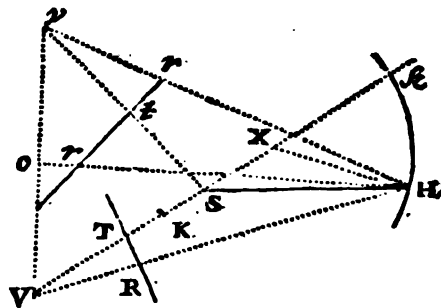
LIBER PRIMUS.

Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis specie datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.

Caf. 1. Dato umbilico S , describenda sit Trajectoria ABC per puncta duo B, C . Quoniam Trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape KB ad BS , & LC ad CS . Centris B, C , intervallis BK, CL , describe circulos duos, & ad rectam KL , quæ tangat eosdem in K & L , demitte perpendicularum SG , idemque feci in A & a , ita ut sit GA ad AS & Ga ad aS ut eff KB ad BS , & axe Aa , verticibus A, a , describatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter Figuræ descriptæ, & cum sit GA ad AS ut Ga ad aS , erit divisim $Ga - GA$ seu Aa ad $aS - AS$ seu SH in eadem ratione, adeoque in ratione quam habet axis principalis Figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea Figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. Cumque sint KB ad BS & LC ad CS in eadem ratione, transibit hæc. Figura per puncta B, C , ut ex Conicis manifestum est.



Caf. 2. Dato umbilico S , describenda sit Trajectoria quæ rectas duas TR, tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendiculara ST, St & produc eadem ad V, v , ut sint TV, tv æquales TS, tS . Biseca Vv in O , & erige perpendicularum infinitum OH , rectamque VS infinite productam feci in K & k ita, ut sit VK ad KS & Vk ad kS ut est Trajectoriæ describendæ axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro Kk describatur circulus secans OH in H ; & umbilicis S, H , axe principali ipsam VH æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Nam biseca Kk in X , & junge HX, HS, HV, Hv . Quoniam est VK ad KS ut Vk ad kS ; & composite ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; divisimque:

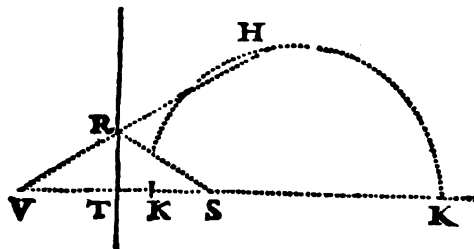


H 3

ut

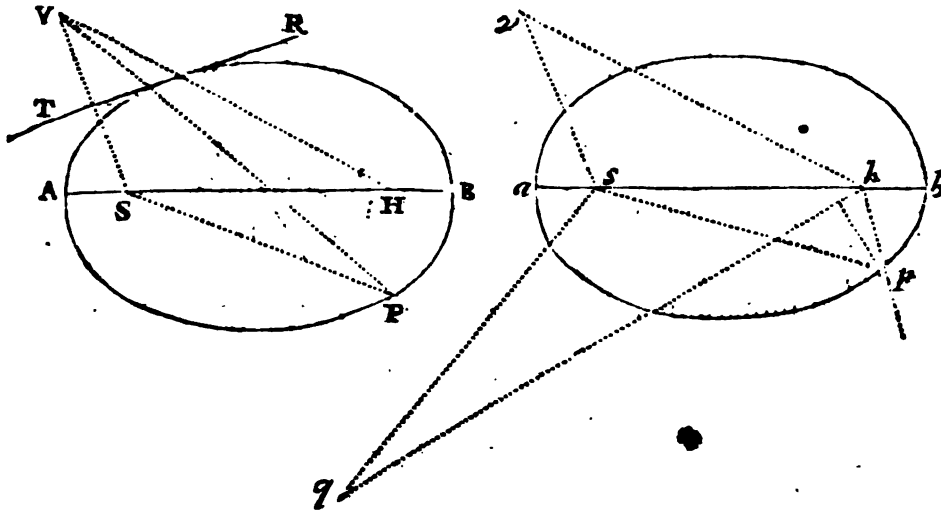
De Motu ut Vk — VK ad kS — KS , id est ut $2 VX$ ad $2 KX$ & $2 KX$ ad $2 SX$, adeoque ut VX ad HX & HX ad SX , similia erunt triangula VXH , HXS , & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH , adeoque ut VK ad KS . Habet igitur Trajectoriæ descriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH , quam habet Trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum VH , vH , æquentur axi principali, & VS , vs a rectis TR , tr perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate xv, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. Q. E. F.

Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit Trajectoria quæ rectam TR tanget in puncto dato R . In rectam TR demitte perpendicularem ST , & produc eandem ad V , ut sit TV æqualis ST . Junge VR , & rectam VS infinite productam seca in K & k , ita ut sit VK ad SK & Vk ad Sk ut Ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro Kk descripto, secetur producta recta VR in H , & umbilicis S , H , axe principali rectam VH æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Namque VH esse ad SH ut VK ad SK , atque adeo ut axis principalis Trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in Casu secundo, & propterea Trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda; rectam vero TR qua angulus VRs bisecatur, tangere Trajectoriam in puncto R , patet ex Conicis. Q. E. F.



Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit Trajectoria APB , quæ tangat rectam TR , transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit Figuræ apb , axe principali ab & umbilicis s , b descriptæ. In tangentem TR demitte perpendicularum ST , & produc idem ad V , ut sit TV æqualis ST . Angulis autem VSP , SVP fac angulos hsq , sbq æquales; centroque q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe circulum secantem Figuram apb in p . Junge sp & age SH quæ sit ad sb ut est SP ad sp , quæque angulum PSH angulo psb & angulum VSH angulo psq æquales constituat. Denique umbilicis S , H , & axe principali AB distantiam VH æquante, describatur sectio Conica. Dico factum. Nam si agatur sv quæ sit ad sp ut est sb ad

ad sq , quæque constituat angulum vsp angulo bsq & angulum vsh angulo psq æquales, triangula svh , spq erunt similia & propterea vb erit ad pq ut est sb ad sq , id est (ob similia triangula



VSP , bsq) ut est VS ad SP seu ab ad pq . Æquantur ergo vb & ab . Porro ob similia triangula VSH , vsh , est VH ad SH ut vb ad sb , id est, axis Conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis ab ad umbilicorum intervallum sb ; & propterea Figura jam descripta similis est Figuræ apb . Transit autem hæc Figura per punctum P , eo quod triangulum PSH simile sit triangulo psb ; & quia VH æquatur ipsius axi & VS bisecatur perpendiculariter a recta TR , tangit eadem rectam TR .
Q. E. F.

LEMMA XVI

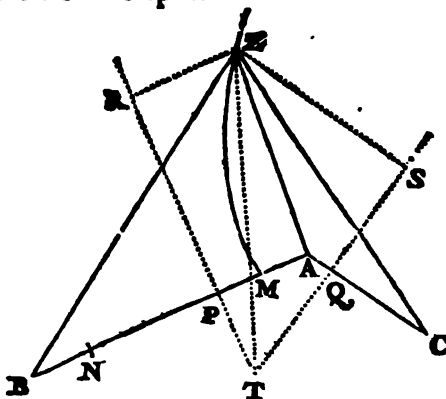
A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. I. Sunto puncta illa data A, B, C & punctum quartum Z , quod invenire oportet; Ob datam differentiam linearum AZ, BZ , locabitur punctum Z in Hyperbola cujus umbilici sunt A & B , & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN . Cape PM .

adi

DE MOTU
CORPORUM

ad MA ut est MN ad AB , & erecta PR perpendiculari ad AB , demissaque ZR perpendiculari ad PR ; erit, ex natura hujus Hyperbolæ, ZR ad AZ ut est MN ad AB . Simili discursu punctum Z locabitur in alia Hyperbolâ, cujus umbilici sunt A, C & principalis axis differentia inter AZ & CZ , ducique potest QS ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS , hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC . Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque si rectæ RP, SQ concurrant in T , & agatur TZ , figura $TRZS$, dabitur specie, & recta TZ in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Eadem methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt B & C & axis principalis differentia rectarum BZ, CZ , inveniri potest alia recta in qua punctum Z locatur. Habitis autem duobus Locis rectilineis, habetur punctum quaesitum Z in eorum interfectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ æquantur, punctum Z locabitur in perpendicularo bisecante distantiam AB , & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro Circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

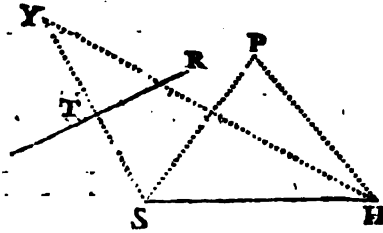
Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus S , punctum P , & tangens TR , & invenendus sit umbilicus alter H . Ad tangentem demitte perpendicularum ST , & produc idem ad T , ut sit TT , æqualis ST , & erit TH æqualis axi principali. Junge SP, HP , & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangentes

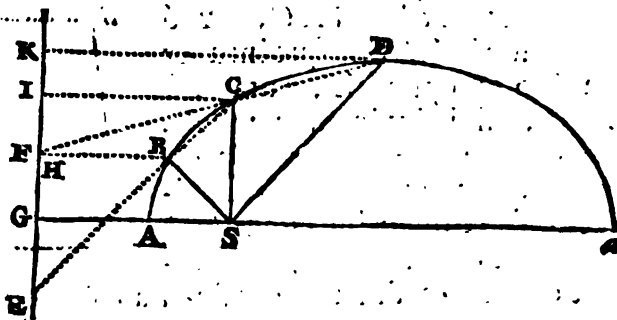
tes TR vel plura puncta P , devenietur semper ad lineas totidem TH , vel PH , a dictis punctis T vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axis, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atque adeo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma superius, datur umbilicus ille alter H . Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est TH ; vel, si Trajectoria Ellipsis est, $PH+SP$; sin Hyperbola, $PH-SP$) habetur Trajectoria, Q.E.I.



Scholium.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dantur puncta B, C, D . Junctas BC, CD produc ad E, F , ut sit EB ad EC ut SB ad SC , & FC ad FD ut SC ad SD . Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH , inque GS infinite producta cape GA ad AS & Ga ad aS ut est HB ad BS ; & erit A vertex, & Aa axis principalis Trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quam AS , erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ GP cum puncto A ; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF .

Nam si demittantur ad GF perpendicula CI, DK , erit IC ad HB ut EC ad EB , hoc est, ut SC ad SB ; & vicissim IC ad SC ut HB ad SB sive ut GA ad SA . Et simili argumento probabitur esse KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in Coni sectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad singula Sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula a punctis iisdem ad rectam GF demissa in data illa ratione.



Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit Clarissimus Geometra de la Hire, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop. XXV.

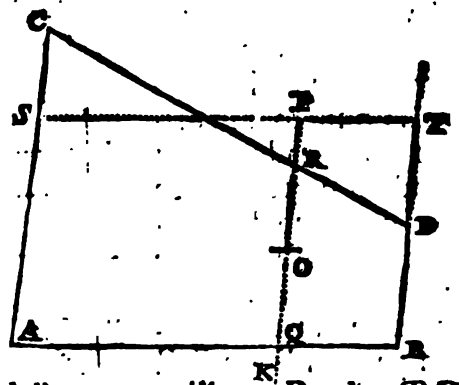
S E C T I O V.

Inuentio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

L E M M A XVII.

*Si a data Conica Sectionis puncto quouis P, ad Trapezii a-
licujus ABDC, in Conica illa sectione inscripti, latera
quatuor infinite producta AB, CD, AC, DB, totidem re-
cta PQ, PR, PS, PT in datis angulis ducantur, singula
ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera
 $PQ \times PR$, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo
latera opposita $PS \times PT$ in data ratione.*

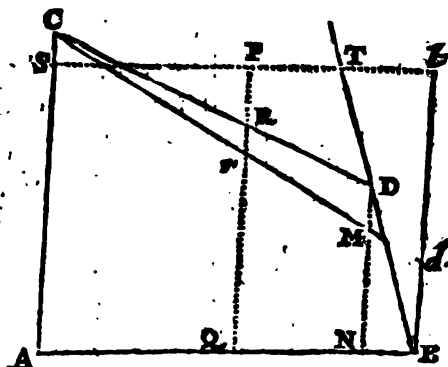
Cas. i. Ponamus primo lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC , & PS ac PT lateri AB . Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta AC & BD , sibi invicem parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis & bisecabit etiam RQ . Sit O punctum in quo RQ bisecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K ut sit OK æqualis PO , & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B , & K sint ad Conicam sectionem, & PK secet AB in dato angulo, erit (per Prop. 17. & 18. Lib. III. Conicorum Apollonii) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in data ratione. Sed QK & PR æquales sunt, utpote æqualium OK, OP , & OQ ; OR differentiæ, & inde etiam rectangula PQK & $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque adeo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum AQB , hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in data ratione., *Q. E. D.*

*Cas.*

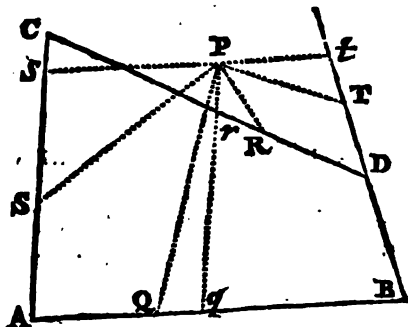
Caf. 2. Ponamus jam Trapezii latera opposita AC & BD non esse parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t , tum Conicæ sectioni in d . Junge Cd secantem PQ in r ,

LIBER PRIMUS.

& ipsi PQ parallelam age DM secantem Cd in M & AB in N . Jam ob similia triangula BTt , DBN ; est Bt seu PQ ad Tt ut DN ad NB . Sic & Rr est ad AQ seu PS ut DM ad AN . Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum PS in Tt , ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB , & (per Caf. 1.) ita rectangulum PQ in Pr est ad rectangulum PS in Pt , ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. Q. E. D.



Caf. 3. Ponamus denique lines quatuor PQ , PR , PS , PT non esse parallelas lateribus AC , AB , sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age Pq , Pr parallelas ipsi AC ; & Ps , Pt parallelas ipsi AB ; & propter datos angulos triangulorum PQq , PRr , PSs , PTt , dabuntur rationes PQ ad Pq , PR ad Pr , PS ad Ps , & PT ad Pt ; atque adeo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data est: Ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Q. E. D.

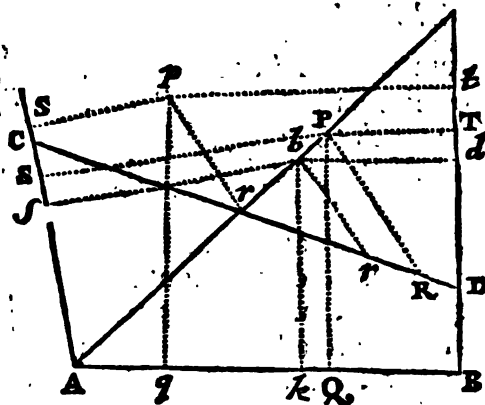


LEMMA XVIII.

Iisdem positis rectangulum ductarum ad opposita duo latera Trapezii $PQ \times PR$ sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera $PS \times PT$ in data ratione; punctum P , a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam sectionem circa Trapezium descriptam.

DE MOTU CORPORUM Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P , puta p , concipe Conicam sectionem describi: dico punctum P hanc

semper tangere. Si negas, junge AP secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in P , si fieri potest, puta in b . Ergo si ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ pq, pr, ps, pt , & bk, br, bs, bd ; erit ut $bk \times br$ ad $bs \times bd$ ita (per Lem. xvii) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per Hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$.



Est & propter similitudinem Trapeziorum bka , $PQAS$, ut bk ad bs ita PQ ad PS . Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit br ad bd ut PR ad PT . Ergo Trapezia æquiangula $Drbd$, $DRPT$ similia sunt, & eorum diagonales Db , DP propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum AP , DP adeoque coincidit cum puncto P . Quare punctum P , ubicunque sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. Q. E. D.

Corol. Hinc si rectæ tres PQ, PR, PS a puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC , singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS quad. in data ratione: punctum P , a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conicæ quæ tangit lineas AB, CD in A & C ; & contra. Nam coeat linea BD cum linea AC manente positione trium AB, CD, AC ; dein coeat etiam linea PT cum linea PS : & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS quad. rectæque AB, CD quæ curvam in punctis A & B, C & D secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

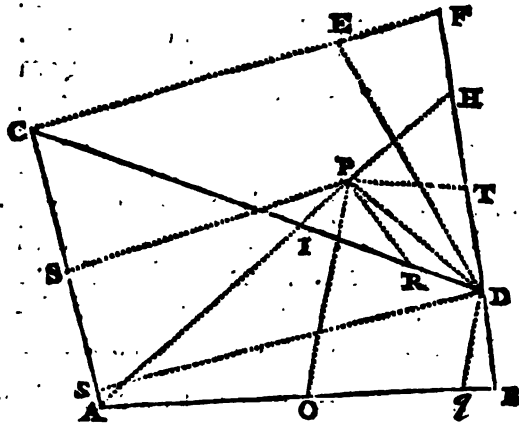
Scholium.

Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam Rectilinea per verticem Coni transiens, quam Circularis basi parallela includatur. Nam si punctum p incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor A, B, C, D junguntur, Conica sectio verte-

vertetur in geminas Rectas, quarum una est recta illa in quam punctum P incidit, & altera est recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si Trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera, ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinibus angulorum S, T , in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum sub sinibus angulorum Q, R in quibus duæ primæ PQ, PR ducuntur. Cæteris in casibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii $ABCD$ substitui potest Quadrilaterum cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor A, B, C, D , possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu Sectio Conicæ transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEMMA XIX.

Invenire punctum P , a quo si rectæ quatuor PQ, PR, PS, PT , ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC, BD , singulæ ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis, $PQ \times PR$, sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ in data ratione.



Lineæ AB, CD , ad quas rectæ duæ PQ, PR , unum rectangulorum continentes ducuntur, convenient cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A, B, C, D . Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet AH , in qua velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas BD, CD , nimirum BD in H , & CD in I , & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA & PA

DE MOTU ad PS , adeoque ratio PQ ad
CORPORUM PS . Auferendo hanc a data ra-
tione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$,
dabitur ratio PR ad PT , &
addendo datas rationes PI ad
 PR , & PT ad PH dabitur
ratio PI ad PH atque adeo
punctum P . Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam ad Loci
punctorum infinitorum P pun-
ctum quodvis D tangens duci
potest. Nam chorda PD ubi
puncta P ac D conveniunt,

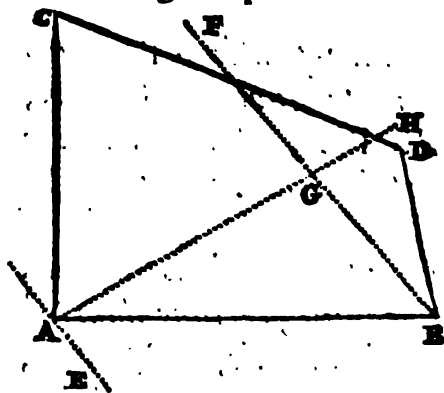
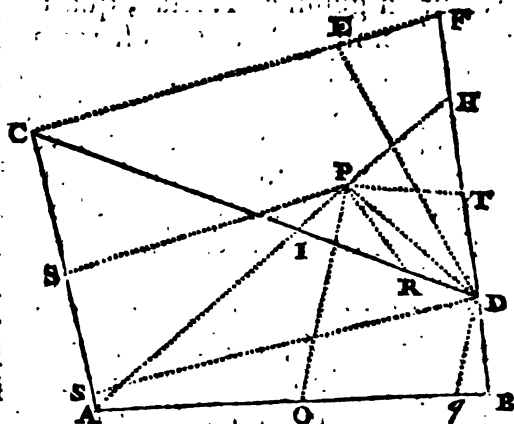
hoc est, ubi AH ducitur per punctum D , tangens evadit. Quo in
casu ultima ratio evanescentium IP & PH invenietur ut supra.
Ipsi igitur AD duc parallelam CF , occurrentem BD in F , & in ea
ultima ratione sectam in E , & DE tangens erit, propterea quod
 CF & evanescentes IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri potest.
Per quodvis punctorum A, B, C, D , puta A , duc Loci tangentem
 AE & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF
occurrentem Loco in F . Invenietur autem punctum F per Lem. XIX.
Bifeca BF in G , & acta indefinita
 AG erit positio diametri ad quam
 BG & FG ordinatim applicantur.
Hæc AG occurrat Loco in H , &
erit AH diameter sive latus trans-
versum, ad quod latus rectum erit
ut $BGq.$ ad AGH . Si AG nullibi
occurrit Loco, linea AH existente
indefinita, Locus erit Parabola & la-
tus rectum ejus ad diametrum AG

pertinens erit $\frac{BGq.}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit
ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G : & Ellipsis,
ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit & insuper
 BG quad. æquale rectangulo AGH , quo in casu Circulus habebitur.

Atque ita Problematis Veterum de quatuor lineis ab *Euclide* in-
cepti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geome-
trica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

LEM-

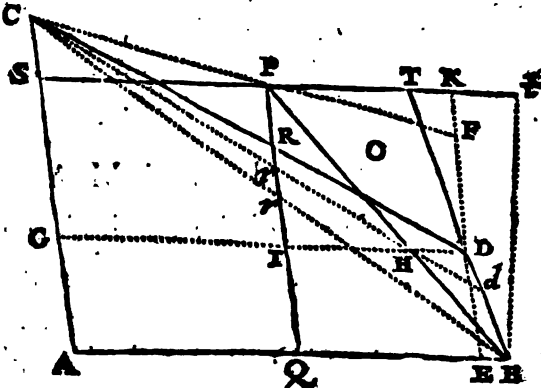


LEMMA XX.

LIBER
PRIMUS.

Si Parallelogrammum quodvis $ASPQ$ angulis duobus oppositis A & P tangit sectionem quamvis Conicam in punctis A & P ; & lateribus unius angulorum illorum infinite productis AQ, AS , occurrit eidem sectioni Conicæ in B & C ; a punctis autem occurrentibus B & C ad quicumque sectionis Conicæ punctum D agantur rectæ duæ BD, CD occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus PS, PQ in T & R : erunt semper abscissæ laterum partes PR & PT ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum D tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.

Cas. 1. Jungantur BP, CP & a puncto D agantur rectæ duæ DG, DE , quarum prior DG ipsi AB parallela sit & occurrat PB, PQ, CA in H, I, G ; altera DE parallela sit ipsi AC & occurrat PC, PS, AB in F, K, E : & erit (per Lemma xvii.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data. Sed est PQ ad DE (seu IQ) ut PB ad HB , adeoque ut PT ad DH ; &



vicissim PQ ad PT ut DE ad DH . Est & PR ad DF ut RC ad DC , adeoque ut $(IG$ vel) PS ad DG , & vicissim PR ad PS ut DF ad DG ; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque adeo in data ratione. Sed dantur PQ & PS & propterea ratio PR ad PT datur. Q. E. D.

Cas. 2. Quod si PR & PT ponatur in data ratione ad invicem, tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, in ratione data, adeoque punctum D (per Lemma xviii.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P : Q. E. D.

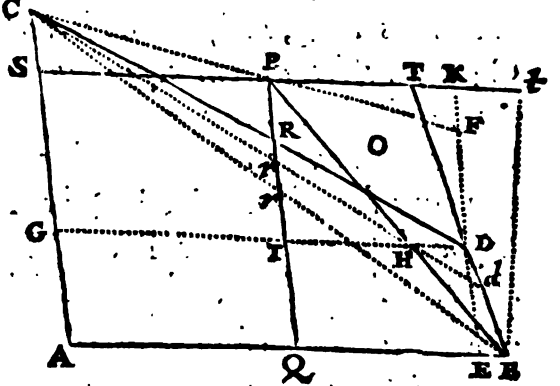
Corol.

DE MOTU
CORPORUM

Corol. 1. Hinc si agatur BC secans PQ in r , & in PT capiatur Pt in ratione ad Pr , quam habet PT ad PR : erit Bt tangens Conicæ sectionis ad punctum B . Nam concipe punctum D coire cum puncto B ita ut, chorda BD evanescente, BT tangens evadat, & CD ac BT coincident cum CB & Bt .

Corol. 2. Et vice versa si C Bt fit tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum D convenient BD , CD ; erit PR ad PT ut Pr ad Pt . Et contra, si fit PR ad PT ut Pr ad Pt : convenient BD , CD ad Conicæ Sectionis punctum aliquod D .

Corol. 3. Conica sectio non secatur Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinque puncta A, B, C, P, O ; easque secet recta BD in punctis D, d , & ipsam PQ secet recta Cd in r . Ergo PR est ad PT ut Pr ad PT ; unde PR & $P r$ sibi invicem æquantur, contra Hypothesin.



LEMMA XXI.

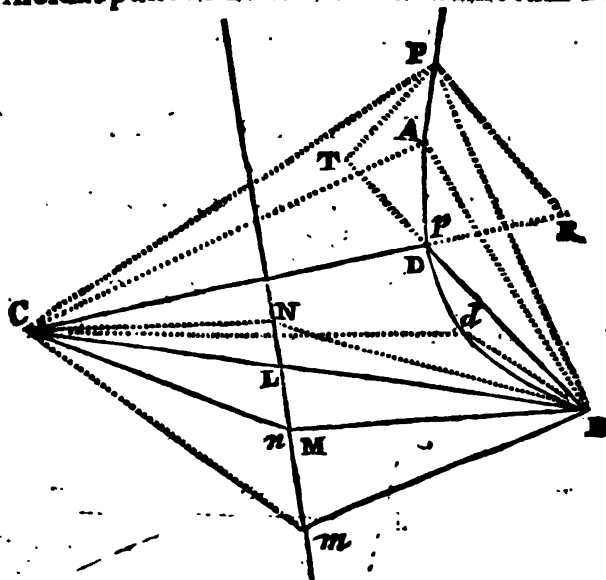
Si rectæ duæ mobiles, & infinitæ BM, CM per data puncta B, C , ceu polos ductæ, concursu suo M describant tertiam positione datam rectam MN ; & aliæ duæ infinitæ rectæ BD, CD cum prioribus duabus ad puncta illa data B, C datos angulos MBD, MCD efficientes ducantur; dico quod hæ duæ BD, CD , concursu suo D describent sectionem Conicam per puncta B, C transeuntem. Et vice versa, si rectæ BD, CD concursu suo D describant Sectionem Conicam per data puncta, B, C, A transeuntem, & sit angulus DBM semper equalis angulo dato ABC , angulusque DCM semper equalis angulo dato ACB : punctum M contiget rectam positione datam.

Nam

Nam in recta MN detur punctum N , & ubi punctum mobile M incidit in immotum N , incidat punctum mobile D in immotum P .

LIBER PRIMUS.

Junge CN, BN, CP, BP , & a puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipsis BD, CD in T & R , & facientes angulum BPT æqualem angulo dato BNM , & angulum CPR æqualem angulo dato CNM . Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli MBD, NBP , ut & anguli MCD, NCP ; aufer communes NBD & NCD , & restabunt æquales NBM & PBT ,



NCM & PCR : adeoque triangula NBM, BPT similia sunt, ut & triangula NCM, PCR . Quare PT est ad NM ut PB ad NB , & PR ad NM ut PC ad NC . Sunt autem puncta B, C, N, P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM , proindeque datam rationem inter se; atque adeo, per Lemma xx, punctum D (perpetuus rectarum mobilium BT & CR concursus) contingit sectionem Conicam, per puncta B, C, P transeuntem. Q. E. D.

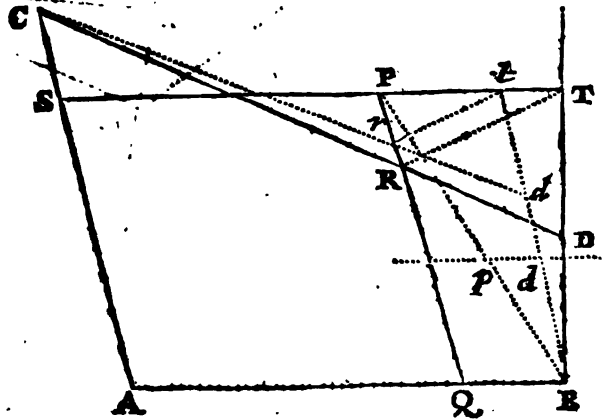
Et contra, si punctum mobile D contingat sectionem Conicam transeuntem per data puncta B, C, A , & sit angulus DBM semper æqualis angulo dato ABC , & angulus DCM semper æqualis angulo dato ACB , & ubi punctum D incidit successive in duo quævis sectionis puncta immobilia p, P , punctum mobile M incidat successive in puncta duo immobilia n, N : per eadem n, N agatur recta nN , & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis M . Nam, si fieri potest, versetur punctum M in linea aliqua Curva. Tanget ergo punctum D sectionem Conicam per puncta quinque B, C, A, p, P , transeuntem, ubi punctum M perpetuo tangit lineam Curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum D sectionem Conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P transeuntem, ubi punctum

DE MOTO ctum M perpetuo tangit lineam Rectam. Ergo duæ sectiones Co-
CORPORUM nicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem.
 xx. Igitur punctum M versari in linea Curvâ absurdum est. $Q. E. D.$

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque A, B, C, P, D . Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C , quæ poli nominentur, age rectas AB, AC ,

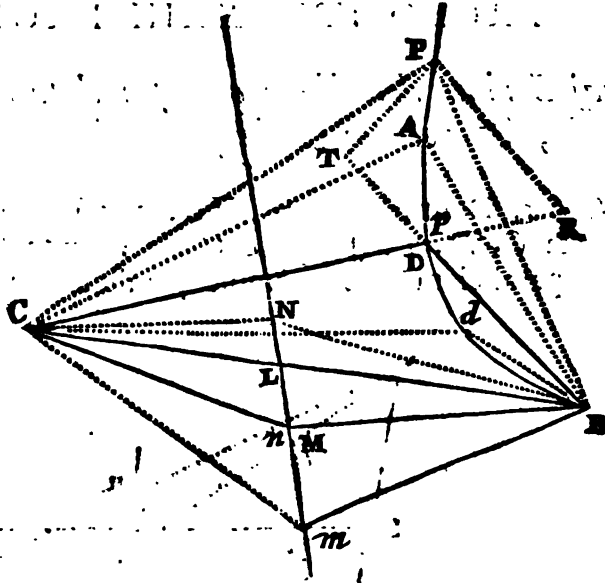


hisque parallelas TPS, PRQ per punctum quartum P . Deinde a polis duobus B, C age per punctum quintum D infinitas duas BDT, CRD , novissime ductis TPS, PRQ (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in T & R . Denique de rectis PT, PR , acta recta tr ipsi TR parallela, abscinde quasvis Pt, Pr ipsis PT, PR proportionales; & si per earum terminos t, r & polos B, C actæ Bt, Cr concurrant in d , locabitur punctum illud d in Trajectoria quæsitâ. Nam punctum illud d (per Lemma xx) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor A, B, C, P transiente; & lineis Rr, Tt evanescentibus, coit punctum d cum puncto D . Transit ergo sectio Conica per puncta quinque A, B, C, P, D . $Q. E. D.$

Idem

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis A, B, C ; & circum duo eorum B, C ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB , applicentur crura BA, CA primo ad punctum D , deinde ad punctum P , & notentur puncta M, N in quibus altera crura BL, CL casu utroque se decussant. Agatur recta infinita MN , & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, C , ea lege ut crurum BL, CL vel BM, CM intersectio quæ jam sit m incidat semper in rectam illam infinitam MN & crurum BA, CA , vel BD, CD intersectio, quæ jam sit d , Trajectoriam quæsitam $PADdB$ delineabit. Nam punctum d , per Lem. XXI, continget sectionem Conicam per puncta B, C transeuntem; & ubi punctum m accedit ad puncta L, M, N , punctum d (per constructionem) accedet ad puncta A, D, P . Describetur itaque sectio Conica transiens per puncta quinque A, B, C, P, D . ~~Q, E, F .~~



Corol. 1. Hinc recta expedite duci potest quæ Trajectoriam quæsitam, in puncto quovis dato B , continget. Accedat punctum d ad punctum B , & recta Bd evadet tangens quæsitæ.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum Centra, Diametri & Latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX.

Scholium.

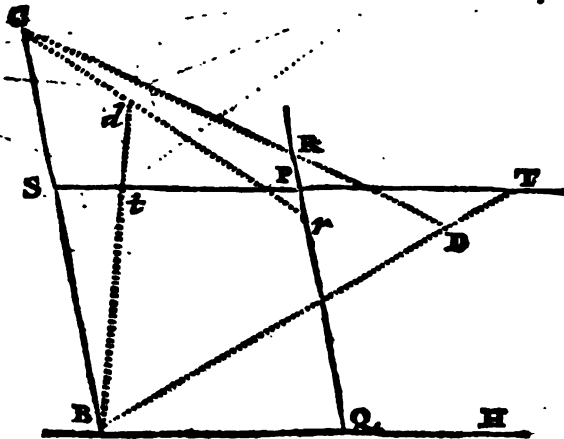
Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo BP , & in ea, si opus est, producta capiendo Bp ad BP ut est PR ad PT ; & per p agendo rectam infinitam pd ipsi SPT parallelam, inque ea capiendo semper pd æqualem Pr ; & agendo rectas Bd, Cr concurrentes in d . Nam cum sint Pr ad Pt , PR ad PT , pB, PB , pd ad Pt in eadem ratione; erunt pd & Pr semper æquales.

DE MOTU CORPORUM. les. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in constructione secunda, describere Mechanice.

PROPOSITIO XXIII PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

Caf. I. Dentur tangens HB , punctum contactus B , & alia tria puncta C, D, P . Junge BC , & agendo PS parallelam BH , & PQ parallelam BC , comple parallelogrammum $BS P Q$.

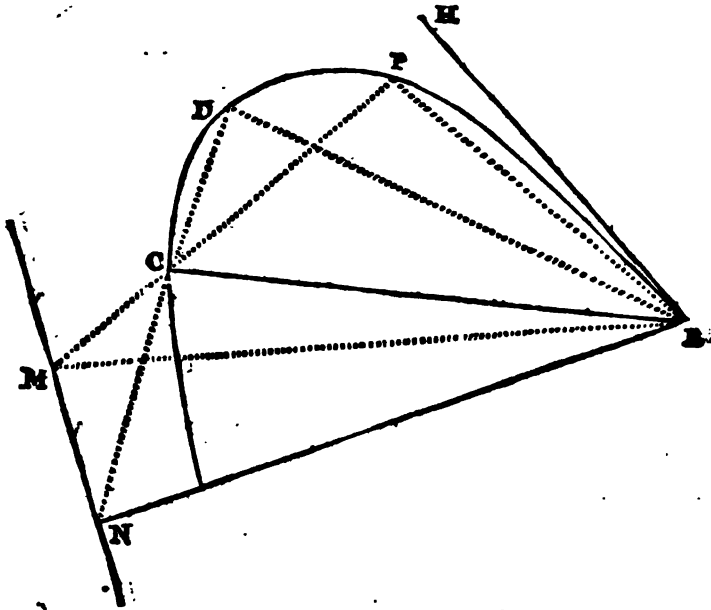


Age BD secantem SP in T , & CD secantem PQ in R . Denique, agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ , PS abscinde Pr , Pt ipsis PR , PT proportionales respective; & actarum Cr , Bt concursus d (per Lem. xx) incidet semper in Trajectoriam describendam.

Idem

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus $C B H$ circa polum B , tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus DC circa polum C . Notentur puncta M, N in quibus anguli crus BC secat radius illum ubi crus alterum BH concurrat cum eodem radio in punctis P & D . Deinde ad actam infinitam MN concurrant perpetuo radius ille CP vel CD & anguli crus BC , & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit Trajectoriam quaesitam.



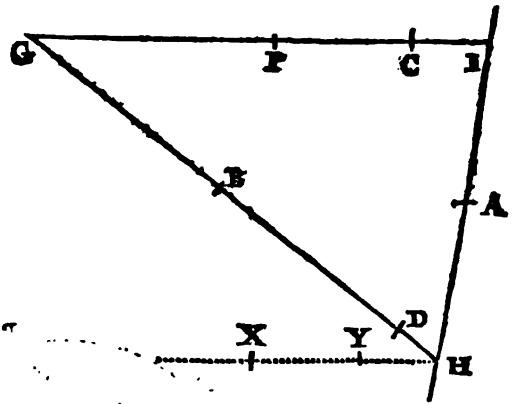
nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum A ad punctum B , lineæ CA & CB coincident, & lineæ AB in ultimo suo situ fiet tangens BH , atque adeo constructiones ibi positæ evadent eadem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem Conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B . *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem HI sita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G , tangentique

De Motu tique occurrentibus in H & I . Secetur tangens in A , ita ut sit
CORPORUM HA ad AI , ut est rectan-

gulum sub media proportio-
nali inter CG & GP & me-
dia proportionali inter BH &
 HD , ad rectangulum sub
media proportionali inter
 DG & GB & media propor-
tionali inter PI & IC ; &
erit A punctum contactus.
Nam si rectæ PI parallela
 HX Trajectoriam secet in
punctis quibusvis X & T :

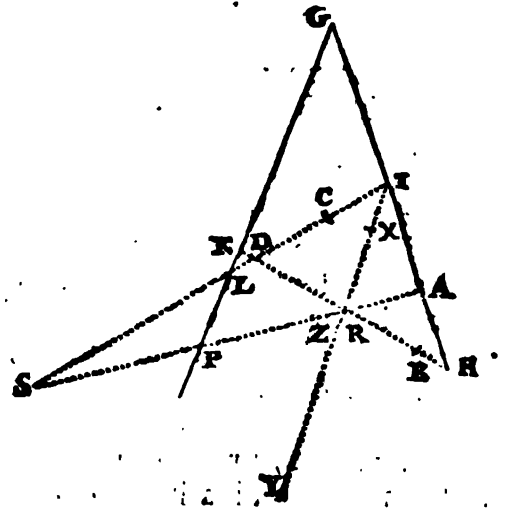
erit (ex Conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA quad. ad
 AI quad. in ratione composita ex ratione rectanguli XHT ad rec-
tangulum BHD seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB & ex
ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC . Invenio autem
contactus puncto, A , describetur Trajectoria ut in casu primo.
Q. E. F. Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I ,
vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.



PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

*Trajectoriam describere que transibit per data tria puncta
& rectas duas positione datas continget.*

Dentur tangentes HI, KL &
puncta B, C, D . Per punctorum
duo quævis B, D age rectam in-
finitam BD tangentibus occur-
rentem in punctis H, K . Deinde
etiam per alia duo quævis C, D
age infinitam CD tangentibus oc-
currentem in punctis I, L . Actas
ita seca in R & S , ut sit HR ad
 KR ut est media proportionalis
inter BH & HD ad mediam
proportionalem inter BK & KD ;
& IS ad LS ut est media pro-
portionalis inter CI & ID ad me-
diam proportionalem inter CL



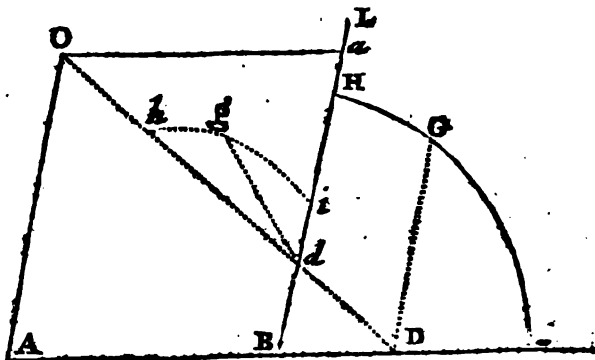
&

& *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K & H, I & L*; LISTE
PRIMUS.
vel extra eadem: dein age *RS* secantem tangentes in *A & P*,
& erunt *A & P* puncta contactuum. Nam si *A & P* supponantur
esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per
punctorum *H, I, K, L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI*
situm, agatur recta *IT* tangenti alteri *KL* parallela, quæ oc-
currat curvæ in *X & T*, & in ea sumatur *IZ* media proportio-
nalis inter *IX & IT*: erit ex Conicis, rectangulum *XIT* seu *IZ*
quad. ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*,
id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atque adeo
IZ ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S, P, Z* in una recta.
Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rec-
tangulum *XIT* seu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.*
adeoque *IZ & IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P, Z &*
A in una recta, adeoque puncta *S, P & A* sunt in una recta. Et
eodem argumento probabitur quod puncta *R, P & A* sunt in una
recta. Jacent igitur puncta contactuum *A & P* in recta *RS*.
Hisce autem inventis, Trajectoria describetur ut in casu pri-
mo Problematis superioris. *Q. E. F.*

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu
rectæ duæ parallelæ *AO, BL* tertiam quamvis positione datam
AB secantes in *A & B*,
& a figuræ puncto quo-
vis, *G* ad rectam *AB*
ducatur quævis *GD*,
ipsi *OA* parallela. De-
inde a puncto aliquo *O*,
in linea *OA* dato, ad
punctum *D* ducatur re-
cta *OD*, ipsi *BL* oc-
currans in *d*, & a puncto
occurfus erigatur recta



dg datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atque eam
habens rationem ad *Od* quam habet *DG* ad *OD*; & erit *g* punc-
tum in figura nova *bg*; puncto *G* respondens. Eadem ratione
puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ.

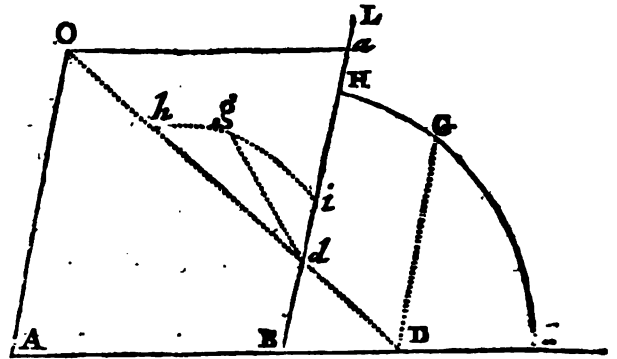
Concipe

DE MOTU
CORPORUM

Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurreret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abscissam primam, ad abscissam novam; O polum, OD radium abscindentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, si punctum G tangit rectam Lineam positione datam, punctum g tanget etiam Lineam rectam positione datam. Si punctum G tangit Conicam sectionem, punctum g tanget etiam Conicam sectionem. Conicis sectionibus hic Circulum annumero.

Porro si punctum G tangit Lineam tertii ordinis Analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut est ad ad OA ita



sunt Od ad OD , dg ad DG , & AB ad AD ; adeoque AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum G tangit rectam Lineam, atque adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD , &

$\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG , producetur æquatio nova, in qua abscissa nova ad & ordinata nova dg ad unam tantum dimensionem ascendent, atque adeo quæ designat Lineam rectam. Sin AD & DG (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem ad & dg ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione secunda & AD, DG in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum & propterea Lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.

Dico

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figura nova, atque adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figura utraque. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmūtanda est, sufficit rectorum a quibus conflatur intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmūtare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmūtando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmūtantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo, lineam quamvis rectam quæ per concursum convergentium transit: id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmūtetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsitæ.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum Problematum. Nam quoties duæ sectiones Conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmūtare licet earum alterutram, & Hyperbola sit vel Parabola, in Ellipsin: deinde Ellipsis facile mutatur in Circulum. Recta item & sectio Conica, in constructione Planorum Problematum, vertuntur in Rectam & Circulum.

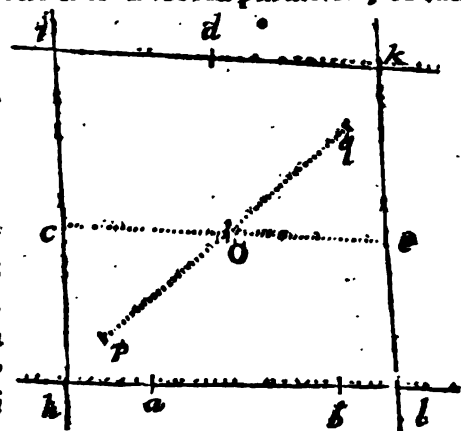
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

*Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit
& rectas tres continget positione datas.*

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmūtetur figura, per Lemma superius, in figuram novam. In

DE MOTU
CORPORUM

hac figura tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallele, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunt bi, kl tangentes illæ duæ parallele, ik tangens tertia, & bl recta huic parallela transiens per puncta illa a, b , per quæ Conica sectio in hac figura nova transire debet, & parallelogrammum $bikl$ complens. Secentur rectæ bi, ik, kl in c, d, e , ita ut sit bc ad latus quadratum rectanguli abb , ic ad id , & ke ad kd ut est summa rectarum bi & kl ad summam trium linearum



quarum prima est recta ik , & alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum abb & alb : & erunt c, d, e puncta contactuum. Etenim, ex Conicis, sunt bc quadratum ad rectangulum abb , & ic quadratum ad id quadratum, & ke quadratum ad kd quadratum, & el quadratum ad rectangulum alb in eadem ratione; & propterea bc ad latus quadratum ipsius abb , ic ad id , ke ad kd , & el ad latus quadratum ipsius alb sunt in subduplicata illa ratione, & compositæ, in data ratione omnium antecedentium bi & kl ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli abb & recta ik & latus quadratum rectanguli alb . Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum c, d, e , in figura nova. Per inversas operationes Lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per Probl. XIV., describetur Trajectoria. Q. E. F. Ceterum perinde ut puncta a, b jacent vel inter puncta b, l , vel extra, debent puncta c, d, e vel inter puncta b, i, k, l capi, vel extra. Si punctorum a, b alterutrum cadit inter puncta b, l , & alterum extra, Problema impossibile est.

PROPOSITIO XXVI PROBLEMA XVII.

*Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum
& rectas quatuor positione datas continget.*

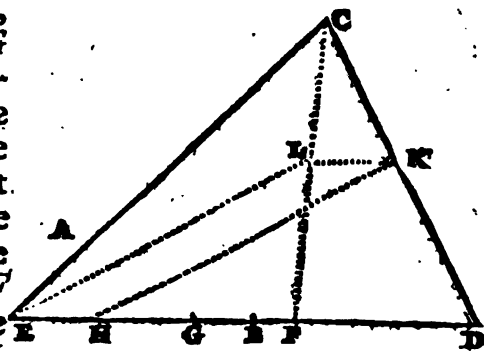
Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita,

ta, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. xxii.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sumpto illæ bi & kl , ik & bl continentes parallelogrammum $bikl$. Sitque p punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum O agatur pq , & existente Oq æquali Op , erit q punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis xxii operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. xvii. *Q. E. F.*

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione data AC, BD ad data puncta A, B, terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta CD, qua puncta indeterminata C, D junguntur, secetur in ratione data in K: dico quod punctum K locabitur in recta positione data.

Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC, sitque FD semper æqualis datæ EG; & erit ex constructione EC ad GD, hoc est, ad EF at AC ad BD, adeoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum EFC. Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD; &, ob datam il-



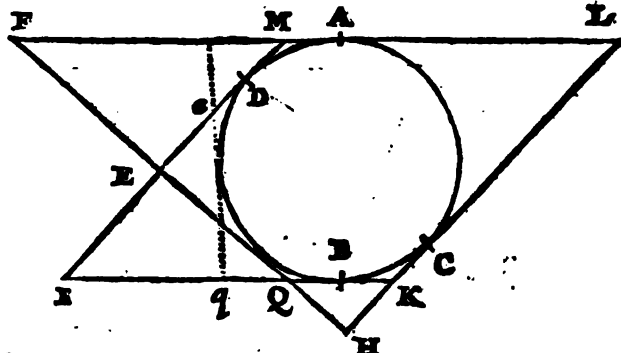
lam rationem, dabitur etiam specie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in recta EL positione data. Junge LK, & similia erunt triangula CLK, CFD; &, ob datam FD & datam rationem LK ad FD, dabitur LK. Hæc æqualis capiatur EH, & erit semper ELKH parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK. *Q. E. D.*

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant Sectionem quamcunque Conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium, est ad abscissarum alteram.

Tangent parallelogrammi $MLIK$ latera quatuor ML, IK, KL, MI sectionem Conicam in A, B, C, D , & secet tangens quinta FQ hæc latera in F, Q, H

& E ; sumantur autem laterum MI, KI abscissæ ME, KQ , vel laterum KL, ML abscissæ KH, MF : dico quod sit ME ad MI ut BK ad KQ ; & KH ad KL ut AM ad MF . Nam per Corollarium secundum



Lemmatis superioris, est ME ad EI ut $(AM$ seu) BK ad BQ , & componendo ME ad MI ut BK ad KQ . $Q.E.D.$ Item KH ad HL ut $(BK$ seu) AM ad AF , & dividendo KH ad KL ut AM ad MF . $Q.E.D.$

Corol. 1. Hinc si datur parallelogrammum $IKLM$, circa datam Sectionem Conicam descriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens eq tangentibus KI, MI occurrens in q & e ; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME , & divisim ut Qq ad Ee .

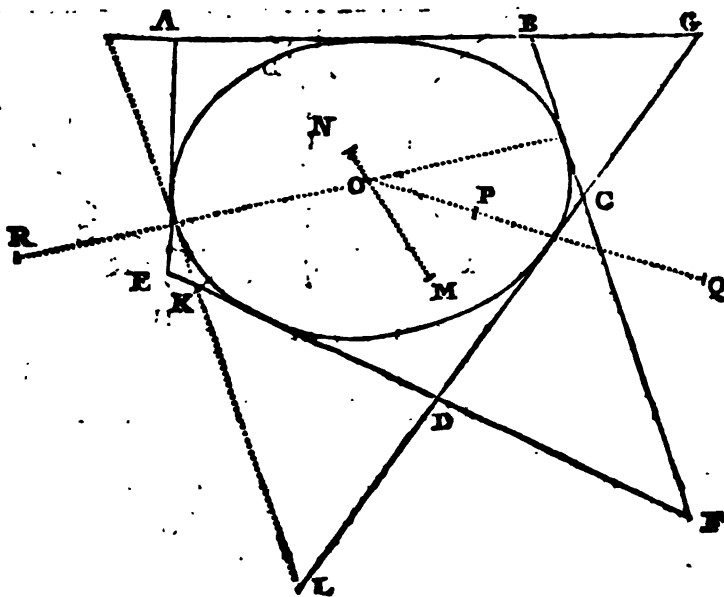
Corol. 3. Unde etiam si Eq, eQ jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit Qq ad Ee ut KQ ad Me , transibit ea-

DE MOTU dem recta per medium omnium $E q$, $e Q$, $M K$; (per Lem. xxiii)
CORPORUM & medium rectæ $M K$ est centrum Sectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.

Dentur positione tangentes ABG , BCF , GCD , FDE , EA . Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ diagonales AF , BE biseca, & (per Corol. 3. Lem. xxv) recta MN per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rursum Figuræ quadrilateræ $BGDF$, sub aliis quibusvis quatuor



tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD , GF biseca in P & Q : & recta PQ per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud O . Tangenti cuius BC parallelam age KL , ad eam distantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget Trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes

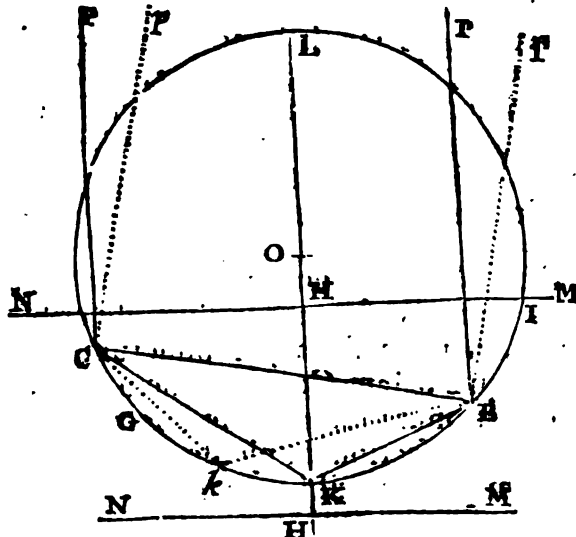
gentes alias quasvis duas GCD, FDE in L & K . Per harum LIBER PRIMUS tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concursus C & K, F & L age CK, FL concurrentes in R , & recta OR ducta & producta secabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. xxiv. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per Probl. xiv. Trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Scholium.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Asymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones Problematis xiv. & Casus primi Problematis xv. vertentur in constructiones Problematum ubi Asymptoti dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & figura Lemmatis xxx,

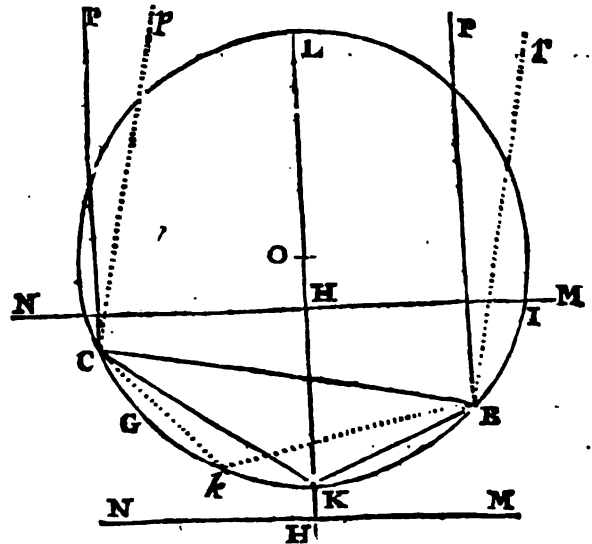
fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura BP, CP , quorum concursu Trajectoria describebatur, sint sibi invicem parallela, eumque servantia situm revolvantur circa polos suos B, C in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura CN, BN , concursu suo K vel k , Circulum $IBKG C$. Sit Circuli hujus centrum O . Ab hoc centro ad Regulam MN , ad quam altera illa crura CN, BN interea concurrerant dum



dum

DE MOTU dum Trajectoria describatur, demitte normalem OH Circulo
CORPORUM occurrentem in K & L . Et ubi crura illa altera CK , BK concurrunt ad punctum illud K quod Regulæ propius est; crura prima CP , BP parallela erunt axi majori; & perpendicularia minori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L . Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut KH ad LH , & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituentur poli C , B , tertium dabit angulos mobiles $\mathcal{P}CK$, $\mathcal{P}BK$; his autem datis describi potest Circulus $IBKG$. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK , adeoque ipsa OH . Centro O & intervallo OH describe alium circulum, & recta quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum CK , BK , ubi crura prima CP , BP concurrunt ad quartum datum punctum erit Regula illa MN cujus ope Trajectoria describetur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis Sectione Conica inscribi potest.



Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Coni-sectionem in punctis duobus interfecet, & intersectionum intervallum bifecetur, punctum bisectionis tanget aliam Coni-sectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propro ad magis utilia.

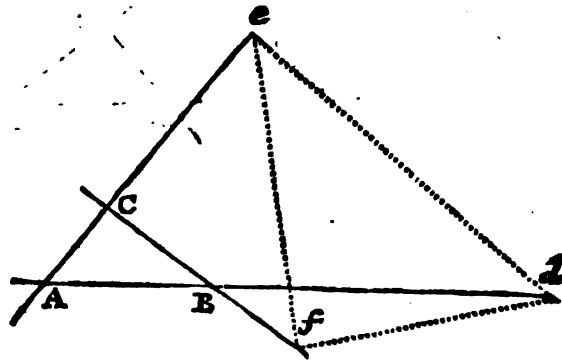
LEMMA

LEMMA XXVI.

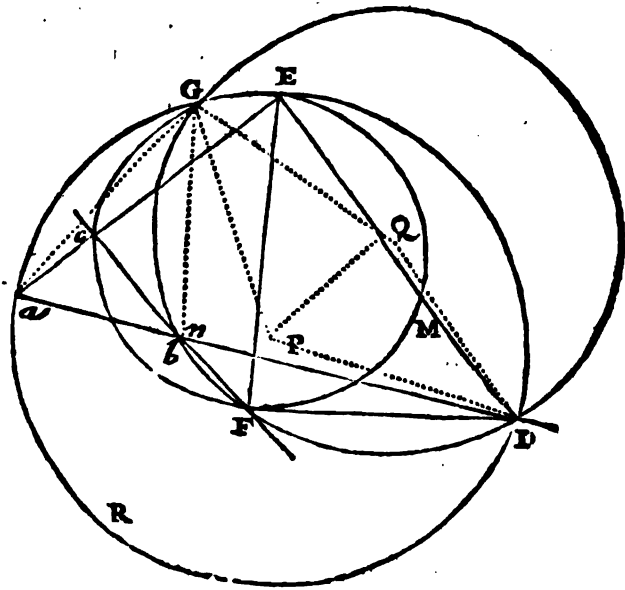
LIBER
PRIMUS.

*Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas
totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallele,
singulos ad singulas ponere.*

Dantur positione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC , & oportet
triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB , an-



gulus E lineam AC , &
angulus F lineam BC
tangat. Super DE ,
 DF & EF describe
tria circulorum seg-
menta $DRE, DGF,$
 EMF , quæ capiant
angulos angulis $BAC,$
 ABC, ACB æquales
respective. Describan-
tur autem hæc segmen-
ta ad eas partes linea-
rum DE, DF, EF ut
literæ DRE eodem
ordine cum literis
 $BACB$, literæ $DGFD$
eodem cum literis
 $ABCA$, & literæ
 $EMFE$ eodem cum
literis $ACBA$ in orbem
redeant; deinde com-
pleantur hæc segmen-
ta in circulos integros.
Secent circuli duo prio-
res se mutuo in G , sint-
que centra eorum P &
 Q . Junctis $GP, PQ,$
cape Ga ad AB ut est
 GP ad PQ , & cen-
tro G , intervallo Ga



describe circulum, qui secet circulum primum DGE in a . Jungatur
tum aD secans circulum secundum DFG in b , tum aE secans cir-
culum

M

culum

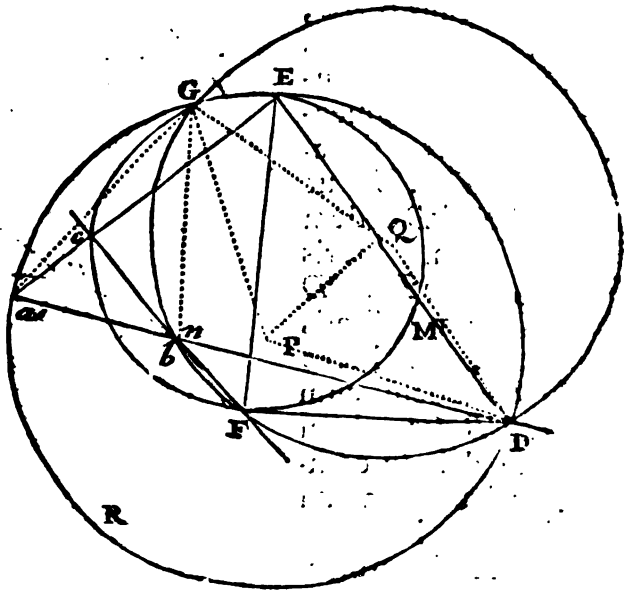
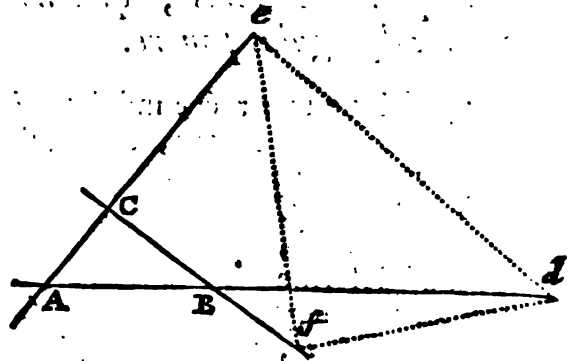


PHILOSOPHIÆ NATURALIS

De Motu
COROLLARIUM

culum tertium EMF in f . Et compleatur Figura $ABC def$ simili & æqualis Figuræ $abcDEF$. Dico factum.

Agatur enim Fc in aD occurrens in n , & jungantur aG , bG , QG , QD , PD . Ex constructione est angulus EaD æqualis angulo CAB , & angulus acF æqualis angulo ACB , adeoque triangulum anc triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus anc seu FnD angulo ABC , adeoque angulo FbD æqualis est; & propterea punctum n incidit in punctum b . Porro angulus GPQ , qui dimidius est anguli ad centrum GPD æqualis est angulo ad circumferentiam GaD , & angulus GQP , qui dimidius est anguli ad centrum GQD , æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam GbD , adeoque æqualis angulo Gba ; suntque ideo triangula GPQ , Gab similia; & Ga est ad ab ut GP ad PQ ; id est (ex constructione) ut Ga ad AB . Æquantur itaque ab & AB ; & propterea triangula abc , ABC , quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli DEF anguli D, E, F trianguli abc latera ab, ac, bc respective compleri potest Figura $ABC def$ Figuræ $abcDEF$ similis & æqualis, atque eam complendo solvetur Problema. $Q.E.F.$



Æquantur itaque ab & AB ; & propterea triangula abc , ABC , quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli DEF anguli D, E, F trianguli abc latera ab, ac, bc respective compleri potest Figura $ABC def$ Figuræ $abcDEF$ similis & æqualis, atque eam complendo solvetur Problema. $Q.E.F.$

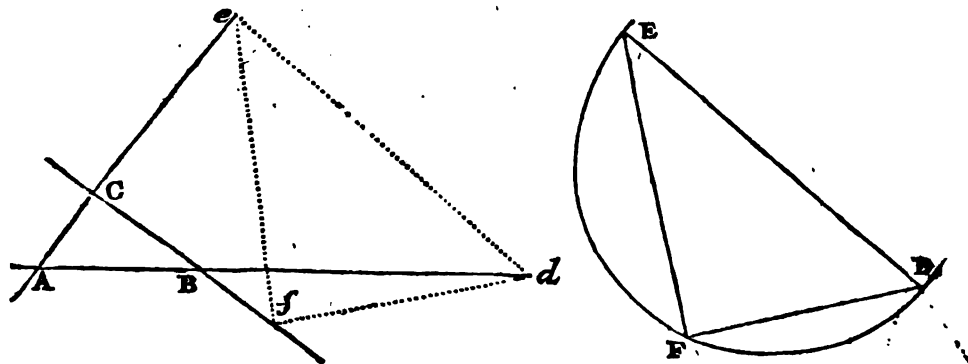
Corol.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF , puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE , DF in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data DE rectis positione datis AB , AC , & pars data DF rectis positione datis AB , BC interponi debet, & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur Problema.

PROPOSITIO XXVIII PROBLEMA XX.

Trajectoriam speciei & magnitudinis datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit Trajectoria quæ sit similis & æqualis Lineæ curvæ DEF , quæque a rectis tribus AB , AC , BC positione datis,

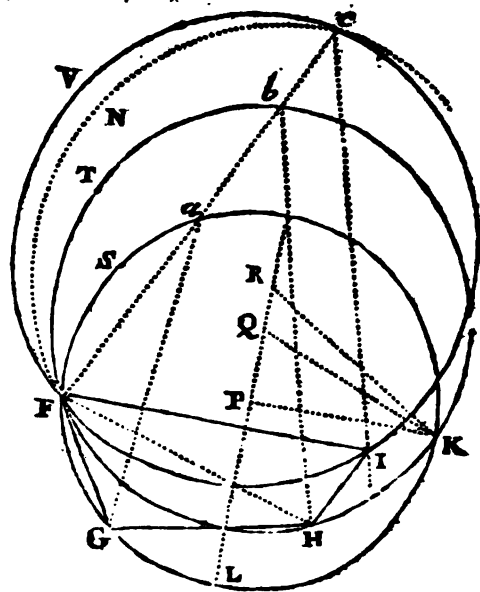
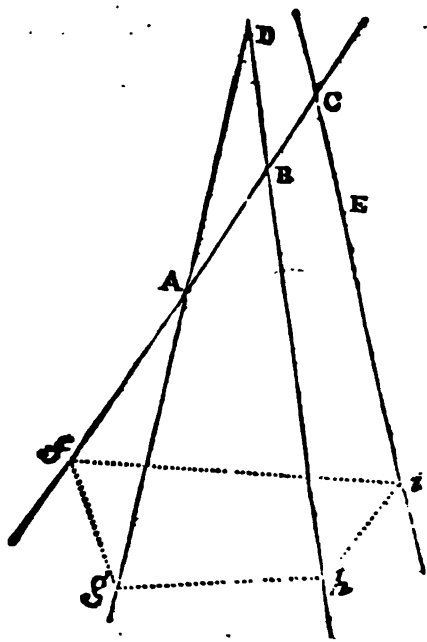


in partes datis hujus partibus DE & EF similes & æquales secabitur.

Age rectas DE , EF , DF , & trianguli hujus DEF pone angulos D , E , F ad rectas illas positione datas (per Lem. xxvi.) Dein circa triangulum describe Trajectoriam Curvæ DEF similem & æqualem. *Q. E. F.*

Trapezium specie datum describere cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallele sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor ABC , AD , BD , CE , quarum prima secet secundam in A , tertiam in B , & quartam in C ; & describendum sit Trapezium $fgbi$ quod sit Trapezio $FGHI$



simile, & cujus angulus f , angulo dato F æqualis, tangat rectam ABC , cæterique anguli g, b, i , cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas AD , BD , CE respective. Jungatur FH & super FG , FH , FI describantur totidem circularum segmenta FSG , FTH , FVI , quorum primum FSG capiat angulum

lum æqualem angulo BAD , secundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD , ad tertium FVI capiat angulum æqualem angulo ACE . Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI , ut literarum $FSGF$ idem sit ordo circularis qui literarum $BADB$, utque literæ $FTHF$ eodem ordine cum literis $CBDC$, & literæ $FVIF$ eodem cum literis $ACEA$ in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros, sitque P centrum circuli primi FSG , & Q centrum secundi FTH . Jungatur & utrinque producat PQ , & in ea capiatur QR in ea ratione ad PQ quam habet BC ad AB . Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q ut literarum P, Q, R idem sit ordo atque literarum A, B, C : centroque R & intervallo RF describatur circulus quartus FNc secans circulum tertium FVI in c . Jungatur Fc secans circulum primum in a & secundum in b . Agantur aG, bH, cI , & Figuræ $abcFGHI$ similis constituatur Figura $ABCfgbi$: Eritque Trapezium $fgbi$ illud ipsum quod constituere oportebat.

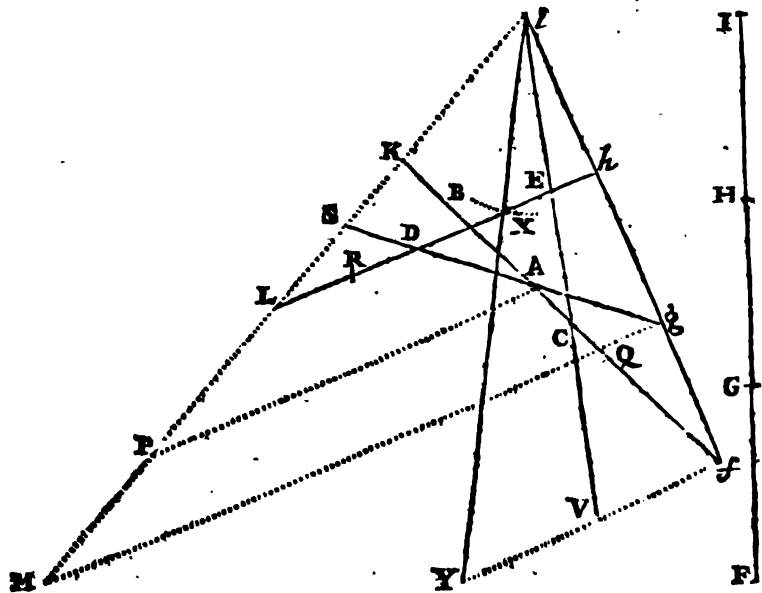
Secent enim circuli duo primi FSG, FTH se mutuo in K . Jungantur PK, QK, RK, aK, bK, cK , & producat QP ad L . Anguli ad circumferentias FaK, FbK, FcK sunt semisses angulorum FPK, FQK, FRK ad centra, adeoque angulorum illorum dimidiis LPK, LQK, LRK æquales. Est ergo Figura $PQRK$ Figuræ $abcK$ æquiangula & similis, & propterea ab est ad bc ut PQ ad QR , id est, ut AB ad BC . Angulis insuper FaG, FbH, FcI æquantur fAg, fBb, fCi per constructionem. Ergo Figuræ $abcFGHI$ Figura similis $ABCfgbi$ compleri potest. Quo facto Trapezium $fgbi$ constituetur simile Trapezio $FGHI$ & angulis suis f, g, b, i tanget rectas ABC, AD, BD, CE . $Q. E. F.$

Carol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI usque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant, & in hoc casu construendo Problema, ducetur recta $fgbi$ cujus partes fg, gb, bi , rectis quatuor positione datis AB & AD, AD & BD, BD & CE interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI , eundemque servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

Produ-

De Moto
Corporum Producantur AB ad K , & BD ad L , ut sit BK ad AB ut
 HI ad GH ; & DL ad BD ut GI ad FG ; & jungatur KL oc-
currens rectæ CE in i . Producatur iL ad M , ut sit LM ad iL
ut GH ad HI , & agatur tum MQ ipsi LB parallela rectæque
 AD occurrens in g , tum gi secans AB , BD in f , b . Dico fac-
tum.

Secet enim Mg rectam AB in Q , & AD rectam KL in S , &
agatur AP quæ sit ipsi BD parallela & occurrat iL in P , &
erunt gM ad Lb (gi ad bi , Mi ad Li ; GI ad HI , AK
ad BK) & AP ad BL in eadem ratione. Secetur DL in R



ut sit DL ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales
 gS ad gM , AS ad AP , & DS ad DL ; erit, ex æquo, ut
 gS ad Lb ita AS ad BL & DS ad RL ; & mixtim, $BL-RL$
ad $Lb-BL$ ut $AS-DS$ ad $gS-AS$. Id est BR ad Bb
ut AD ad Ag adeoque ut BD ad gQ . Et vicissim BR ad BD
ut Bb ad gQ , seu fb ad fg . Sed ex constructione linea BL
eadem ratione secta fuit in D & R atque linea FI in G & H :
ideoque est BR ad BD ut FH ad FG . Ergo fb est ad fg
ut FH ad FG . Cum igitur sit etiam gi ad bi ut Mi ad Li ,
id est, ut GI ad HI , patet lineas FI , fi in g & b , G & H
similiter sectas esse. $Q.E.F.$

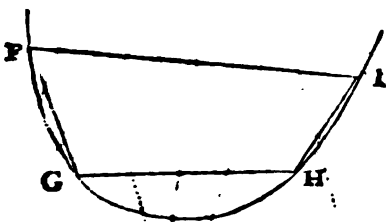
In constructione Corollarii hujus postquam ducitur LK secans CE in i , producere licet iE ad V , ut sit EV ad Ei ut FH ad HI , & agere Vf parallelam ipsi BD . Eodem recidit si centro i , in intervallo IH , describatur circulus secans BD in X , & producat iX ad T , ut sit iT æqualis IF , & agatur Tf ipsi BD parallela.

LIBER
PRIMUS

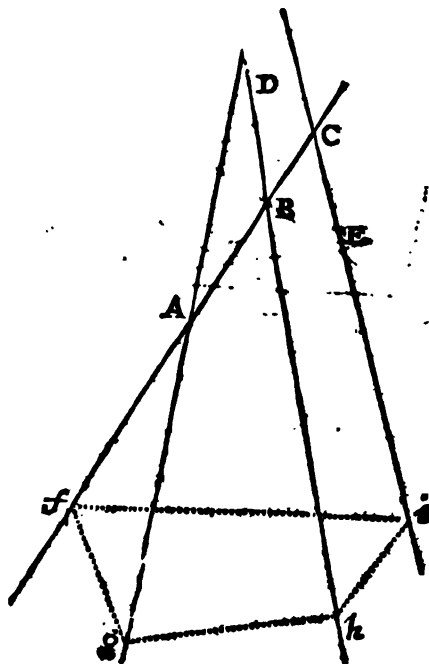
Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisus* olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.

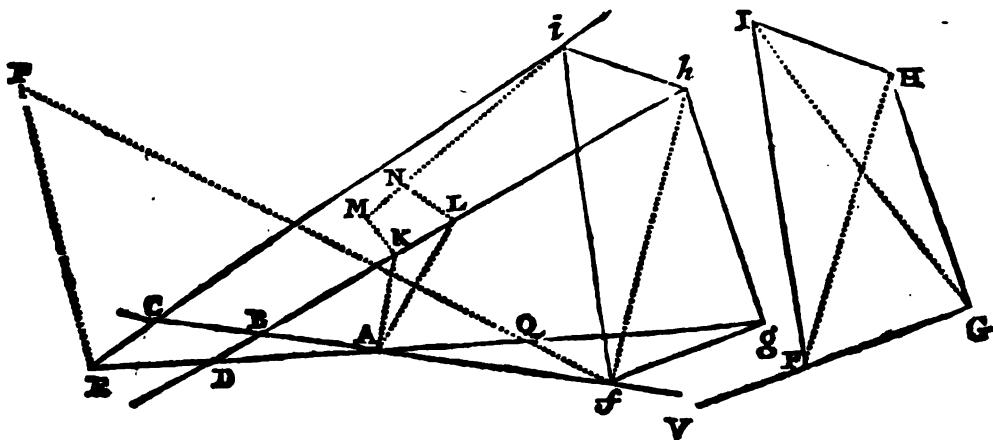


Describenda sit Trajectoria $fgbi$, quæ similis sit Lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes fg , gb , bi illius partibus FG , GH , HI similes & proportionales, rectis AB & AD , AD & BD , BD & CE positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG , GH , HI , FI , describatur (per Lem. xxvii.) Trapezium $fgbi$ quod sit Trapezio $FGHI$ simile & cujus anguli f , g , b , i tangent rectas illas positione datas AB , AD , BD , CE , singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc Trapezium describatur Trajectoria curvæ Lineæ $FGHI$ consimilis.



Scholium

Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis FG , GH , HI , FI produc GF ad V , jungeque FH , IG , & angulis FGH , VFH fac angulos CAK , DAL æquales. Concurrant AK , AL cum recta BD in K & L , & inde agantur KM , LN , quarum KM constituat angulum AKM æqualem angulo GHI , sitque ad AK ut est HI ad GH , & LN constituat angulum ALN æqualem angulo FHI , sitque ad AL ut HI ad FH . Ducantur autem AK , KM , AL , LN ad eas partes linearum AD , AK , AL , ut literæ $CAKMC$, $ALKA$, $DALND$ eodem ordine cum literis $FGHIF$ in orbem redeant; & acta MN occurrat rectæ CE in i . Fac angulum iEP æqua-



lem angulo IGF , sitque PE ad Ei ut FG ad GI ; & per P agatur PQf , quæ cum recta ADE contineat angulum PQE æqualem angulo FIG , rectæque AB occurrat in f , & jungatur fi . Agantur autem PE & PQ ad eas partes linearum CE , PE , ut literarum $PEiP$ & $PEQP$ idem sit ordo circularis qui literarum $FGHIF$, & si super linea fi eodem quoque literarum ordine constitutur Trapezium $fgbi$ Trapezio $FGHI$ simile, & circumscribatur Trajectoria specie data, solvetur Problema.

Haftenus de Orbibus inveniendis. Superest ut Motus corporum in Orbibus inventis determinemus.

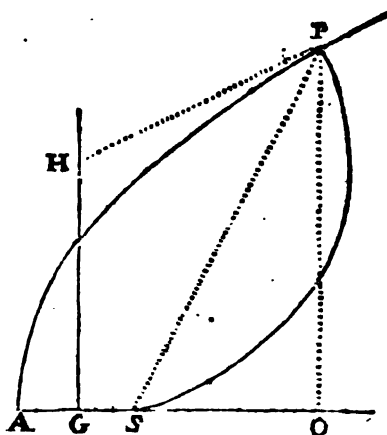
SECTIO VI.

De Inventione Motuum in Orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, sitque $4 AS \times M$ æquale aræ Parabolicæ abscindendæ APS , quæ radio SP , vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas aræ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca AS in G , erigeque perpendicularum GH æquale $3M$, & Circulus centro H , intervallo HS descriptus secabit Parabolam in loco quaesito P . Nam, demissa ad axem perpendiculari PO & ducta PH , est



$$AGq + GHq (= HPq = AO - AG: quad. + PO - GH: quad.) = AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq. \text{ Unde } 2GH \times PO (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{1}{4} POq.$$

Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$ fiet $\frac{1}{3} GH \times AS (= \frac{1}{3} AO \times PO + \frac{1}{3} AS \times PO) = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO = \text{aræ } APO - SPO$

$= \text{aræ } APS$. Sed GH erat $3M$, & inde $\frac{1}{3} GH \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo aræ abscissa APS æqualis est abscindendæ $4AS \times M$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc GH est ad AS , ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendicularum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et Circulo ASP per corpus motum P perpetuo transiente, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus habuit

DE MOTU
CORPORUM in vertice A , ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P , ea cum velocitate quam habuit in vertice A , describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP . Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendicularum rectae GH occurrens in H .

L E M M A XXVIII.

Nulla extat Figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per aequationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu; & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper ea cum velocitate, quae sit ut rectae illius intra Ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si areae Ovalis a recta illa abscissae incrementum per finitam aequationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem aequationem distantia puncti a polo, quae huic areae proportionalis est, adeoque omnia Spiralis puncta per aequationem finitam inveniri possunt: & propterea recta cujusvis positione datae intersectio cum Spirali inveniri etiam potest per aequationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta Spiralem secat in punctis numero infinitis, & aequatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, adeoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam Circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per aequationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam inveniat. Quoniam duarum sectionum Conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per aequationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illae seorsim quaerantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque & propterea eadem semper conclusio, quae igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde

Unde etiam intersectiones Sectionum Conicarum & Curvarum tertiae potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per **æquationes sex dimensionum**, & intersectiones duarum Curvarum tertiae potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per **æquationes dimensionum novem**. Id nisi necessario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & plusquam Solida ad Solida. Loquor hic de Curvis potestate irreducibilibus. Nam si æquatio per quam Curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: Curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum & sectionum Conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum; ternæ rectarum & Curvarum irreducibilium tertiae potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & Curvarum irreducibilium quartae potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo rectæ & Spiralis intersectiones numero infinitæ, cum Curva hæc sit simplex & in Curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendicularum, & perpendicularum illud una cum secante revolvatur circa polum, intersectiones Spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & Spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

LIBER
PRIMUS.

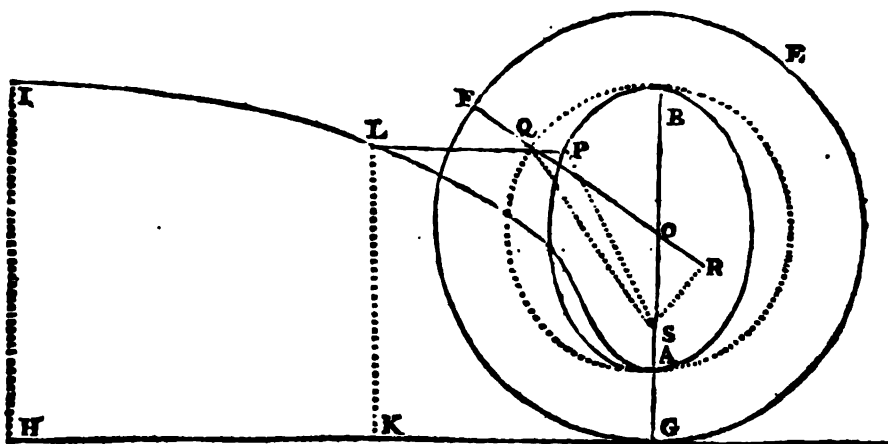
Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo Spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De Ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem Curvarum Geometricæ rationalium determinari nequit. Curvas Geometricæ rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometricæ irracionales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irracionales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometricæ irracionalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, & O centrum, sitque P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G , ut sit OG ad OA ut OA ad OS . Erige perpendiculum GH , cen-



troque O & intervallo OG describe circulum EFG , & super regula GH , ceu fundo, progrediatur Rota GEF revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo A describendo Trochoidem ALI . Quo

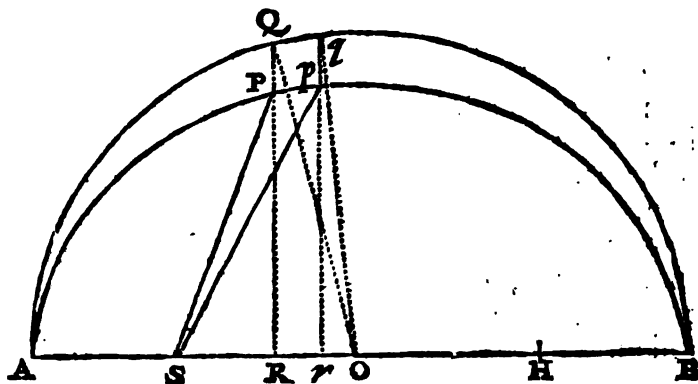
Quo facto, cape GK in ratione ad Rotæ perimetrum $GEFG$, ut est tempus quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum AP , ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendiculum KL occurrens Trochoidi in L , & acta LP ipsi KG parallela occurret Ellipsi in corporis loco quæsito P .

Nam centro O , intervallo OA describatur semicirculus AQB , & arcui AQ occurrat LP producta in Q , junganturque SQ , OQ . Arcui EF occurrat OQ in F , & in eandem OQ demittatur perpendiculum SR . Area APS est ut area AQS , id est, ut differentia inter sectorem OQA & triangulum OQS , sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR , adeoque (ob æqualitatem datarum rationum SR ad sinum arcus AQ , OS ad OA , OA ad OG , AQ ad GF , & divisim $AQ - SR$ ad $GF - \sin. \text{arc. } AQ$) ut GK differentia inter arcum GF & sinum arcus AQ .
Q. E. D.

Scholium.

Cæterum, cum difficilis sit hujus Curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B , qui fit ad angulum graduum $57, 29578$, quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia SH ad Ellipseos diametrum AB ; tum etiam longitudo quædam L , quæ fit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem quamvis (vel

utcumque conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus P proximus vero ejus loco p . Demissaque ad axem Ellipseos ordinatim applicata PR , ex proportionem diametrorum Ellipseos, dabitur Circuli circumscri-

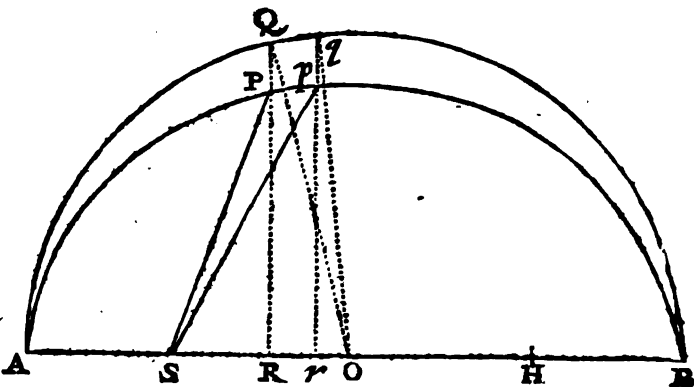


pti AQB ordinatim applicata RQ , quæ sinus est anguli AOQ existente AO radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus temporis propor-

DE MOTU
CORPORUM

tionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos, ut est tempus quo corpus descripsit arcum Ap , ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Sit angulus iste N . Tum capiatur & angulus D ad angulum B , ut est sinus iste anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum $N - AOQ + D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B , ut est sinus anguli $AOQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - AOQ - E + F$ ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli $AOQ + E$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B , ut est sinus anguli $AOQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - AOQ - E - G + H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $AOQ + E + G$ diminutam, ubi angulus iste re-

cto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ + E + G + I + \&c.$ & ex cosinu ejus Or & ordinata pr , quæ est ad sinum ejus

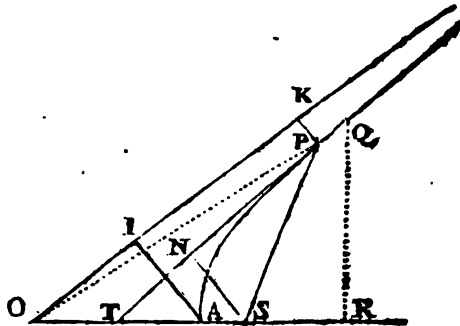


qr ut Ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p . Si quando angulus $N - AOQ + D$ negativus est, debet signum $+$ ipsius E ubique mutari in $-$, & signum $-$ in $+$. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I , ubi anguli $N - AOQ - E + F$, & $N - AOQ - E - G + H$ negativi produnt. Convergit autem series infinita $AOQ + E + G + I + \&c.$ quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E . Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APs sit differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium OQ perpendiculariter demissam.

Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus Centrum O , Vertex A , Umbilicus S & Asymptotos OK . Cognoscatur

noscat quantitas areæ abscindendæ temporì proportionalis. Sit **en** LIBRUM
A, & fiat conjectura de positione rectæ **SP**, quæ arcem **APS** abscin- PRIMUS
 dat veræ proximam. Jungatur

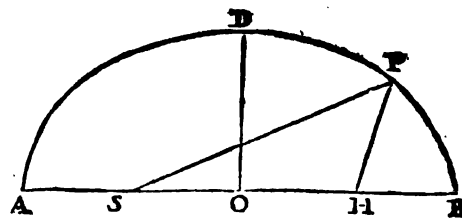
OP, & ab **A** & **P** ad Asympto-
 ton agantur **AI**, **PK** Asympto-
 to alteri parallelæ, & per Tabu-
 lam Logarithmorum dabitur A-
 rea **AIKP**, eique æqualis area
OPA, quæ subducta de trian-
 gulo **OPS** reliquet aream ab-
 scissam **APS**. Applicando areæ
 abscindendæ **A** & abscissæ **APS**
 differentiam duplam $2 APS - 2$



A vel $2 A - 2 APS$ ad lineam **SN**, quæ ab umbilico **S** in tangen-
 tem **PT** perpendicularis est, orietur longitudo chordæ **PQ**. Incri-
 batur autem chorda illa **PQ** inter **A** & **P**, si area abscissa **APS**
 major sit area abscindenda **A**, secus ad puncti **P** contrarias partes:
 & punctum **Q** erit locus corporis accuratior. Et computatione re-
 petita invenietur idem accuratior in perpetuum.

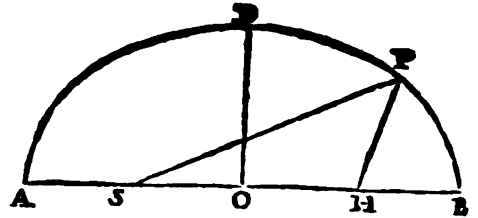
Atque his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum
 usibus Astronomicis accommodatior est calculus particularis qui se-
 quitur. Existentibus **AO**, **OB**, **OD** semiaxibus Ellipseos, & **L**
 ipsius latere recto, ac **D** differentia inter semiaxem minorem **OD**
 & lateris recti semissem $\frac{1}{2} L$; quære tum angulum **Y**, cujus sinus

fit ad Radium ut est rectangulum
 sub differentia illa **D**, & semi-
 summa axium **AO** + **OD** ad
 quadratum axis majoris **AB**; tum
 angulum **Z**, cujus sinus fit ad Ra-
 dium ut est duplum rectangulum
 sub umbilicorum distantia **SH** &
 differentia illa **D** ad triplum



quadratum semiaxis majoris **AO**. His angulis semel inventis;
 locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum **T**
 proportionalem temporì quo arcus **BP** descriptus est, seu mo-
 tui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum **V** (pri-
 mam medi motus æquationem) ad angulum **Y** (æquationem
 maximam primam) ut est sinus dupli anguli **T** ad Radium;
 atque

De Motu atque angulum X (æquationem secundam) ad angulum Z (æqua-
Corporum tionem maximam secundam) ut est cubus sinus anguli T ad cu-
 bum Radii. Angulorum T, V, X vel summæ $T + X + V$, si an-
 gulus T recto minor est, vel differentiæ $T + X - V$, si is recto
 major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum BHP
 (motum medium æquatum;) & si HP occurrat Ellipsi in P , ac-
 ta SP abscindet aream BSP temporis proportionalem quampro-
 xime. Hæc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angu-
 lorum perexiguorum V & X (in
 minutis secundis, si placet, po-
 sitorum) figuras duas tresve pri-
 mas invenire sufficit. Sed & sa-
 tis accurata est ad Theoriam Pla-
 netarum. Nam in Orbe vel Mar-
 tis ipsius, cujus Æquatio centri
 maxima est graduum decem, er-
 ror vix superabit minutum unum secundum. Invento autem an-
 gulo motus medii æquati BHP , angulus veri motus BSP
 & distantia SP in promptu sunt per *Wardi* methodum notissi-
 mam.



Hactenus de motu corporum in lineis Curvis. Fieri autem po-
 test ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad is-
 tiusmodi Motus spectant, pergo jam exponere.

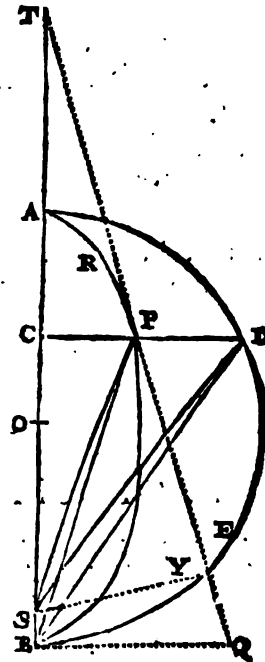
S E C T I O VII.

De Corporum Ascensu & Descensu Rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, Spatia definire quae corpus recta cadendo datis temporibus describit.

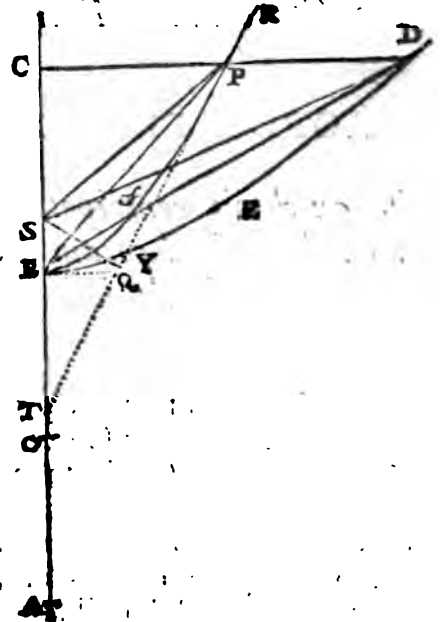
Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter describet id, per Corol. 1. Prop. XIII, Sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit Sectio illa Conica $ARPB$ & umbilicus ejus S . Et primo si Figura Ellipsis est, super hujus axe majore AB describatur Semicirculus ADB , & per corpus decidens transeat recta $DP C$ perpendicularis ad axem; ac tunc DS, PS erit area ASD areae ASP atque adeo etiam temporis proportionalis. Manente axe AB minuatur perpetuo latitudo Ellipseos; & semper manebit area ASD temporis proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & Orbe APB jam coincidente cum axe AB & umbilico S cum axis termino B , descendet corpus in recta AC , & area ABD evadet temporis proportionalis. Dabitur itaque Spatium AC , quod corpus de loco A perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo temporis proportionalis capiatur area ABD , & a puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC . Q. E. I.



Cas.

De Motu
Corporum

Caf. 2. Si Figura illa RPB Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem AB Hyperbola rectangula BED : & quoniam areae $CS P$, $CB f P$, $SP f B$ sunt ad areas $CS D$, $CBED$, $SDEB$, singulae ad singulas, in data ratione altitudinum CP , CD ; & area $SP f B$ proportionalis est tempori quo corpus P movebitur per arcum $P f B$; erit etiam area $SDEB$ eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolae RPB in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus PB cum recta CB & umbilicus S cum vertice B & recta SD cum recta BD . Proinde area $BDEB$ proportionalis erit tempori quo corpus C recto descensu describit lineam CB . *Q. E. I.*



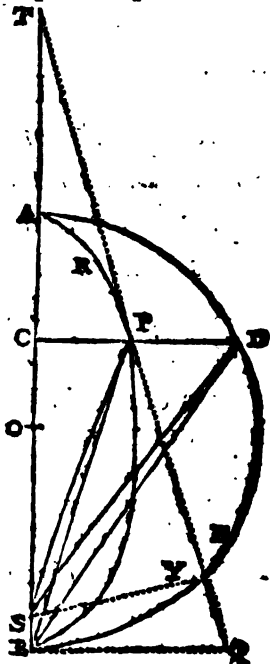
Caf. 3. Et simili argumento si Figura RPB Parabola est, & eodem vertice principali B describatur alia Parabola BED , quae semper maneat data interea dum Parabola prior in cuius perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea CB ; fiet segmentum Parabolicum $BDEB$ proportionale tempori quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B . *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum describentis, in subduplicata ratione quam AC, distantia corporis a Circuli vel Hyperbolae rectangulae vertice ulteriore A, habet ad Figuram semidiametrum principalem $\frac{1}{2} AB$.

Bisecetur AB , communis utriusque Figuræ RPB , DEB diameter, in O ; & agatur recta PT quæ tangat Figuram RPB in P , atque etiam

etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T , fitque ST ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque Figuræ RPB latus rectum ponatur L . Constat per Cor. 9. Prop. xvi, quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P fit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum Circulum describentis in subduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times SP$ ad ST quadratum. Est autem ex Conicis ACB ad CPq ut $2AO$ ad L , adeoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L . Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST quad. Porro ex Conicis est CO ad BO ut BO ad TO , & composite vel divisim ut CB ad BT . Unde vel dividendo vel componendo fit BO — vel + CO ad BO ut CT ad BT , id est AC ad AO ut CP ad BQ ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum Figuræ RPB latitudo CP , sic ut punctum P coeat cum puncto C , punctumque S cum puncto B , & linea SP cum linea BC , lineaque ST cum linea BQ ; & corporis jam recta descendens in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum describentis, in subduplicata ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq ; hoc est (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq) in subduplicata ratione AC ad AO sive $\frac{1}{2} AB$. Q. E. D.



LIBER PRIMUS.

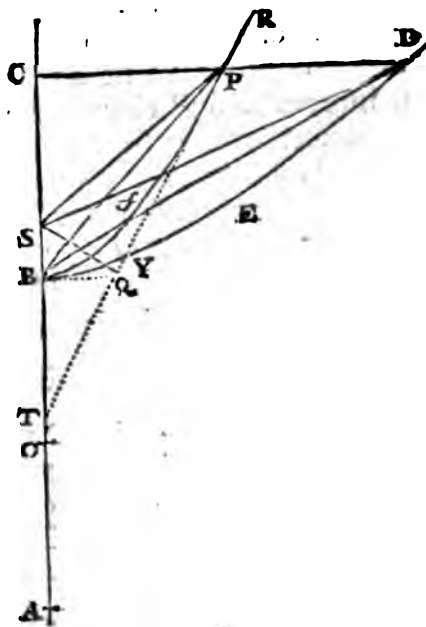
Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO .

Corol. 2. Corpus ad datam a centro distantiam in Circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si Figura BED Parabola est, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati qua corpus centro B dimidio intervalli sui BC Circulum uniformiter describere potest.

Nam corporis Parabolam RPB circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per Corol. 7. Prop. xvi) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli SP Circulum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur Parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus Parabolicus PfB cum recta CB , centrum S cum vertice B , & intervallum SP cum intervallo BC coincidat, & constabit Propositio. *Q.E.D.*



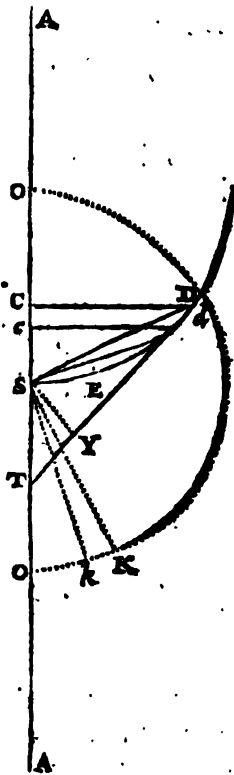
PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod area Figuræ DES, radio indefinito SD descripta, æqualis sit aræ quam corpus, radio dimidium lateris recti Figuræ DES æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.

Nam concipe corpus C quam minima temporis particula lineolam Cc cadendo describere, & interea corpus aliud K uniformiter in Circulo OKk circa centrum S gyrando, arcum Kk describere. Erigantur perpendiculara CD , cd occurrentia Figuræ DES in D , d . Jungantur SD , Sd , SK , Sk & ducatur Dd axi AS occurrens in T , & ad eam demittatur perpendicularum ST .

Cas.

Caf. 1. Jam si Figura DES Circulus est vel Hyperbola, bisece-
tur ejus transversa diameter AS in O , & erit
 SO dimidium lateris recti. Et quoniam est
 TC ad TD ut Cc ad Dd , & TD ad TS ut
 CD ad ST , erit ex æquo TC ad TS ut
 $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$. Sed per Corol. 1 Prop.
xxxiii, est TC ad TS ut AC ad AO , puta si
in coitu punctorum D, d , capiantur linearum
rationes ultimæ. Ergo AC est ad (AO seu)
 SK ut $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$. Porro corpo-
ris descendens velocitas in C est ad velocita-
tem corporis Circulum intervallo SC circa cen-
trum S describentis in subduplicata ratione
 AC ad (AO vel) SK (per Prop. xxxiii.) Et
hæc velocitas ad velocitatem corporis descri-
bentis Circulum OKk in subduplicata ratione
 SK ad SC per Cor. 6. Prop. iv, & ex æquo
velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola
 Cc ad arcum Kk in subduplicata ratione AC
ad SC , id est in ratione AC ad CD . Quare
est $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea
 AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $ST \times Dd$, in-
deque $SK \times Kk$ æquale $ST \times Dd$, & $\frac{1}{2}$
 $SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} ST \times Dd$, id est area KSk
æqualis areæ SDd .



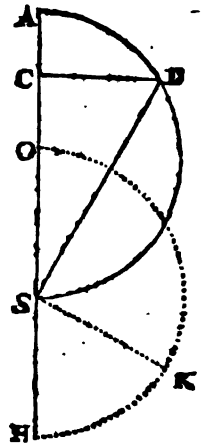
Singulis igitur temporis particulis generantur
arearum duarum particulæ KSk & SDd , quæ, si magnitudo ear-
um minuat & numerus augeatur in infinitum, rationem obti-
nent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis i v) areæ
totæ simul genitæ sunt semper æquales. Q. E. D.

Caf. 2. Quod si Figura DES Parabola sit, inveniatur esse ut su-
pra $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$ ut TC ad TS , hoc est ut 2 ad 1, adeo-
que $\frac{1}{2} CD \times Cc$ æquale esse $\frac{1}{2} ST \times Dd$. Sed corporis cadentis ve-
locitas in C æqualis est velocitati qua Circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uni-
formiter describi possit (per Prop. xxxiv) Et hæc velocitas ad ve-
locitatem qua Circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola
 Cc ad arcum Kk (per Corol. 6. Prop. iv) est in subduplicata ratione
 SK ad $\frac{1}{2} SC$ id est, in ratione SK ad $\frac{1}{2} CD$. Quare est $\frac{1}{2} SK \times Kk$
æquale $\frac{1}{2} CD \times Cc$, adeoque æquale $\frac{1}{2} ST \times Dd$, hoc est, area
 KSk æqualis areæ SDd , ut supra. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

*Corporis de loco dato A cadentis determinare
Tempora descensus.*

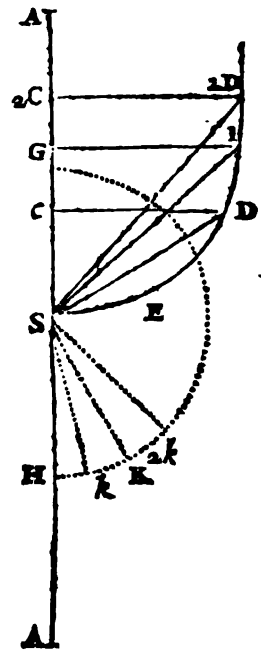
Super diametro AS (distantia corporis a centro sub initio) describe Semicirculum ADS , ut & huic æqualem Semicirculum OKH circa centrum S . De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD . Junge SD , & areæ ASD æqualem constituè sectorem OSK . Patet per Prop. xxxv., quod corpus cadendo describet spatium AC eodem Tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum S gyrando, describere potest arcum OK . Q. E. F.



PROPOSITIO XXXVII PROBLEMA XXVI.

*Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire
Tempora ascensus vel descensus.*

Exeat corpus de loco dato G secundum lineam ASG cum velocitate quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in Circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum SG circa centrum S revolvi posset, cape GA ad $\frac{1}{2} AS$. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum A infinite distat, quo casu parabola vertice S , axe SC , latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro SA describi debet. Patet per Prop. xxxiii. Tum centro S , intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur Circulus HKk , & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis G, C , erigantur perpendiculara GI, CD occurrentia Conicæ Sectioni vel Circulo in I ac D .



Dein

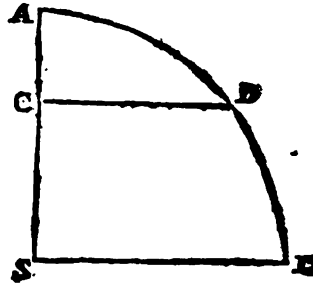
Dein junctis SI , SD , fiant segmentis $SEIS$, $SEDS$, sectores HSK , HSk æquales, & per Prop. xxxv, corpus G describet spatium GC eodem Tempore quo corpus K describere potest arcum Kk . *Q. E. F.*

LIBER
PRIMUS.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod Vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantia locorum a centro, dico quod cadentium Tempora, Velocitates & Spatia descripta sunt arcibus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respective proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A secundum rectam AS ; & centro virium S , intervallo AS , describatur Circuli quadrans AE , sitque CD sinus rectus arcus cujusvis AD ; & corpus A , Tempore AD , cadendo describet Spatium AC , inque loco C acquirat Velocitatem CD .



Demonstratur eodem modo ex Propositione x, quo Propositio xxxii, ex Propositione xi demonstrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt Tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S , & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem ADE .

Corol. 2. Proinde æqualia sunt Tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. iv.) æquantur.

PROPO

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Posita cujuscunque generis *Vi centripeta*, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum *Velocitas in locis singulis*, tum *Tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet*: Et contra.

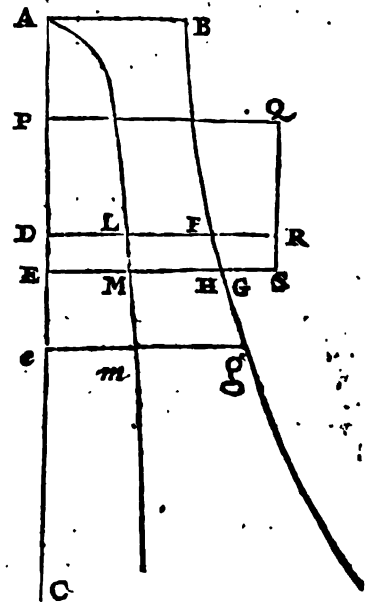
De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deque loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipso motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis *Velocitas in loco quovis E* ut area curvilinearæ *ABGE* latus quadratum. Q. E. I.

In *EG* capiatur *EM* lateri quadrato areae *ABGE* reciproce proportionalis, & sit *ALM* linea curva quam punctum *M* perpetuo tangit, & erit *Tempus quo corpus cadendo describit lineam AE* ut area curvilinearæ *ALME*. Q. E. I.

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, sitque *DLF* locus lineæ *EMG* ubi corpus versabatur in *D*; & si ea sit vis centripeta, ut areae *ABGE* latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in *D* & *E* scribantur *V* & *V+I* erit area *ABFD* ut VV , & area *ABGE* ut $VV + 2VI + II$, & divisim area *DFGE* ut $2VI + II$, adeoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI + II}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nascentium

rationes sumantur, longitudo *DF* ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, adeoque eti-

am ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus quo corpus



corpus cadendo describit lineolam DE , ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF . Ergo vis ipsi DF vel

LIBER
PRIMUS.

EG proportionalis facit ut corpus ea cum Velocitate descendat quæ sit ut areæ $ABGE$ latus quadratum. *Q. E. D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE describatur, sit ut velocitas inverse adeoque ut areæ $ABFD$ latus quadratum inverse; sitque DL , atque adeo area nascentis $DLME$, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area $DLME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. iv.) Tempus totum quo linea AE describitur ut area tota AME . *Q. E. D.*

Corol. 1. Si P sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo supponitur Gravitatis) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco D , & in perpendiculari DF capiatur DR , quæ sit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D , & compleatur rectangulum $PDRQ$, eique æqualis abscindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $DRSE$, cum sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad $2VI$, adeoque ut $\frac{1}{2}V$ ad I , id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area $PQRD$ ad aream $DRSE$, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ DF , DR , adeoque ut areæ nascentes $DFGE$, $DRSE$; erunt (ex æquo) areæ totæ $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e , erigendo ordinatam eg , & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est latus quadratum rectanguli $PQRD$ area curvilinea $DFge$ vel aucti, si locus e est loco D inferior, vel diminuti, si is superior est, ad latus quadratum rectanguli folius $PQRD$, id est, ut $\sqrt{PQRD + \text{vel} - DFge}$ ad \sqrt{PQRD} .

Corol.

DE MOTU
CORPORUM

Carol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD$ + vel $-DFge$, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P & cadendo pervenit ad D , ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PE in subduplicata ratione PD ad PE , id est (lineola DE jamjam nascente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$ seu $2PD$ ad $2PD + DE$, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut $2PD$ ad DE , adeoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

S E C T I O VIII.

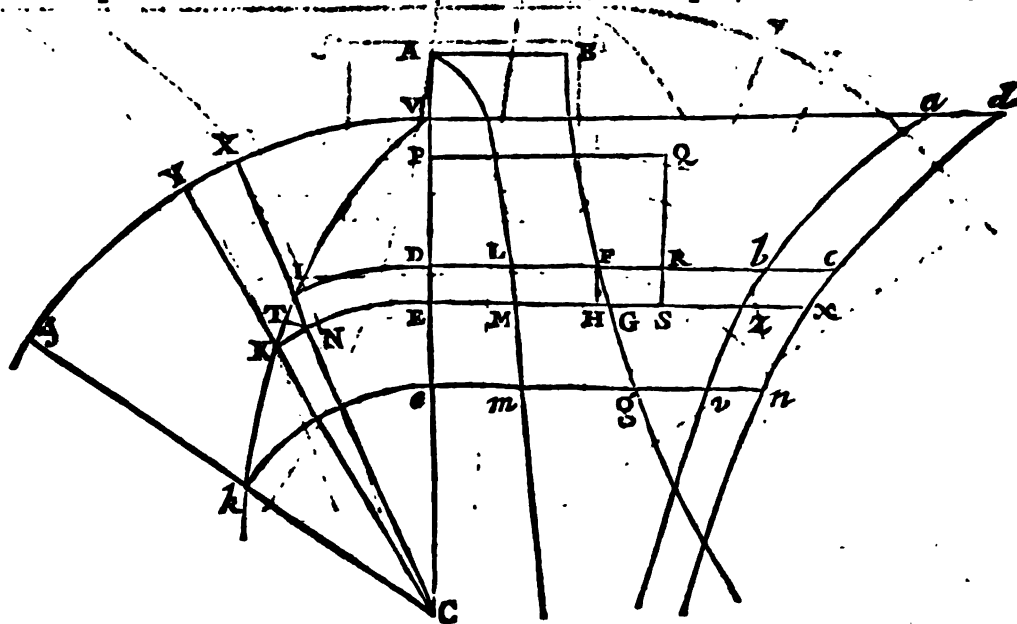
*De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibus-
cunque centripetis agitata revolvuntur.*

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

*Si corpus, cogente Vi quacunque centripeta, moveatur ut-
cunque, & corpus aliud recta ascendat vel descendat,
sintque eorum Velocitates in aliquo æqualium altitudinum
casu æquales, Velocitates eorum in omnibus æqualibus al-
titudinibus erunt æquales.*

Descendat corpus aliquod ab A per D, E , ad centrum C , & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$, Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E , curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipsi KE in N , & in IK demittatur perpendicularum NT ; sitque circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates

tes æquales. Quoniam distantie CD , CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponentur hæ vires per æquales lineolas DE , IN ; & si vis una IN (per Legum Corol. 2.) resolvatur in duas NT & IT , vis NT , agendo secundum lineam NT corporis cursui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea $ITKk$ progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera IT , secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium DE , IN , IK , IT , NT rationes primæ) sunt ut lineæ DE , IT : temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ, & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK describuntur, ob æqualitatem velocita-

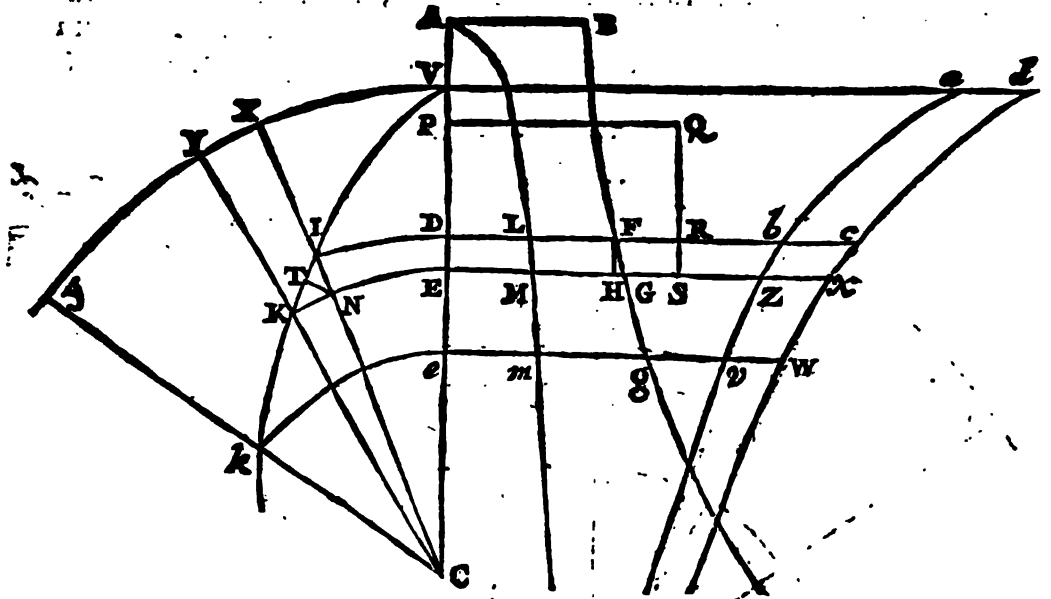


tum sunt ut viæ descriptæ DE & IK , adeoque accelerationes, in cursu corporum per lineas DE & IK , sunt ut DE & IT , DE & IK conjunctim, id est ut DE quad. & $IT \times IK$ rectangulum. Sed rectangulum $IT \times IK$ æquale est IN quadrato, hoc est, æquale DE quadrato; & propterea accelerationes in transitu corporum a D & I ad E & K æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum

DE MOTU **CORPORUM** porum velocitates in *E* & *K* & eodem argumento semper repetientur æquales in subsequentiis æqualibus distantis. Q. E. D.

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus vel funipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque impedimento vasis absolute lubrici idem præstatur quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.



Corol. 2. Hinc etiam si quantitas *P* sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunque revolvens, deque quovis Trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas *A* distantia corporis a centro in alio quovis Orbitæ puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius *A* dignitas quælibet A^{n-1} , cujus Index $n-1$ est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine *A* erit ut $\sqrt{P-A^n}$, atque adeo datur: Namque velocitas recta ascendentis ac descendentis (per Prop. xxxix.) est in hac ipsa ratione.

PROPO.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriae in quibus corpora movebuntur, tum Tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quaelibet ad centrum C & invenienda sit Trajectoria $VITKk$. Detur Circulus VXY centro C intervallo quovis CV descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli ID , KE Trajectoriam secantes in I & K rectamque CV in D & E . Age tum rectam $CNIX$ secantem circulos KE , VT in N & X , tum rectam CKT occurrentem circulo VXY in T . Sint autem puncta I & K sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab V per I , T & K ad k ; sitque punctum A locus ille de quo corpus aliud cadere debet ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in I ; & stantibus quæ in Propositione xxxix, lineola IK , dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas atque adeo ut latus quadratum areæ $ABFD$, & triangulum ICK tempori proportionale dabitur, adeoque KN erit reciproce ut altitudo IC , id est, si detur quantitas aliqua Q , & altitudo IC nominetur A , ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z ,

& ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu \sqrt{ABFD} ad Z ut est IK ad KN , & erit in omni casu \sqrt{ABFD} ad Z ut IK ad KN , & $ABFD$ ad ZZ ut IK $q.$ ad KN $q.$ & divisim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut IN $quad.$ ad KN $quad.$; adeoque

que $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad $(Z$ seu $\frac{Q}{A})$ ut IN ad KN , & propterea

$A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$ Unde cum $TX \times XC$ sit ad

$A \times KN$ ut CX $q.$ ad AA , erit rectangulum $TX \times XC$ æquale

$\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur si in perpendicularo DF capiantur

femper Db , Dc ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$

æquales respective, & describantur curvæ lineæ ab , cd quas

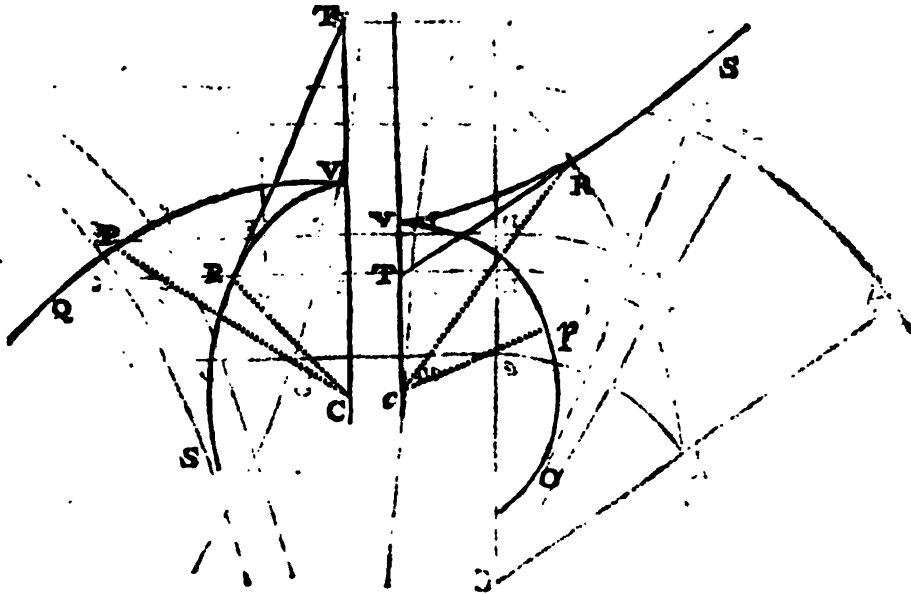
DE MOTU puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC , erigatur perpendicularum Vad abscindens areas curvilineas $VDb a$, $VDcd$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ez : quoniam rectangulum $D b \times IN$ seu $D b z E$ æquale est dimidio rectanguli $A \times KN$, seu triangulo ICK ; & rectangulum $D c \times IN$ seu $D c z E$ æquale est dimidio rectanguli $IX \times XC$, seu triangulo XCT ; hoc est, quoniam arearum $VDb a$, VIC æquales semper sunt nascentes particulæ $D b z E$, ICK , & arearum $VDcd$, $V CX$ æquales semper sunt nascentes particulæ $D c z E$, XCT , erit area genita $VDb a$ æqualis areæ genitæ VIC , adeoque tempore proportionalis, & area genita $VDcd$ æqualis Sectori genito $V CX$. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V , dabitur area ipsi proportionalis $VDb a$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI ; & area $VDcd$, eique æqualis Sector $V CX$ una cum ejus angulo VCI . Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I , in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est Apfides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim Apfides puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam VIK : id quod fit ubi rectæ IK & NK æquantur, adeoque ubi area $ABFD$ æqualis est ZZ .

Corol. 2. Sed & angulus KIN , in quo Trajectoria alibi secat lineam illam IC , ex data corporis altitudine IC expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut KN ad IK , id est, ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V describatur Sectio quælibet Conica $VR S$, & a quovis ejus puncto R agatur Tangens RT occurrens axi infinite producto CV in puncto T ; deinjuncta CR ducatur recta CP , quæ æqualis sit abscissæ CT , angulumque VCP Sectori VCR proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C Vis centripeta Cubo distantiae locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V justa cum Velocitate secundum lineam rectæ CV perpendicularis: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum P perpetuo tangit; adeoque si Conica sectio $CV R S$ Hyperbopse sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascensilla illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corDET quacunque cum Velocitate exeat de loco V , & perinde pusinceperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique

hique ascendere, Figura $CVRS$ vel Hyperbola sit vel Ellipsis, in LIBRA
 veniri potest Trajectoria augendo vel minuendo angulum VCP PRIMUS.
 in data aliqua ratione. Sed &, Vi centripeta in centrifugam versa,



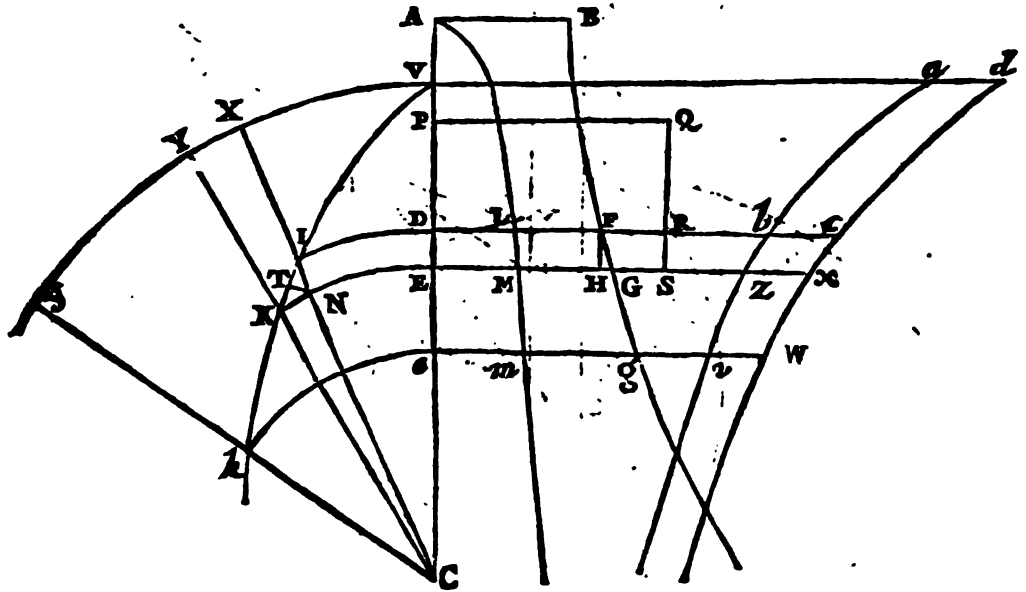
ascendet corpus oblique in Trajectoria VPQ , quæ invenitur capi-
 endo angulum VCP Sectori Elliptico $CVRC$ proportionalem, &
 longitudinem CP longitudini CT æqualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam
 quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gra-
 tia missam facio.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

*Data lege Vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco
 dato cum Velocitate secundum datam rectam egressi.*

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus: exeat
 corpus de loco I secundum lineolam IT , ea cum Velocitate quam
 corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco P cadendo ac-
 quirere posset in D : sitque hæc vis uniformis ad vim qua corpus
 primum

De Motu primum urgetur in I , ut DR ad DF . Pergat autem corpus versus k ;
Corporum centroque C & intervallo Ck describatur circulus ke occurrens rec-
 tæ PD in e , & erigantur curvarum $ALMm$, $BFGg$, $abzv$, $dcxw$



ordinatim applicatæ cm , eg , ev , ew . Ex dato rectangulo $PD R Q$,
 dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur cur-
 væ lineæ $BFGg$, $ALMm$, per constructionem Problematis xxvii,
 & ejus Corol. 1. Deinde ex dato angulo CIT datur proportio nas-
 centium IK , KN , & inde, per constructionem Prob. xxviii, da-
 tur quantitas Q , una cum curvis lineis $abzv$, $dcxw$: adeoque
 completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo Ce vel
 Ck , tum area $Dcwe$, eique æqualis Sector XCy , angulusque ICk
 & locus k in quo corpus tunc versabatur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his Propositionibus Vim centripetam in
 recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque quam
 quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse
 undequae eandem. Atque hactenus Motum corporum in Orbibus
 immobilibus consideravimus. Superest ut de Motu eorum in Orbi-
 bus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

SECTIO

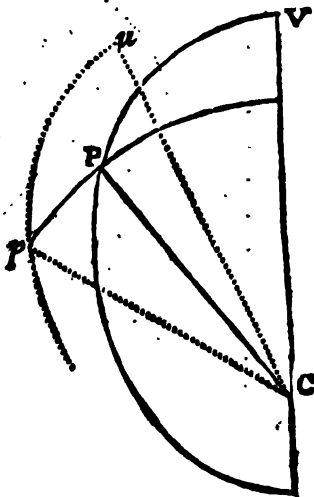
SECTIO IX.

De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apfidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quiescente.

In Orbe VPK positione dato revolvatur corpus P pergendo a V versus K . A centro C agatur semper Cp , quæ sit ipsi CP æqualis, angulumque VCP angulo VCP proportionalem constituat; & area quam linea Cp describit erit ad aream VCP quam linea CP simul describit, ut velocitas lineæ describentis Cp ad velocitatem lineæ describentis CP ; hoc est, ut angulus VCP ad angulum VCP , adeoque in data ratione, & propterea temporis proportionalis. Cum area temporis proportionalis sit quam linea Cp in plano immobili describit; manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis Vi centripeta, revolvi possit una cum puncto p in Curva illa linea quam punctum idem p ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus VCu angulo PCp , & linea Cu lineæ CV , atque Figura $u Cp$ Figuræ VCP æqualis; & corpus in p semper existens movebitur in peri-



Q

peri-

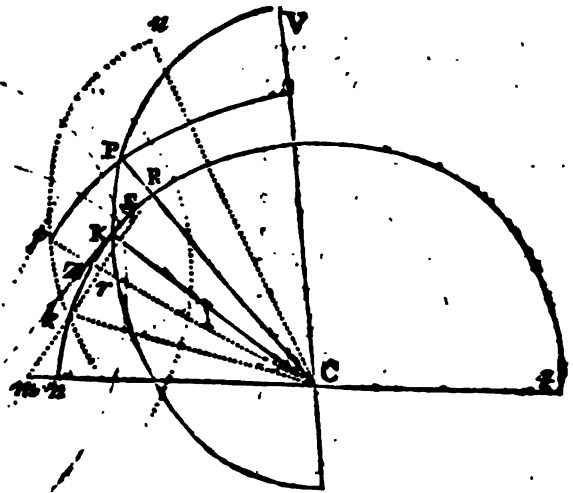
DE Motu perimetro Figuræ revolventis $u C p$, eodemque tempore describet
Contatum arcum ejus $u p$ quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem
 $V P$ in Figura quiescente $V P K$ describere potest. Quærat igitur,
 per Corollarium quintum propositionis vi, Vis centripeta qua
 corpus revolvi possit in Curva illa linea quam punctum p describit
 in plano immobili, & solvetur Problema. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia Virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente equaliter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.

Partibus Orbis quiescentis $V P$, $P K$ sunt similes & æquales. Orbis revolventis partes $u p$, $p k$; & punctorum P , K distantia intelligatur esse quam minima. A puncto k in rectam $p C$ demitte perpendiculum $k r$, idemque produc ad m , ut sit $m r$ ad $k r$ ut angulus $V C p$ ad angulum $V C P$.

Quoniam corporum altitudines $P C$ & $p C$, $K C$ & $k C$ semper æquantur, manifestum est quod linearum $P C$ & $p C$ incrementa vel decreta semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis P & p existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas $P C$, $p C$ determinantur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis $P C$, $p C$, perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P ; ut motus angularis lineæ $p C$, ad motum angularem lineæ $P C$, id est,



ut

ut angulus $\angle V C p$ ad angulum $\angle V C P$. Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K , corpus p æquasi in centrum motu æqualiter movebitur a p versus C , adeoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr , quæ perpendicularis est in lineam pC ; & motu transverso acquireret distantiam a linea pC , quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit a linea PC , ut est motus transversus corporis p ad motum transversum corporis alterius P . Quare cum $k r$ æqualis sit distantie quam corpus P acquirit a linea PC , sitque mr ad kr ut angulus $\angle V C p$ ad angulum $\angle V C P$, hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P , manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m . Hæc ita se habebunt ubi corpora p & P æqualiter secundum lineas pC & PC moventur, adeoque æqualibus Viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulum $p O æ$ ad angulum $p C k$ ut est angulus $\angle V C p$ ad angulum $\angle V C P$, sitque $n C$ æqualis $k C$, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n ; adeoque Vi majore urgetur quam corpus P , si modo angulus $m C p$ angulo $k C p$ major est, id est si Orbis $u p k$ vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea $C P$ in consequentia fertur; & Vi minore si Orbis tardius movetur in antecedentia. Estque Virium differentia ut locorum intervallum mn , per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C in intervallo Cn vel Ck describi intelligatur Circulus secans lineas mr , mn productas in s & t , & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula $p C k$, $p C n$ dentur magnitudine, sunt kr & mr , earumque differentia mk & summa ms reciproce ut altitudo $p C$, adeoque rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis $p C$. Est & mt directe ut $\frac{1}{2} mt$, id est, ut altitudo $p C$. Hæc sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est linea nascentis mn , eique proportionalis Virium differentia reciproce ut cubus altitudinis $p C$. Q. E. D.

Corol. I. Hinc differentia virium in locis P & p vel K & k , est ad vim qua corpus motu Circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in Orbe immobili describit arcum PK , ut lineola nascentis mn ad sinum versum arcus nascentis KK , id est

DE MOTU
CORPORUM

ut $\frac{mk \times ms}{ms}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc est,

si capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp , ut $GG - FF$ ad FF . Et propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur Sector circularis æqualis areae toti VPC , quam corpus P tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus P in Orbe immobili & corpus p in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo descripta fit area VPC uniformiter describere potuisset, ut $GG - FF$ ad FF . Namque Sector ille & area pCk sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si Orbis VPK Ellipsis sit umbilicam habens C & Apfidem summam V ; eique similis & æqualis ponatur Ellipsis upk , ita ut sit semper pC æqualis PC , & angulus VCp sit ad angulum VCP in data ratione G ad F ; pro altitudine autem PC vel pC scribatur A , & pro Ellipseos latere recto ponatur $2R$: erit vis qua

corpus in Ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A cub.}$ &

contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in V erit $\frac{FF}{CV quad.}$ Vis autem

qua corpus in Circulo ad distantiam CV ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in Ellipsi revolvens habet in V , est ad vim qua corpus in Ellipsi revolvens urgetur in Apside V , ut dimidium lateris recti Ellipseos ad Circuli semidiametrum CV ,

adeoque valet $\frac{RFF}{CV cub.}$ & vis quæ sit ad hanc ut $GG - FF$ ad

FF , valet $\frac{RGG - RFF}{CV cub.}$: estque hæc vis (per hujus Corol. 1.)

differentia virium in V quibus corpus P in Ellipsi immota VPK , & corpus p in Ellipsi mobili upk revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A sit ad se-

ipsam in altitudine CV ut $\frac{1}{A cub.}$ ad $\frac{1}{CV cub.}$, eadem differentia

in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$

qua corpus revolvi potest in Ellipsi immobili VPK , addatur excessus $\frac{RGG - RFF}{A cub.}$ & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A cub.}$

qua

qua corpus in Ellipsi mobili *u p k* iisdem temporibus revolvi possit.

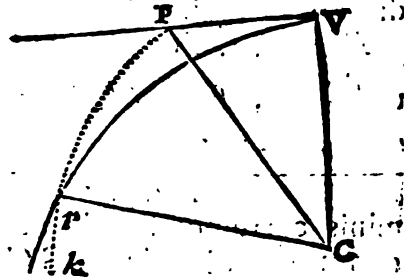
Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si Orbis immobilis *VPK* Ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eique similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis *u p k*; sitque $\angle R$ Ellipseos hujus latus rectum principale, & $\angle T$ latus transversum sive axis major, atque angulus *VCP* semper sit ad angulum *VCP* ut *G* ad *F*; vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T cub.}$ & $\frac{FFA}{T cub.}$

+ $\frac{RGG - RFF}{A cub.}$ respective.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur *T*, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id est radius Circuli æqualiter curvi, nominetur *R*, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi potest, in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$ atque aliis in locis *P* indefinite dicatur *X*, altitudine *CP* nominata *A*, & capiatur *G* ad *F* in data ratione anguli *VCP* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eisdem motus in eadem Trajectoria *u p k* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendicularum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCP*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyri potest in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertię, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum *G*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam



De Moto
CORPORUM

curvam Vpk . Est autem hæc Curva Vpk eadem cum Curva illa VPQ in Corol. 3. Prop. xli inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requirantur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides Orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirerent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apsis summa, & scribantur T pro altitudine maxima CV , A pro altitudine quavis alia CP vel Cp , & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum suum C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A cub.}$, id est

ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A cub.}$, substituendo $T - X$ pro A , erit ut

$\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A cub.}$ Reducenda similiter est vis alia

quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit $A cub.$, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuenti sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoque ut $\frac{A cub.}{A cub.}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T cub. - 3 TTX + 3 TXX - X cub.}{A cub.}$; & collatis Numeratorum ter-

minis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T cub.$ ut FFX ad $-3 TTX + 3 TXX - X cub.$ sive ut $-FF$ ad $-3 TT + 3 TX - XX$. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum

nitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T cub. ut —FF ad — $\sqrt[3]{TT}$ seu GG ad TT ut FF ad $\sqrt[3]{TT}$ & vicissim GG ad FF ut $\sqrt[3]{TT}$ ad $\sqrt[3]{TT}$ id est, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc est angulus $\sqrt[3]{CP}$ ad angulum $\sqrt[3]{CP}$, ut 1 ad $\sqrt[3]{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum $\sqrt[3]{CP}$ (ut ita dicam) gradum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Apside summa ad Apsidem imam descen-

LIBER PRIMUS.

dendo conficiet angulum $\sqrt[3]{CP}$ gradum $\frac{180}{\sqrt[3]{3}}$: id adeo ob similitudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & Orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi Orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Ap-

sidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt[3]{3}}$ graduum, seu 103 gr. 55 m. 23 sec. ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A_{n-3} seu $\frac{A^n}{A_3}$ ubi $n = 3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irracionales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $T - X^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^{n-1}XT^{n-2} + \frac{n-1}{2}XXT^{n-2}$ &c.

Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius RGG — RFF + TFF — FFX, fit RGG — RFF + TFF ad T^n ut —FF ad $-nT^{n-1} + \frac{n-1}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo ratio-

nes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut —FF ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1} , & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-2} id est ut 1 ad n ; adeoque G ad F, id est angulus $\sqrt[3]{CP}$ ad angulum $\sqrt[3]{CP}$, ut

DE MORU ut \sqrt{n} ad \sqrt{m} . Quare cum angulus $\angle VCP$, in descensu corporis
CORPORUM ab Apfide summa ad Apfidem imam, in Ellipsi confectus, sit
 graduum 180; conficietur angulus $\angle VCP$, in descensu corporis
 ab Apfide summa ad Apfidem imam, in Orbe propemodum Cir-
 culari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} pro-
 portionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo
 repetito corpus redibit ab Apfide ima ad Apfidem summam, &
 sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia cor-
 poris a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$ erit n æqualis 4 & \sqrt{n} æqualis 2;
 adeoque angulus inter Apfidem summam & Apfidem imam æ-
 qualis $\frac{180}{2}$ gr. seu 90. gr. Completa igitur quarta parte revolutio-
 nis unius corpus perveniet ad Apfidem imam, & completa alia
 quarta parte ad Apfidem summam, & sic deinceps per vices in
 infinitum. Id quod etiam ex Propositione x. manifestum est. Nam
 corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili,
 cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit re-
 ciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ad
 eoque inter Apfidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$

seu 127 gr. 16 m. 45 sec. & propterea corpus tali vi revolvens, perpe-
 tua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apfide summa ad
 imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis
 centripeta sit reciproce ut latus quadrato quadratum undecimæ
 dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{11}{2}}$, adeoque directe ut
 $\frac{1}{A^{\frac{11}{2}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{2}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360 gr. & prop-
 terea corpus de Apfide summa discedens & subinde perpetuo de-
 scendens, perveniet ad Apfidem imam ubi complevit revolutionem
 integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revlutionem in-
 tegram, redibit ad Apfidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum
 Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim cen-
 tripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A^{cub.}}$, id est, ut $\frac{binT - Xm + cinT - X^n}{A^{cub.}}$

seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \&c.}{A^{cub.}}$$
 &

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ LIBER
ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1}$ PRIMUS.

$+ \frac{mm-m}{2} bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} cXT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ul-

timas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit
 GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, &
vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$.

Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T Arith-

metice per Unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, adeoque ut
 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F , id est angulus VCP ad angulum

VCP , ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum Angulus VCP inter

Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili fit 180 gr.
erit angulus VCP inter easdem Apsides, in Orbe quem corpus vi
centripeta quantitati $\frac{bA^{m+c}A^n}{A^{cub.}}$ proportionali describit, æqua-

lis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento si vis cen-

tripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A^{cub.}}$, angulus inter Apsides invenietur gra-

duum $180 \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur Problema in casibus

difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis est, re-
solvi semper debet in Series convergentes denominatorem habentes
 $A^{cub.}$. Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione prove-
nit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris
hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipsius partem alte-
ram non datam in eadem ratione ponendæ sunt: Et quantitates
superfluas delendo, scribendoque Unitatem pro T , obtinebitur
proportio G ad F .

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas,
inveniri potest dignitas illa ex motu Apsidum; & contra. Ni-
mirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad Apsidem
eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum
 360 , ut numerus aliquis m ad numerum alium n , & altitudo no-
minetur A : erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus In-
dex

DE MOTU **CORPORUM** *de* est $\frac{n^2}{m^2} - 3$. Id quod per **Exempla** secunda manifestum est. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse: Corpus tali vi revolvens deque Apfide discedens, si caperit descendere nunquam perveniet ad Apfidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens Curvam illam lineam de qua egimus in Cor. 3. Prop. XLII. Sin caperit illud, de Apfide discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apfidem summam. Describet enim Curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in recessu a centro, decrescit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apfide discedens, perinde ut caperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad Apfidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apfide ad Apfidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de Apfide ad Apfidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apfide summa ad Apfidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{n^2}{m^2} - 3$ valeat $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{1}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{4}} - 3$ vel $A^{\frac{1}{16}} - 3$ vel $A^{\frac{1}{4}} - 3$ vel $A^{\frac{1}{9}} - 3$, id est, reciproce ut $A^3 - \frac{1}{4}$ vel $A^3 - \frac{1}{16}$ vel $A^3 - \frac{1}{4}$ vel $A^3 - \frac{1}{9}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad Apfidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, adeoque $A^{\frac{n^2}{m^2}} - 3$ æqualis $A - 3$ seu $\frac{1}{A}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apfidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoque $A^{\frac{n^2}{m^2}} - 3$ æqualis $A^{\frac{16}{9}} - 3$ vel $A^{\frac{9}{4}} - 3$ vel $A^9 - 3$ vel $A^{16} - 3$; & propterea vis aut reciproce ut

$A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{1}{2}}$, aut directe ut A^6 vel A^{13} . Denique si corpus pergendo ab Apfide summa ad Apfidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apfis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut

363 gr. ad 360 gr. sive ut 121 ad 120, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}} - 3$ erit æquale $A^{\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu: re-

ciproce ut $A^2 \frac{4}{143}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{1}{2}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis; revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apfidum qui ex vi illa extranea oriatur: & contra. Ut si

vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ab-

lata ut cA , adeoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{Acub.}$; erit (in Exemplis ter-

tiis) b æqualis 1, m æqualis 1, n æqualis 4, adeoque angulus revo-

lutionis inter Apfides æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Po-

natur vim illam extraneam esse 357,45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A

vel T æquali 1; & $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{15645}{35345}}$ seu 180,7623,

id est, 180 gr. 45. m. 44. s. Igitur corpus de Apfide summa discedens, motu angulari 180 gr. 45. m. 44. s. perveniet ad Apfidem imam, & hoc motu duplicato ad Apfidem summam redibit: adeoque Apfis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec.

Haftenus de Motu corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium transeunt. Superest ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuscunque cen-

DE MOTU
CORPORUM

tra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo describunt. Et eadem lege Motus corporum in superficiebus Curvis peractos subinde determinamus.

S E C T I O X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deque Funipendulorum Motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate, secundum rectam in Plano illo datam egressi.

Sit S centrum Virium, SC distantia minima centri hujus a Plano dato, P corpus de loco P secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & PQR Trajectoria illa, in Plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ , QS , & si in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum S , & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T : Vis SV resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires ST , TV ; quarum ST trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV , agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum C in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis ST tolleretur, & corpus vi sola TV revolveretur circa centrum C in spatio libero. Data autem vi

DE MOTU aequalibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum C ,
 CORPORUM vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum C
 in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circa axes quosvis datos per centrum Virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultro citroque peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istitis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

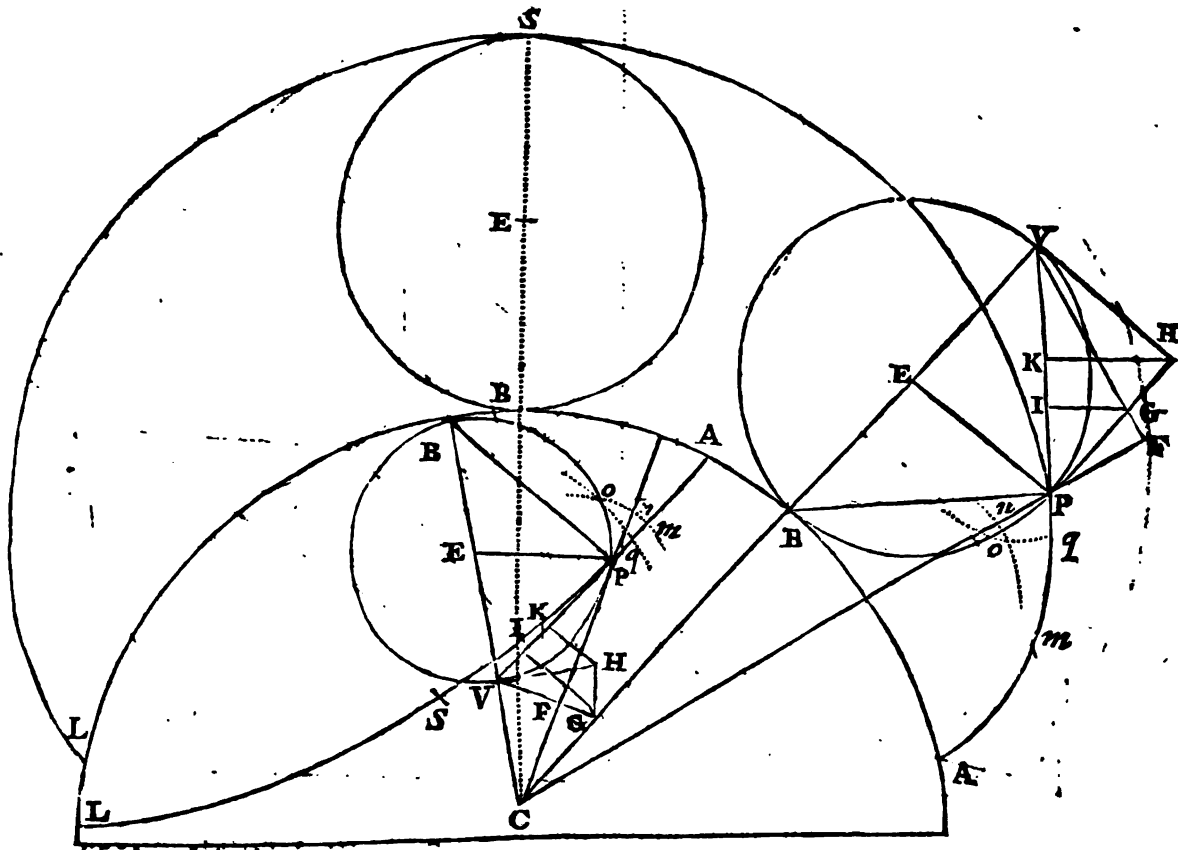
Si Rota Globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei, quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicyclaidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si Rota Globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

Sit

Sit ABL Globus, C centrum ejus, BPV Rota ei insistens, E centrum Rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro Rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B versus L , & inter eundem ita revolvi ut arcus AB , PB sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud P in perimetro Rotæ datum interea describere Viam curvilineam AP . Sit autem AP Via tota curvilinea descripta ex quo Rota Globum tetigit in A , & erit Viæ hujus longitudo AP ad duplum



sinum versura arcus $\frac{1}{2} PB$, ut $2CE$ ad CB . Nam recta CE (si opus est producta) occurrat Rotæ in V , junganturque CP , BP , EP , VP , & in CP productam demittatur normalis VF . Tangant PH , VH Circulum in P & V concurrentes in H , secetque PH ipsam VF in G , & ad VP demittantur normales GI , HK .
Centro

id est ratio mutationum momentanearum curvæ AP , rectæ CP , arcus circularis BP , ac rectæ VP , eadem erit quæ linearum PV , PF , PG , PI , respective. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sunt, angulique HVG , VPF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos) angulo CEP æqualis est, similia erunt triangu-
 gula VHG , CEP ; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV seu HP & ita KI ad KP , & composite vel divisim ut CB ad CE ita PI ad PK , & duplicatis consequentibus ut CB ad $2 CE$ ita PI ad PV , atque ita adeo Pq ad Pm . Est igitur decrementum lineæ VP ; id est, incrementum lineæ $BV - VP$ ad incrementum lineæ curvæ AP in data ratione CB ad $2 CE$, & propterea (per Corol. Lem. 17.) longitudines $BV - VP$ & AP , incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente BV radio, est VP co-sinus anguli BVP seu $\frac{1}{2} BEP$, adeoque $BV - VP$ sinus versus ejusdem anguli; & propterea in hac Rota, cujus radius est $\frac{1}{2} BV$, erit $BV - VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2} BP$. Ergo AP est ad duplum sinum versus arcus $\frac{1}{2} BP$ ut $2 CE$ ad CB . Q. E. D.

Lineam autem AP in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra ASL & bifecetur ea in S , erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP , existente EB radio) ut $2 CE$ ad CB , atque adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ quæ est ad Rotæ diametrum BV , ut $2 CE$ ad CB .

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum QVS , centro C descriptum, detur Cyclois QRS bisecta in R & punctis suis extremis Q & S superficiæ Globi hinc inde occurrens: Agatur CR bifecans arcum QS in O , & producat-
 tur ea ad A , ut sit CA ad CO ut CO ad CR . Centro C in-
 tervallo

dio) ut BW ad BV , seu $AO + OR$ ad AO , id est (cum sint CA ad CO , CO ad CR & divisim AO ad OR proportionales,) ut $CA + CO$ ad CA vel, si bifecetur BV in E , ut $2CE$ ad CB . Proinde, per Corol. 1. Prop. XLIX, longitudo partis rectæ Fili PT æquatur semper Cycloidis arcui PS , & Filum totum APT æquatur semper Cycloidis arcui dimidio APS , hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX) longitudini AR . Et propterea vicissim si Filum manet semper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide data QRS . Q. E. D.

Corol. Filum AR æquatur Semicycloidi AS , adeoque ad semidiametrum AC eandem habet rationem quam similis illi Semicyclois SR habet ad semidiametrum CO .

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad Globi, centrum C sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola Vi agente corpus T oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis QRS: dico quod oscillationum utcumque inæqualium equalia erunt Tempora.

Nam in Cycloidis tangentem TW infinite productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT . Quoniam vis centripeta qua corpus T impellitur versus C est ut distantia CT , atque hæc (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes CX , TX ; quarum CX impellendo corpus directe a P distendit filum PT & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera TX , urgendo corpus transversim seu versus X , directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo TX , id est, (ob datas CV , WV iisque proportionales TX , TW ,) ut longitudo TW , hoc est (per Corol. 1 Prop. XLIX,) ut longitudo arcus Cycloidis TR . Pendulis igitur duobus APT , Apt de perpendiculo AR inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR , tR . Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ

DE MOTU
CORPORUM

dæ & accelerationes subfequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes atque adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendicularum AR . Cumque vicissim ascensus perpendicularorum de loco infimo R , per eosdem arcus Cycloïdalis motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloïdis partes duæ RS & RQ ad utrumque perpendiculari latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. *Q. E. D.*

Corol. Vis qua corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in Cycloïde, est ad totum corporis ejusdem Pondus in loco altissimo S vel Q , ut Cycloïdis arcus TR ad ejusdem arcum SR vel QR .

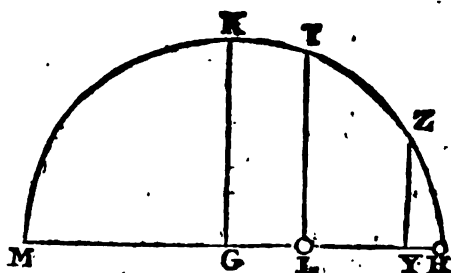
PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & Velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singule oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis G , intervallo GH Cycloïdis arcum RS æquante, describe semicirculum $HKMG$ semidiametro GK bisectum. Et si vis centripeta, distantis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum G , sitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro Globi QOS (*Vide Fig. Prop. L.*) ad ipsius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum T dimittitur e loco supremo S , cadat corpus aliquod L ab H ad G : quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatii describendis TR , LG semper proportionales, atque adeo, si æquantur TR & LG , æquales in locis T & L ; patet corpora illa describere spatia ST , HL æqualia sub initio, adeoque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare, per Prop. xxxviii, tempus quo corpus describit arcum ST est ad tempus oscil-

oscillationis unius, ut arcus HI (tempus quo corpus H perveniet ad L) ad semiperipheriam HKM (tempus quo corpus H perveniet ad M .) Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R , (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G , seu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG , arcus HI , HK æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK , sive ut $\sqrt{SRq. - T\kappa q.}$ ad SR . Unde cum, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscillationibus univèrsis. Quæ erant primo inveniendæ.

Oscillentur jam Funipendula corpora in Cycloidibus diversis intra Globos diversos, quorum diversæ sunt etiam Vires absolutæ, descriptis: & si Vis absoluta Globi cujusvis QOS dicatur V , Vis acceleratrix qua Pendulum urgetur in circumferentia hujus Globi, ubi incipit directe versus centrum ejus moveri, erit ut distantia Corporis



penduli a centro illo & Vis absoluta Globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times V$. Itaque lineola HT , quæ sit ut hæc Vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore; & si erigatur normalis TZ circumferentiæ occurrens in Z , arcus nascens HZ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens HZ in subduplicata ratione rectanguli GHT , adeoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde Tempus oscillationis integræ in Cycloide QRS (cum sit ut semiperipheria HKM , quæ oscillationem illam integram denotat, directe, utque arcus HZ , qui datum tempus similiter denotat, inverse) fiet ut GH directe & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverse, hoc est, ob æquales GH & SR , ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, sive (per Corol. Prop. L) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Ita-

que Oscillationes in Globis & Cycloidibus omnibus, quibuscumque cum Viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione longitudinis Fili directe, & subduplicata ratione distantiae inter punctum suspensionis & centrum Globi

DE MOTU Globi inverse, & subduplicata ratione Vis absolutæ Globi etiam
CORPORUM inverse. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, Cadentium & Revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, qua Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet Linea recta per centrum globi transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvens arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Cycloide quavis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam confectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si Globi diameter augetur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum, Visque centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinu verso dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: Et Pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & Descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem Propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu Clavorum, perimetris suis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ suspensa, in Cycloidibus intra globos oscillari debent, ut Oscillationes omnes evadant Isochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie Terræ, sursum quidem in duplicata ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

PROPO:

De Motu Nam si vis, qua corpus trahitur de T versus C , exponatur per
CORPORUM rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires
 TY , TZ , quarum TZ trahendo corpus secundum longitudinem
 Fili PT , motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus
 in curva $STRQ$ directe accelerat, vel directe retardat. Proinde
 cum hæc sit ut via describenda TR , accelerationes corporis vel re-
 tardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus
 proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & prop-
 terea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ
 partes totis semper proportionales simul describunt, simul descri-
 bent totas. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus T Filo rectilineo AT a centro A pen-
 dens, describat arcum circulaarem $STRQ$, & interea urgeatur se-
 cundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uni-
 formem Gravitatis, ut arcus TR ad ejus sinum TN : æqualia erunt
 Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas TZ , AR ,
 similia erunt triangula ATN , ZTY ; & propterea TZ erit ad AT
 ut TY ad TN ; hoc est, (si Gravitatis vis uniformis exponatur per
 longitudinem datam AT) vis TZ , qua Oscillationes evadent Iso-
 chronæ, erit ad vim Gravitatis AT , ut arcus TR ipsi TY æqualis
 ad arcus illius sinum TN .

Corol. 2. Igitur in Horologijs, si vires a Machina in Pendulum
 ad motum conservandum impressæ ita cum vi Gravitatis componi
 possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur appli-
 cando rectangulum sub arcu TR & radio AR ad sinum TN , Os-
 cillationes omnes erunt Isochronæ.

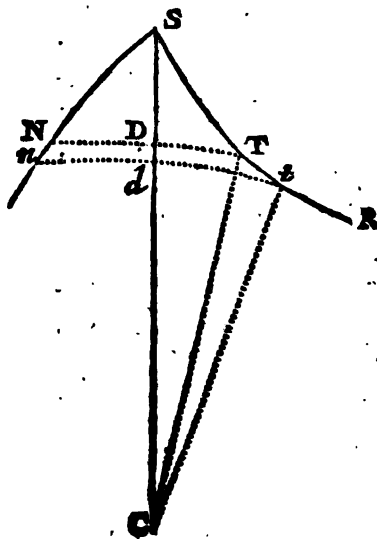
PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

*Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire
 Tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis
 quibuscunque curvis, in plano per centrum Virium trans-
 eunte descriptis, descendunt & ascendunt.*

Descendat corpus de loco quovis S per lineam quamvis curvam
 $STtR$, in plano per virium centrum C transeunte datam. Junga-
 tur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque D &
 partium

partium illarum aliqua. Centro C , intervallis CD , Cd describan-
tur circuli DT , dt , lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in T & t .
Et ex data tum lege vis centripetæ;

tum altitudine CS de qua corpus ce-
cidit; dabitur velocitas corporis in
alia quavis altitudine CT , per Prop.
xxxix. Tempus autem, quo corpus
describit lineolam Tt , est ut lineo-
læ hujus longitudo (id est ut secans
anguli tTC) directe, & velocitas
inverse. Tempori huic proportiona-
lis sit ordinatim applicata DN ad rec-
tam CS per punctum D perpendicu-
laris, & ob datam Dd erit rectan-
gulum $Dd \times DN$, hoc est area
 $DNnd$, eidem tempori proportio-
nale. Ergo si SNn sit curva illa li-
nea quam punctum N perpetuo tan-
git, erit area $SNDS$ proportiona-
lis tempori quo corpus descendendo
descripsit lineam ST ; proindeque ex inventa illa area dabitur
Tempus. Q. E. I.



PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

*Si corpus movetur in superficie quacunq[ue] curva, cujus axis
per centrum Virium transit, & a corpore in axem demit-
tatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis
puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa are-
am tempori proportionalem describet.*

Sit $BSKL$ superficies curva, T corpus in ea revolvens, $STtR$
Trajectoria quam corpus in eadem describit, S initium Trajecto-
riæ, $OMNK$ axis superficiæ curvæ, TN recta a corpore in axem
perpendicularis, OP huic parallela & æqualis a puncto O quod in
axe datur educta, AP vestigium Trajectoriæ a puncto P in lineæ
volubilis OP plano AOP descriptum, A vestigii initium puncto S
respondens, TC recta a corpore ad centrum ducta; TG pars ejus
vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum C proportionalis;
 TM recta ad superficiem curvam perpendicularis, TI pars ejus vi
pressionis, qua corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M

T

Stantibus quæ in superiore Propositione constructa sunt, exeat ^{LIBER PRIMUS.} corpus de loco S in Trajectoriam inveniendam STR ; & ex data ejus velocitate in altitudine SC , dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine TC . Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectoriæ suæ particulam Tt , sitque Pp vestigium ejus in plano AOP descriptum. Jungatur Op , & Circelli centro T intervallo Tt in superficie curva descripti sit PpQ vestigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ descriptum. Et ob datum magnitudine & positione Circellum, dabitur Ellipsis illa PpQ . Cumque area POp sit tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dabitur Op positione, & inde dabitur communis ejus & Ellipseos intersectio p , una cum angulo OPp , in quo Trajectoriæ vestigium APp secat lineam OP . Inde autem inveniatur Trajectoriæ vestigium illud APp , eadem methodo qua curva linea $VIKk$, in Propositione **XLI**, ex similibus datis inventa fuit. Tum ex singulis vestigii punctis P erigendo ad planum AOP perpendiculara PT superficiæ curvæ occurrentia in T , dabuntur singula Trajectoriæ puncta T . *Q. E. I.*

S E C T I O X I.

De Motu Corporum Viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui Motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuae sunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per Legum Corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia se mutuo attrahant) hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo Motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando Vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In Mathematicis enim jam versamur, & propterea missis disputationibus Physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

De Motu
CORPORUM

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

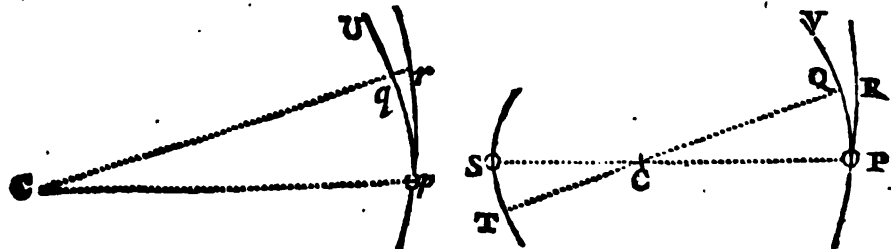
Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, Figuras similes.

Sunt enim distantiae a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque adeo in data ratione ad invicem, & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hae distantiae circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineae autem rectae, quae sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, Figuras circum eosdem terminos (in planis quae una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt Figurae quae his distantis circumactis describuntur. Q. E. D.

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahunt, & inter ea volvantur circa gravitatis centrum commune: dico quod Figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest Figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, Viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C , pergendo de S ad T deque P ad Q . A dato puncto s ipsi



SP, TQ æquales & parallelæ ducantur semper sp, sq , & Curva $spqv$ quam punctum p , revolvendo circum punctum immotum s , describit,

describit, erit similis & æqualis Curvis quas corpora S , P describunt circum se mutuo: proindeque (per Theor. xx.) similis Curvis ST & PQV , quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C : id adeo quia proportionales linearum SC , CP & SP vel sp ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud Gravitatis centrum C , per Legum Corollarium quartum, vel quiescit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quiescit, inque s & p locentur corpora duo, immobile in s , mobile in p , corporibus S & P similia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr Curvas PQ & pq in P & p , & producantur CQ & sq ad R & r . Et, ob similitudinem Figurarum $CPRQ$, $sprq$, erit RQ ad rq ut CP ad sp , adeoque in data ratione. Proinde si vis qua corpus P versus corpus S , atque adeo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim qua corpus p versus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR , pr ad arcus PQ , pq , per intervalla ipsis proportionalia RQ , rq ; adeoque vis posterior efficeret ut corpus p gyraretur in Curva pqv , quæ similis esset Curvæ PQV , in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur, & revolutiones nisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad sp , sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum S & s , P & p , & æqualitatem distantiarum SP , sp) sibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius p trahatur per intervallum majus rq , requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per Lemma decimum) spatia, ipso motus initio descripta, sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicata ratione distantie sp ad distantiam CP , eo ut temporibus quæ sint in eadem subduplicata ratione describantur arcus pq , PQ , qui sunt in ratione integra: Et corpora P , p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s Figuras similes PQV , pqv , quarum posterior pqv similis est & æqualis Figuræ quam corpus P circum corpus mobile S describit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & per Legum Corollarium sextum, motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, adeoque corpora descri-

De Motu bent circum se mutuo Figuras easdem ac prius, & propterea Figu-
Corporum ræ $p q v$ similes & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo Viribus distantiz suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. x,) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Ellipses concentricas: & vice versa, si tales Figuræ describuntur, sunt Vires distantiz proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo Viribus quadrato distantiz suæ reciproce proportionalibus describunt (per Prop. xi, xii, xiii.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Sectiones conicas umbilicum habentes in centro circum quod Figuræ describuntur. Et vice versa, si tales Figuræ describuntur, Vires centripetæ sunt quadrato distantiz reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII

Corporum duorum S & P circa commune gravitatis centrum C revolventium Tempus periodicum esse ad Tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyrantis & Figuris quæ corpora circum se mutuo describunt Figuram similem & æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius S, ad summam corporum S + P.

Namque, ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes PQ & pq describuntur, sunt in subduplicata ratione distantiarum CP & SP vel sp , hoc est, in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum $S + P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes PQ & pq describuntur, hoc est, tempora tota quibus Figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicata ratione. *Q. E. D.*

PRO.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

LIVR.
PRIMUS.

Si corpora duo S & P, Viribus quadrato distantie sue reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, Axis principalis erit ad Axem principalem Ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S.

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum S + P. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipseos autem axis principalis (per Prop. xv.) minuetur in ratione cujus hæc est sesquuplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad S + P est triplicata; adeoque erit ad axem principalem Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter S + P & S ad S + P. Et inverse, axis principalis Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut S + P ad primam duarum medie proportionalium inter S + P & S. Q. E. D.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tercio in communi gravitatis centro constituto Viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantie corporum a centro illo communi atque respectu distantie totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium,

DE MOTU
CORPORUM dium, adeoque eadem sunt ac si a corpore intermedio manarent.
Q. E. D.

Et quoniam data est ratio distantiae corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam corporis ejusdem a corpore altero, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia & quantitibus datis utcumque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia & quantitibus totidem datis datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitibus datis quomodocumque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiae hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitibus datis similiter derivata. Hoc est, Vis trahentis eadem erit Lex respectu distantiae utriusque. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare Motus.

Corpora (per Theorema novissimum) perinde movebuntur ac si a corpore tertio, in communi gravitatis centro constituto, traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per Hypothesin; & propterea (per Legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per Prob., xxv,) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum Velocitatibus exeunt, determinare Motus.

Ex

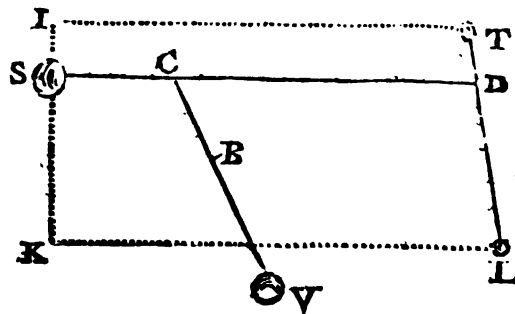
Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus LIBER PRIMUS.
 centri communis gravitatis, ut & motus spatii quod una cum
 hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum
 motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes
 (per Legum Corollarium quintum, & Theorema novissimum)
 perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum com-
 muni illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent
 se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur.
 Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato se-
 cundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi cen-
 tripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est
 motus per Problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur
 simul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu com-
 ponendus est uniformis ille Systematis spatii & corporum in eo gy-
 rantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus
 absolutus corporum in spatio immobili. Q. E. I.

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

*Viribus quibus Corpora se mutuo trahunt crescentibus in sim-
 plici ratione distantiarum a centrīs: requiruntur Motus
 plurium Corporum inter se.*

Ponantur primo corpora duo T & L commune habentia gravi-
 tatis centrum D . Describent hæc (per Corollarium primum Theo-
 rematis XXI) Ellipses centra habentes in D , quarum magnitudo
 ex Problemate v, innotescit.

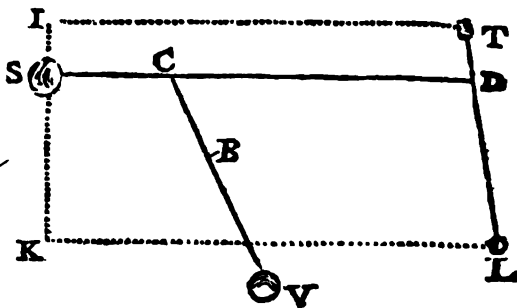
Trahat jam corpus tertium
 S priora duo T & L viribus
 acceleratricibus ST , SL , &
 ab ipsis vicissim trahatur. Vis
 ST (per Legum Cor. 2.) re-
 solvitur in vires SD , DT ; &
 vis SL in vires SD , DL .
 Vires autem DT , DL , quæ
 sunt ut ipsarum summa TL ,
 atque adeo ut vires accelera-



trices quibus corpora T & L se mutuo trahunt, additæ his viri-
 bus corporum T & L , prior priori & posterior posteriori, com-
 ponunt vires distantis DT ac DL proportionales, ut prius, sed
viribus

DE MOTU
CORPORUM

viribus prioribus majores; adeoque (per Corol. 1. Prop. x. & Corol. 1 & 8. Prop. iv) efficiunt ut corpora illa describant Ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD , actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI, LK , ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK ; quam ductam concipe per medium corporis S , & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus faciendo ut Systema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C . Tali motu corpus S (eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantia CS proportionalium, tendit versus centrum C) describit Ellipsin circa idem C ; & punctum D , ob proportionales CS, CD , describet Ellipsin consimilem e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, posterius posteriore) æqualiter & secundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum est) attracta, pergunt (per Legum Corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile D Ellipses suas describere, ut prius.



Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum V , & simili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C , sed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita se habent ubi corpora T & L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus tradunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt mutua omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantia ducta in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B , in plano immobili describunt. Q. E. I.

PRO.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

LIBER
PRIMUS.

*Corpora plura, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione
distantiarum ab eorundem centrīs, moveri poſſe inter ſe in
Ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere
temporibus proportionales quam proxime.*

In Propositione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accurate. Quo magis recedit Lex virium a Lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt ut corpora, ſecundum Legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in Ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab Ellipſibus errabitur.

Caf. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtancias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, abſque errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora uſque donec error iſte & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores, atque adeo donec Orbes cum Ellipſibus quadrent, & areae reſpondeant temporibus abſque errore qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Caf. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiã ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut Systema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum,

De Motu
 Corporum

nulla prorsus oriatur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; &, augendo corporis maximum distantiam, donec rectorum ab hoc ad reliqua ductarum differentiarum respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint quam datae quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absque erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsin fortiore,) & Radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, absque aliis erroribus, nisi quas partium distantiarum (perexiguarum sane & pro lubitu minuendarum) valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

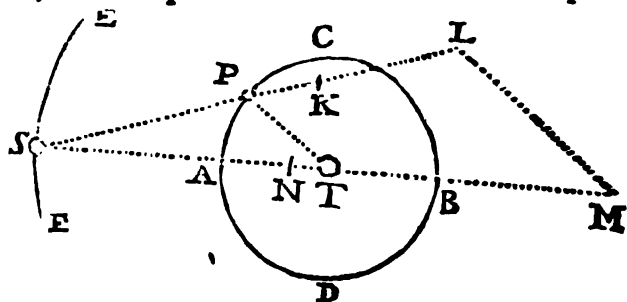
Corol. 1. In casu secundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsis vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eadem

DE MOTU una tendente ad T & oriunda a mutua attractione corporum T & P .
CORPORUM

Hac vi sola corpus P circum corpus T , sive immotum sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio PT , temporibus proportionales, & Ellipsin cui umbilicus est in centro corporis T . Patet hoc per Prop. xi. & Corollaria 2 & 3 Theor. xxi. Vis altera est attractionis LM , quæ quoniam tendit a P ad T , superaddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor. xxi. At quoniam non est quadrato distantiae PT reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Prop. xi. & per Corol. 2. Theor. xxi.) vis qua Ellipsis circa umbilicum T describitur tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiae PT reciproce proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis PAB aberraret a forma Ellipseos umbilicum habentis in S ; idque eo magis quo major est aberratio ab hac proportione; atque



adeo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia SM , trahendo corpus P secundum lineam ipsi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a P in T , quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atque adeo quæ faciet ut corpus P , radio TP , areas non amplius temporibus proportionales describat, atque aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigitur a P ad T , tum etiam quod non sit proportionalis quadrato distantiae PT . Quibus intellectis, manifestum est quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis PAB tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia, fit minima, vi prima manente.

Expo-

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per lineam SN ; & si attractiones acceleratrices SM , SN æquales essent; hæc, trahendo corpora T & P æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per Legum Corol. 6.) ac si hæc attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio SN minor esset attractione SM , tolleretur ipsa attractionis SM pars SN , & maneret pars sola MN , qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio SN major esset attractione SM , oriretur ex differentia sola MN perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur semper attractio tertia superior SM ad attractionem MN , attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita PAB ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ versus corpus S , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio SN non est nulla, neque minor minima attractionum omnium SM , sed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neque multo minor attractione SK . *Q. E. D.*

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P , S circa maximum T in planis diversis; & vis LM , agendo secundum lineam PT in plano Orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera NM , agendo secundum lineam quæ ipsi ST parallela est, (atque adeo, quando corpus S versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ PAB ;) præter perturbationem motus in Longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in Latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P & T ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN , adeoque minima evadet ubi MN est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio SN non est multo major, neque multo minor attractione SK . *Q. E. D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod, si corpora plura minora P , S , R , &c. revolvantur circa maximum T , motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitur atque cætera a se mutuo.

Corol.

ris periodici inverse : patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis KL , adeoque tempus periodicum, si maneat Orbis radius TP , augeri, idque in subduplicata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione sesquuplicata, per Corol. 6. Prop. iv. Si vis illa corporis centralis paulatim langueretur, corpus P minus semper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro T ; & contra, si vis illa augetur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S , qua vis illa diminuitur, augetur ac diminuatur per vices; augetur simul ac diminuatur Radius TP per vices, & tempus periodicum augetur ac diminuatur in ratione composita ex ratione sesquuplicata Radii & ratione subduplicata qua vis illa centripeta corporis centralis T , per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S , diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam quod Ellipseos a corpore P descriptæ Axis, seu Apfidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & in singulis corporis revolutionibus per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus T in Quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripeta qua corpus T trahit corpus P . Vis prior LM , si augetur distantia PT , augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, & vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, adeoque summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantiae PT , & propterea (per Corol. 1. Prop. xlv.) efficit ut *Aux*, seu Apfis summa, regrediatur. In Conjunctione vero & Oppositione, vis qua corpus P urgetur in corpus T differentia est inter vim qua corpus T trahit corpus P & vim KL ; & differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione distantiae PT , decrescit in majore quam duplicata ratione distantiae PT , adeoque (per Corol. 1. Prop. xlv.) efficit ut *Aux* progrediatur. In locis inter Syzygias & Quadraturas pendet motus *Augis* ex causa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis KL in Syzygiis sit quasi duplo major quam vis LM in Quadraturis, excessus in tota revolutione erit penes vim KL , transferetque *Augem* singulis revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum T , P corporibus pluribus S , S , S , &c. in Orbe ESE consistentibus, undique cingi. Namque horum actionibus

& maxima fit ubi Apfides sunt in Syzygiis. Si Apfides constituantur in Quadraturis, ratio prope Apfides minor est & prope Syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa major oritur Augis motus velocissimus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Apfides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Apfide ima est ad vim in Apfide summa in minore quam duplicata ratione distantiae Apfidis summæ ab umbilico Ellipseos ad distantiam Apfidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apfides constituantur in Syzygiis, vis in Apfide ima est ad vim in Apfide summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires LM in Quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in Syzygiis subductæ viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter Apfides, minima in Quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in transitu Apfidum a Quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetque Excentricitatem Ellipseos; inque transitu a Syzygiis ad Quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in Latitudinem, fingamus planum Orbis EST immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod, ex viribus NM , ML , quæ sunt causa illa tota, vis ML agendo semper secundum planum Orbis PAB , nunquam perturbat motus in Latitudinem; quodque vis NM , ubi Nodi sunt in Syzygiis, agendo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusque P de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a Quadraturis ad Syzygias, augetque vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad Quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi constituantur in Octantibus post Quadraturas, id est, inter C & A , D & B , intelligetur ex modo expositis quod, in transitu corporis P a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad Quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea de novo in transitu per alios 45 gradus, usque ad Nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in Nodo subsequente quam in præcedente.

DE MOTU dente. Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur quam diminui-
CORPORUM tur ubi Nodi sunt in Octantibus alteris inter A & D , B & C . In-
 clinatio igitur ubi Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In
 transitu eorum a Syzygiis ad Quadraturas, in singulis corporis ad
 Nodos appulsibus, diminuitur, fitque omnium minima ubi Nodi
 sunt in Quadraturis & corpus in Syzygiis: dein crescit iisdem gra-
 dibus quibus antea decreverat, Nodisque ad Syzygias proximas ap-
 pulsus ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus P ubi Nodi sunt in Quadraturis per-
 petuo trahitur de plano Orbis sui, idque in partem versus S , in
 transitu suo a Nodo C per Conjunctionem A ad Nodum D ; & in
 contrariam partem in transitu a Nodo D per Oppositionem B ad
 Nodum C ; manifestum est quod in motu suo a Nodo C , corpus
 perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo CD , usque dum per-
 ventum est ad Nodum proximum; adeoque in hoc Nodo, longissi-
 me distans a plano illo primo CD , transit per planum Orbis EST
 non in plani illius Nodo altero D , sed in puncto quod inde vergit
 ad partes corporis S , quodque proinde novus est Nodi locus in an-
 teriora vergens. Et simili argumento pergunt Nodi recedere in
 transitu corporis de hoc Nodo in Nodum proximum. Nodi igitur
 in Quadraturis constituti perpetuo recedunt; in Syzygiis (ubi mo-
 tus in Latitudinem nil perturbatur) quiescunt; in locis interme-
 diis, conditionis utriusque participes, recedunt tardius; adeoque,
 semper vel retrogradi vel stationarii, singulis revolutionibus ferun-
 tur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti Errores sunt pau-
 lo majores in Conjunctione corporum P , S quam in eorum Oppo-
 sitione, idque ob majores vires generantes NM & ML .

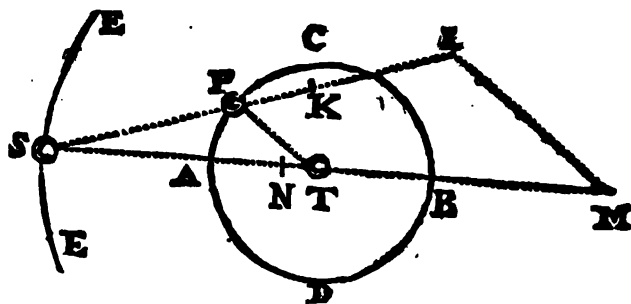
Corol. 13. Cumque rationes horum Corollariorum non pendeant
 a magnitudine corporis S , obtinent præcedentia omnia, ubi corporis
 S tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur corporum duo-
 rum T & P Systema. Et ex aucto corpore S auctaque adeo ipsius
 vi centripeta, a qua errores corporis P oriuntur, evadent errores
 illi omnes (paribus distantis) majores in hoc casu quam in altero,
 ubi corpus S circum Systema corporum P & T revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires NM , ML , ubi corpus S longin-
 quum est, sint quamproxime ut vis SK & ratio PT ad ST con-
 junctim, hoc est, si detur tum distantia PT , tum corporis S vis
 absoluta, ut ST cub. reciproce; sint autem vires illæ NM , ML
 causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præce-
 dentibus

DE MOTU
CORPORUM

revolutionis quam proxime. Coniungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14, & in quolibet corporum T, P, S Systemate, ubi P circum T sibi propinquum, & T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P , de centro T apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P , ut quadratum temporis periodici corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis T inverse. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis T inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & inclinationem Orbis PAB non mutantur motus Augis & Nodorum sensibilibiter, nisi ubi eadem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea LM nunc major fit nunc minor quam radius PT , exponatur vis mediocris LM per radium illum PT : & erit hæc ad vim mediocrem SK vel SN (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST . Est autem vis mediocris SN vel ST , qua corpus T retinetur in Orbe suo circum S ad vim qua corpus P



retinetur in Orbe suo circum T , in ratione composita ex ratione radii ST ad radium PT , & ratione duplicata temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S . Et ex æquo, vis mediocris LM , ad vim qua corpus P retinetur in Orbe suo circum T (quæve corpus idem P , eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad distantiam PT revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia PT , datur vis mediocris LM ; & ea data, datur etiam vis MN quamproxime per analogiam linearum PT, MN .

Corol. 18. Iisdem legibus quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari Annulum fluidum, rotundum ac corpori T concentricum; & singulæ Annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis P peragendo,

agendo, propius accedent ad corpus T , & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis S , quam in Quadraturis. Et Nodi Annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis S vel T , quiescent in Syzygiis, extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam Globum corporis T , ex materia non fluida constantem, ampliari & extendi usque ad hunc Annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Corollario) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum Maris. Aqua revolvens circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S nullum acquirat motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5.) ut & Globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, per Legum Corol. 6. Accedat autem corpus S , & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor eorum remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad Syzygias; & vis KL trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad Quadraturas.

Corol. 20. Si Annulus jam rigeat & minuat Globus, cessabit motus fluendi & refluendi; sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum Annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbatu maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimat Globo toti. Retinet Globus motum impressum usque dum Annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione

DE MOTU ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in Quadraturis
CORPORUM Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus poſt
 Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis, &
 maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Glo-
 bi Annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo
 quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet
 enim vicem Annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus.
 Et quanquam, aucta utcunq; Globi hujus vi centripeta, tendere
 ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium
 partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corol-
 larii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem
 redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo per hujus in-
 crementum augetur iſte regressus, per diminutionem vero diminui-
 tur & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tol-
 latur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur
 vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſe-
 quentia.

Corol. 22. Et inde viciffim, ex motu Nodorum innotefcit con-
 ſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eoſdem conſtanter ſervat,
 & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat;
 ſi in conſequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte
 circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocun-
 que oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde
 concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Glo-
 bus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſcuntes indifferenter
 ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum,
 quam in alium quemvis; perſpicuum eſt quod is axem ſuum axif-
 que inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam
 Globus oblique, in eadem illa ſuperficie parte qua prius, impulſu
 quocunq; novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil
 mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi
 eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt,
 eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroque (per Legum Corol. 2.)
 compoſita impulſus fuiſſet, atque adeo ſimplicem, circa axem in-
 clinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in lo-
 cum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus pri-
 mi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſe-
 cundus abſque primo generaret; atque adeo impulſuum amborum
 factorum in loca quæcunq; Generabunt hi eundem motum cir-
 cularem

cularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea Globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Casu (per Corol. 21.) Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per Corol. 20.) Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæc nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

LIBER
PRIMUS.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus externius S, circa interiorem P, T commune gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis S attractiones versus T & P componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum C, quam in corpus maximum T, quæque quadrato distantiae SC magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiae ST: ut rem perpendenti facile constabit.

Y

PRO.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agentque, & Orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus Orbitalium omnium.

LIBER
PRIMUS.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In Systemate corporum plurium A, B, C, D, &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt Absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B, C, D* versus *A*, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur ex Hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiiis; & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æquales.

DE MOTU
CORPORUM

les. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum Legem quamcunque communem ex distantiiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsis umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per *Corol.* Prop. LXVIII. collatum cum hujus *Corol.* 1.

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem Attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem; sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per Spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris, aut Aëris, Mediivæ cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem Impulsus, non species virium &

& qualitates Physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. LIBER PRIMUS.
 In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus Physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

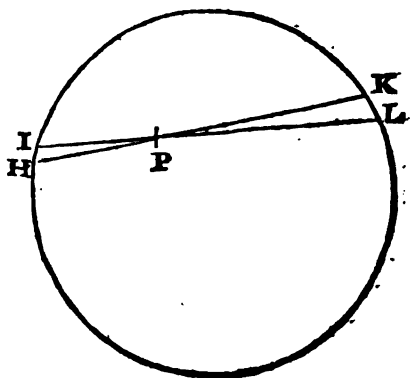
S E C T I O XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad Sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit $HIKL$ superficies illa Sphærica, & P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK, IL , arcus quam minimos HI, KL intercipientes; & ob triangula HPI, LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantis HP, LP proportionales; & superficiei Sphæricæ particulæ quævis ad HI & KL , rectis per punctum P transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata



illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directæ & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æquali-

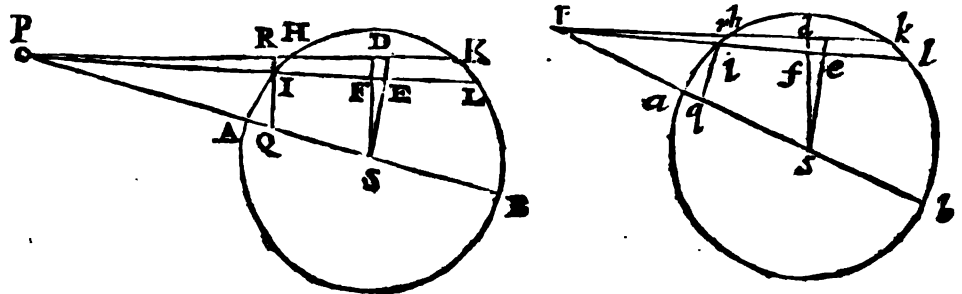
DE MOTU
CORPORUM

æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Isdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphære, vi reciproce proportionali quadrato distantie sue ab eodem centro.

Sint $AHKB$, $abkb$ æquales duæ superficies Sphæricæ, centris S, s , diametris AB , ab descriptæ, & P, p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ



PHK , PIL , phk , pil , auferentes a circulis maximis AHB , abk , æquales arcus HK , bk & IL , il : Et ad eas demittantur perpendiculara SD , sd ; SE , se ; IR , ir ; quorum SD , sd secent PL , pl in F & f : Demittantur etiam ad diametros perpendiculara IQ , iq . Evanescant anguli DPE , dpe : & (ob æquales DS , & ds , ES & es ,) lineæ PE , PF & pe , pf & lineolæ DF , df pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE , dpe simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit PI , ad PF , ut RI ad DF , & pf ; ad pi , ut df , vel DF ad ri ; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI , ad ri , hoc est (per Corol. 3. Lem. vii,) ut arcus IH ad arcum ih . Rursus PI , ad PS ut IQ ad SE , & ps ad pi ut se vel SE ad iq ; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq . Et conjunctis rationibus. PI quad. $\times pf \times ps$ ad pi quad. $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam

arcus

arcus IH convolutione semicirculi AKB circa diametrum AB describet, ad superficiem circulem, quam arcus ib convolutione semicirculi akb circa diametrum ab describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P & p , sunt (per Hypothesin) ut ipsæ superficies applicatæ ad quadrata distantiarum suarum a corporibus, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas PS , ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ , & pi ad pq ; id est (ob similia triangula PIQ & PSF , piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf . Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s , ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad

$\frac{ps \times PF \times PS}{ps}$, hoc est, ut ps quad. ad PS quad. Et simili argu-

mento vires, quibus superficies convolutione arcuum KL , kl descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut ps quad. ad PS quad.; inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies Sphærica, capiendo semper sd æqualem: SD & se æqualem SE , distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad Sphæra cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, ac detur tum Sphærae densitas, tum ratio diametri Sphærae ad distantiam corpusculi a centro ejus; dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semidiametro Sphærae.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & distans eorum a Sphærarum centris proportionales esse diametris Sphærarum respective, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphærae unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphærae alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe & ratione duplicata distantiarum in-

verse

DE MOTU verſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt., in ratione triplica-
CORPORUM ta diametròrum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior direc-
 te una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad dia-
 metrum *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpuscula in Circulis, circa Sphæras ex mate-
 ria æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ
 a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora
 periodica erunt æqualia.

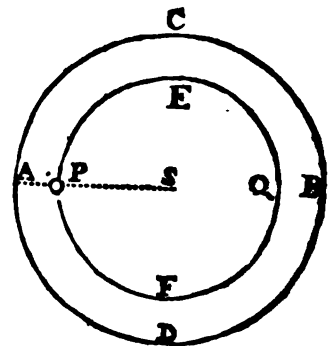
Corol. 2. Et vice verſa, ſi Tempora periodica ſunt æqualia; di-
 ſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Co-
 rol. 3. Prop. iv.

Corol. 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis ſimilium & æqua-
 liter denſorum puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ de-
 crescentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: vires quibus
 corpuscula, ad Solida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iisdem,
 erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

*Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales
 vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtan-
 tiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram
 conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſue ab
 ipſius centro.*

In Sphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta,
 locetur corpusculum *P*; & centro eodem *S*,
 intervallo *SP*, concipe Sphæram internam
PEQF deſcribi. Maniſtum eſt, per Prop.
 Lxx. quod Sphæricæ ſuperficies concentricæ
 ex quibus Sphærarum differentia *AEBF*
 componitur, attractionibus per attractiones
 contrarias deſtructis, nil agunt in corpus
P. Reſtat ſola attractio Sphære interioris
PEQF. Et per Prop. Lxxii. hæc eſt ut di-
 ſtantiæ *PS*. *Q. E. D.*



Scholium.

Superficies ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure
 Mathematicæ, ſed Orbis adeo tenues ut eorum craſſitudo inſtar
 nihili

nihili sit; nimirum Orbes evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Isdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantie corpusculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in Sphæram totam, in eadem ratione.

Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphæræ. Nam per Prop. LXXII, si distantie sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione; & distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est, in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra Sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantie a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia similis ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantie suæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV.) & prop-

DE MOTU
CORPORUM terea eadem est ac si vis tota attrahens maneret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato distantiae suæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

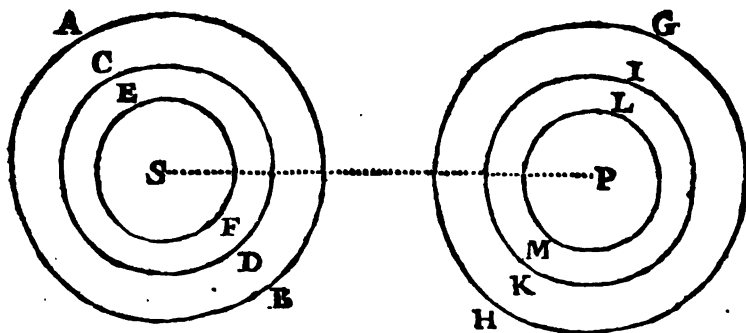
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si Sphæra in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcumque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similes, & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantie corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantie centrorum.

Sunto Sphæræ quocumque concentricæ similes *AB, CD, EF,* &c. quarum interiores additæ exterioribus component materiam densiorem

denfioſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuioſiorem; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent Sphæras alias quotcunq; concentricas ſimilares GH , IK , LM , &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ SP . Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis quas Sphæra tota ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſita AB , trahit totam ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſitam GH , erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunq; creſcat vel decreſcat: &, addita materia



non attractiva, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphære acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una trahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphære complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut Sphære attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphære attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum intra centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut Sphære attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata diſtantiarum inter centra.

DE MOTU
CORPORUM

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintque distantiz inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiz erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

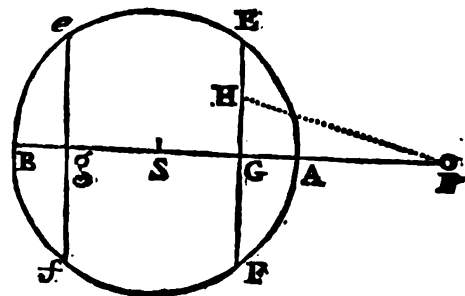
Corol. 9. Ut & ubi gygrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales distantis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæra due se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.

Cas. 1. Sit $AEBF$ Sphæra, S centrum ejus, P corpusculum attractum, $PASB$ axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, EF , ef plana duo quibus Sphæra fecatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; G , g intersectiones planorum & axis, & H punctum quodvis in plano EF . Puncti

H vis centripeta in corpusculum P , secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH ; & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam PG , seu versus centrum S , ut longitudo PG . Igitur punctorum omnium in plano EF , hoc est plani totius vis, qua corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut numerus punctorum ductus in distantiam PG : id est, ut contentum sub plano ipso EF & distantia illa PG . Et similiter vis plani ef , qua corpusculum P trahitur



trahitur versus centrum S , est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg , sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg ; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS , hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS , vel ut summa æqualium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphære distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS , hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui S a corpusculo P . *Q. E. D.*

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P Sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS . *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris P ; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphære primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphære; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphære primæ, & propterea proportionalis est distantie inter centra Sphærarum. *Q. E. D.*

Cas. 4. Trahant Sphære se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q. E. D.*

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra Sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia pg ; & vis contraria plani EF ut contentum sub plano illo & distantia pG ; erit vis ex utraque composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentie distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphære. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in Sphæra tota, hoc est, attractio Sphære totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphære. *Q. E. D.*

Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex Sphære unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum pS . *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Si Sphæra in progressu a centro ad circumferentiam sint ut-
cunque dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per
circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undi-
que similes; & vis attractiva puncti cujusque sit ut di-
stantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmo-
di Sphæra duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distan-
tiæ inter centra Sphærarum.*

Demonstratur ex Propositione præcedente, eodem modo quo
Propositio LXXVI ex Propositione LXXV demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus x & LXIV de motu cor-
porum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt, valent
ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum conditionis
jam descriptæ, suntque corpora attracta Sphære conditionis ejus-
dem.

Scholium.

Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expositos; nimi-
rum ubi Vires centripetæ decrescunt in duplicata distantiarum ra-
tione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in
utroque Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & com-
ponentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege,
in recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod
est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegan-
tes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos
methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

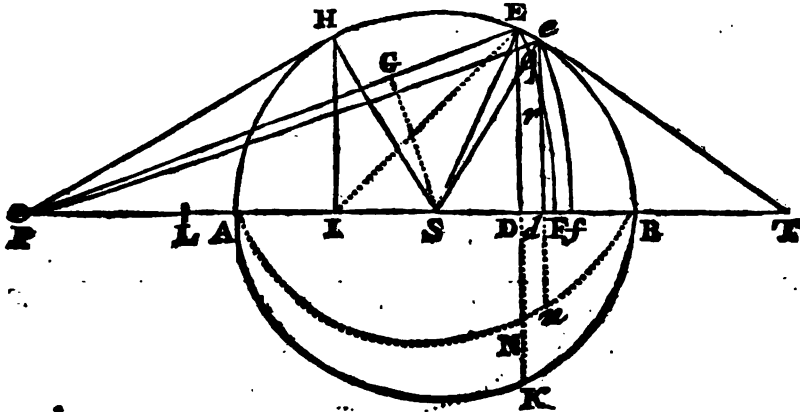
L E M M A XXIX.

*Si describantur centro S circulus quilibet AEB, & centro P
circuli duo EF, e f, secantes priorem in E, e, lineam-
que PS in F, f; & ad PS demittantur perpendiculara ED,
ed: dico quod, si distantia arcuum EF, ef in infinitum
minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis Dd ad
lineam evanescentem Ff ea sit, quæ lineæ PE ad lineam
PS.*

Nam

Nam si linea Pe fecerit arcum EF in q ; & recta Ee , quæ cum arcu evanescente Ee coincidit, producta occurrat rectæ PS in T ; & ab S demittatur in PE normalis SG : ob similia triangula DTE , dTe , DES ; erit Dd ad Ee , ut DT ad TE , seu DE ad ES ;

LIBER
PRIMUS.



& ob triangula Eeq , ESG (per Lem. viii, & Corol. 3. Lem. vii.) similia, erit Ee ad eq seu Ff , ut ES ad SG ; & ex æquo, Dd ad Ff ut DE ad SG ; hoc est (ob similia triangula PDE , PGS) ut PE ad PS . Q. E. D.

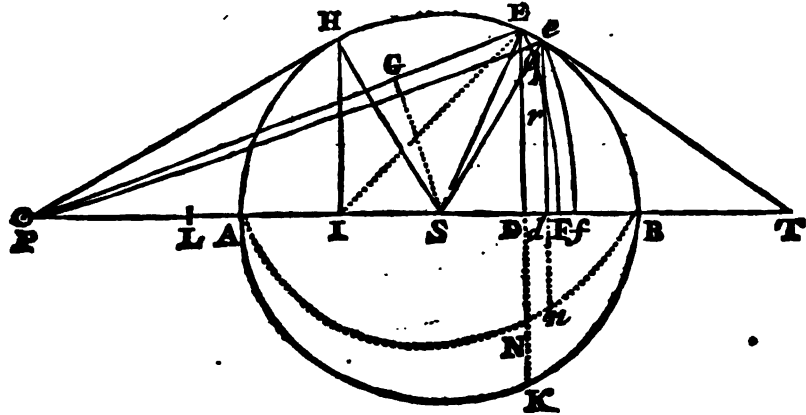
PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens $EFfe$, convolutione sui circa axem PS , describat solidum Sphericum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod Vis , qua solidum illud trahit corpusculum situm in P , est in ratione composita ex ratione solidi $DEq \times FF$ & ratione vis qua particula data in loco Ff traheret idem corpusculum.

Nam si primo consideremus vim superficiæ Sphæricæ FE , quæ convolutione arcus FE generatur, & a linea de ubivis secatur in r ; erit superficiæ pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola Dd , manente Sphære radio PE , (uti demonstravit *Archimedes* in Lib. de *Sphæra & Cylindro*.) Et hujus vis secundum lineas PE vel Pr undique in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiæ pars annularis; hoc est, ut lineola Dd vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato Sphære radio PE & lineola

DE MOTU
CORPORUM

lineola illa Dd : at secundum lineam PS ad centrum S tendentem minor, in ratione PD ad PE , adeoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur Dd ; & superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, adeoque ut DE quad. Ducatur



jam superficies FE in altitudinem Ff & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantia PF exercet in corpusculum P . At si vis illa non detur, fiet vis solidi $EFfe$ ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad Sphæræ alicujus ABE , centro S descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem AB , in quo corpusculum aliquod P locatur, erigantur de punctis singulis D perpendicularia DE , Sphæræ occurrentia in E , & in ipsis capiantur longitudines DN , quæ sint ut quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis quam

Sphæræ particula sita in axe ad distantiam PE exercet in corpusculum P conjunctim: dico quod Vis tota, qua corpusculum P trahitur versus Sphæræ, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ AB & linea curva ANB , quam punctum N perpetuo tangit.

Etenim

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd , & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$, & erigatur perpendiculum dn . Per Theorema superius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpusculum P est ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem per Lemma novissimum, Dd ad Ff ut PE ad PS , & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & prop-

terea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpusculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$: erit vis qua corpusculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

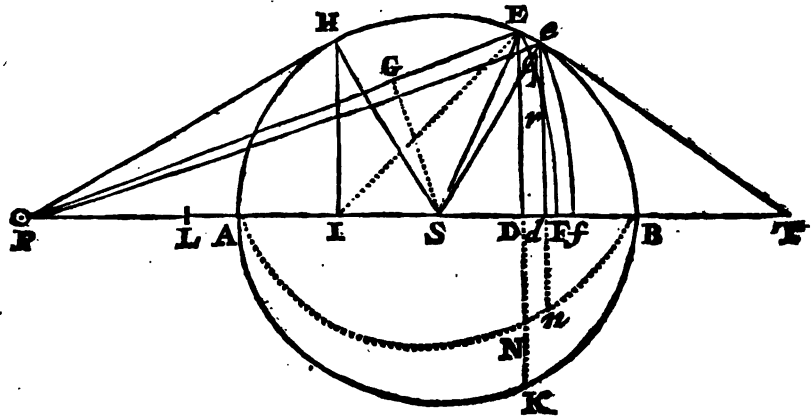
Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantia corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$: erit vis qua corpusculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas V , fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpusculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est Area ABNA.

A puncto P ducatur recta PH Sphæram tangens in H , & ad axem PAB demissa normali HI , bisecetur PI in L ; & erit (per Prop. 12. Lib. 2. Elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob similitudinem triangulorum SPH , SHI) æquale rectangulo PSI . Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc est, sub PS & $2LS + 2SD$, id est, sub PS & $2LD$. Porro $DEquad.$ æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq - LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$



(per Prop. 6. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo ALB . Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq ; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN , resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V}$ $\frac{LDq \times PS}{PE \times V}$ $\frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areae per Methodos vulgatas innotescunt. Q. E. F.

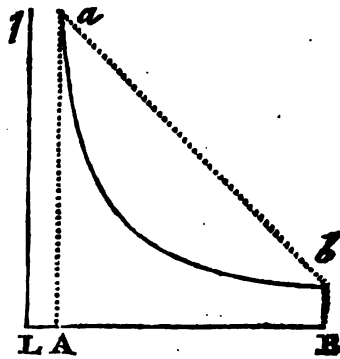
Ex-

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam PE ; dein $2PS \times LD$ pro PEq , & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$.

Pone DN æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD , describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$.

Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem norma-

liter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendiculara Ll, Aa, Bb , quorum Aa ipsi LB , & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB , per puncta a, b describatur Hyperbola ab . Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantia, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE cub.}{2ASq}$ pro V ,

dein $2PS \times LD$ pro PEq ; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS}$,

$\frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id est (ob continue proportionales PS, AS, SI)

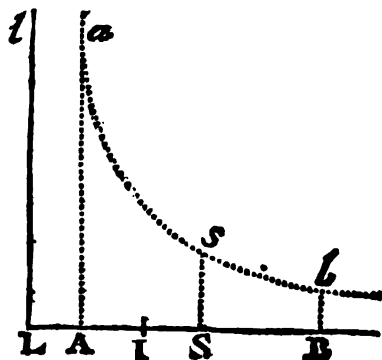
ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in

longitudinem AB , prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperboli-

DE MOTU

CORPORUM cam; secunda $\frac{1}{2} SI$ aream $\frac{1}{2} AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ are-am $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2} AB \times SI$. De prima sub-

ducatur summa secundæ & tertię, & manebit area quęsitā $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendiculara Ll, Aa, Ss, Bb , quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum s Asymptotis Ll, LB describatur Hyperbola asb occurrens perpendicularis Aa, Bb in a & b ; & rectangulum ASI subductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quęsitā $ABNA$.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphęrę particulas tendens, decrefcit in quadruplicata ratione distantię a particulis;

fcribe $\frac{PEqq}{2AScub.}$ pro V , dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE , & fiet DN ut

$$\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDC}}, - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}}, - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$$

Cujus tres partes ductę in longitudinem AB , producant areas totidem, viz. $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$;

& $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LAcub.}} - \frac{1}{\sqrt{Lbcub.}}$. Et hæ post debitam reduc-

tionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq , & $SIq + \frac{2SIcub.}{3LI}$. Hæ vero sub-

ductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SIcub.}{3LI}$. Igitur vis tota,

qua corpusculum P in Sphęrę centrum trahitur, est ut $\frac{SIcub.}{PI}$ id est, reciproce ut $PS cub. \times PI$. Q. E. I.

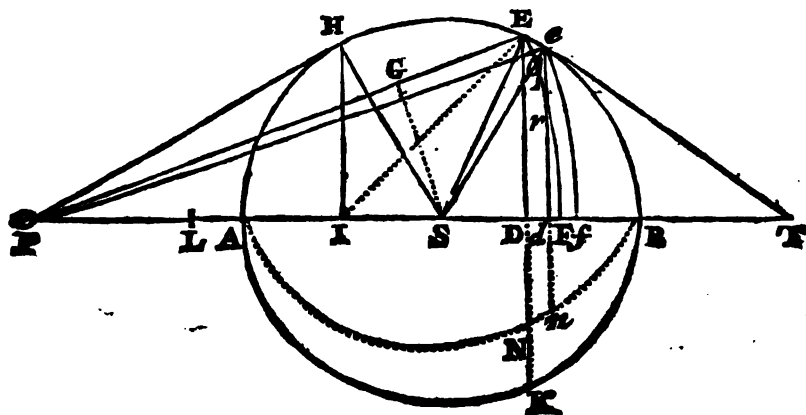
Eadem Methodo determinari potest Attractio corpusculi siti intra Sphęram, sed expeditius per Theorema sequens.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In Sphæra centro S intervallo SA descripta, si capiantur SI, SA, SP continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis I attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco P, in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro IS, PS & subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis P & I, ad centrum tendentium.

Ut si vires centripetæ particularum Sphære sint reciproce ut distantie corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in I trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in P, in ratione



composita ex subduplicata ratione distantie SI ad distantiam SP & ratione subduplicata vis centripetæ in loco I, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum SI, SP ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in I & P a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphære sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in I sit ad attractionem in P, ut distantia SP ad Sphære semidiametrum SA: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem

DE MOTU *cem* ut SP quad. ad SA quad: Si in quadruplicata, ut SP cub. ad
CORPORUM SA cub. Unde cum attractio in P , in hoc ultimo casu, inventa
fuit reciproce ut PS cub. $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut
 SA cub. $\times PI$, id est (ob datum SA cub.) reciproce ut PI . Et
similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstra-
tur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco
quovis P , ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$.
Ergo si agatur IE , ordinata illa ad alium quemvis locum I , mu-
tatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e
Sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiis
 IE , PE , ut PE^n ad IE^n , (ubi numerus n designet indicem
potestatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ &
 $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad
 $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula SPE , SEI , fit
 IE ad PE ut IS ad SE vel SA ; pro ratione IE ad PE scribe
rationem IS ad SA ; & ordinarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad
 $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum
 PS , SI ; & IE^n ad PE^n subduplicata est ratio virium in distan-
tiis PS , IS . Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ de-
scribunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione com-
posita ex subduplicatis illis rationibus. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

*Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad
ejus Segmentum quodcunque attrahitur.*

Sit P corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ Segmentum ejus
plano RDS & superficie Sphæræ RBS contentum. Superficie
Sphæræ EFG centro P descripta secetur DB in F , ac distin-
guatur Segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit
autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, pro-
funditatem habens quam minimam. Nominetur ista profundi-
tas O ,

S E C T I O XIII.



De Corporum non Sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiae attracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliber augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decreseat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusque Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus Figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis xli, in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema xli inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra Orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia equaliter attractiva constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia, & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis
B b cujusvis

DE MOTU
CORPORUM

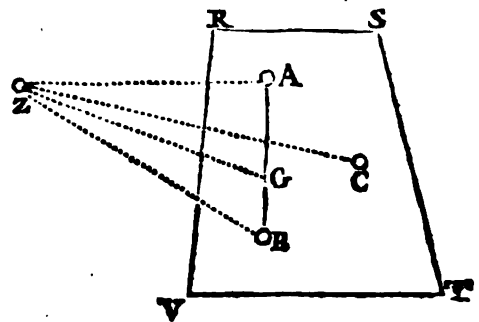
cujusvis distantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut $A \text{ cub.}$ & $B \text{ cub.}$ adeoque tum corporum latera cubica tum corpusculorum attractorum distantiz a corporibus, ut A & B : attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$ id est, ut corporum latera illa cubica A & B . Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$ id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ qq.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ qq.}}$ id est, reciproce ut latera cubica A & B . Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti: si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum equalium Corporis cujuscunque vires attractive sint ut distantie locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi Globi ex materia consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis $RSTV$ particule A , B trahant corpusculum aliquod Z viribus quæ, si particule æquantur inter se, sint ut distantie AZ , BZ ; sin particule statuantur inæquales, sint ut hæ particule in distantias suas AZ , BZ respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB , & secetur ea in G ut sit AG ad BG ut particula B ad particulam A ;



&

& erit G commune centrum gravitatis particularum A & B . Vis $A \times AZ$ (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$ & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG , æquantur; adeoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G , & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G , Globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C , & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G ; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C ; & eadem erit ac si Globus & particula C consisterent in centro illo communi, Globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$ ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram Globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac si corpus attrahens $RSTV$ esset Sphæricum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si Corpora sint plura ex particulis equalibus constantia, quarum vires sunt ut distantie locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in Globum formarentur.

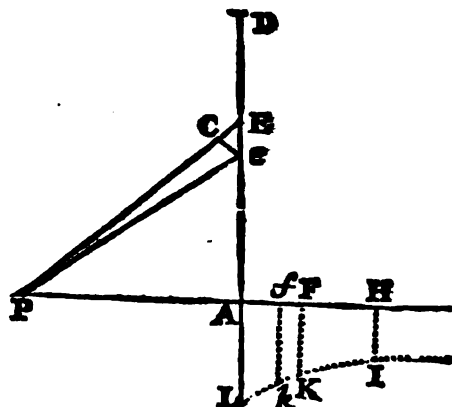
Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in Globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta: corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula Circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubivis positum in recta qua plano Circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro A intervallo quovis AD , in plano cui recta AP perpendicularis est, describi intelligatur Circulus; & invenienda sit vis qua corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A Circuli puncto quovis E ad corpusculum attractum P agatur recta PE : In recta PA capiatur PF ipsi PE æqualis, & erigatur normalis FK , quæ sit ut vis qua punctum E trahit corpusculum P . Sitque IKL curva linea quam punctum K perpetuo tangit. Occurrat eadem Circuli plano in L . In PA capiatur PH æqualis PD , & erigatur perpendicularum HI curvæ prædictæ occurrens in I ; & erit corpusculi P attractio in Circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP . Q. E. I.



Etenim in AE capiatur linea quam minima Ee . Jungatur Pe ; & in PE , PA capiatur PC , Pf ipsi Pe æquales. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis E trahit ad se corpus P , ponitur esse ut FK , & inde vis qua punctum illud trahit corpus P versus A est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus P versus A , ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee , & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE , Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus P versus A , ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP . Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in Circulo, qui centro A & intervallo

tervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A , est ut area $AHIKL$ ducta in AP . *Q. E. D.* LIBER. PRIMUS.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF \text{ quad.}}$, atque adeo area

$AHIKE$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n , hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attra-

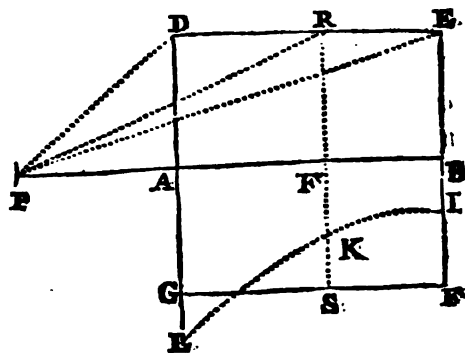
ctio corpusculi P in Circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter Circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2} , propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe Solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ: in quacunque distantiarum ratione decrescentes.

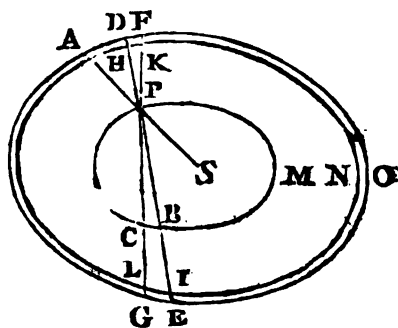
In Solidum $ADEFG$ trahatur corpusculum P , situm in ejus axe AB . Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc Solidum, & in ejus diametro FS , in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per Prop. xc.) longitudo FK vi qua corpusculum P in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI , planis extimorum circularum AL & BI occurrentem in L & I ; & erit attractio corpusculi P in Solidum ut area $LABI$. *Q. E. I.*



qua Sphærois trahit corpus P erit ad vim qua Sphæra, diametro AB LIBER
 descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ PRIMUS.

ad $\frac{AS \text{ cub.}}{3PS \text{ quad.}}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem, in data quavis ejusdem diametro, collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, S centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA , tum rectæ duæ quævis DE, FG Sphæroidi hinc inde occurrentes in D & E, F & G : Sintque PCM, HLN superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus P & secet rectas DE & FG in B & C , posterior secet easdem rectas in H, I & K, L . Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt



rectarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, FP & CG, DH & IE, FK & LG sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ DE, PB & HI bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC & KL . Concipe jam DPF, EP & G designare Conos oppositos, angulis verticalibus DPF, EPG infinite parvis descriptos, & lineas etiam DH, EI infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ $DHKF, GLIE$, ob æqualitatem linearum DH, EI , erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo P , & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia $DPF, EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires Coni DPF & segmenti Conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P a sola Sphæroide intima $PCBM$, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, qua corpus A trahitur a Sphæroide tota $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS . Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

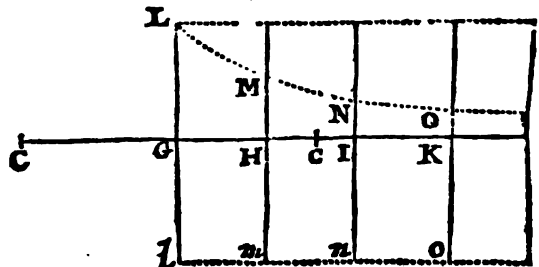
Dato Corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E Corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI, & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a Solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod Solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit $LG\ell$ planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus versus l , inque plana innumera $mHM, nIN, \&c.$ ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra Solidum.



Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum Solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sic numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. xc.)

vis qua planum quodvis mHM trahit punctum C est reciproce ut CH^{n-2} . In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM . Similiter in planis singulis IGL, nIN, oKO , &c. capiantur longitudo GL, IN, KO , &c. ipsis $CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}$, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudo captæ, adeoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis Solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciproce ut CG^{n-1} , & propterea vis Solidi totius est reciproce ut CG^{n-1} . *Q. E. D.*

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani IGL intra Solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiæ CG . Et Solidi pars $LGloKO$, planis parallelis IGL, oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum C sola vi Solidi ultra planum OK siti trahitur. Hæc autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-1} , hoc est (ob æquales CG, CK) reciproce ut CG^{n-1} . *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si Solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva Solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NICO$, in infinitum versus KO productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-1} .

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproxime in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis citerioris.

LIBER
PRIMUS.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quærat motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. xxxix.) motum corporis recta descendente ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas factæ. Et contra, si quærat Lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, solvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in Series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quærat vis qua corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curva linea quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem augeri parte

quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ resolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m(m-n)}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{m(m-n)}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est

igitur vis quæsitæ ut $\frac{m(m-n)}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut

$\frac{m(m-n)}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat,

existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2 B^0$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum Galileus demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2 A^{-1}$ seu $2 B^3$: adeoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de Motu, quas nondum attigi.

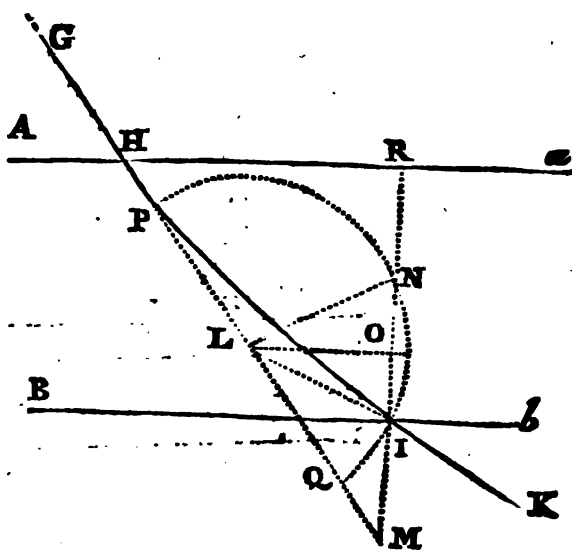
S E C T I O XIV.

De Motu corporum minimorum, quae Viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si Media duo similia, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus Medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur: Sit autem attractio, in equalibus ab utroque plano distantis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiae in planum alterutrum erit ad sinum emergentiae ex plano altero in ratione data.

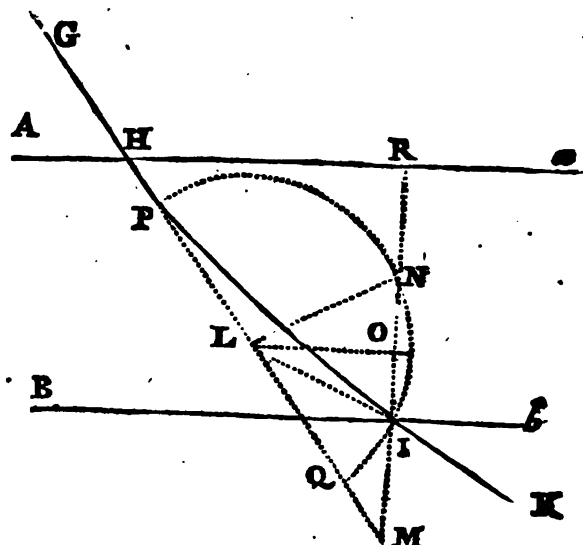
Cas. I. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa secundum lineam GH , ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus Medium incidentiae, eaque actione describat lineam curvam HI , & emergat secundum lineam IK . Ad planum emergentiae Bb erigatur perpendicularum IM , occurrens tum lineae incidentiae GH productae in M , tum plano incidentiae Aa in R ; & linea emergentiae KI producta occur-



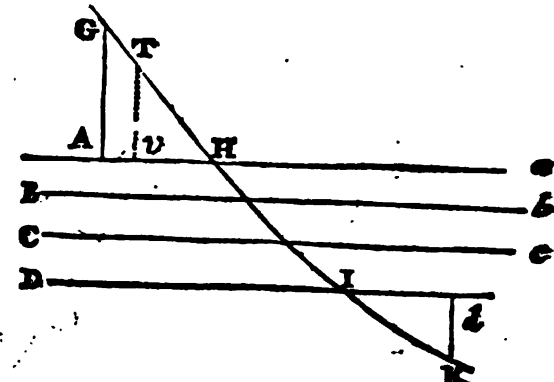
rat HM in L . Centro L intervallo LI describatur Circulus, secans

DE MOTU
CORPORUM

secans tam HM in P & Q , quam MI productam in N , & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilei*) curva HI Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea IM æquale sit HM quadrato; sed & linea HM bifecabitur in L . Unde si ad MI demittatur perpendicularum LO , æquales erunt MO, OR ; & additis æqualibus ON, OI , fient totæ æquales MN, IR . Proinde cum IR datur, datur etiam MN ; estque rectangulum NMI ad rectangulum sub latere recto & IM , hoc est, ad HMq , in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ , id est, differentię quadratorum MLq , & PLq seu LIq ; & HMq datam rationem habet ad sui ipsius



quartam partem MLq : ergo datur ratio $MLq - LIq$ ad MLq , & divisim, ratio LIq ad MLq , & ratio dimidiata LI ad ML . Sed in omni triangulo LMI , sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ LMR ad sinus anguli emergentiæ LIR . *Q. E. D.*



Cas. 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, $AabB, BbcC$, &c. & agitetur vi quæ sit in singulis

singulis separatim uniformis, ac in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo Bb , in data ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum Bb , erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio Cc , in data ratione; & hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano quarto Dd , in data ratione; & sic in infinitum: & ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Isdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

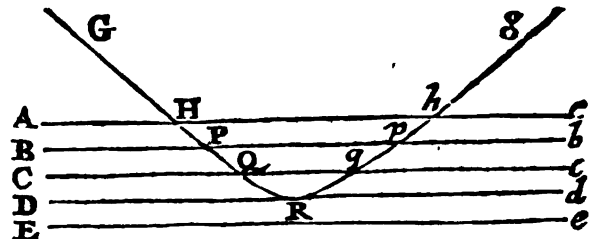
Capiantur AH , Id æquales, & erigantur perpendiculara AG , dK occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH , IK , in G & K . In GH capiatur TH æqualis IK , & ad planum Aa demittatur normaliter Tv . Et (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum planis Aa , Bb , Cc , &c. perpendiculararem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam AG & punctum H , interque punctum I & lineam dK ; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas GH , IK . Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut GH ad IK vel TH , id est, ut AH vel Id ad vH , hoc est (respectu radii TH vel IK) ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PRO

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

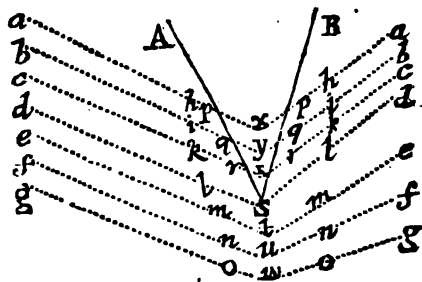
Nam concipe corpus inter parallela plana $Aa, Bb, Cc, &c.$ describere arcus Parabolicos, ut supra; sintque arcus illi $HP, PQ, QR, &c.$ Et sit ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum Aa , ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano Dd , in spatium $DdeE$: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano Dd . Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R ; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum Ee . Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ Rd , propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus Medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana Cc, Dd , describendo arcum Parabolæ QRq , cujus vertex principalis (juxta demonstrata Galilei) est in R ; secabit planum Cc in eodem angulo in q , ac prius in Q ; dein pergendo in arcubus parabolicis $qp, pb, &c.$ arcubus prioribus QP, PH similibus & æqualibus secabit reliqua plana in iisdem angulis in $p, b, &c.$ ac prius in $P, H, &c.$ emergentque tandem eadem obliquitate in b , qua incidit in H . Concipe jam planorum $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c.$ intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*



Scholium.

Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque Lucem successive propagari & spatio quasi septem vel octo minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cuforum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem: & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog, fnunf, emtme, dlsld*, sunt radii, arcubus *owo, nun, mtm, lsl* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in



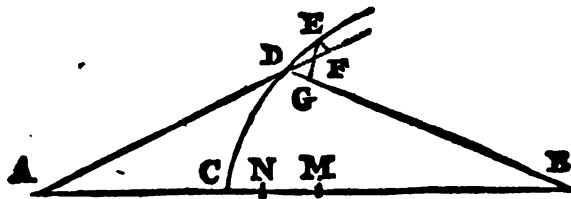
aere extra cultrum, debent etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refraçtio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzkc, biyib, abxba* incidentibus ad *r, q, p*, & inter *k & z, i & y, b & x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus Opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed Trajectorias corporum Trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.

PROPO-

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad finem emergentiæ in data ratione, quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus a quo corpuscula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta describat superficiem quæsitam; D, E curvæ illius puncta duo quavis; & EF, EG perpendiculara in corporis vias AD, DB demissa. Accedat punctum D ad punctum E ; & lineæ DF qua AD augetur, ad lineam DG qua DB diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad finem emergentiæ. Datur ergo ratio in-

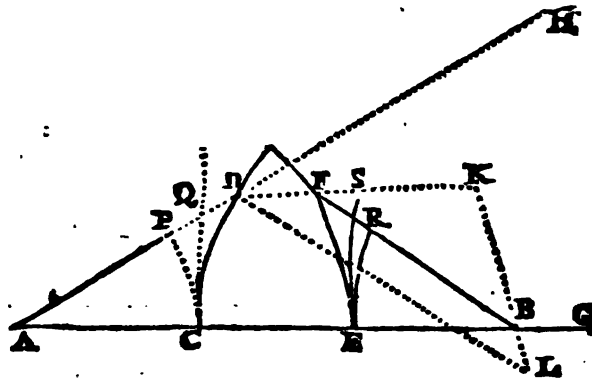


crementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB ; & propterea si in axe AB sumatur ubivis punctum C , per quod curva CDE transire debet, & capiatur ipsius AC incrementum CM , ad ipsius BC decrementum CN in data illa ratione; centrisque A, B , & intervallis AM, BN describantur circuli duo se mutuo secantes in D : punctum illud D tanget curvam quæsitam CDE , eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C , habebuntur Figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in *Optica* & *Geometria* ad *Refractiones* exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hac propositione exponere,

Corol.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis CD , secundum lineam rectam AD lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam DK , & a puncto C duci intelligantur Lineæ curvæ CP, CQ ipsis AD, DK semper perpendiculares: erunt incrementa linearum PD, QD , atque adeo lineæ ipsæ PD, QD , incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem A B descripta superficie quacunq; attractiva CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam EF, que corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta AB secet superficiem primam in C & secundam in E ; puncto D utcunq; assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficiem secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N ; produc tum AB ad G ut sit BG ad CE ut MN ad N , tum AD ad H ut sit AH æqualis AG , tum etiam DF ad K ut sit DK ad DH ut N ad M . Junge KB , & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB , productæ in L , ipsique DL parallelam age BF : & punctum F tanget lineam EF , quæ circa axem AB revoluta describet superficiem quæsitam. *Q. E. F.*

Nam concipe Lineas CP, CQ ipsis AD, DF respectivè, & Lineas ER, ES ipsis FB, FD ubique perpendiculares esse, adeoque QS ipsi CE semper æqualem; & erit (per *Corol. 2. Prop. xcviij.*) PD ad QD ut Ma ad N , adeoque ut DL ad DK vel FB ad FK ;

MOTU CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

*De Motu Corporum quibus resistitur in ratione
Velocitatis.*

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resis-
tentia amissus est ut spatium movendo confectum.*

NAM cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc est, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si corpus, gravitate omni destitutum, in spatiis liberis sola vi insita moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

LEMMA I.

*Quantitates differentiis suis proportionales, sunt continue
proportionales.*

Sit A ad A-B ut B ad B-C & C ad C-D, &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

PHILOSOPHIÆ NATURALIS
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

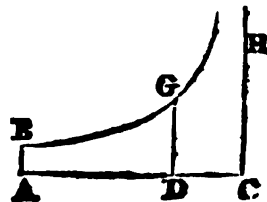
DE MOTU
CORPORUM

Si Corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem sola vi insita per Medium simile moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressionem Geometricam, & spacia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulso unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. 1. Lib. 11.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quolibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressionem continua, qui per saltum capiuntur, omissio passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressionem Geometricam. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam casu continue proportionales. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spacia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. 1. Lib. 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si Asymptotis rectangulis ADC , CH describatur Hyperbola BG , sintque AB , DG ad Asymptoton AC perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam AC , elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam DC : exponi potest tempus per aream $ABGD$, & spatium eo tempore descriptum per lineam AD . Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum tempo-



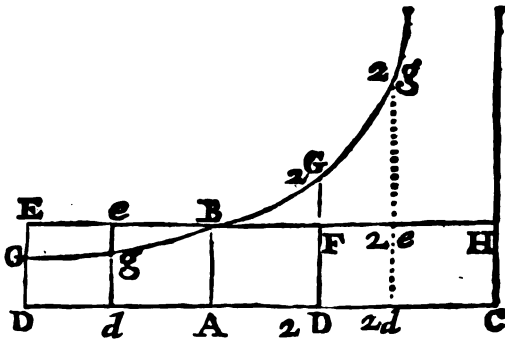
ris,

ris, decreſcet recta DC in ratione Geometrica ad modum veloci- LIBER
tatis, & partes rectæ AC æqualibus temporibus deſcriptæ decre- SECUNDUS
cent in eadem ratione.

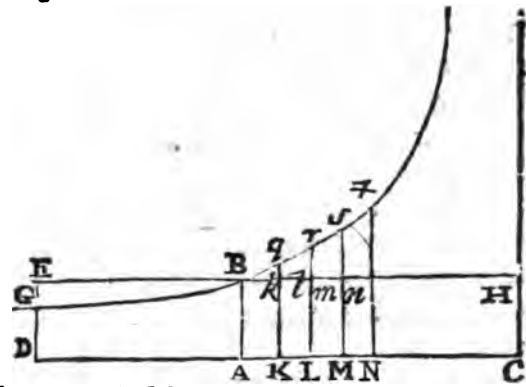
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui dum in Medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, deſignare motum.

Corpore aſcendente, expo-
natur gravitas per datum quod-
vis rectangulum BC , & reſi-
ſtentia Medii initio aſcensus per
rectangulum BD ſumptum ad
contrarias partes. Aſymptotis
rectangulis AC, CH , per punc-
tum B deſcribatur Hyperbola
ſecans perpendiculara DE, de in
 G, g ; & corpus aſcendendo,
tempore $D G g d$, deſcribet ſpatium $EG g e$, tempore $D G B A$
ſpatium aſcensus totius $E G B$; tempore $A B 2 G 2 D$ ſpatium de-
ſcensus $B F 2 G$, atque tempore $2 D 2 G 2 g 2 d$ ſpatium deſcensus
 $2 G F 2 e 2 g$; & velocitates corporis (reſiſtentia Medii proportio-
nales) in horum temporum periodis erunt $A B E D, A B e d$, nulla,
 $A B F 2 D, A B 2 e 2 d$ reſpective; atque maxima velocitas, quam
corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BC .



Reſolvatur enim rectan-
gulum AH in rectangula
innumera Ak, Kl, Lm, Mn ,
&c. quæ ſint ut incrementa
velocitatum æqualibus tot-
idem temporibus facta; &
erunt nihil, Ak, Al, Am, An ,
&c. ut velocitates totæ, at-
que adeo (per Hypotheſin)
ut reſiſtentia Medii princi-
pio ſingulorum temporum
æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gra-
vitatatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravi-
tatis



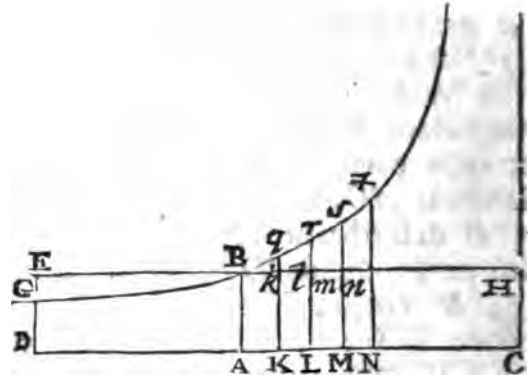
Dd ;

tatis

DE MOTU
CORPORUM

tatis subducantur resistentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LIHC$, $NnHC$, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque adeo (per motus Legem 11) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak , Kl , Lm , Mn , &c; & propterea (per Lem. 1. Lib. 11.) in progressionem Geometricam. Quare si rectæ Kk , Ll , Mm , Nn , &c. productæ occurrant Hyperbolæ in q , r , s , t , &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$, &c. æquales, adeoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area $ABqK$ (per Corol. 3. Lem. VII & Lem. VIII. Lib. 1.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ seu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi.

Et simili argumento areæ $qKlr$, $rLms$, $sMnt$, &c. sunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales $BAKq$, $qKlr$, $rLms$, $sMnt$, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ Bkq ,



$qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per Hypothesin) velocitatibus, atque adeo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt areæ Bkq , Blr , Bms , Bnt , &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis $ABrL$, describit spatium Blr , & tempore $LrtN$ spatium $rlnt$. Q. E. D. Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad vim resistentiæ qua in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressionem Arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu (atque etiam earundem differentia in descensu) decrescit in progressionem Geometricam.

Corol. 3. Sed & differentia spatorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressionem Geometricam.

Corol.

DE MOTU

CORPORUM inde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & Projectile tempore $\mathcal{D}RTG$

perveniet ad punctum r , describens curvam lineam $\mathcal{D}raF$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendicularo AB , & postea semper appropinquans ad Asymptoton PLC . Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL . *Q. E. I.*

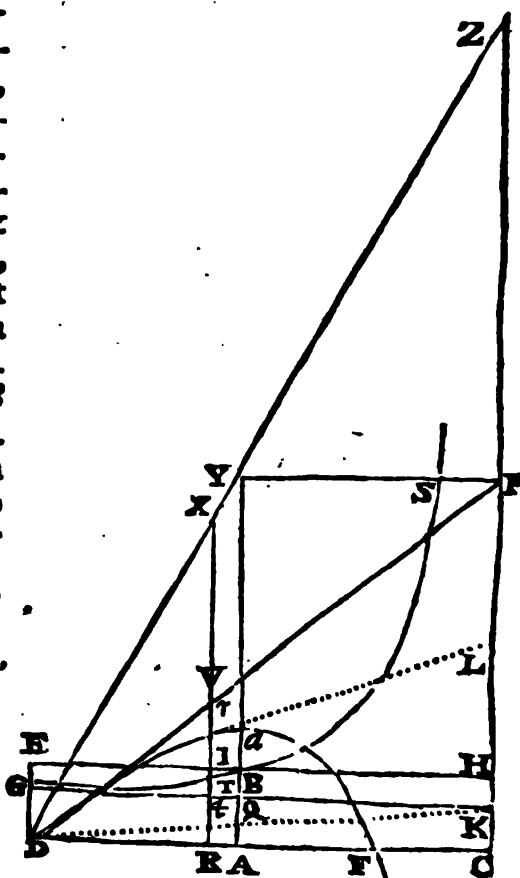
Est enim N ad $\mathcal{Q}B$ ut $\mathcal{D}C$ ad $\mathcal{C}P$ seu $\mathcal{D}R$ ad RV , adeoque RV æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times \mathcal{Q}B}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{\mathcal{D}R \times \mathcal{Q}B - tGT}{N}$)

æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream

$RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistantia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per Prop. 11. hujus) ut linea $\mathcal{D}R$, altitudo vero (per Prop. 111. hujus) ut area $\mathcal{D}R \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea Rr . Ipso autem motus initio area $RDGT$ æqualis est rectangulo $\mathcal{D}R \times A\mathcal{Q}$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{\mathcal{D}R \times AB - \mathcal{D}R \times A\mathcal{Q}}{N}$)

tunc est ad $\mathcal{D}R$ ut $AB - A\mathcal{Q}$ seu $\mathcal{Q}B$ ad N , id est, ut $\mathcal{C}P$ ad $\mathcal{D}C$; atque adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac $\mathcal{D}R$ semper ut longitudo, atque Rr ad $\mathcal{D}R$ sub initio ut

altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad $\mathcal{D}R$ ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $\mathcal{D}raF$, quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*

Corol.

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$, ideo-

que si producat RT ad X ut sit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$, (id est, si compleatur parallelogrammum $ACPT$, jungatur DT secans CP in Z , & producat RT donec occurrat DT in X ;) erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR vel, quod perinde est, innumeræ ZX , in progressionem Geometricam; erunt totidem Xr in progressionem Arithmeticam. Et hinc Curva $DraF$ per tabulam Logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D , diametro DE deorsum producta, & Latere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota, ipso motus initio, ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP , ut in Medio uniformi resistente describat Curvam $DraF$, ea ipsa erit quacum exire debet de eodem loco D , secundum eandem rectam DP , ut in spatio non resistente describat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV \text{ quad.}}{Vr}$ & Vr est

$\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, Hyperbolam GTB tangeret in G , parallela est ipsi DK , ideoque Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$ & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est

$\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id est, (ob proportionales DR & DC , DV

& DP) $\frac{DV.q \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & Latus rectum $\frac{DV \text{ quad.}}{Vr}$ prodit

$\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id est (ob proportionales QB & CK , DA & AC)

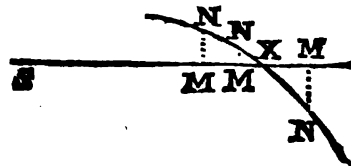
$\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, adeoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$;

hoc est, ut resistentia ad gravitatem. $Q. E. D.$

Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D , data cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; & resistentia Medii ipso motus initio detur: inveniri potest Curva $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate

tione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM . Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta DP , inveniantur longitudines DF , Df , ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per

calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendicularum MN . Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistantiæ ad gravitatem rationem SM , & colligendo novam differentiam MN .



Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM , & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN secans rectam $SMMM$ in X , & erit SX vera ratio resistantiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo DF per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem DP , ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modo inventam, erit vera longitudo DP . Qua inventa, habetur tum Curva linea $DraF$ quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistantia in locis singulis.

Scholium.

Cæterum resistantiam corporum esse in ratione velocitatis, Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant resistantiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; adeoque tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistantia (per motus Legem II & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

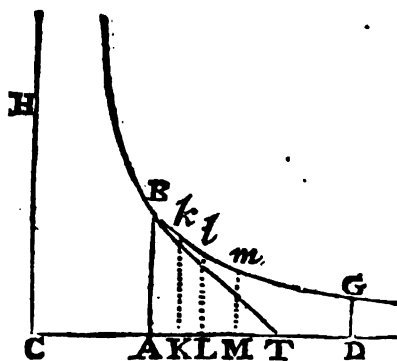
S E C T I O II.

*De motu Corporum quibus resistitur in duplicata ratione
Velocitatum.*

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

*Si Corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & idem
sola vi insita per Medium simile movetur; tempora ve-
ro sumantur in progressione Geometrica a minoribus ter-
minis ad majores pergente: dico quod velocitates initio sin-
gularum temporum sunt in eadem progressione Geometrica
inverse, & quod spatia sunt equalia quæ singulis tempo-
ribus describuntur.*

Nam quoniam quadrato velocita-
tis proportionalis est resistentia Me-
dii, & resistentiæ proportionale est
decrementum velocitatis; si tempus
in particulas innumeras æquales di-
vidatur, quadrata velocitatum sin-
gulis temporum initiis erunt velo-
citatum earundem differentiis pro-
portionalia. Sunt temporis particu-
læ illæ AK, KL, LM &c. in recta
 CD sumptæ, & erigantur perpen-
dicula AB, Kk, Ll, Mm , &c. Hy-
perbolæ $BklmG$, centro C Asymptotis rectangulis CD, CH descrip-
tæ, occurrentia in B, k, l, m , &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA , &
divisim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA , & vicissim $AB - Kk$ ad
 AK ut Kk ad CA , adeoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde,
cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo,
ubi coeunt AB & Kk ut ABq . Et simili argumento erunt $Kk - Ll$,
 $Ll - Mm$, &c. ut Kkq, Llq , &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm
qua-



quadrata sunt ut earundem differentiarum; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiarum, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areae his lineis descriptae sint in progressione consimili cum spatiis quae velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB , & velocitas initio secundi KL per lineam Kk , & longitudo primo tempore descripta per aream $AKkB$; velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes Ll, Mm , &c. & longitudes descriptae per areas Kl, Lm , &c. Et composite, si tempus totum exponatur per summam partium suarum AM , longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM , &c. ut sint CA, CK, CL, CM , &c. in progressione Geometrica; & erunt partes illae in eadem progressione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm , &c. in progressione eadem inversa, atque spatia descripta Ak, Kl, Lm , &c. aequalia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per Asymptoti partem quamvis AD , & velocitas in principio temporis per ordinatam applicatam AB ; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG , & spatium totum descriptum per aream Hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon spatium quod corpus aliquod eodem tempore AD , velocitate prima AB , in Medio non resistente describere posset, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in Medio resistente descriptum, capiendū illud ad spatium quod velocitate uniformi AB in medio non resistente simul describi posset, ut est area Hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam resistentia Medii, statuendo eam ipso motus initio aequalem esse vi uniformi centripetae, quae in cadente corpore, tempore AC , in Medio non resistente, generare posset velocitatem AB . Nam si ducatur BT quae tangat Hyperbolam in B , & occurrat Asymptoto in T ; recta AT aequalis erit ipsi AC , & tempus exponet quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam AB .

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiae ad vim gravitatis aliamve quamvis datam vim centripetam.

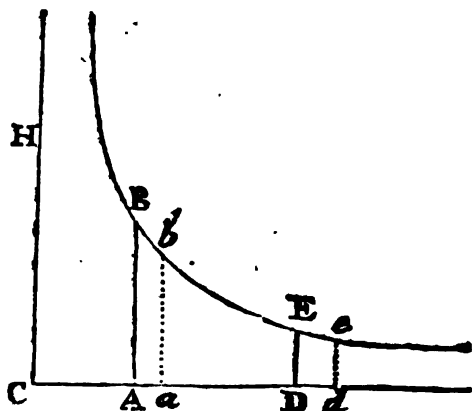
Corol. 5. Et viceversa, si datur proportio resistentiae ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus AC , quo vis centripeta resistentiae aequalis generare possit velocitatem quamvis AB ; & inde

De Motu de datur punctum B per quod Hyperbola, Asymptotis CH, CD ,
CORPORUM describi debet; ut & spatium $ABGD$, quod corpus incipiendo
 motum suum cum velocitate illa AB , tempore quovis AD , in
 Medio similari resistente describere potest.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

*Corpora Spherica homogenea & equalia, resistentiis in du-
 plicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus in-
 sitis incitata, temporibus quæ sunt reciproce ut veloci-
 tates sub initio, describunt semper equalia spatia, & a-
 mittunt partes velocitatum proportionales totis.*

Asymptotis rectangulis CD ,
 CH descripta Hyperbola qua-
 vis $BbEe$ secante perpendicu-
 la AB, ab, DE, de , in $B, b, E,$
 e , exponantur velocitates initia-
 les per perpendicula AB, DE ,
 & tempora per lineas Aa, Dd .
 Est ergo ut Aa ad Dd ita (per
 Hypothesin) DE ad AB , &
 ita (ex natura Hyperbolæ)
 CA ad CD ; & componendo,
 ita Ca ad Cd . Ergo areæ AB
 $ba, DEed$, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & ve-
 locitates primæ AB, DE sunt ultimis ab, de , & propterea (divi-
 dendo) partibus etiam suis amissis $AB-ab, DE-de$ proportio-
 nales. Q. E. D.



PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

*Corpora Spherica quibus resistitur in duplicata ratione ve-
 locitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe &
 resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum pro-
 portionales totis, & spatia describent temporibus istis in
 velocitates primas ductis proportionalia.*

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora
 con-

conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debet resistētia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & resistētia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, adeoque retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim.

Q. E. D.

LIBER
SECUNDUS.

Corol. 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicata ratione diametrorum: Globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujusque erit ut ejus velocitas & Massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistētia (per Hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propositionem) est in ratione priore directe & ratione posteriore inverse, id est, ut diameter directe & velocitas inverse; adeoque spatium (tempori & velocitati proportionale) est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquialtera ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus Globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E : & si resistētiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n & E^n : spatia quibus Globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis; erunt ut D^{3-n} & E^{3-n} . Igitur describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si Globi non sint homogenei, spatium a Globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc propositionem) augetur in ratione motus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol.

DE MOTU *Corol. 5.* Et si Globi moveantur in Mediis diversis ; spatium in
CORPORUM Medio , quod cæteris paribus magis resistit , diminuendum erit in
 ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositio-
 nem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ , & spatium in ratio-
 ne temporis.

L E M M A II.

*Momentum Genitæ æquatur Momentis laterum singulorum
 generantium in eorundem laterum indices dignitatum &
 coefficientia continue ductis.*

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex lateribus vel termi-
 nis quibuscunque , in Arithmetica per multiplicationem , divisionem ,
 & extractionem radicum ; in Geometria per inventionem vel con-
 tentorum & laterum , vel extremarum & mediarum proportiona-
 lium , absque additione & subductione generatur. Ejusmodi quan-
 titates sunt Facti, Quoti, Radices, Rectangula, Quadrata, Cubi,
 Latera quadrata, Latera cubica, & similes. Has quantitates ut in-
 determinatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescen-
 tes vel decrescetes, hic considero ; & earum incrementa vel decre-
 menta momentanea sub nomine Momentorum intelligo : ita ut in-
 crementa pro momentis additiis seu affirmativis , ac decrementa
 pro subductiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris
 particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quanti-
 tates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam
 nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc
 Lemmate magnitudo momentorum , sed prima nascentium propor-
 tio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocita-
 tes incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, muta-
 tiones & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis
 quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujus-
 que generantis Coefficientis est quantitas, quæ oritur applicando Ge-
 nitam ad hoc latus.

Igitur sensus Lemmatis est , ut , si quantitatum quarumcunque
 perpetuo motu crescentium vel decrescetium $A, B, C, \&c.$ mo-
 menta, vel mutationum velocitates dicantur $a, b, c, \&c.$ momentum
 vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti con-
 senti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum
 digni-

dignitatum $A^2, A^1, A^0, A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{1}{3}}, A^{\frac{1}{4}}, A^{\frac{1}{5}}, A^{-1}, A^{-2}, \& A^{-\frac{1}{2}}$ momenta

$2aA, 3aA^2, 4aA^3, \frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}aA^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}aA^{-\frac{1}{4}}, \frac{1}{5}aA^{-\frac{1}{5}}, -aA^{-2},$
 $-2aA^{-3}, \& -\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}},$ respective. Et generaliter, ut dignitatis

cujuscunque A^m momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & Genitæ $A^1B^1C^1$ momentum $3aA^1B^1C^1 + 4bA^1B^1C^1 + 2cA^1B^1C^1$; & Genitæ $\frac{A^1}{B^1}$ five A^1B^{-1} momentum $3aA^1B^{-1} - 2bA^1B^{-1}$; & sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hanc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB , ubi de lateribus A & B decrant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, seu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ seu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G , & contenti ABC seu GC momentum (per *Cas. 1.*) erit $gC + cG$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Et par est ratio contenti sub lateribus quocunque. *Q. E. D.*

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2 , id est rectanguli AB , momentum $aB + bA$ erit $2aA$, ipsius autem A^1 , id est contenti ABC , momentum $aBC + bAC + cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1} . *Q. E. D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1 , momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A , una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1 , id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $-\frac{a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1 , momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n

DE MOTU
CORPORUM una cum $\frac{x}{A^n}$ in $na A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{x}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A , momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2 A^{\frac{1}{2}}$ erit a , per *Cas. 3*: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2} a A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B , erit A^n æquale B^n , ideoque $ma A^{n-1}$ æquale $nb B^{n-1}$, & $ma A^{-1}$ æquale $nb B^{-1}$ seu $nb A^{-\frac{n}{m}}$, adeoque $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b , id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n , una cum momento ipsius B^n ducto in A^m , id est $ma A^{m-1} B^n + nb B^{n-1} A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunt A, B, C, D, E, F , continue proportionales; & si detur terminus C , momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2 A, -B, D, 2 E, 3 F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eadem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis furdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus.

tibus [*Data Equatione quocunque. Fluentes quantitates involven- te, Fluxiones invenire, & vice versa*] eandem celarem: rescripsit LITER
SECUNDUS.
Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis, & Idea generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

PROPOSITIO VII. THEOREMA VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistantiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressionem Geometricam.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC ; resistentia per lineam indefinitam AK ; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC ; velocitas corporis per lineam AP (quæ sit media proportionalis inter AK & AC , ideoque in subduplicata ratione resistentiæ;) incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam KL , & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ ; & centro C Asymptotis rectangulis CA, CH describatur Hyperbola quævis BNS , erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S . Quoniam AK est ut AP^2 , erit hujus momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id est, ut AP in KC . Nam velocitatis incrementum PQ , (per motus Leg. 11.) proportionale est vi generanti KC . Componatur ratio ipsius KL , cum ratione ipsius KN , & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$, hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP . Atqui areæ Hyperbolicæ $KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L , est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut AP , Componitur igitur area tota Hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati AP semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI, IMNK, KNOL$, &c. & vi-

ratem illam datam in subduplicata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii resistentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quod si Tangentes angulorum sectoris Circularis & sectoris Hyperbolicus sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascensus futuri ut sector Circuli, & tempus omne descensus præteriti ut sector Hyperbolæ.

Rectæ AC , qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD . Centro D semidiametro AD describatur tum Circuli quadrans AtE , tum Hyperbolæ rectangulæ AVZ axem habens AX , verticem principalem A & Asymptoton DC . Jungantur Dp, DP , & erit sector Circularis AtD ut tempus ascensus omnis futuri; & sector Hyperbolicus ATD ut tempus descensus omnis præteriti. Si modo sectorum Tangentes Ap, AP sint ut velocitates.

Cas. 1. Agatur enim Dvq abscindens sectoris ADt & trianguli ADp momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas tDv & pDq . Cum particule illæ, ob angulum communem D , sunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{Dp}{pD \text{ quad.}}$. Sed $pD \text{ quad.}$ est $AD \text{ quad.} + Ap \text{ quad.}$ id est, $AD \text{ quad.} + AD \times Ak$ seu $AD \times Ck$; & qDp est $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo sectoris particula tDv est ut $\frac{pq}{Ck}$, id est, ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe & vis illa Ck quæ velocitatem dimittit inverse, atque adeo ut particula temporis decremento respondens. Et componendo fit summa particularum omnium tDv in sectore ADt , ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis Ap particulis amissis pq respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus ADt est ut ascensus totius futuri tempus. *Q. E. D.*

PQ generantur, ut summa particularum sectoris ATD , id est, LIBER
SECUNDUS.
tempus totum ut sector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC , spatium quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium quod corpus velocitate maxima AC , eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABNK$, qua spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream ATD qua tempus exponitur. Nam cum sit AC ad AP ut AP ad AK , erit (per *Corol. 1. Lem. 11. hujus*) LK ad PQ ut $2 AK$ ad AP , hoc est, ut $2 AP$ ad AC , & inde LK ad $\frac{1}{2} PQ$ ut AP ad ($\frac{1}{2} AC$ vel) AB ; est & KN ad (AC vel) AD ut AB ad CK ; itaque ex æquo LKN ad DPQ ut AP ad CK . Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC . Ergo rursus ex æquo LKN est ad DTV ut AP ad AC ; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta LKN & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ $ABNK$ & ATD ut spatia tota ab initio descensus descripta.

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore descriptum, ut est area $ABnk$ ad sectorem ADt .

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum APD ad sectorem Hyperbolicum ATD . Nam velocitas in Medio non resistente foret ut tempus ATD , & in Medio resistente est ut AP , id est, ut triangulum APD . Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ ATD, APD .

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum ApD ad sectorem Circularem AtD ; sive ut recta Ap ad arcum At .

Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in Medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam AC in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut sector ADT ad triangulum ADC : & tempus, quo velocitatem Ap in Medio

DE MOTU
CORPORUM

Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus At ad ejus tangentem Ap .

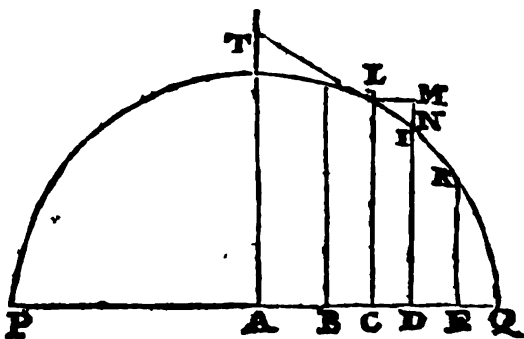
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendens datur velocitas maxima, per *Corol. 2, & 3, Theor. vi, Lib. ii*; indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem ADT vel ADt ad triangulum ADC in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas AP vel Ap , tum area $ABNK$ vel $ABnk$, quæ est ad sectorem ADT vel ADt ut spatium quaesitum ad spatium quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter describi potest.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio $ABnk$ vel $ABNK$, dabitur tempus ADt vel ADT .

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitque resistentia ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas & Medii resistentia in locis singulis.

Sit PQ planum illud plano Schematis perpendicularare; $PFHQ$ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q ; G, H, I, K loca quatuor corporis in hac curva ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem



demissæ & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E insistentes; & sint BC, CD, DE distantie Ordinarum inter se æquales. A punctis G & H ducantur rectæ GL, HN curvam tangentibus in G & H , & Ordinatis CH, DI sursum productis occurrentes in L & N , & compleatur parallelogrammum $HCDM$.

Et

Et tempora quibus corpus describit arcus GH , HI , erunt in subduplicata ratione altitudinum LH , NI quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines descriptæ GH , HI directe & tempora inverse. Exponentur tempora per T & t , & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$: & decrementum velocitatis tempore t factum ex-

ponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitatis in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem qua duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset (ut *Galileus* demonstravit) id est, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI describente, auget arcum illum sola longitudine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque generat tantum veloci-

tatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentia sola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} + \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; Resistentia erit ad Gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis CB , CD , CE scribantur 0 , 0 , 20 . Pro Ordinata CH scribatur P , & pro MI scribatur series quælibet $Q0 + R00 + S0^2 + \&c.$ Et seriei termini omnes post primum, nempe $R00 + S0^2 + \&c.$ erunt NI , & Ordinatæ DI , EK , & BG erunt $P - Q0 - R00 - S0^2 - \&c.$, $P - 2Q0 - 4R00 - 8S0^2 - \&c.$, & $P + Q0 - R00 + S0^2 - \&c.$ respective. Et quadrando differentias Ordinarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata proceduntia addendo quadrata ipsarum BC , CD , habebuntur arcuum GH , HI quadrata $00 + QQ00 - 2QR0^2 + \&c.$; & $00 + QQ00 + 2QR0^2 + \&c.$ Quorum radices $0\sqrt{1+QQ} - \frac{QR00}{\sqrt{1+QQ}}$, &

DE MOTU
CORPORUM

$\sqrt{1+QQ} + \frac{QR_{00}}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH & HI . Præterea si ab Ordinata CH subducatur semisumma Ordinarum BG ac DI , & ab Ordinata DI subducatur semisumma Ordinarum CH & EK , manebunt arcuum GI & HK sagittæ R_{00} & $R_{00} + 3S_{00}$. Et hæc sunt lineolis LH & NI proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t , & inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3S_{00}}{R}}$ seu $\frac{R+\frac{3}{2}S_{00}}{R}$: & $\frac{t \times GH}{T} = HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$; substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, GH , HI , MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3S_{00}}{2R} \sqrt{1+QQ}$. Et cum $2NI$ sit $2R_{00}$, Resistencia jam erit ad Gravitationem ut $\frac{3S_{00}}{2R} \sqrt{1+QQ}$ ad $2R_{00}$,

id est, ut $3S \sqrt{1+QQ}$ ad RR .

Velocitas autem ea est quacum corpus de loco quovis H , secundum tangentem HN egrediens, in Parabola diametrum HC & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistencia est ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii densitas est ut resistencia directe & quadratum velocitatis inverse, id est, ut $\frac{3S \sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverse, hoc est, ut $\frac{S}{R \sqrt{1+QQ}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat Ordinatæ cuilibet AF in T : erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, adeoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Qua ratione Resistencia erit ad Gravitationem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, Velocitas erit ut $\frac{HT}{AC \sqrt{R}}$, & Medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

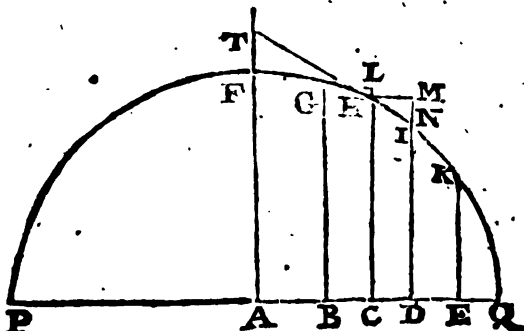
Corol. 2. Et hinc, si curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam AC & ordinatim applicatam CH ,

CH, (ut moris est) & valor ordinatim applicatæ resolvatur in serie convergentem: Problema per primos seriei terminos expedi- LIBER
te solvetur, ut in exemplis sequentibus: SECUNDUS.

Exempl. 1. Sit Linea *PFHQ* Semicirculus super diametro *PQ* descriptus, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Bifecetur diameter *PQ* in *A*, dico *AQ* *n*, *AC* *a*, *CH* *e*, & *CD* *o*:
& erit *DI* *q* seu *AQq* - *ADq* = *nn* - *aa* - *2ao* - *oo*, seu
ee - *2ao* - *oo*, & radice per methodum nostram extracta, fiet
 $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aao}{2e^2} - \frac{ao^2}{2e^2} - \frac{a^2o^2}{2e^2}$ &c. Hic scribatur
nn pro *ee* + *aa*, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^2} - \frac{a^2no^2}{2e^2}$ &c.

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva *o* non extat; secundum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium est, & sic in infinitum. Et primus terminus qui hic est *e*, denotabit semper longitudinem Ordinatæ *CH* insistentis ad initium indefinitæ quantitatis *o*; secundus terminus qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam *P*



inter *CH* & *DN*, id est, lineolam *MN* quæ abscinditur complendo parallelogrammum *HCDM*, atque adeo positionem tangentis *HN* semper determinat; ut in hoc casu capiendo *MN* ad *HM* ut est $\frac{ao}{e}$, ad *o*, seu *a* ad *e*. Terminus tertius qui hic est

$\frac{nnoo}{2e^2}$ designabit lineolam *IN* quæ jacet inter tangentem & curvam, adeoque determinat angulum contactus *IHN* seu curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si lineola illa *IN* finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum,

DE MOTU terminum subsequeutes evadent infinite minores tertio, ideoque negli-
CORPORUM gari possunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum Serierum in Solutione Problematum quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam series $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^2} - \frac{nnno^3}{2e^3} - \&c.$ cum serie $P - Qo - Roo - So^3 - \&c.$ & perinde pro P, Q, R & S scribatur $e, \frac{a}{e}, \frac{nn}{2e^2}$ & $\frac{nnn}{2e^3}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ scribatur $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ seu $\frac{n}{e}$, & prodibit Medii densitas ut $\frac{a}{ne}$ hoc est, (ob datam n), ut $\frac{a}{e}$, seu

$\frac{AC}{CH}$, id est, ut tangentis longitudo illa HT quæ ad semidiametrum AF ipsi PQ normaliter insistentem terminatur: & resistentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id est, ut $3AC$ ad Circuli diametrum PQ : velocitas autem erit ut \sqrt{CH} . Quare si corpus iusta cum velocitate secundum lineam ipsi PQ parallelam exeat de loco F , & Medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis HT , & resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ , corpus illud describet Circuli quadrantem FHQ .
Q. E. I.

At si corpus idem de loco P , secundum lineam ipsi PQ perpendiculararem egrederetur, & in arcu semicirculi PFQ moveri inciperet, sumenda esset AC seu a ad contrarias partes centri A , & propterea signum ejus mutandum esset & scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, Natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo a P describat Circuli quadrantem PF . Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a resistente impedi.

Exempl. 2. Sit linea $PFHQ$ Parabola, axem habens AF horisontali PQ perpendiculararem, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile in ipsa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum PDQ æquale est rectangulo sub ordinata DI & recta aliqua data, hoc est, si dicantur
recta

recta illa b , $P, C a, P Q c, C H e$ & $C D o$; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $a c - a a - 2 a o + c o - o o$ æquale est rectangulo

b in $D I$, adeoque $D I$ æquale $\frac{a c - a a}{b} + \frac{c - 2 a}{b} o - \frac{o o}{b}$. Jam

scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c - 2 a}{b} o$ pro $Q o$,

tertius item terminus $\frac{o o}{b}$ pro $R o o$. Cum vero plures non sint ter-

mini, debet quarti coefficientis S evanescere, & propterea quanti-

tas $\frac{S}{R \sqrt{1+Q Q}}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit.

Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galileus*. Q. E. I.

Exempl. 3. Sit linea $A G K$ Hyperbola, Asymptoton habens $N X$ plano horizontali $A K$ perpendicularem; & quærat Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit $M X$ Asymptotos altera, ordinatim applicatæ $D G$ productæ occurrens in V , & ex natura Hyperbolæ, rectangulum $X V$ in $V G$ dabitur. Datur autem ratio $D N$ ad $V X$, & propterea datur etiam rectangulum $D N$ in $V G$. Sit illud $b b$; & completo parallelogrammo $D N X Z$, dicatur $B N a, B D o, N X c$, & ratio data $V Z$ ad $Z X$ vel $D N$ ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit $D N$ æqualis $a-o$, $V G$ æqualis

$\frac{b b}{a-o}$, $V Z$ æqualis $\frac{m}{n} \frac{b b}{a-o}$, & $G D$ seu $N X - V Z - V G$ æ-

qualis $c - \frac{m}{n} a + \frac{m}{n} o - \frac{b b}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{b b}{a-o}$ in seriem

convergentem $\frac{b b}{a} + \frac{b b}{a a} o + \frac{b b}{a^2} o o + \frac{b b}{a^3} o^3$ &c. & fiet $G D$ æqua-

lis $c - \frac{m}{n} a - \frac{b b}{a} + \frac{m}{n} o - \frac{b b}{a a} o - \frac{b b}{a^2} o^2 + \frac{b b}{a^3} o^3$ &c. Hujus seriei

terminus secundus $\frac{m}{n} o - \frac{b b}{a a} o$ usurpandus est pro $Q o$, tertius cum

signo mutato $\frac{b b}{a^2} o^2$ pro $R o^2$, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{b b}{a^3} o^3$

pro $S o^3$, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{b b}{a a}$, $\frac{b b}{a^2}$ & $\frac{b b}{a^3}$ scribendæ sunt

in Regula superiore pro Q, R & S . Quo facto prodit medii densitas ut

Asymptoton ejus in V , fuerit VG reciproce ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n , cujus index est numerus n : & quaeratur Medii densitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX scribantur A, O, C respective, sitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e , & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqua-

lis $A - O, VG = \frac{bb}{A - O}, VZ = \frac{d}{e} \frac{bb}{A - O}$, & GD seu $NX - VZ$

$- VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{A - O}$. Resolvatur terminus ille

$\frac{bb}{A - O}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nb b}{A^{n+1}} O + \frac{n n + n}{2 A^{n+2}} bb O^2 +$

$\frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} bb O^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} +$

$\frac{d}{e}O - \frac{nb b}{A^{n+1}} O - \frac{n n + n}{2 A^{n+2}} bb O^2 - \frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} bb O^3$ &c. Hu-

jus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O - \frac{nb b}{A^{n+1}} O$ usurpandus est pro Q_0 ,

tertius $\frac{n n + n}{2 A^{n+2}} bb O^2$ pro R_0^2 , quartus $\frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} bb O^3$ pro

S_0^3 . Et inde Medii densitas $\frac{S}{R \sqrt{Y + QQ}}$ in loco quovis G , fit

$\frac{n+2}{3 \sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, adeoque si in VZ caplatur VT

æqualis $n \times VG$, densitas illa est reciproce ut XT . Sunt enim A^2

& $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipsarum XZ & ZT quadrata. Resisten-

tia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3 \text{ Sin } \frac{XT}{A}$ ad $4RR$,

id est, XT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est qua-

cum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G , diametrum GD & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY \text{ quad.}}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. $\mathcal{Q} E. I.$

Scholium

De Motu
Corporum

Scolium.

Eadem ratione qua prodiit densitas Medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Co-
 munitio primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas qua-
 Erat V prodiit densitas Medii ut $\frac{S}{R^{n+2}} \times \frac{AC}{HT}$.

Proinde si Curva inveniri potest ea lege ut data fuerit ratio
 $\frac{HT}{AC}$, vel $\frac{S^2}{R^{n+2}}$ ad $1 + QQ$; corpus movebi-

Curva in uniformi Medio cum resistentia quæ sit ut ve-
 locitatis V^n . Sed redeamus ad Curvas simplices.

Quoniam motus non fit in Parabola nisi in Medio non resistente,
 Hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam;
 necesse est quod Linea, quam projectile in Medio uniformiter
 resistente describit, propius accedit ad Hyperbolas hæc quam ad
 Parabolam. Est utique linea illa Hyperbolici generis, sed quæ cir-
 ca verticem magis distat ab Asymptotis; in partibus a vertice re-
 motioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione Hyperbola-
 rum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam dif-
 ferentia, quin illius loco possint hæc in rebus practicis non incom-
 mode adhiberi. Et utiliores forsitan futuræ sunt hæc, quam Hyper-
 bola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum
 sic deducuntur.

Compleatur parallelogrammum $XTGT$, & recta GT tanget
 Hyperbolam in G , ideoque densitas Medii in G est reciproce ut
 tangens GT , & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad
 vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2} GV$.

Proinde si corpus de loco A secundum rectam AH projectum
 describat Hyperbolam AGK , & AH producta occurrat Asymp-
 to MX in H , actaque AI eidem parallela occurrat alteri Asymp-
 toto MX in I ; erit Medii densitas in A reciproce ut AH , & cor-
 poris velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut
 AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI . Unde prodeunt sequentes Regulæ.

Reg. 1.

DE MOTU
CORPORUM

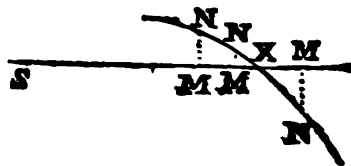
Reg. 4. Quoniam densitas Medii prope verticem Hyperbolæ major est quam in loco A , ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & densitas in A augeri in ratione paulo majore quam semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT .

Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI , & describenda sit Figura AGK : produc HN ad X , ut sit HX æqualis facto sub $n+1$ & AI ; centroque X & Asymptotis MX, NX per punctum A describatur Hyperbola, ea lege, ut sit AI ad quamvis VG ut XV ad XI .

Reg. 6. Quò major est numerus n , eo magis accuratæ sunt hæ Hyperbolæ in ascensu corporis ab A , & minus accuratæ in ejus descensu ad K ; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si Hyperbola sit hujus generis, & punctum K , ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A transeuntem, quærat: occurrat producta AN Asymptotis MX, NX in M & N , & sumatur NK ipsi AM æqualis.

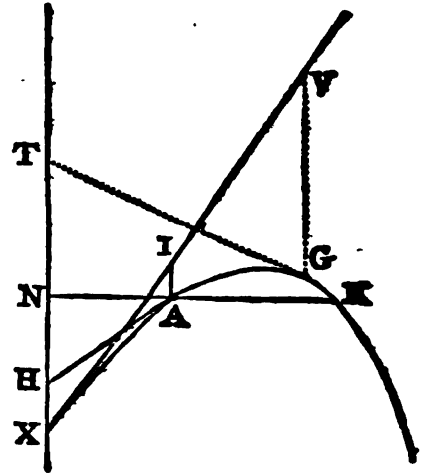
Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diversis HAK, bAk , incidantque in planum Horizontis in K & k ; & notetur proportio AK ad Ak . Sit ea d ad e . Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo AI , assume utcumque longitudinem AH vel Ab , & inde collige graphice longitudines AK, Ak , per *Reg. 6.* Si ratio AK ad Ak sit eadem cum ratione d ad e , longitudo AH recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita SM longitudinem SM æqualem assumptæ AH , & erige perpendiculum MN æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simi-

li methodo ex assumptis pluribus longitudinibus AH invenienda sunt plura puncta N , & per omnia agenda Curva linea regularis $NNXN$, secans rectam SM in X . Assumatur deinde AH æqualis abscissæ SX & inde de novo inveniatur longitudo AK ; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem AI & hanc ultimam AH ut longitudo AK per experimentum cognita ad ultimam inventam longitudinem AK , erunt veræ illæ longitudines AI & AH , quas invenire oportuit. Hisce vero datis dabitur & resistentia Medii in loco A , quippe quæ sit ad vim gravitatis ut AH ad $2 AI$. Augenda est autem densitas Medii per *Reg. 4* & resistentia modo inventa, si in eadem ratione augeatur, sed accuratior.

*Reg.*

De Motu Corporum Circulum semel describere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, Circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis sit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *AK* sitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si *XAGK* Parabolam designet quam recta *XV* tangat in vertice *X*, sintque ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abscissarum *XI*, *XV* dignitates *XIⁿ*, *XVⁿ*; agantur *XT*, *GT*, *AH*, quarum *XT* parallela sit *VG*, & *GT*, *AH* Parabolam tangent in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, secundum rectam *AH* productam, juxta cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam, si modo densitas Medii, in locis singulis *G*, sit reciproce ut tangens *GT*.



Velocitas autem in *G* ea erit quacum Projectile pergeret, in spatio non resistente, in Parabola Conica verticem *G*, diametrum *VG* deorsum productam, & latus rectum $\frac{2GTq.}{nn-n \times VG}$ habente.

Et resistentia in *G* erit ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{2nn-2n}{n-2} VG$. Unde si *NAK* lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medii in *A*, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcumque angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*, & inde datur Parabolæ vertex *X*; & positio rectæ *XI*, & sumendo *VG* ad *IA* ut *XV* ad *XI*, dantur omnia Parabolæ puncta *G*, per quæ Projectile transibit.

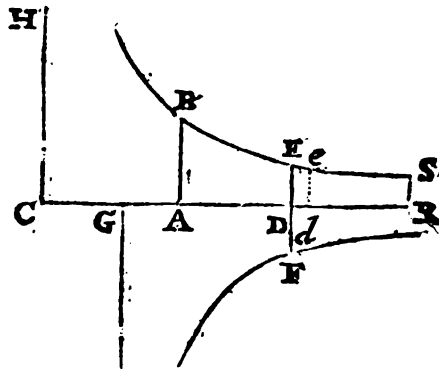
S E C T I O III.

*De Motu Corporum quibus resistitur partim in ratione
velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.*

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

*Si Corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in
velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita in
Medio simili movetur, sumantur autem tempora in
progressione Arithmetica: quantitates velocitatibus reci-
proce proportionales, datâ quadam quantitate auctâ,
erunt in progressione Geometrica.*

Centro C , Asymptotis rectan-
gulis $CADd$ & CH , describatur
Hyperbola $BEeS$, & Asympto-
to CH parallelæ sint AB , DE ,
 de . In Asymptoto CD dentur
puncta A , G : Et si tempus ex-
ponatur per aream Hyperbolicam
 $ABED$ uniformiter crescentem;
dico quod velocitas exponi potest
per longitudinem DF , cujus reci-
proca $G'D$ unâ cum datâ CG com-
ponat longitudinem CD in progressione Geometrica crescentem.



Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam
minimum, & erit Dd reciproce ut DE , adeoque directe ut

CD . Ipsiûs autem $\frac{I}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. 11.)

est $\frac{Dd}{GDq}$ erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{I}{GD} + \frac{CG}{GDq}$.

Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$
uniformiter crescente, decrefcit $\frac{I}{GD}$ in eadem ratione cum veloci-

tate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per
Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut

decrementum est ipsius $G D$, erit reciproce ut $E D$, adeoque directe ut $C D$, hoc est, ut summa ejusdem $G D$ & longitudinis datæ CG . Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula $D d e E$ describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est, directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ $G D$, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analogâ decremента, analogæ semper erunt quantitates decrescentes: nimirum velocitas & linea $G D$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem $G D$, spatium descriptum erit ut area Hyperbolica $D E S R$.

Corol. 2. Et si utcumque assumatur punctum R , inveniatur punctum G , capiendo GR ad $G D$, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis $R S E D$ descriptum. Invento autem puncto G , datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. xi, detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

PROPOSITIO XIII THEOREMA X.

Posito quod Corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit, & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata: dico quod si Circuli & Hyperbolæ diametris parallele rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quedam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis DB describatur Circuli quadrans $B E T F$, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita $B A P$, semidiametro DF parallela. In ea detur punctum A , & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit
ut

DE MOTU **pori** atque adeo sectori huic proportionalis est; in Medio resistenti est ut triangulum; & in Medio utroque, ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Isdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areae per quam tempus exponitur, & areae cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressionem Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressionem Geometrica.

Capiatur AC (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & area $AbNK$ augetur vel diminuetur in progressionem Arithmetica, dum vires CK in progressionem Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areae $AbNK$ supra aream DET .

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z , & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma 1. L.) erit ipsius AK mo-

mentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times P Q}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, &

areae $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu

$\frac{BPQ \times BD \text{ cub.}}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente BET Circulo, (in Fig. Cas. 1. Prop. XIII.) linea AC , quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & DPq seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$,

Cas.

Caf. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas fit ut $ABq - BDq$ linea AC (Fig. Caf. 2. Prop. XIII) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & DTq erit ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caf. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas fit ut $BDq - ABq$, & linea AC (Fig. Caf. 3. Prop. præced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areae illæ semper sint in hac ratione; si pro area DTV , qua momentum temporis sibi met ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ , id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq . Atque inde fit $PQ \times BD$ cub. æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areae $AbNK$ momentum $KLON$ superius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areae DET mo-

mentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur

differentia momentorum, id est, momentum differentiae arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$)

ut velocitas AP , id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud, proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si longitudo aliqua V sumatur in ea ratione ad duplum longitudinis M , quæ oritur applicando aream DET ad BD , quam habet linea DA ad lineam DE , spatium quod corpus ascensu vel descensu toto in Medio resistente describit, erit ad spatium quod in Medio non resistente eodem tempore describere posset, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tem-

pore datur. Nam spatium in Medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2 , & ob datas BD & AB , ut

DE MOTU $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ CORPORUM . Momentum hujus areæ five huic æqualis $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq \times AB}$ est ad momentum differentiarum arearum DET & $AbNK$, ut $\frac{DAq \times BD \times M \times m}{DEq \times AB}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, hoc est, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, five ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP ; adeoque ubi areæ DET & DAP quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur est area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiarum quam minimæ arearum DET & $AbNK$. Unde cum spatia in Medio utroque, in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc sunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia; ob eorum analogæ incrementa necesse est ut in æqualibus quibuscunque temporibus sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia. Q. E. D.

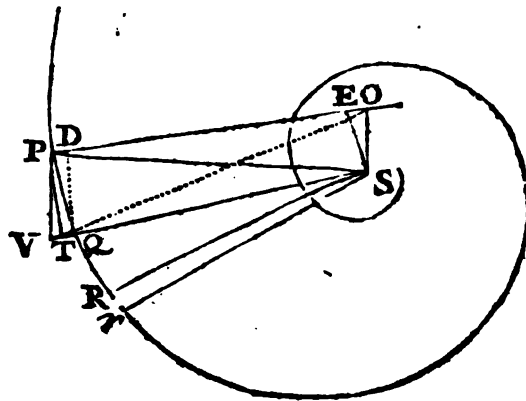
S E C T I O IV.

De Corporum Circulari Motu in Mediis resistentibus.

L E M M A III.

Sit PQR r Spiralis quæ secet radios omnes $SP, SQ, SR,$
 &c. in equalibus angulis. Agatur recta PT quæ tangat
 eandem in puncto quovis P , secetque radium SQ in T ;
 & ad Spiralem erectis perpendicularis PO, QO concur-
 rentibus in O , jungatur SO . Dico quod si puncta P &
 Q accedant ad invicem & coeant, angulus PSO evadet
 rectus, & ultima ratio rectanguli $TQ \times 2PS$ ad PQ
 quad. erit ratio equalitatis.

Etenim de angulis rectis OPQ, OQR subducantur anguli æ-
 quales SPQ, SQR , & manebunt anguli æquales OPS, OQS .
 Ergo Circulus qui transit
 per puncta O, S, P trans-
 ibit etiam per punctum Q .
 Coeant puncta P & Q ,
 & hic Circulus in loco
 coitus PQ tanget Spira-
 lem, adeoque perpendicu-
 lariter secabit rectam OP .
 Fiet igitur OP diameter.
 Circuli hujus, & angulus
 OSP in semicirulo rectus.
 Q. E. D.



Ad OP demittantur perpendiculara QD, SE , & linearum ratio-
 nes ultimæ erunt hujusmodi: TQ ad PD ut TS vel PS ad PE ,
 seu $2PO$ ad $2PS$. Item PD ad PQ ut PQ ad $2PO$. Et ex
 æquo perturbate TQ ad PQ ut PQ ad $2PS$. Unde fit PQ æ-
 quale $TQ \times 2PS$. Q. E. D.

duplicata ratione ipsius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicata ratione SQ ad SP , sive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ , SQR & æquales areas PSQ , QSR , est arcus PQ ad arcum QR ut SQ ad SP . Sumantur proportionalium consequentium differentie, & fiet arcus PQ ad arcum QR ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}VQ$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ fit æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ , ex resistantia oriundum, sive hujus duplum Rr , est ut resistantia & quadratum temporis conjunctim;

erit resistantia ut $\frac{Rr}{PQ \times SP}$. Erat autem PQ ad QR ut

SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQ \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive

ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SP}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ

coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob similia trian-

gula PVQ , PSO , fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est

igitur $\frac{OS}{OP \times SP}$ ut resistantia, id est, in ratione densitatis Medii

in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur dupli-

cata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{I}{SP}$, & manebit Medii densi-

tas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS

ad OP , densitas Medii in P erit ut $\frac{I}{SP}$. In Medio igitur cu-

jus densitas est reciproce ut distantia a centro SP , corpus gyrari

potest in hac Spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1 Velocitas in loco quovis P ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyrari potest in Circulo, ad eandem a centro distantiam SP .

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP , est ut $\frac{OS}{OP}$, sin-

distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quam-

libet Medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistantiæ in loco quovis P , est ad vim centripetam

DE MOTU
CORPORUM

tam in eodem loco ut $\frac{1}{2} OS$ ad OP . Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2} Rr$ & TQ sive ut $\frac{\frac{1}{2} VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2} PQ^2}{SP}$. hoc est, ut $\frac{1}{2} VQ$ & PQ , feu $\frac{1}{2} OS$ & OP . Data igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & viceversa ex data illa proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac Spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS , inque hac recta corpus descendet ad centrum, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem qua probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. x, Lib. 1,) descensum in Medio non resistente fieri, in subduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora descensus hic erunt reciproce ut velocitates, atque a deo dantur.

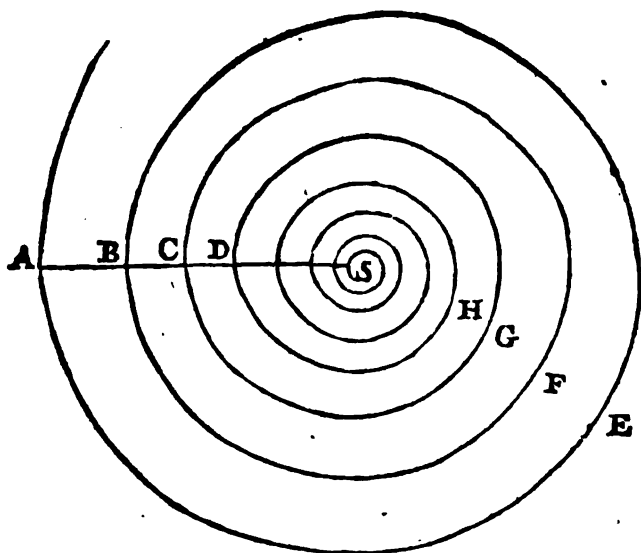
Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantibus velocitas eadem est in Spirali PQR atque in recta SP , & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS est in data ratione, nempe in ratione OP ad OS ; tempus descensus in Spirali erit ad tempus descensus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo Circuli; & manentibus hisce Circulis, mutetur utcunque angulus quem Spiralis continet cum radio PS : numerus revolutionum quas corpus intra Circulorum circumferentias, pergendo in Spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere potest, est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut Tangens anguli illius quem Spiralis continet cum

radio PS ; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est, ut Secans anguli ejusdem, vel etiam reciproce ut Medii densitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo secuerit in B quo prius in A , idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciproce in subduplicata ratione distantiarum a centro (id est, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones BFC , CGD &c. facere, & intersectionibus

tionibus distinguet Radium AS in partes $AS, BS, CS, DS, \&c.$ LIBER
 continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut SECUNDUS.



perimetri Orbitalium $AEB, BFC, CGD, \&c.$ directe, & velocitates in principiis $A, B, C,$ inverse; id est, ut $AS^{\frac{1}{2}}, BS^{\frac{1}{2}}, CS^{\frac{1}{2}}.$ Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{1}{2}}, BS^{\frac{1}{2}}, CS^{\frac{1}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{1}{2}};$ id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{1}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{1}{2}} - BS^{\frac{1}{2}},$ sive ut $\frac{2}{3} AS$ ad AB quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro $S,$ intervallis continue proportionalibus $SA, SB, SC, \&c.$ describe Circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his Circulis, in Medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos Circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse Secantem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium $AS,$ ad Secantem anguli
 K k quo

DE MOTU
CORPORUM

quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum Tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter Circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter Circulos binos, continuabitur motus per Circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spirilibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiraliū illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spirilibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantie: dico quod corpus gyrari potest in Spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantie SP dignitas quælibet SP^{n+1} , cujus index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}}$, & resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQ \times SP^n}$, sive ut $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ adeoque ut $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1} . Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}}$, densitas in P erit reciproce ut SP .

Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam, ut $1 - \frac{1}{2}n \times OS$ ad OP .

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut SP cub, erit $1 - \frac{1}{2}n = 0$; adeoque resistentia & densitas Medii nulla erit, ut in Propositione nona Libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scho-

Scholium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & Medii resistentiam qua corpus in data Spirali, data velocitatis Lege, revolvi potest.

Sit Spiralis illa PQR . Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ , quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR , differentia RSr , dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac densitas Medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data Lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis, qua corpus datam Spiralem describet.

Ex vi centripeta invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii densitas: ut in Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decima, & Lemmate secundo; & Lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hætenus expositi & his affines peraguntur.

S E C T I O V.

*De Densitate & Compressione Fluidorum, deque
Hydrostatica.*

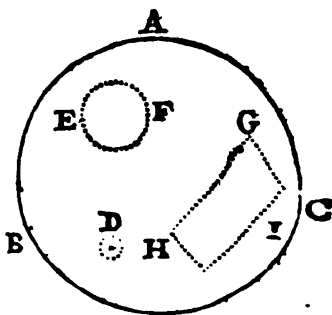
Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cujus partes cedunt vi cuicumque illatae, & cedendo facile moventur inter se.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) equaliter premuntur undique, & absque omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase Sphærico *ABC* clauditur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra Hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars



pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.* LIBER
SECUNDUS.

Cas. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes sphaericae aequaliter premuntur undique: sit enim EF pars sphaerica fluidi, & si haec undique non premitur aequaliter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur aequaliter; & partes ejus, per Casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per Casum eundem primum, & additione pressionis novae movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quae duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphaera EF non undique premebatur aequaliter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico praeterea quod diversarum partium sphaericarum aequalis sit pressio. Nam partes sphaericae contiguae se mutuo premunt aequaliter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed &, per Casum secundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duae quaevis sphaericae non contiguae, quia pars sphaerica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur aequaliter. Nam partes duae quaevis tangi possunt a partibus Sphaericis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas Sphaericas aequaliter premunt, per Casum 3. & vicissim ab illis aequaliter premuntur, per Motus Legem tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quaelibet GHI in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur aequaliter, partes autem ejus se mutuo aequaliter premant & quiescant inter se; manifestum est quod Fluidi cujuscunque GHI , quod undique premitur aequaliter, partes omnes se mutuo premunt aequaliter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si Fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur aequaliter, cedet idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido Fluidum non sustinebit pressionem fortioiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad aequalitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistantiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad aequalitatem, in momento temporis, absque motu locali: & subinde partes fluidi, per Casum quintum, se mutuo prement aequaliter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

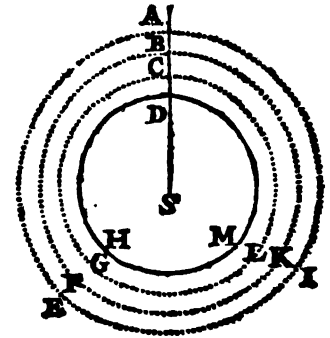
Corol.

DE MOTU *Corol.* Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem
CORPORUM fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt, nisi
 quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi
 partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius
 labuntur inter se.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

*Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro distantis ho-
 mogenei, fundo Sphærico concentrico incumbentis partes
 singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum
 pondus Cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi,
 & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.*

Sit *DHM* superficies fundi, & *AEI* superficies superior fluidi. Superficiebus sphericis innumeris *BFK*, *CGL* distinguatur fluidum in Orbis concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *AE* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes & superficies secunda *BFK* (per Prop. xix.) pro mensura sua æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione, pro mensura sua, & insuper vi propriæ gravitatis, id est pressione tripla, urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta, & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus Orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum (si modo Orbium au-geatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus Cylindri præfi-



præfinit. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet Propositio, LIBER
SECUNDUS
ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiae a centro, ut & ubi Fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantis eadem semper est pressio quantitas, sive superficies pressa sit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive fluidum, a superficie pressa sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad Casus singulos Fluidorum.

Corol. 3. Eadem Demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se, si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquirat motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphericum est manebit sphericum, non obitante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido libere innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquefceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui, per Cas. 5. Prop. XIX, jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quam Fluidum sibi contiguum subsidet, & quod specificè levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, alias in æquili-

DE MOTU æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari
CORPORUM potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est Gravitatio: altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitatio absoluta est vis tota qua corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitatio partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis Gravitatio corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impediencia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in Aere sunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt, non vere, quia descendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum Casuum Demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutant eorum Figuras externas, patet insuper, per Corollarium Prop.

Prop. XIX, quod non mutabunt situm partium internarum inter se: LIBER
SECUNDUS.
 proindeque, si Animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum Systematis fluido comprimente circumdati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

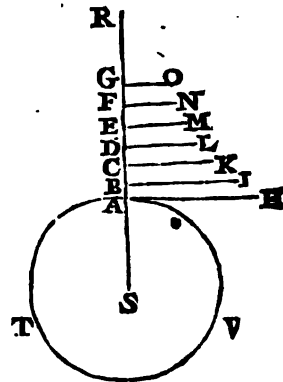
PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantis suis a centro reciproce proportionali deorsum trabantur: dico quod, si distantie illæ sumantur continue proportionales, densitates Fluidi in iisdem distantis erunt etiam continue proportionales.

Designet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE , &c. distantias continue proportionales. Erigantur perpendiculara AH, BI, CK, DL, EM , &c. quæ sint ut densitates Medii in locis A, B, C, D, E ; & specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod

perinde est, ut $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$, &c. Finge

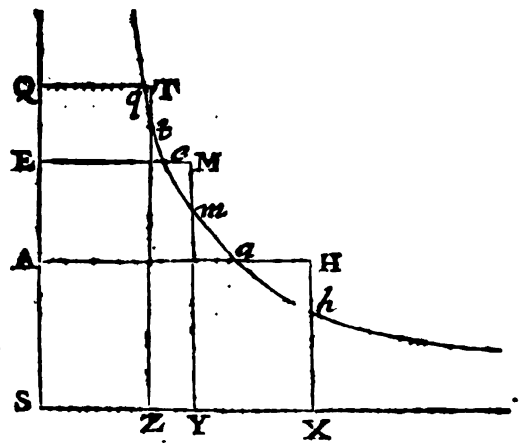
primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B , a B ad C , a C ad D , &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D , &c. Et hæc gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD , &c. conficiant pressiones AH, BI, CK, DL , quibus fundum ATV (juxta Theorema xv.) urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones omnes AH, BI, CK, DL , pergendo in infinitum; & particula B pressiones omnes præter primam AH ; & particula C omnes præter duas primas AH, BI ; & sic deinceps: adeoque particulae primæ A densitas AH est ad particulae secundæ B densitatem



DE MOTU
CORPORUM

tatem BI ut summa omnium $AH + BI + CK + DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI + CK + DL$, &c. Et BI densitas secundæ B , est ad CK densitatem tertiæ C , ut summa omnium $BI + CK + DL$, &c. ad summam omnium $CK + DL$, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis AH, BI, CK , &c. proportionales, atque adeo continue proportionales, per hujus Lem. 1. proindeque differentiæ AH, BI, CK , &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis A, B, C , &c. sint ut AH, BI, CK , &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per saltum, & (ex æquo) in distantiiis SA, SC, SE continue proportionalibus, erunt densitates AH, CK, EM continue proportionales, Et eodem argumento, in distantiiis quibusvis continue proportionalibus SA, SD, SG , densitates AH, DL, GO erunt continue proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, D, E , &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo A ad summitatem Fluidi continua reddatur, & in distantiiis quibusvis continue proportionalibus SA, SD, SG , densitates AH, DL, GO , semper existentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta A & E , colligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q . Centro S , Asymptotis rectangulis SQ, SX , describatur Hyperbola fecans perpendiculara AH, EM, QT in a, e, q , ut & perpendiculara HX, MY, TZ , ad Asymptoton SX demissa, in b, m & t . Fiat area $ZTmtZ$ ad aream datam $TmbX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EcaA$; & linea Zt producta abscindet lineam Q & densitati proportionalem. Namque si lineæ SA, SE, SQ sunt continue proportionales, erunt areæ $EeqQ, EcaA$ æquales, & inde areæ his proportionales $TmtZ, XbmY$ etiam æquales, & lineæ SX, ST, SZ , id est AH, EM, QT continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ SQ, SE, SA obtinent alium quemvis ordinem in serie continue proportionalium, lineæ AH, EM, QT , ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum continue proportionalium.

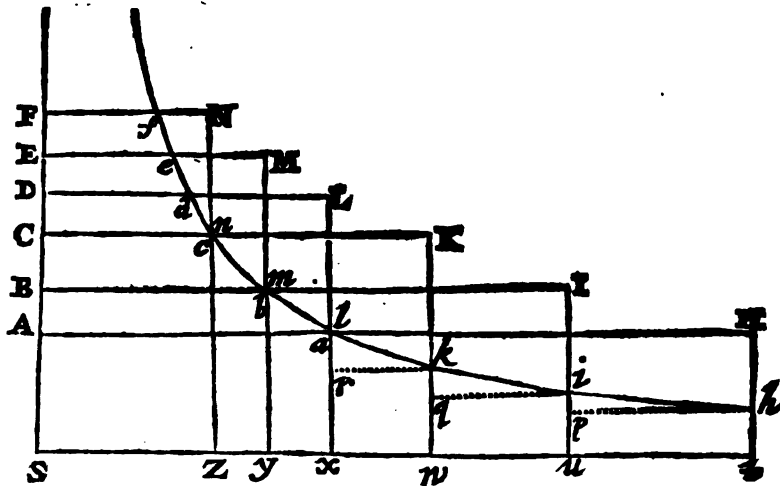


PROPO.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiae sumantur in progressionem Musica, densitates Fluidi in his distantis erunt in progressionem Geometrica.

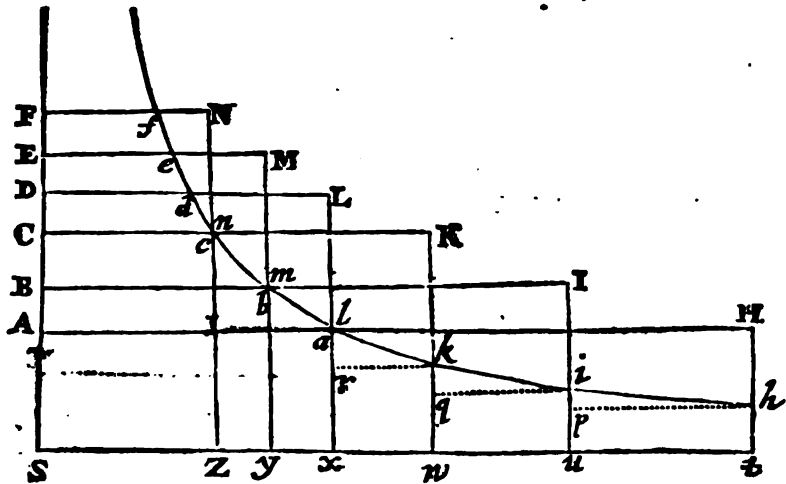
Designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in progressionem Geometrica. Erigantur perpendiculara $AH, BI, CK, \&c.$ quæ sint ut Fluidi densitates in locis $A, B, C, D, E, \&c.$ & ipsius



gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}, \&c.$

Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B , secundam a B ad C , tertiam a C ad D , &c. Et hæ ductæ in altitudines $AB, BC, CD, DE, \&c.$ vel, quod perinde est, in distantias $SA, SB, SC, \&c.$ altitudinibus illis proportionales, conficiant exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}, \&c.$ Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI, BI - CK, \&c.$ erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}, \&c.$

DE MOTU CORPORUM Centro S , Asymptotis SA, Sx , describatur Hyperbola quævis, quæ secet perpendiculara AH, BI, CK , &c. in a, b, c , &c. ut & perpendiculara ad Asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in b, i, k ; & densitatum differentiæ tu, uw , &c. erant ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times tb, uw \times ui$, &c. seu tp, uq , &c. ut $\frac{AH \times tb}{SA}, \frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut Aa, Bb , &c. Est enim, ex natura Hyperbolæ, SA ad AH vel St , ut tb ad Aa , adeoque $\frac{AH \times tb}{SA}$ æquale Aa .



Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb , &c. Sunt autem Aa, Bb, Cc , &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb, Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq , &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi; & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $z t b n$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantie punctorum A, B, C , &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $z t b n$, adeoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Suman-

tur

tur jam distantiae quaelibet; puta SA, SD, SF in progressionem Musica, & differentiae $Aa - Dd, Dd - Ff$ erunt aequales; & propterea differentiis hisce proportionales areas $t b l x, x l n z$ aequales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz , id est, AH, DL, FN , continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duae quavis, puta AH & CK , dabitur area $t b k w$ harum differentiae $t w$ respondens; & inde inveniatur densitas FN in altitudine quacunque SF , sumendo aream $t b n z$ ad aream illam datam $t b k w$ ut est differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Cc$.

Scholium.

Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro; & quadratorum distantiarum SA, SB, SC , &c. reciproca (nempe $\frac{SA cub.}{SAq}, \frac{SB cub.}{SBq}, \frac{SC cub.}{SCq}$) sumantur in progressionem Arithmetica; densitates AH, BI, CK , &c. erunt in progressionem Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqqq}{SA cub.}, \frac{SBqqq}{SB cub.}$)

$\frac{SCqqq}{SC cub.}$, &c.) sumantur in progressionem Arithmetica; densitates AH, BI, CK , &c. erunt in progressionem Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantiiis eadem sit, & distantiae sint in progressionem Arithmetica, densitates erunt in progressionem Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressionem Arithmetica, densitates erunt in progressionem Geometrica. Et sic in infinitum. Haec ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut haec vis. Fingi possunt aliae condensationis Leges, ut quod cubus vis comprimantis sit ut quadrato-quadratum densitatis, sed triplicata ratio Vis aequalis quadruplicatae rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiae a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiae. Fingatur quod cubus vis comprimantis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiae, densitas erit reciproce in sesquuplicata ra-

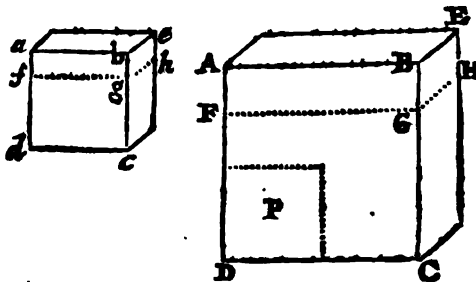
De Motu **Coarctatum** **rotatione distantiae.** Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiae, & densitas erit reciproce ut distantia Casus omnes percurrere longum esset.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantis centrorum suorum. Et vice versa, particulae viribus quæ sunt reciproce proportionales distantis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico ACE , dein compressione redigi in spatium cubicum minus ace ; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantiae erunt ut cuborum latera

AB , ab ; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia $AB\ cub.$ & $ab\ cub.$ In latere cubi majoris $ABCD$ capiatur quadratum DP æquale lateri cubi minoris db ; & ex Hypo-



thesi, pressio qua quadratum DP urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum db urget Fluidum inclusum ut Medii densitates ad invicem, hoc est, ut $ab\ cub.$ ad $AB\ cub.$ Sed pressio qua quadratum DB urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum DP urget idem Fluidum, ut quadratum DB , ad quadratum DP , hoc est, ut AB , quad. ad $ab\ quad.$ Ergo, ex æquo, pressio qua latus DB urget Fluidum, est ad pressionem qua latus db urget Fluidum, ut ab ad AB . Planis FGH , fgb , per media cuborum ductis, distinguatur Fluidum in duas partes, & hæc se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis AC , ac , hoc est, in proportione ab ad AB : adeoque vires centrifugæ, quibus hæc pressiones sustententur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulae omnes secundum plana FGH , fgb exercent in omnes,

nes; sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum FGH in cubo majore, sunt ad vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum fgb in cubo minore ut ab ad AB , hoc est, reciproce ut distantiarum particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa; si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantiarum, id est, reciproce ut cuborum latera AB, ab ; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum DB, db ut summæ virium; & pressio quadrati DP ad pressionem lateris DB ut ab quad. ad AB quad. Et, ex æquo, pressio quadrati DP ad pressionem lateris db ut ab cub. ad AB cub. id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt, ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantia, & E pro densitate Fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n , cujus index est numerus n ; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2} , cujus index est numerus $n+2$; & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in lamina ferro terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulae fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exercent, ex hujusmodi particulis componentur Fluida de quibus actum est in hac Propositione. Quod si particulae cujusque virtus in infinitum propageetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. An vero Fluida Elastica ex particulis se mutuo fugantibus consent, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematicè demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus Quæstionem illam tractandi.

S E C T I O VI.

De Motu & Resistentia Corporum Funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. Jam vero si Pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

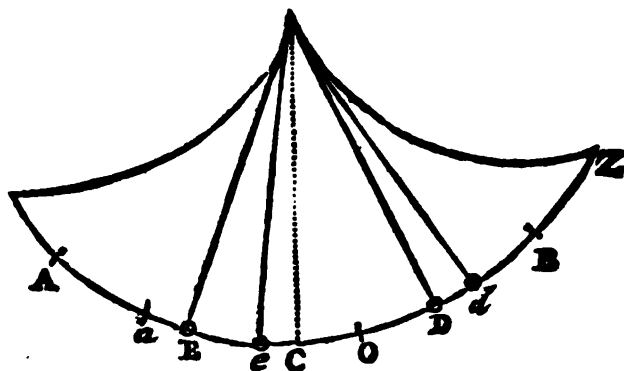
Corol. 6. Sed & in Medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut supra explicui; adeoque idem præstat in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora Funependula quibus, in Medio quovis resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora Funependula quæ in ejusdem gravitatis Specificæ Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

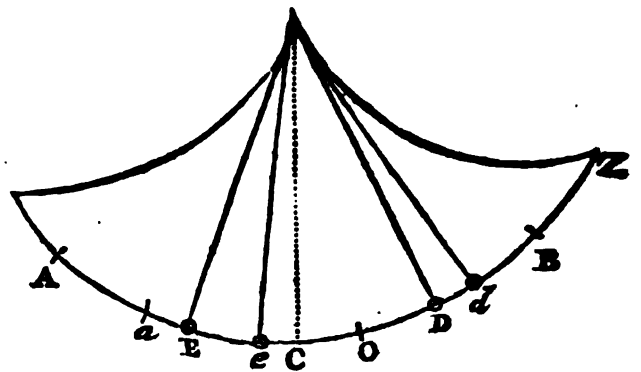
Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in Medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C , ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut longitudo arcus



CD vel Cd vel CE . Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur

DE MÔTU
CORPORUM

tur eadem per datam arcus Cycloidis partem CO , & sumatur arcus Od in ratione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB : & vis qua corpus in d urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis Cd supra resistantiam CO , exponetur per arcum Od , adeoque erit ad vim qua corpus D urgetur in Medio non resistente, in loco D , ut arcus Od ad arcum CD ; & propterea etiam in loco B ut arcus OB ad arcum CB . Proinde si corpora duo, D , d exeant de loco B , & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus CB & OB , erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sunt arcus illi BD & Bd , & arcus reliqui CD , Od erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipsis CD , Od proportionales, manebunt in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD , Od semper erunt ut arcus toti CB , OB , & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo D , d simul pervenient ad loca C & O , alterum quidem in Medio non resistente ad locum C ,



& alterum in Medio resistente ad locum O . Cum autem velocitates in C & O sint ut arcus CB , OB ; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo simul describunt, in eadem ratione. Sunt illi CE & Oe . Vis qua corpus D in Medio non resistente retardatur in E est ut CE , & vis qua corpus d in Medio resistente retardatur in e est ut summa vis Ce & resistantiæ CO , id est ut Oe ; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus CE , Oe proportionales arcus CB , OB ; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum CB & OB ; & propterea si sumantur arcus toti AB , aB in eadem ratione, corpora D , d simul describent hos arcus, & in locis A & a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus totis BA , Ba proportionales sunt arcuum partes quælibet BD , Bd vel BE , Be quæ simul describuntur. *Q. E. D.*

Corol

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum *C*, sed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus descriptus *a B* bifecatur. Et corpus subinde pergendo ad *a*, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a *B* ad *O*. LIBER
SECUNDUS.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum Funependulorum quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochrone.

Nam si corpora duo, a centris suspensionum æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti: resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si Corporibus Funependulis resistitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis Specificæ Medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio resistente describantur arcus inæquales *A, B*; & resistentia corporis in arcu *A*, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus *B*, in duplicata ratione velocitatum, id est, ut *AA* ad *BB*, quam proxime. Si resistentia

DE MOTU stentia in arcu B esset ad resistantiam in arcu A ut AB ad AA, **CORPORUM** tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propositionem superiorem. Ideoque resistantia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in Medio non resistente: & resistantia BB efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id est, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistantia in descensu corporis qua tempus producit, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistantia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardescentibus paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur; in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producit.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si Corpori Funependulo in Cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistantia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet BC arcum descensu descriptum, Ca arcum ascensu descriptum, & Aa differentiam arcuum: & stantibus quæ in Propositione

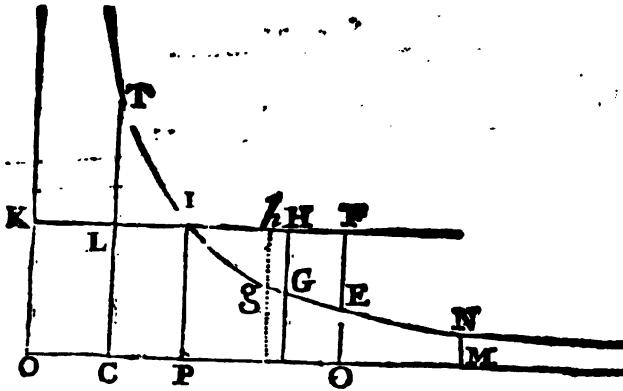
fitione xxv. constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus oscillans urgetur in loco quovis D , ad vim resistentiæ ut arcus CD ad arcum CO , qui semissis est differentiæ illius Aa . Ideoque vis qua corpus oscillans urgetur in Cycloidis principio seu puncto altissimo, id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum C ad arcum CO ; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum Aa . *Q. E. D.*

LIBER
SECUNDUS.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod Corpori in Cycloide oscillanti resistitur in duplicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit Ba (Fig. Prop. xxv.) arcus oscillatione integra descriptus, sitque C infimum Cycloidis punctum, & CZ semissis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & queratur resistentia cor-



poris in loco quovis D . Secetur recta infinita OQ in punctis O, C, P, Q , ea lege ut (si erigantur perpendiculara OK, CT, PI, QE , centroque O & Asymptotis OK, OQ describatur Hyperbola $TIGE$ secans perpendiculara CT, PI, QE in T, I & E , & per punctum I agatur KF parallela Asymptoto OQ occurrens Asymptoto OK in K , & perpendicularis CT & QE in L & F) fuerit area Hyperbolica $PIEQ$ ad aream Hyperbolicam $PITC$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum Ca ascensu descriptum, & area IEF ad

dicatur Y , atque areae $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, erit incrementum areae Y ut $PIGR - Y$. LIBER
SECUNDUS.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo CD proportionalem, qua corpus urgetur in D : & R pro resistentia ponatur: erit $V - R$ vis tota qua corpus urgetur in D . Est itaque incrementum velocitatis ut $V - R$ & particula illa temporis in qua factum est conjunctim: Sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directe & particula eadem temporis inverse. Unde, cum resistentia (per Hypothesin) sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiae (per Lem. 11.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & $V - R$ conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut $V - R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z , ut $PIGR - Z$.

Igitur area $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR - Y$, & area Z in ratione $PIGR - Z$. Et propterea si areae Y & Z simul incipiant & sub initio aequales sint, hae per additionem aequalium momentorum pergent esse aequales, & aequalibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescent, aequalia habebunt momenta & semper erunt aequales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo Ca , qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum C , resistentia ejus evanescet quam area Y . Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus CD , CT arcubus CB & Ca aequantur, adeoque ubi recta RG incidit in rectas QE & CT .

Et area Y seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit desinitque ubi nulla est,

adeoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & IGH aequalia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta RG incidit in rectas QE & CT . Proindeque areae illae simul incipiunt & simul evanescent, & propterea semper sunt aequales.

Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ aequalis est areae Z , per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. $Q. E. D.$

Corol.

DE MOTU
CORPORUM

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ad aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ . Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide absque omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere, quæ & generalior sit & ad usus Philosophicos abunde satis accurata.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta a B æqualis sit Cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta D erigantur perpendiculara DK, quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum, & arcum ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit area BK a B a perpendicularis omnibus DK occupata.

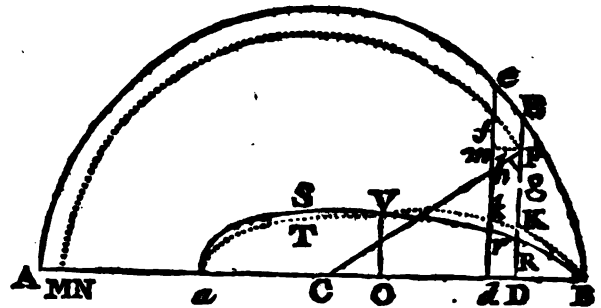
Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem $a B$, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem AB . Bisecetur AB in C , & punctum C repræsentabit infimum Cycloidis punctum, & erit CD ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in D secundum tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD , & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in D E capiatur DK in ea ratione ad longitudinem penduli

DE MOTU
CORPORUM

Nam si uniformis sit resistentia DK , Figura $aBKkT$ rectangulum erit sub Ba & DK ; & inde rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa erit æquale rectangulo sub Ba & DK , & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum DK sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Prop. xxviii demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura $aBKkT$ Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem BA , velocitas in loco quovis D foret ut Circuli diametro AB descripti ordinatim applicata DE . Proinde cum Ba in Medio resistente, & BA in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates in singulis ipsius

Ba punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis BA , ut est Ba ad BA ; erit velocitas DK in Medio resistente ut Circuli vel Ellipseos super diametro Ba descripti



ordinatim applicata; adeoque Figura $BKVTa$ Ellipsis, quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit OV exponens resistentiæ in puncto Medio O ; & Ellipsis $aBRVS$, centro O , semiaxibus OB , OV descripta, Figuram $aBKVT$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est, Aa ad OV ut area semicirculi ad quadratum radii, five ut π ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{2}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia DK sit in duplicata ratione velocitatis, Figura $BKVTa$ Parabola erit verticem habens V & axem OV , ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & OV quam proxime. Est igitur rectangulum sub $\frac{2}{3}Ba$ & Aa æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & OV , adeoque OV æqualis $\frac{3}{2}Aa$: & propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola $BRV Sa$ congruat cum

cum Figura $BKVTa$ in puncto medio V , hæc si ad partem alterutram BRV vel VSa excedit Figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proximæ.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si Corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augetur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2} aB$ & arcum illorum CB , Ca differentia Aa , æqualis erat areæ BKT . Et area illa, si maneat longitudo aB , augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK ; hoc est, in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2} aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Ex his Propositionibus, per oscillationes Pendulorum in Mediis quibuscunque, invenire licet resistantiam Mediorum. Aeris vero resistantiam investigavi per Experimenta sequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{2}{11}$, diametro digitorum *Londinensium* $6\frac{2}{7}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum $10\frac{2}{7}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro suspensionis distans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus Globus octavam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculari ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totaque oscillatione prima, ex descensu & ascensu subsequente composita, arcum digitorum fere quatuor: idem oscillationibus 164 amisit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 121, ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respective. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. Dividantur hæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione una medioeri, quæ arcus digitorum $3\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{342}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione: & propterea (per Corol. 2. Prop. xxxi Libri hujus) resistantia Globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Designet



Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $A V + B V^{\frac{1}{2}} + C V^2$. Cum velocitates maximæ sint in Cycloide ut semiffes arcuum oscillando descriptorum, in Circulo vero ut semiffium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcibus majores sint in Cycloide quam in Circulo, in ratione semiffium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo sint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim) easdem fore, quamproxime, in utraque Curva: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, una cum resistentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in Circulo observatæ, velocitates vero maximæ ponendæ sunt arcibus dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16$ analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto & sexto numeros $1, 4$ & 16 pro V , & prodibit arcuum differentia

$$\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C \text{ in casu secundo; } \frac{2}{35^{\frac{1}{2}}} = 4A + 8B + 16C \text{ in ca-}$$

$$\text{su quarto; \& } \frac{8}{9^{\frac{2}{3}}} = 16A + 64B + 256C \text{ in casu sexto. Et ex his}$$

æquationibus, per debitam collationem & reductionem Analyticam, fit $A = 0,0000916$, $B = 0,0010847$, & $C = 0,0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0000916 V + 0,0010847 V^{\frac{1}{2}} + 0,0029558 V^2$: & propterea cum (per Corollarium Propositionis xxx) resistentia Globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V , sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11} A V + \frac{1}{2} B V^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} C V^2$ ad longitudinem Penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0000583 V + 0,0007546 V^{\frac{1}{2}} + 0,0022169 V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1 , in quarto 4 , in sexto 16 : erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut $0,0030298$ ad 121 , in quarto ut $0,0417402$ ad 121 , in sexto ut $0,61675$ ad 121 .

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9^{\frac{2}{3}}}$ seu $119\frac{2}{9}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum suspensionis

DE MOTU
CORPORUM & centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat $124\frac{1}{10}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistantiam Aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{1}{2}$, idque in Cycloide, ad quam motum Penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{1}{2}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate Globus resistantiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0, 61675 ad 121, vel (si resistantiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0, 56752 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eadem ratione, erit resistantia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus, ut 0, 56752 ad 213, 4 id est, ut 1 ad $376\frac{1}{10}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem digitorum 30, 556 velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset, manifestum est quod vis resistantiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{10}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{10}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{3}{4}$, describere posset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus Pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descen-

| | | | | | | |
|--------------------------|----------------|-----|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i>Descensus primus</i> | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| <i>Ascensus ultimus</i> | $1\frac{1}{2}$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 |
| <i>Numerus Oscillat.</i> | 374 | 272 | $162\frac{1}{2}$ | $83\frac{1}{2}$ | $41\frac{1}{2}$ | $22\frac{1}{2}$ |

LIBER
SECUNDUS.

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum Romanarum $26\frac{1}{2}$, fuspendi filo eodem, sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequen-
tium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

| | | | | | | | |
|--------------------------|---------------|----------------|----------------|-----|-----------------|-----|----|
| <i>Descensus primus</i> | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| <i>Ascensus ultimus</i> | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $3\frac{1}{2}$ | 7 | 14 | 28 | 56 |
| <i>Numerus Oscillat.</i> | 226 | 228 | 193 | 140 | $90\frac{1}{2}$ | 53 | 30 |
| <i>Descensus primus</i> | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| <i>Ascensus ultimus</i> | $\frac{1}{4}$ | $1\frac{1}{2}$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 |
| <i>Numerus Oscillat.</i> | 510 | 518 | 420 | 318 | 204 | 121 | 70 |

In Tabula priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertia $\frac{1}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in septima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæc vero æquationes reductæ dant $A = 0,001414$, $B = 0,000297$, $C = 0,000879$. Et inde prodit resistentia Globi cum velocitate V moti, in ea ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{2}$, quam habet $0,0009V + 0,000207V\frac{1}{2} + 0,000659V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0,000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{1}{2}$, ut $0,002217V^2$ ad 121: & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{1}{2}$ in $0,002217$ ad $26\frac{1}{2}$ in $0,000659$, id est, ut $7\frac{1}{2}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{1}{2}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{1}{2}$ & 1 quamproxime. Ergo resistentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum consideravimus resistentiam

DE MOTU
CORPORUM

stantiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa resistentia subduci debet. Hanc accurate definire non potui, sed majorem tamen inveni quam partem tertiam resistentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod resistentiæ Globorum, dempta fili resistentia, sunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{3}$ ad 1, non longe abest a diametrorum ratione duplicata $11\frac{1}{3}$ ad 1.

Cum resistentia fili in Globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{1}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$ inter punctum suspensionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus, 32 dig. Arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus, 28. dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima seu differentia inter descensum & ascensum in oscillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a nodo descriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{3}$ dig. oscillatione mediocri a centro Globi descriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, augetur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augetur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa subduplicata, maneret vero arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0,4475. Deinde si arcus descriptus augetur in ratione $124\frac{1}{3}$ ad $67\frac{1}{3}$, differentia ista 0,4475 augetur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1,5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia Penduli esset in duplicata illa ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{1}{3}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex Globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{1}{3}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{1}{3}}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{1}{2}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias hæc in pondera Globorum ut invenirem eorum resistentias. Nam differentia oriuntur

untur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directe & pondera inverse. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem resistentiæ Globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam, ut 0,56752 ad 0,61675, id est, ut 45,453 ad 49,396; & pars resistentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; adeoque partes illæ sunt ut 318, 136 & 45,453 quamproxime, id est, ut 7 & 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{1}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{1}{8}$ & $47\frac{7}{8}$ sunt ut 7,438 & 1, id est, ut Globorum resistentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major est quam quæ ex fili resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque (cum demonstratio Vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi sumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressionem experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum Fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere 166 $\frac{1}{2}$ unciarum, diametro 3 $\frac{1}{2}$ digitorum, movebatur ut in Tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum 134 $\frac{1}{2}$ digitorum.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|------------------|----------------|-----|---|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|----------------|
| <i>Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum</i> | } | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| <i>Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum</i> | | 48 | 24 | 12 | 6 | 3 | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |
| <i>Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum</i> | } | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| <i>Numerus Oscillationum in aqua</i> | | $\frac{20}{3}$ | $1\frac{1}{3}$ | 3 | 7 | $11\frac{1}{4}$ | $12\frac{1}{2}$ | $13\frac{1}{2}$ | | |
| <i>Numerus Oscillationum in aere</i> | | 85 $\frac{1}{2}$ | 287 | 535 | | | | | | |
| | | 00 | | | | | | | | In |

DE MOTU
CORPORUM

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{7}$ in aqua amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{7}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob resistantiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $1\frac{1}{7}$ amissi sunt; ideoque resistantia penduli in aqua est ad ejus resistantiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{7}$. Hæc est proportio resistantiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum a Globo, in Aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima, in casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8, & differentia illa arcuum, in casu columnæ quartæ, ad differentiam in casu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{1}{2}$ & $A = 21\frac{1}{2}$: atque adeo resistantia, cum sit ut $\frac{2}{11} AV + \frac{1}{2} CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11} V + 48\frac{2}{11} V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistantia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{2}{11}$ seu $61\frac{10}{11}$ ad $48\frac{2}{11}$; & ideirco resistantia penduli in aqua est ad resistantiæ partem illam in aere. quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $61\frac{10}{11}$ ad $48\frac{2}{11}$ & 535 ad $1\frac{1}{7}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis solum totum fuisset immersum, resistantia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistantia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistantiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate, in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistantiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistantia in aqua augebatur in ratione velocitatis plus-

plusquam duplicata. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, LIBER -
SECUNDUS. quod Arca nimis angusta esset pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustia sua nimis impediabat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam construendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aqua, superior & major proxime supra aquam filo affixus esset, & in Aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabula sequente describitur.

| | | | | | | | |
|---|----------------|----------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|
| <i>Arcus descensu primo descriptus</i> | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| <i>Arcus ascensu ultimo descriptus</i> | 12 | 6 | 3 | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
| <i>Arcuum diff. motui amisso proport.</i> | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| <i>Numerus Oscillationum</i> | $3\frac{1}{2}$ | $6\frac{1}{2}$ | $12\frac{1}{2}$ | $21\frac{1}{2}$ | 34 | 53 | $62\frac{1}{2}$ |

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo filii ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime supra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque successive oscillante, invenirem proportionem resistentiarum: & prodixit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ, ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ partes digiti, prodixit resistentia argenti vivi in ea ratione ad resistentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis Vas nimis angustum fuit pro magnitudine Globi immerfi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Constituëram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fuforum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proxime.

Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio

DE MOTU dubio magis resistunt quam liquidiora, ut Oleum frigidum quam
CORPORUM calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus Vini. Verum in liquoribus qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in Aere, in Aqua seu dulci seu salsa, in Spiritibus Vini, Terebinthi & Saliis, in Oleo a fœcibus per distillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Denique cum receptissima Philosophorum ætatis hujus opinio sit, Medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegram rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculari ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendicularare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus unicum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuum, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter unicum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculari digressum semper urget.) Huic ponderi addebam pondus Aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum

tallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque adeo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit $78 B$ resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ resistentia tota $A + B$ erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam $A + 78 B$ ut 77 ad 78, & divisim $A + B$ ad $77 B$, ut 77 ad 1, indeque $A + B$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic vero disputamus ex Hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua causa latente oriatur, sed ab actione sola Fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, interciderit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

S E C T I O VII.

De Motu Fluidorum & Resistentia Projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum Systemata duo similia ex equali particularum numero constant, & particule correspondentes similes sint & proportionales, singule in uno Systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipient, (eæ inter se quæ in uno sunt Systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugant se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particule illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri.

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particule unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales Figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particule correspondentes, ob similitudinem incæptorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant; & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particule correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium secun-

secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correspondentes particulae figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt per Corol. 1, & 8. Prop. IV. Lib. 1. si modo centra illa quiescant. Sini moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter Systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulae describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occusus suos primos, & propterea similes occusus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. Q. E. D.

LIBER
SECUNDUS

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad Systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum Systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ Systematum partes omnes quiescant inter se: & earum quæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque Systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæc similes in reliquis Systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque adeo spacia diametris suis proportionalia describere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII

Isdem positis, dico quod Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.

Nati resistentiæ oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulae Systematum se mutuo agitant, partim ex occusibus & reflexionibus particularum & partium majorum.

Prioris

DE MOTU
CORPORUM

Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantia particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantia particularum Systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in Systemate prioris ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter earum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si Systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ Fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox resistentiam patitur quæ est in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, auferentur in duplicata ratione velocitatis, resistentia foret in eadem ratione duplicata accurate: ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunt igitur Media tria *A, B, C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispo-

Suppositis constantia. Partes Mediorum A & B fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut T & V , illæ Medii C ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D , E , F , G in his Mediis moveantur, priora duo D & E in prioribus duobus A & B , & altera duo F & G in tertio C ; sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E , & velocitas corporis F ad velocitatem corporis G , in subduplicata ratione virium T ad vires V : resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis E , & resistentia corporis F ad resistentiam corporis G , in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis F ut resistentia corporis E ad resistentiam corporis G . Sunt corpora D & F æquivelocia ut & corpora E & G ; & augendo velocitates corporum D & F in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii B in eadem ratione duplicata, accedet Medium B ad formam & conditionem Medii C pro lubitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium E & G in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum D & F sint ad invicem ut resistentiæ corporum E & G , accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F , ubi velocissime moventur, resistentiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis F sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis D in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elastico velocissime moti eadem fere est resistentia ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo Fluidi vis Elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

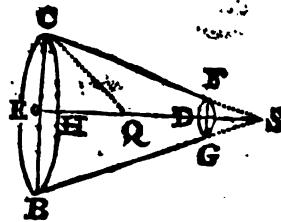
Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum in Medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerissime motorum corporum resistentiæ in Fluido Elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vi-

mittantur perpendiculares BE , DL , & vis qua particula Medii, secundum rectam FB oblique incidendo, Globum ferit in B , erit ad vim qua particula eadem Cylindrum $ONGQ$ axe ACI circa Globum descriptum perpendiculariter feriret in b , ut LD ad LB vel BE ad BC . Rursus efficacia hujus vis ad movendum Globum secundum incidentiae suae plagam FB vel AC , est ad ejusdem efficaciam ad movendum Globum secundum plagam determinationis suae, id est, secundum plagam rectae BC qua Globum directe urget, ut BE ad BC . Et conjunctis rationibus, efficacia particulae, in Globum secundum rectam FB oblique incidentis, ad movendum eundem secundum plagam incidentiae suae, est ad efficaciam particulae ejusdem secundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare si ad Cylindri basem circulearem NAO erigatur perpendiculum bHE , & sit bE aequalis radio AC , & bH aequalis $\frac{BE \text{ quad.}}{CB}$, erit bH ad bE ut effectus particulae in Globum ad effectum particulae in Cylindrum. Et propterea solidum quod a rectis omnibus bH occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed solidum prius est parabolis vertice C , axe CA & latere recto CA descriptum, & solidum posterius est Cylindrus Paraboloidi circumscriptus: & notum est quod Parabolis sit semissis Cylindri circumscripti. Ergo vis tota Medii in Globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in Cylindrum. Et propterea si particulae Medii quiescerent, & Cylindrus ac Globus aequali cum velocitate moverentur, foret resistentia Globi duplo minor quam resistentia Cylindri. Q. E. D.

Scholium.

Eadem methodo Figurae aliae inter se quoad resistentiam comparari possunt, eaque inveniri quae ad motus suos in Mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari $CEBH$, quae centro O , radio OC describitur, & altitudine OD , construendum sit frustum Coni $CBGF$, quod omnium eadem basi & altitudine constructorum & secundum plagam

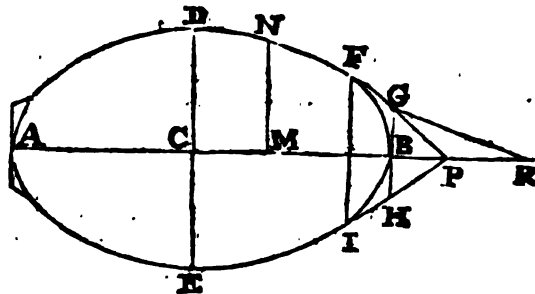


DE MOTU
CORPORUM

axis sui versus D progredientium frustorum minime resistatur: bifeca altitudinem OD in Q & produc OQ ad S ut sit QS æqualis QC , & erit S vertex Coni cujus frustum quæritur.

Unde obiter, cum angulus CSB semper sit acutus, consequens est, quod si solidum $ADBE$ convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis $ADBE$ circa axem AB facta generetur, & tangatur figuræ generans a rectis tribus FG , GH , HI in punctis F , B & I , ea lege ut GH sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B , & FG , HI cum eadem GH contineant angulos FGB , BHI graduum 135 : solidum, quod convolutione figuræ $ADFGHIE$ circa axem eundem CB generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui AB progrediat, & utriusque terminus B præcedat. Quam quidem propositionem in construendis Navibus non inutilem futuram esse censeo.

Quod si Figura $DNFG$ ejusmodi sit curva ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendicularum NM , & a puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N , & axem productum secet in R ; fuerit MN ad GR ut GR cub. ad $4BR \times GBq$:



Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB facta describitur, in Medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum Solidum circulare.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si Medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus equalibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constet: invenire resistenciam Globi in hoc Medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eadem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem Medio. Et ponamus quod particule Medii in quas Glo-

Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima resiliant. Et cum resistentia Globi (per Propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia Cylindri, & Globus sit ad Cylindrum ut duo ad tria, & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ipsasque quam maxime reflectendo, duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: Cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui describit communicabit motum particulis qui sit ad totum Cylindri motum ut densitas Medii ad densitatem Cylindri; & Globus quo tempore totam longitudinem diametri suæ describit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit communicabit motum particulis qui sit ad totum Globi motum ut densitas Medii ad densitatem Globi; Et propterea Globus resistentiam patitur quæ sit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Cas. 2. Ponamus quod particulae Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quam in priore casu, & resistentia Globi erit etiam duplo minor quam prius.

Cas. 3. Ponamus quod particulae Medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, sed mediocri aliqua resiliant a Globo; & resistentia Globi erit in eadem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu & resistentiam in secundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si Globus & particulae sint infinite dura, & vi omni elastica & propterea etiam vi omni reflexionis destituta; resistentia Globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore Globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Corol. 2. Resistentia Globi, cæteris paribus, est in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 3. Resistentia Globi, cæteris paribus, est in duplicata ratione diametri.

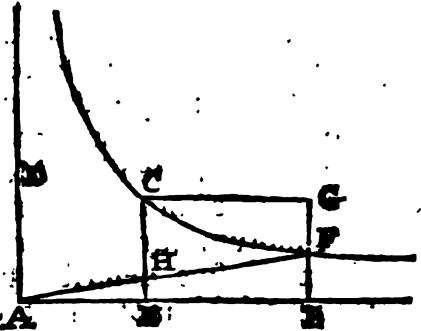
Corol. 4. Resistentia Globi, cæteris paribus, est ut densitas Medii.

Corol. 5. Resistentia Globi est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione densitatis Medii.

De Motu
CORPORUM

Corol. 6. Et motus Globi cum ejus resistentia sic exponi potest:

Sit AB tempus quo Globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad AB erigantur perpendicularia AD, BC . Sicque BC motus ille totus, & per punctum C Asymptotis AD Hyperbolæ describatur CF . Producat AB ad punctum quodvis E . Erigatur perpendicularum EF Hyperbolæ occurrens in F . Compleatur parallelogrammum $CBEG$,



& agatur AF ipsi BC occurrens in H . Et si Globus tempore quovis BE , motu suo primo BC uniformiter continuato, in Medio non resistente describat spatium $CBEG$ per aream parallelogrammi expositum, idem in Medio resistente describet spatium $CBEF$ per aream Hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per Hyperbolæ ordinatam EF , amissa motus ejus parte FG . Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem BH , amissa resistentiæ parte CH . Patent hæc omnia per *Corol. 1. Prop. v. Lib. II.*

Corol. 7. Hinc si Globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M : idem Globus tempore t in Medio resistente, per resistentiam R in duplicata velocitatis ratione decrescentem, amittet motus sui M partem $\frac{tM}{T+t}$.

remanente parte $\frac{T M}{T+t}$, & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descriptum, ut Logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$. Nam area Hyperbolica $BCFE$ est ad rectangulum $BCGE$ in hac proportione.

Scholium.

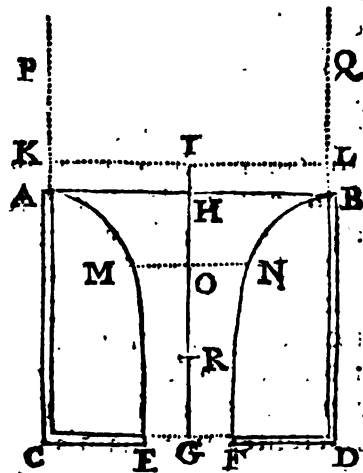
In hac Propositione exposui resistentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis, & ostendi quod hæc resistentia sit ad vim qua totus Globi motus vel tolli possit vel generari

generari quo tempore Globus duas tertias diametri suæ partes, velocitate uniformiter continuata describat, ut densitas Medii ad densitatem Globi, si modo Globus & particule Medii sint summe elastica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi Globus & particule Medii sunt infinite dura & vi reflectendi prorsus destituta. In Mediis autem continuis quales sunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum vivum, in quibus Globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas resistantiam generantes, sed premit tantum proximas particulas & hæc premunt alias & hæc alias, resistantia est adhuc duplo minor. Globus utique in hujusmodi Mediis fluidissimis resistantiam patitur quæ est ad vim qua totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore; motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas Medii ad densitatem Globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

PROPOSITIO XXXVI PROBLEMA VIII

Aquæ de vase Cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit $ACDB$ vas cylindricum, AB ejus orificium superius, CD fundum horisonti parallelum, EF foramen circulare in medio fundi, G centrum foraminis, & GH axis cylindri horisonti perpendicularis. Et concipe cylindrum glaciæ $APQB$ ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo descendere, & partes ejus quam primum attingunt superficiem AB liquefcere, & in aquam conversas gravitate sua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ $ABNFEM$ cadendo formare, & per foramen EF transire, idemque adæquate implere. Ea vero sit uniformis velocitas glaciæ descendentis ut & aquæ contiguæ in circulo AB , quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IH acquirere potest; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horisonti parallela & lateribus glaciæ



DE MOTU
CORPORUM

ciei occurrens in K & L . Et velocitas aquæ effluentis per foramen EF ea erit quam aqua cadendo ab I & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest. Ideoque per Theoremata *Galilei* erit IG ad IH in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB , hoc est, in duplicata ratione circuli AB ad circulum EF ; nam hi circuli sunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipsos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate transeunt. De velocitate aquæ horizontem versus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæsiōnem suam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: sed motum horizonti parallelum, a cohæsiōne illa oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis $ABNFEM$, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantum non tangat vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrime & sine omni resistantia labatur, hæc defluet per foramen EF eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ $ABNFEM$ impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

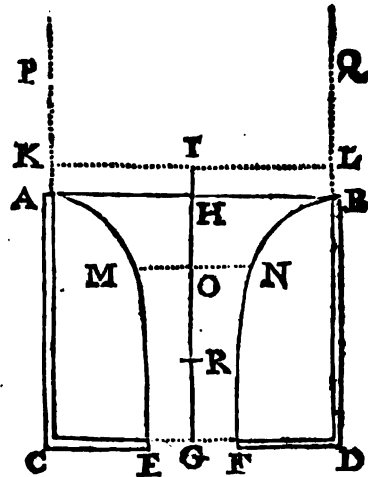
Liquefcat jam glacies in vase; & effluxus aquæ quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter: sed a lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quam in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6 , vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, si modo

modo diametros recte dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exiliens cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi sic, ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquæ plenum esset, aperui foramen ut aqua efflueret, & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quam accuratissime mensurata, prodiit partim viginti & unius quadragiesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ quæ per foramen circulare in fundo vasis factum effluit, ea est quæ, pro diametro venæ, cum velocitate prædicta effluere debet.

In sequentibus igitur, plano foraminis parallelum duci intelligatur planum aliud superius ad distantiam diametro foraminis æqualem vel paulo majorem & foramine majore pertusum, per quod utique vena cadat quæ adæquate impleat foramen inferius *EF*, atque adeo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproxime. Spatium vero quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit & magis Mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vase per foramen *EF* egrediebatur, motum suum perpetuo servet & glacies quietem suam etiamsi in aquam fluidam resolvatur.

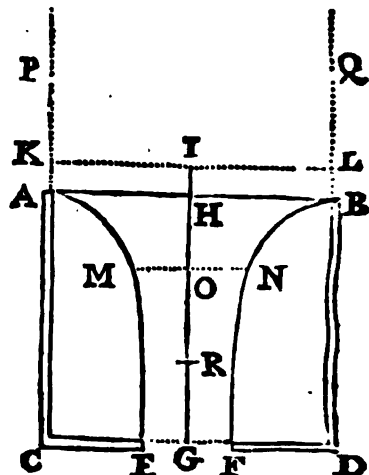
Cas. 2. Si foramen *EF* non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, si modo eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majore quidem tempore descendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem



DE MOTU dem velocitatem acquirit in utroque casu, ut *Galileus* demon-
CORPORUM stravit.

Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, ut intervallum inter superficies AB & KL quoad sensum evanescat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam efformet: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine HG vel IG cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ profiliantis incidere in planum illud ad distantiam digitorum 37. circiter a perpendicularo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam sine resistentia vena incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ Parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quinetiam aqua effluens, si sursum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem GH vel GI , nisi quatenus ascensus ejus ab aeris resistentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter, per Prop. xix. Lib. II, & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit, eam esse quam in hac Propositione assignavimus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.



Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis sit circularis sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figura foraminis sed ab ejus altitudine infra planum KL .

Cas. 6. Si vasis $ABDC$ pars inferior in aquam stagnantem immergatur,

mergatur, & altitudo aquæ stagnantis supra fundum vasis sit GR : LIBER
SECUNDUS.
 velocitas quacum aqua quæ in vase est, effluet per foramen EF in aquam stagnantem, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IR acquirere potest. Nam pondus aquæ omnis in vase quæ inferior est superficie aquæ stagnantis, sustinebitur in æquilibrio per pondus aquæ stagnantis, ideoque motum aquæ descendens in vase minime accelerabit. Patebit etiam & hic Casus per Experimenta, mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc si aquæ altitudo CA producat ad K , ut sit AK ad CK in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli AB : velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem KC acquirere potest.

Corol. 2. Et vis qua totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi Cylindricæ columnæ aquæ cujus basis est foramen EF , & altitudo $2GI$ vel $2CK$. Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere suo ab altitudine GI cadendo, velocitatem suam qua exilit, acquirere potest.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vase $ABDC$, est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum AB & EF , ad duplum circulum EF . Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG ; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I describere posset altitudinem IG , æqualis erit Cylindro cujus basis est circulus EF , & altitudo est $2IG$, id est, Cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo est $2IO$, nam circulus EF est ad circulum AB in subduplicata ratione altitudinis IH ad altitudinem IG , hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG : & quo tempore gutta cadendo ab I describere potest altitudinem IH , aqua egrediens æqualis erit Cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo est $2IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G describit altitudinum differentiam HG , aqua egrediens, id est, aqua tota in solido $ABNFEM$ æqualis erit differentię Cylindrorum, id est, Cylindro cujus basis est AB & altitudo $2HO$. Et propterea aqua tota in vase $ABDC$ est ad aquam totam cadentem in solido $ABNFEM$ ut HG ad $2HO$, id est, ut $HO + OG$ ad $2HO$, seu $IH + IO$ ad $2IH$. Sed pondus aquæ totius in solido $ABNFEM$ in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus

convexa erit versus cataraclam, & propterea major Cono cujus basis est circellus ille PQ & altitudo GH ; id est, major tertia parte Cylindri eadem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere Coni seu tertiæ partis Cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, minor est pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est HG . Nam stantibus jam positus, describi intelligatur dimidium Sphæroidis cujus basis est circellus ille & semiaxis sive altitudo est HG . Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ PHQ cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maxime directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi PQ in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem vero sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem Sphæroidis sit infinite velocior quam ejus motus horizontem versus. Et quo minor est circellus PQ eo acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, seu duabus tertiis partibus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo GH . Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, æquale est pondere Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce est medium Arithmeticum inter pondera Coni & Hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen EF : hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH .

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproxime.

L E M M A IV.

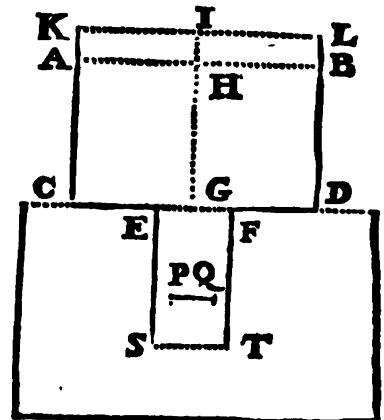
Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia Circuli eadem diametro descripti & eadem velocitate secundum lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minime opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in Circulum vertitur.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, est ad vim qua totus ejus motus interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproxime.

Nam si vas $ABDC$ fundo suo CD superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem Cylindricum $EFTS$ horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem Circellus PQ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producat CA ad K , ut sit AK ad CK in duplicata ratione quam habet excessus orificii canalis EF supra circellum PQ ad circulum AB : manifestum est (per Cas. 5, Cas. 6, & Cor. 1. Prop. xxxvi.) quod velocitas aquæ transcuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem KC vel IG acquirere potest.



Et

Et (per Cor. 10. Prop. xxxvi.) si vasis latitudo sit infinita, ut lineola HI evanescat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} P Q q$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canale, eadem erit in circellum $P Q$ in quacunq; canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST , & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ut differentia circulorum EF & $P Q$ ad circulum $P Q$, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis qua præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF & $P Q$ ad circulum EF , sive ut $EFq - P Q q$ ad EFq . Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati qua supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius, per Legum Cor. 5. id est, Resistentia circelli ascendentis erit ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} IG$ ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} P Q q$ quam proxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - P Q q$ ad EFq .

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - P Q q$ & EFq , interque EFq & $EFq - \frac{1}{2} P Q q$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea Velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest, Resistentia vero ejus æqualis evadet ponderi Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis IG , a qua Cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; & hac velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem Cylindri, hac velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentia circelli per Lemma IV; ideoque æqualis est Vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, generari potest quamproxime.

Si

DE MOTU
CORPORUM

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus quo quadruplum longitudinis suæ describit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; adeoque vis illa qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli possit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis est resistentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si densitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & Vis qua motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Resistentiæ itaque Cylindri cujuscunque sit ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproxime. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut sit continuum, continuum vero esse & non elasticum ut pressio omnis quæ ab ejus compressione oritur propagetur in instanti &, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, resistentiæ non mutet. Pressio utique quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & Resistentiæ creat. Pressio autem quæ oritur a compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiæ nec auget nec minuit. Certe Actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quam in ejus partes anticæ, ideoque resistentiæ in hac Propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticæ quam in posticas, si modo propagatio ejus infinite velocior sit quam motus corporis pressi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum & non elasticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis Mediorum.

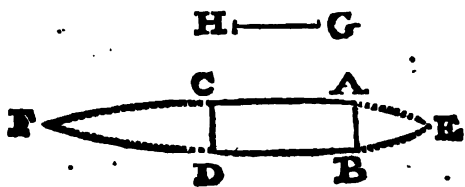
Corol. 2. Si amplitudo canalıs non augeatur in infinitum, sed Cylindrus in Medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axē canalıs coincidat: Resistentiæ ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2} P Q q$ semel

semel, & ratione EFq ad $EFq - P Qq$ bis, & ratione densitatis Medii ad densitatem Cylindri.

Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2} P Qq$ ad EFq semel, & ratione $EFq - P Qq$ ad EFq bis: resistentia Cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri.

Scholium.

In hac Propositione resistentiam investigavimus quæ oritur a sola magnitudine transversæ sectionis Cylindri, neglecta resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo Propositionis xxxvi. obliquitas motuum quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen EF , impedit effluxum aquæ illius per foramen; sic in hac Propositione, obliquitas motuum quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes Cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vase diminit, id est, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia transirent per foramen EF , ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hac Propositione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum Cylindro, & sola maneat resistentia quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum Cylindri, concipiendum est quod partes fluidi quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur, Sit $ABCD$ rectangulum, & sint AE & BE arcus duo Parabolici axe AB descripti, latere autem recto quod sit ad spa-

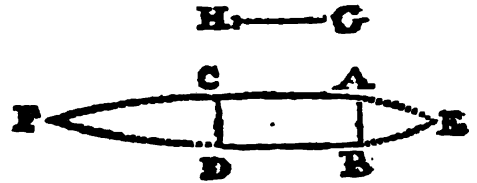


R r

tium

De Motu
Corporum

tium HG , describendum a Cylindro cadente, dum velocitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2} AB$. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim qua totus Cylindri motus, interea dum longitudo $4 AC$ motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas Fluidi habet ad densitatem Cylindri quamproxime. Et hac vi Resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per



Corol. 7. Prop. xxxvi.

LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphæroides, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis Cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impediunt.

Nam spatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

LEMMA VI.

Isdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per Lemma v & Motus Legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA

LEMMA VII.

LIBER
SECUNDUS.

Si aqua quiescat in canali, & corpora in partes contrarias equali velocitate per canalem ferantur: aequales erant eorum resistentiae inter se.

Constat ex Lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scholium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axè canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his Lemmatis corpora esse politissima supponimus, & Medii tenacitatem & frictionem esse nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus suis obliquis & superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, & corporibus ad ipsorum partes anticæ & posticæ adhæreant, perinde ut in Scholio Propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante & post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propositionibus non agimus de fluidis elasticis, sed de non elasticis; non de insidentibus fluido, sed de alte immerfis. Et ubi resistentia corporum in fluidis non elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum tam in fluidis elasticis, qualis est Aer, quam in superficiebus fluidorum stagnantium, qualia sunt maria & paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in Fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit, vel generari, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi quamproxime.

Nam Globus est ad Cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea Vis illa, quæ tollere possit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet interea dum Globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem Cylindri est ad hanc Vim quamproxime ut densitas Fluidi ad densitatem Cylindri vel Globi, per Prop. xxxvii.; & Resistentia Globi æqualis est Resistentiæ Cylindri, per Lem. v, vi, vii. *Q. E. D.*

Corol. 1. Globorum, in Mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & duplicata ratione densitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quæcum Globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest Globus idem, eodem pondere, absque resistentia cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas Globi ad densitatem Fluidi. Nam Globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisita, describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas Globi ad densitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit quo tempore Globus octo tertias diametri suæ eadem velocitate describit, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi: ideoque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi Resistentiæ, & propterea Globum accelerare non potest.

Corol. 3. Data & densitate Globi & velocitate ejus sub initio motus, ut & densitate fluidi compressi quiescentis in qua Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. xxxv.

Corol.

Corol. 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descriperit, per idem *Corol. 7.* LIBER
SECUNDUS.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per Fluidum in canali Cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quæ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri sue describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalisi ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicata orificii canalisi ad excessum hujus orificii supra circulum maximum Globi, & ratione densitatis Fluidi ad densitatem Globi quamproxime.

Patet per *Corol. 2. Prop. xxxvii*; procedit vero demonstratio quemadmodum in Propositione præcedente.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi in Medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per Phænomena.

Sit *A* pondus Globi in vacuo, *B* pondus ejus in Medio resistente, *D* diameter Globi, *F* spatium quod fit ad $\frac{1}{2}$ *D* ut densitas Globi ad densitatem Medii, id est, ut *A* ad *A* - *B*, *G* tempus quo Globus pondere *B* absque resistentia cadendo describit spatium *F*, & *H* velocitas quam Globus hocce casu suo acquirit. Et erit *H* velocitas maxima quacum Globus, pondere suo *B*, in Medio resistente potest descendere, per *Corol. 2. Prop. xxxviii*; & resistentia quam Globus ea cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi *B*: resistentia vero quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus *B* in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam *H*, per *Corol. 1. Prop. xxxviii*.

De Motu
Calorum

Hæc est resistentia quæ oritur ab inertia materiæ Fluidi. Ea vero quæ oritur ab elasticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, sic investigabitur.

Demittatur Globus ut pondere suo B in Fluido descendat; & sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit Logarithmo $0,4342944819 \frac{2P}{G}$ sitque L Logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo

autem descripta erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 F + 4,605170186 L F$.

Si Fluidum satis profundum sit, negligi potest terminus $4,605170186$

L F; & erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 F$ altitudo descripta quampro-

xime. Patent hæc per Libri secundi Propositionem nonam & ejus Corollaria, ex Hypothesi quod Globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in Fluido cadentis velocitas & descensus facilius innotescant, composui Tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus; secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maxima 10000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta, existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima describit, & quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maxima descripta.

Numeri in quarta columna sunt $\frac{2P}{G}$, & subducendo numerum

$1,3862944 - 4,6051702 L$, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus a corpore, vi ponderis sui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora

| Tempora P | Velocitates cadentis in fluido | Spatia caden- do descripta in fluido | Spatia motu maximo de- scripta. | Spatia caden- do descripta in vacuo. |
|--------------|---------------------------------------|--|---------------------------------------|--|
| 0,001G | 99999 ¹² / ₁₀ | 0,000001F | 0,002F | 0,000001F |
| 0,01G | 999967 | 0,0001F | 0,02F | 0,0001F |
| 0,1G | 9966799 | 0,0099834F | 0,2F | 0,01F |
| 0,2G | 19737532 | 0,0397361F | 0,4F | 0,04F |
| 0,3G | 29131261 | 0,0886815F | 0,6F | 0,09F |
| 0,4G | 37994896 | 0,1559070F | 0,8F | 0,16F |
| 0,5G | 46211716 | 0,2402290F | 1,0F | 0,25F |
| 0,6G | 53704957 | 0,3402706F | 1,2F | 0,36F |
| 0,7G | 60436778 | 0,4545405F | 1,4F | 0,49F |
| 0,8G | 66403677 | 0,5815071F | 1,6F | 0,64F |
| 0,9G | 71629787 | 0,7196609F | 1,8F | 0,81F |
| 1G | 76159416 | 0,8675617F | 2F | 1F |
| 2G | 96402758 | 2,6500055F | 4F | 4F |
| 3G | 99505475 | 4,6186570F | 6F | 9F |
| 4G | 99932930 | 6,6143765F | 8F | 16F |
| 5G | 99990920 | 8,6137964F | 10F | 25F |
| 6G | 99998771 | 10,6137179F | 12F | 36F |
| 7G | 99999834 | 12,6137073F | 14F | 49F |
| 8G | 99999980 | 14,6137059F | 16F | 64F |
| 9G | 99999997 | 16,6137057F | 18F | 81F |
| 10G | 99999999 ¹ / ₁₀ | 18,6137056F | 20F | 100F |

Scholium.

Ut resistentias Fluidorum investigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{3}{4}$ uncias libræ hujus seu grana 253 $\frac{1}{2}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana

DE MOTU 132,645 in Medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus qui-
CORPORUM libet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus
 in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{2}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minorum quatuor secundorum.

Pondus globi in vacuo est $156\frac{11}{16}$ gran., & excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est $79\frac{3}{8}$ gran. Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in vacuo, ita densitas aquæ ad densitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 dig.) ad spatium 2 F, quod proinde erit 4,4256 dig. Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{1}{2}$, cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{2}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, absque resistantia cadendo in aqua describet digitos 95,219; & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicata ratione spatii F seu 2,2128 dig. ad 95,219 dig. describet 2,2128 dig. & velocitatem maximam H acquireret quacum potest in aqua descendere. Est igitur tempus G 0,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus describet spatium 2 F digitorum 4,4256; ideoque tempore minorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. Subducatur spatium 1,3862944 F seu 3,0676 dig. & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vase amplissimo, tempore minorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semicirculum maximum globi & ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circulum maximum globi, id est, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur spatium 112,08 digitorum, quod Globus cadendo in aqua in hoc vase ligneo tempore minorum quatuor secundorum per Theoriam describere debuit quamproxime. Descripsit vero digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres Globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{2}$ granorum in aere & $5\frac{1}{2}$ granorum in aqua, successive demittebantur; & unusquisque cecidit in aqua tempore minorum secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112.

Com-

Computum in eundo prouident pondus globi in vacuo $76\frac{1}{2}$ gran., LIBER
 excessus hujus ponderis supra pondus in aqua $71\frac{1}{4}$ gran., diameter SECUNDUS,
 globi 0, 81296 dig., octo tertiæ partes hujus diametri 2, 16789 dig.,
 spatium 2 F 2, 3217 dig., spatium quod globus pondere $5\frac{1}{2}$ gran., tem-
 pore 1", absque resistentia cadendo describat 12, 808 dig., & tem-
 pus G 0", 301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest
 in aqua vi ponderis $5\frac{1}{2}$ gran. descendere, tempore 0", 301056 de-
 scribet spatium 2, 3217 dig. & tempore 15" spatium 115, 678 dig. Sub-
 ducatur spatium 1, 2862944 F seu 1, 609 dig. & manebit spatium
 114, 069 dig. quod proinde globus eodem tempore in vase latissi-
 mo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri de-
 trahi debet spatium 0, 895 dig. circiter. Et sic manebit spatium
 113, 174 dig. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15" de-
 scribere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero digi-
 tos 112 per Experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121
 gran. in aere & 1 gran. in aqua, successive demittebantur; & ca-
 debant in aqua temporibus 46", 47", & 50", describentes altitudi-
 nem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40" circiter.
 Quod tardius ceciderunt, vel bullulis nonnullis globo adhærenti-
 bus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus
 globum demittentis, vel erroribus insensibilibus in ponderandis
 globis in aqua, vel denique minori proportioni resistentiæ quæ a
 vi inertæ in tardis motibus oritur ad resistentiam quæ oritur ab
 aliis causis, tribuendum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua
 debet esse plurimum granorum ut experimentum certum & fide dig-
 num reddatur.

Exper. 4. Experimenta hætenus descripta cæpi ut investigarem
 resistentias fluidorum antequam Theoria, in propositionibus pro-
 xime præcedentibus exposita, mihi innotesceret. Postea, ut Theo-
 riam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna
 digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde
 ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pon-
 dere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{2}$ granorum in aqua. Et hos de-
 misi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta
 secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea
 cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant, quia ca-
 lor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi
 in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

DE MOTU **CORPORUM** frigis reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immerfi quiescebant, demittebantur quam cautissime, ne impulsus aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successive temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpius capto, Globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{3}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua $132\frac{2}{3}$ gran. Diameter globi 0,99868 dig. Octo tertiæ partes diametri 2, 66315 dig. Spatium 2 F 2, 8066 dig. Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi absque resistentia cadendo describit 9, 88164 dig. Et tempus G 0", 376843. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0", 376843 describit spatium 2, 8066 digitorum, & tempore 1" spatium 7,44766 digitorum, & tempore 25" seu oscillationum 50 spatium 186, 1915 dig. Subducatur spatium 1,386294 F, seu 1,9454 dig. & manebit spatium 184,2461 dig. quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; & habebitur spatium 181,86 digitorum; quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{1}{8}$ gran. in aere & $21\frac{1}{2}$ gran. in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproxime.

Exper.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{1}{2}$ gran. in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{1}{2}$ gran. in aere & $35\frac{1}{2}$ gran. in aqua sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproxime.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset, primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas, globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo descendere deberet, & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus, & globum ita demissi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurimum quam 52; non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 51 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor pondere granorum $273\frac{1}{2}$ in aere & $140\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum

DE MOTU non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes alti-
CORPORUM tudinem digitorum 182.

Per Theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor pondere granorum 384 in aere & 119 $\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum 17 $\frac{1}{2}$, 18, 18 $\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum 181 $\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audiui impulsu eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam vero cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & 3 $\frac{2}{3}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 43 $\frac{1}{2}$, 44, 44 $\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum 182 $\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 46 $\frac{1}{3}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & 4 $\frac{1}{8}$ in aqua, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 64 $\frac{1}{3}$ quamproxime.

Per hæc Experimenta manifestum est quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per Theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, resistentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum; & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aqua ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes, & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquunt, nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per Prop. xxxii & xxxiii) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut resistentia sit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Con-

Congruit igitur Theoria cum phænomenis corporum cadentium. LIBER. SECUNDUS.
 in Aqua, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Ecclesiæ *Sⁱ. Pauli*, in urbe *Londini*, globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic Tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum, ut Tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum ferreum a pessulo ad imam Ecclesiæ partem tendens, demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in Tabula sequente.

| <i>Globorum mercurio plenorum.</i> | | | <i>Globorum aere plenorum.</i> | | |
|------------------------------------|-----------------|-------------------------|--------------------------------|-----------------|-------------------------|
| <i>Pondera</i> | <i>Diametri</i> | <i>Tempora cadendi.</i> | <i>Pondera</i> | <i>Diametri</i> | <i>Tempora cadendi.</i> |
| 908 gran. | 0,8 digit. | 4" | 510 gran. | 5,1 digit. | 8" $\frac{1}{2}$ |
| 983 | 0,8 | 4— | 642 | 5,2 | 8 |
| 866 | 0,8 | 4 | 599 | 5,1 | 8 |
| 747 | 0,75 | 4+ | 515 | 5,0 | 8 $\frac{1}{2}$ |
| 808 | 0,75 | 4 | 483 | 5,0 | 8 $\frac{1}{2}$ |
| 784 | 0,75 | 4+ | 641 | 5,2 | 8 |

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum 3" 42". Tabula lignea utiq̄e, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda sua devolutione impediēbat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbēbant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui Tabulæ devolventi paulo diutius incumbēbant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto, tempora quibus globi sex majores cecidere, evadent 8" 12", 7" 42", 7" 42", 7" 57", 8" 12", & 7" 42".

DE MOTU CORPORUM Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus cecidit, tempore 8" 12"', describendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis, est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ gran. seu 19 $\frac{1}{10}$ gran; ideoque pondus globi in vacuo est 502 $\frac{1}{10}$ gran. & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut 502 $\frac{1}{10}$ ad 19 $\frac{1}{10}$, & ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad 13 $\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 ped. 11 dig. Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere 502 $\frac{1}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos 193 $\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 gran. describit digitos 185, 905, & eodem pondere 483 gran. etiam in vacuo describit spatium F seu 14 ped. 5 $\frac{1}{2}$ dig. tempore 57" 58"', & velocitatem maximam acquirit quacum possit in aere descendere. Hac velocitate globus, tempore 8" 12"', describet spatium pedum 245 & digitorum 5 $\frac{1}{2}$. Aufer 1, 3863 F seu 20 ped. 0 $\frac{1}{2}$ dig. & manebunt 225 ped. 5 dig. Hoc spatium igitur globus, tempore 8" 12"', cadendo describere debuit per Theoriam. Descripsit vero spatium 220 pedum per experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci Tabulam sequentem.

| Globorum pondera | Diametri | Tempora cadendi ab altitudine pedum 220. | Spatia describenda per Theoriam. | Excessus. |
|------------------|-----------|--|----------------------------------|----------------|
| 510 gran. | 5, 1 dig. | 8" 12" | 226 ped. 11 dig. | 6 ped. 11 dig. |
| 642 . . . | 5, 2 | 7 42 | 230 9 | 10 9 |
| 599 | 5, 1 | 7 42 | 227 10 | 7 10 |
| 515 | 5 | 7 57 | 224 5 | 4 5 |
| 483 | 5 | 8 12 | 225 5 | 5 5 |
| 641 . . . | 5, 2 | 7 42 | 230 7 | 10 7 |

Globorum igitur tam in Aere quam in Aqua motorum resistentia prope omnis per Theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus proportionalis est.

In Scholio quod Sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivalentium in Aere, Aqua, & Argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. Idem hic ostendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in Aere & Aqua. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia sibi quo pendulum suspendebatur, totam Penduli resistentiam majorem reddiderunt quam resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in Scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum Aqua, describendo longitudinem semidiametri suæ in Aere, amittere deberet motus sui partem $\frac{1}{1342}$. At per Theoriam in hac septima Sectione expositam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, amittere deberet motus sui partem tantum $\frac{1}{1586}$, posito quod densitas Aquæ sit ad densitatem Aeris ut 1860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodire (ob causas jam descriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in Aere, Aqua, & Argento vivo oscillantium resistentiæ a causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his Mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, satis recte exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motus sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus sub initio motus, & T tempus quo globus velocitate V in vacuo describet spatium quod sit ad spatium $\frac{3}{2}D$ ut densitas globi ad densitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & describet spatium quod sit ad spatium uniformi velocitate V eodem tempore descriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, per
 Corol

DE MOTU Corol. 7. Prop. xxxv. In motibus tardis resistentia potest esse paulo
CORPORUM minor, propterea quod figura Globi paulo aptior sit ad motum quam
 figura Cylindri eadem diametro descripti. In motibus velocibus re-
 sistentia potest esse paulo major, propterea quod elasticitas & com-
 pressio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed
 hujusmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis Aer, Aqua, Argentum vivum & similia fluida, per
 divisionem partium in infinitum, subtilisarentur & fierent Media in-
 finite fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam
 resistentia, de qua agitur in Propositionibus præcedentibus, oritur
 ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus essentialis est &
 quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium
 fluidi, resistentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium, di-
 minuui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem parti-
 um ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet
 ejus vis inertię cui resistentia, de qua hic agitur, semper propor-
 tionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminuui debet quan-
 titas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea
 spatia Cœlestia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in om-
 nes partes liberrime & absque omni motus diminutione sensibili
 perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte
 vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic
 motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes an-
 ticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse
 potest in Mediis infinite fluidis quam in Aere, Aqua, & Argen-
 to vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis
 excessus, pro quantitate sua, non tantum motum cient in fluido,
 sed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & pro-
 pterea resistentia in omni fluido, est ut motus in fluido a projec-
 tili excitatus, nec minor esse potest in Æthere subtilissimo pro
 densitate Ætheris, quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro
 densitatibus horum fluidorum.

S E C T I O VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulae Fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulae a, b, c, d, e in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab a ad e ; at particula e urget particulas oblique positas f & g oblique, & particulae illae f & g non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus b & k ; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulciantes; & haec non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus l & m easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quae non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas posteriores, quae non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit.

Q. E. D.

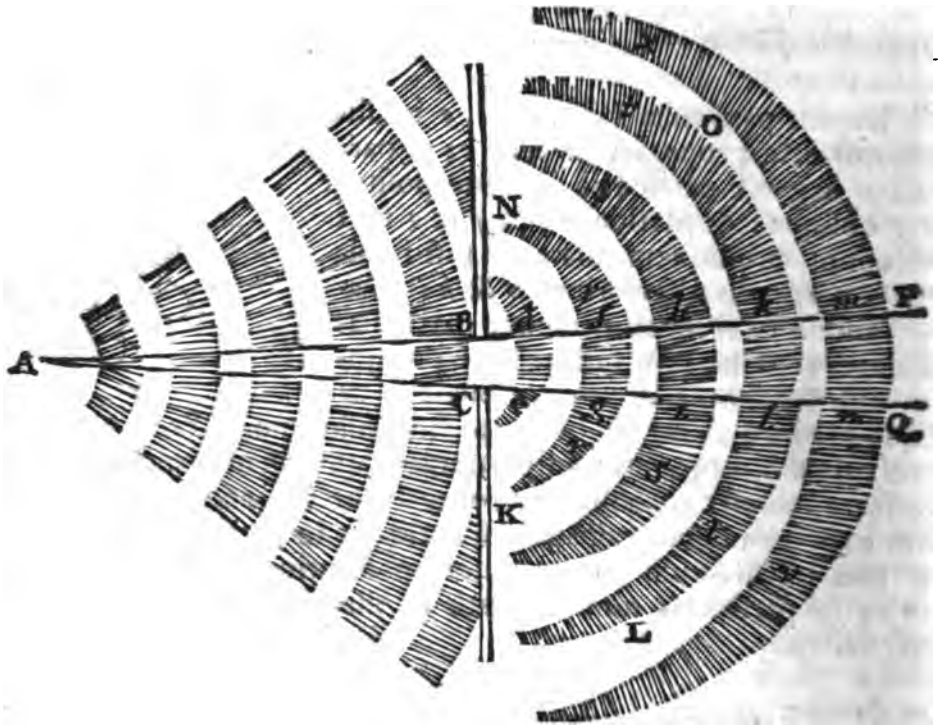


Corol. Si pressionis, a dato puncto per Fluidum propagatae, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quae non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto A propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas & obstaculo $NBCK$ perforato in BC , intercipiatur ea omnis, praeter partem Coniformem APQ , quae per foramen circulare BC transit. Planis transversis de, fg, hi distinguatur conus APQ in frusta; & interea dum conus ABC , pressionem propagando, urget frustum

T t

stum

De Motu frustum conicum ulterius $de\ fg$ in superficie de , & hoc frustum
CORPORUM urget frustum proximum $fg\ ib$ in superficie fg , & frustum illud
 urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum
 est (per motus Legem tertiam) quod frustum primum $de\ fg$,
 reactione frusti secundi $fg\ ib$, tantum urgebitur & premetur in
 superficie fg , quantum urget & premit frustum illud secundum.
 • Frustum igitur $de\ gf$ inter conum Ade & frustum $fb\ ig$ com-
 primitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figu-
 ram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatur undique.



Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus de , fg , con-
 bitur cedere ad latera df , eg ; ibique (cum rigidum non sit, sed
 omnimodo Fluidum) excurreret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens
 adfit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi,
 premet tam Fluidum ambiens ad latera df , eg quam frustum $fg\ ib$
 eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur a la-
 teribus df , eg in spatia NO , KL hinc inde, quam propagatur a
 superficie fg versus P, Q . Q. E. D.

P R O

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

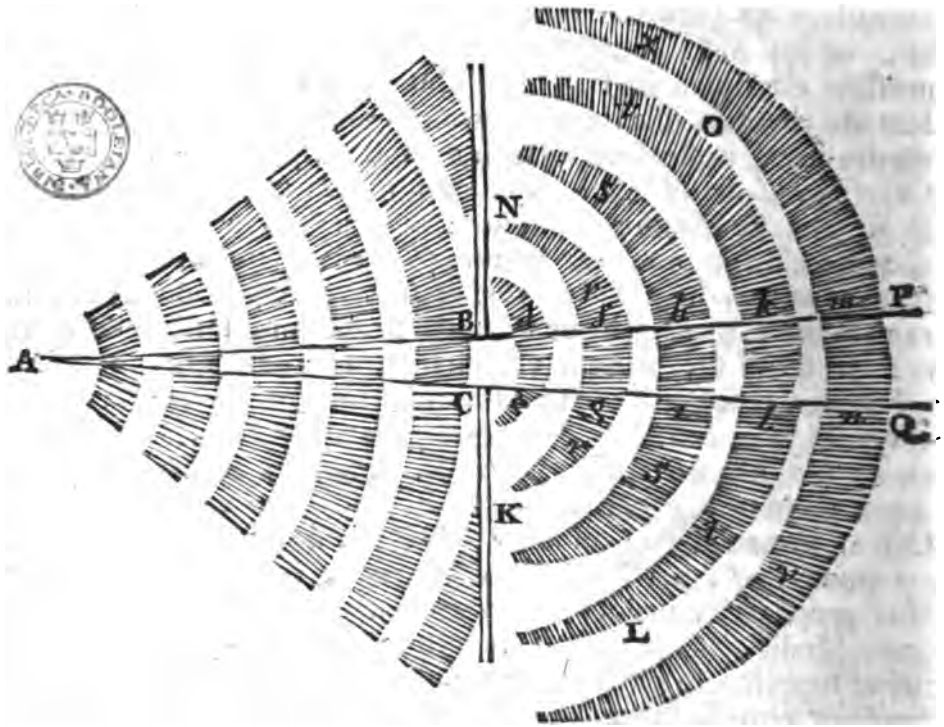
Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto A per foramen BC pergitque (si fieri potest) in spatio conico BCQ secundum lineas rectas divergentes a puncto C . Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque de, fg, hi, kl , &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in Fluidi partibus immotis LK, NO , defluet eadem de jugorum terminis e, g, i, l , &c. d, f, h, k , &c. hinc inde, versus KL & NO : & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in Fluidi partibus immotis KL, NO ; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus KL & NO . Et quoniam motus undarum ab A versus PQ fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ, hinc inde, versus KL & NO eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum, hinc inde, versus KL & NO , eadem velocitate qua undæ ipsæ ab A versus PQ recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde, versus KL & NO , ab undis dilatatis $rfg, shis, tklt, vmnu$, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod de, fg, hi, kl, mn , designent pulsus a puncto A , per Medium Elasticum, successive propagatos. Pulsus propagari concipere per successivas condensationes & rarefactiones Medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphericam occupet superficiem circa centrum A descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedent intervalla. Designent autem lineæ de, fg, hi, kl , &c. densissimas pulsuum partes, per foramen BC propagatas. Et quoniam Medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus KL & NO , dilatabit sese tam versus spatia illa KL, NO utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla;

DE MOTU
CORPORUM

eoque pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pulsus eadem fere celeritate sese in Medii partes quiescentes KL , NO hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem fere celeritate sese dilatant undique in spatia immota KL , NO , qua propagantur directe a centro A ; adeoque spatium totum $KLON$ occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interposito audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admisi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppositis, quam a fenestra directe propagati, quantum ex sensu judicare licet.



Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen BC : & quoniam propagatio ista non fit, nisi quatenus partes Medii centro A propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent

cedent eadem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales LIBER
SECUNDUS.
KL & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* transit, dilatari incipiet & abinde, tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari.
Q. E. D.

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsum undique in directum; in Medio vero non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. I. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, ita suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo comprimunt easdem & condensabunt, dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hæc Medii partes, hæc similibus tremoribus agitatae agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatae agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensantur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando; non rareficerent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt, idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatae, ob motum suum progressivum quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphericas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus

DE MOTU in Undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergunt
CORPORUM hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circu-
lorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propa-
gabuntur. Nam gravitas Undarum supplet locum vis Elasticæ.

Cas. 2. Quod si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes
a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt,
propagabitur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime ce-
dit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo
relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quo-
cunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in
infinite; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus
relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in par-
tem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad par-
tes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum
priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem re-
dibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis
omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam
tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem
simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi pre-
mitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt.

Q. E. D.

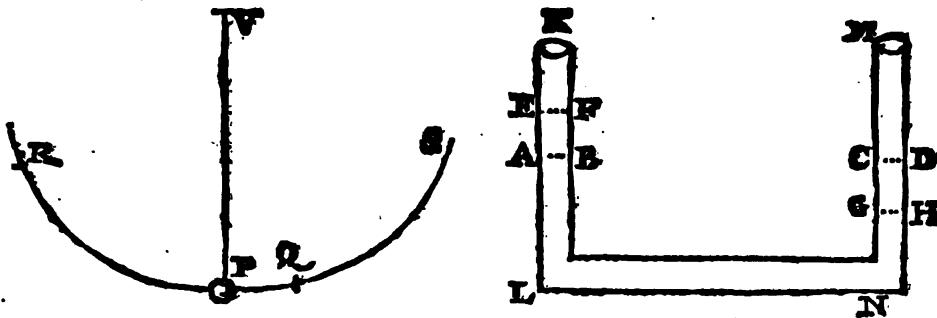
Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium
Flammæ ad pressionem, per Medium ambiens, secundum lineas
rectas propagandam conducere. Debet ejusmodi pressio non
ab agitatione sola partium Flammæ, sed a totius dilatatione deri-
vari.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

*Si aqua in Canalis cruribus erectis KL, MN vicibus alter-
nis ascendat & descendat; construatur autem Pendulum
cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum
oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in Canali:
dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus
quibus Pendulum oscillatur.*

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum,
eandem summæ horum axium æquando; & resistantiam aquæ quæ
oritur

oritur ab attritu canalıs, hic non confidero. Designent igitur AB , CD mediocrem altitudinem aquę in crure utroque; & ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF , descenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH . Sit autem P corpus pendulum, VP filum, V punctum suspensionis, $SPQR$ Cyclois quam Pendulum describat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, qua motus aquę alternis vicibus acceleratur



& retardatur, est excessus ponderis aquę in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure KL ascendit ad EF , & in crure altero descendit ad GH , vis illa est pondus duplicatum aquę $EABF$, & propterea est ad pondus aquę totius ut AE seu PQ ad VP seu PR . Vis etiam, qua pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in Cycloide, (per Corol. Prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia PQ a loco infimo P , ad Cycloidis longitudinem PR . Quare aquę & penduli, æqualia spatia AE , PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illę movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficiantque ut motu reciproco simul eant & redeant. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur aquę ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt Isochronę.

Corol. 2. Si longitudo aquę totius in canali sit pedum *Parisien-* sum $6\frac{1}{2}$: aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{2}$ longitudinis, tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol.

DE MOTU CORP. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicata.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicata ratione latitudinum.

Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficiet.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel valibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem; sintque *A, C, E*, &c. undarum culmina, & *B, D, F*, &c. valles intermediæ. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A, C, E*, &c. quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eademque temporis leges observabit: & propterea (per Prop. XLIV) si distantia inter undarum loca altissima *A, C, E* & infima *B, D, F* æquetur duplæ penduli longitudini; partes altissimæ *A, C, E*, tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum Undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, Unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur, sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, adeoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. Q. E. I.

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisenses* $3\frac{1}{8}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficiet; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $118\frac{1}{2}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproxime.

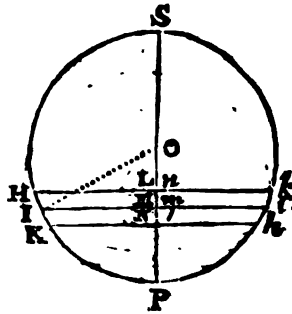
Corol. 2.

DE MOTU
CORPORUM

in ϵ . Hac lege punctum quodvis E , eundo ab E per ϵ ad ϵ , & inde redeundo per ϵ ad E , iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia $PHSb$ capiantur æquales arcus HI , IK vel bi , ik , eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF , FG ad pulsuum intervallum totum BC . Et demissis perpendicularis IM , KN vel im , kn ; quoniam puncta E , F , G motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C ;

si PH vel $PHSb$ sit tempus ab initio motus puncti E , erit PI vel PHS tempus ab initio motus puncti F , & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti G ; & propterea $E\epsilon$, $F\phi$, $G\gamma$ erunt ipsis PL , PM , PN in itu punctorum, vel ipsis Pl , Pm , Pn in punctorum reditu, æquales respecti-



ve. Unde $\epsilon\gamma$ seu $EG + G\gamma - E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + Ln$. Sed $\epsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis Medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG - LN$ ad EG ; in reditu autem ut $EG + Ln$ seu $EG + LN$ ad EG . Quare cum sit LN ad KH ut IM ad radium OP , & KH ad EG ut circumferentia $PHSbP$ ad BC , id est (si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum BC) ut OP ad V ; & ex æquo LN ad EG , ut IM ad V ; erit expansio partis EG punctive Physici F in loco $\epsilon\gamma$, ad expansio-

nem

panfionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo EG , ut $V - IM$ ad V in itu, utque $V + im$ ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\epsilon\gamma$, est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG , ut $\frac{I}{V - IM}$ ad $\frac{I}{V}$ in itu, in reditu vero ut

$\frac{I}{V + im}$ ad $\frac{I}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum

Physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{I}{V - HL}$ & $\frac{I}{V - KN}$ ad

$\frac{I}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elasticam mediocrem, ut

$\frac{HL - KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$ ad $\frac{I}{V}$. Hoc est, ut $\frac{HL - KN}{VV}$ ad $\frac{I}{V}$, sive ut $HL - KN$ ad V , si modo (ob angustos

limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V . Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $HL - KN$, hoc est (ob proportionales $HL - KN$ ad HK , & OM ad OI vel OP , datasque HK & OP) ut OM ; id est, si Ff bifecetur in α , ut $\alpha\phi$. Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum Physicorum ϵ & γ , in reditu lineolæ Physicæ $\epsilon\gamma$ est ut $\alpha\phi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ϵ supra vim elasticam puncti γ ,) est vis qua interjecta Medii lineola Physica $\epsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Physicæ $\epsilon\gamma$, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco α . Proinde tempus (per Prop. xxxviii. Lib. i.) recte exponitur per arcum PI ; & Medii pars linearis $\epsilon\gamma$ lege præscripta movetur, id est, lege oscillantis Penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur.

Q. E. D.

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola Physica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates, sunt in ratione composita ex subduplicata ratione vis Elasticæ directe & subduplicata ratione densitatis inverse; si modo Fluidi vis Elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantiae in his Mediis æquentur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verum tamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibilibiter, ideoque pro Physice accurata haberi potest. Sunt autem vires Elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes, itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiae seu longitudines sint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, est ut pulsuum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione subduplicata materiæ & ratione subduplicata spatii, atque adeo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurreunt; & propterea sunt æquveloces.

Cas. 3. In Mediis igitur densitate & vi Elasticæ paribus, pulsus omnes sunt æquveloces. Quod si Medii vel densitas vel vis Elasticæ intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus quo motus

tus iisdem peragantur ac prius, augebitur in subduplicata ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicata ratione vis Elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione subduplicata densitatis Medii inverſe & ratione subduplicata vis Elasticæ directe. *Q. E. D.*

Hæc Propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequentis.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis Medii denſitate & vi Elatiica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri comprimi; ſitque *A* altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit *A*: & quo tempore Pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio *A* deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione XLVII conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica *EF*, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, a vi Elatiica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimenter tota longitudini *PS* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in ſubduplicata ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt *A*, in ſubduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2} PS$ ſeu *PO* ad longitudinem *A*. Sed vis Elatiica qua lineola Phyſica *EG*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis XLVII.) ad ejus vim totam Elatiicam ut *HL—KN* ad *V*, hoc eſt (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut *HK* ad *V*: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *EG* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo *A* ad lineolæ longitudinem *EG*; adeoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut *HK* \times *A* ad *V* \times *EG*, ſive ut *PO* \times *A* ad *VV*, nam *HK* erat ad *EG* ut *PO* ad *V*. Quare cum tem-

DE MOTU
CORPORUM

pora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elastica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in subduplicata ratione VV ad $PO \times A$, atque adeo ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est A , in subduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & subduplicata ratione PO ad A conjunctim; id est, in ratione integra V ad A . Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC . Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium BC , est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut V ad A , id est, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius est A . Tempus autem, quo pulsus percurreret spatium BC , est ad tempus quo percurreret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurreret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulsuum ea est quam acquirunt Gravia, æqualiter accelerato motu cadendo, & casu suo describendo dimidium altitudinis A . Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisita, pulsus percurreret spatium quod erit æquale toti altitudini A , adeoque tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, percurreret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: est enim tempus casus ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut Fluidi vis Elastica directe & densitas ejusdem inverse; velocitas pulsuum erit in ratione composita ex subduplicata ratione densitatis inverse & subduplicata ratione vis Elasticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola
(per

(per Prop. xli. & xlii.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriuntur, nihil aliud sunt quam aeris pulsus propagati, per Prop. xliii. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad 13 $\frac{1}{2}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cum Pendulum digitos 39 $\frac{1}{2}$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29725, seu digitos 356700 longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum 190 $\frac{1}{2}$ absolvere debet. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 186768, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aeris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aeris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particule aeris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aeris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aeris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979 quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes 79 seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aeris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aere latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aeris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, mo-

tus ille celerius propagabitur per solum aerem verum; idque in subduplicata ratione minoris materiæ. Ut si Atmosphæra constet ex decem partibus aeris veri & una parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aeris veri: ideoque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno & autumnali, ubi aer per calorem temperatum rarefcit & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aer per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicata ratione densitatis; & vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo; conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* vero 1070.

Cognita sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. Invenit utique *D. Sauveur* (factis a se experimentis) quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; adeoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi $10\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissime distamus a corporibus sonoris, quam cum proxime absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVII Libri hujus. Sed & cur soni in Tubis stenterophonicis valde auferentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocos singulis recursibus a causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impredientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo singulis recursibus impresso, magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

S E C T I O IX.

De Motu Circulari Fluidorum.

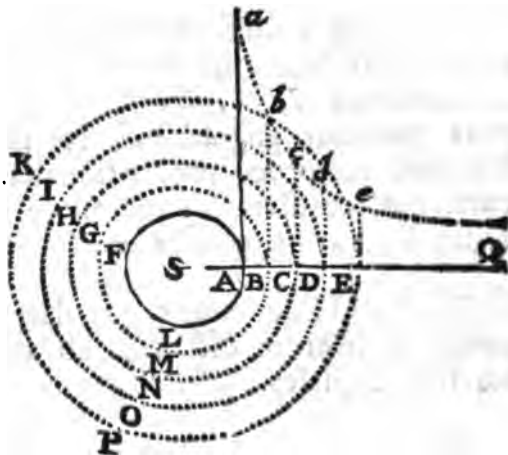
HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes Fluidi separantur ab invicem.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

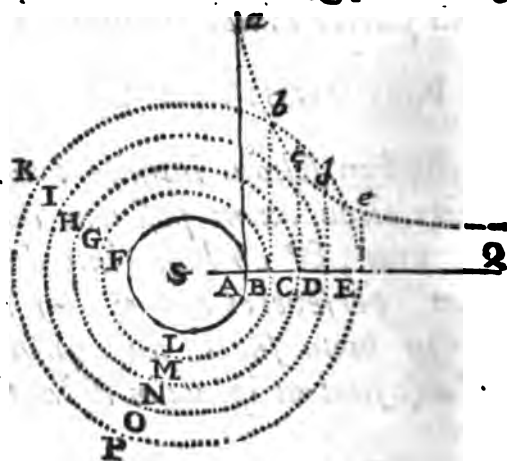
Si Cylindrus solidus infinite longus in Fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem, perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium Fluidi sunt ut ipsarum distantie ab axe Cylindri.

Sit *AFL* Cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM, CHN, DIO, EKP*, &c. distinguatur Fluidum in Orbes Cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem &



superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte

DE MOTU parte convexa ; prævalebit impressio fortior , & motum Orbis vel
CORPORUM accelerabit vel retardabit , prout in eandem regionem cum ipsius
 motu vel in contrariam dirigitur . Proinde ut Orbis unusquisque
 in motu suo uniformiter perseveret , debent impressiones ex parte
 utraque sibi invicem æquari , & fieri in regiones contrarias . Unde
 cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translatio-
 nes ab invicem , erunt translationes inverse ut superficies , hoc
 est , inverse ut superficierum distantia ab axe . Sunt autem dif-
 ferentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes ap-
 plicatæ ad distantias , sive ut translationes directæ & distantia in-
 verse ; hoc est (conjunctis rationibus) ut quadrata distantiarum
 inverse . Quare si ad infinitæ rectæ $S A B C D E Q$ partes singu-
 las erigantur perpendiculara
 $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee,$
 &c. ipsarum $SA, SB, SC,$
 $SD, SE,$ &c. quadratis re-
 ciproce proportionalia , &
 per terminos perpendicula-
 rium duci intelligatur linea
 curva Hyperbolica ; erunt
 summæ differentiarum , hoc
 est , motus toti angulares ,
 ut respondentes summæ li-
 nearum $Aa, Bb, Cc, Dd,$
 Ee : id est , si ad constituen-



dum Medium uniformiter fluidum , Orbium numerus augeatur
 & latitudo minuatur in infinitum , ut areæ Hyperbolicae his sum-
 mis analogæ $AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ,$ &c. Et tem-
 pora motibus angularibus reciproce proportionalia , erunt etiam
 his areis reciproce proportionalia . Est igitur tempus periodicum
 particulæ cujusvis D reciproce ut area DdQ , hoc est , (per
 notas Curvarum quadraturas) directe ut distantia $SD. Q.E.D.$

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reci-
 proce ut ipsarum distantia ab axe cylindri , & velocitates absolu-
 tæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ con-
 tineatur , & cylindrum alium interiore contineat , revolvatur au-
 tem cylindrus uterque circa axem communem , sintque revolu-
 tionum

tionum tempora ut ipsorum femidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo; erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiarum ab axe cylindrorum.

LIBER.
SECUNDUS.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutantur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriori quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecus impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in Aqua profunda stagnante experiri licet.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si Sphæra solida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem; perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphære.

Cas. 1. Sit AFL Sphæra uniformiter circa axem S in orbem acta, & circulis concentricis BGM , CHN , DIO , EKP , &c.

X x 2

distin-

DE MOTU
CORPORUM

distinguat^r Fluidum in Orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem Orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneous est Fluidum, impressioes contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressioes fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debent impressioes ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressioes sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Sunt autem differentiaë motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directæ & distantiaë inverse; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ $S A B C D E Q$ partes singulas erigantur perpendiculara $A a, B b, C c, D d, E e$, &c. ipsarum $S A, S B, S C, S D, S E$, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summaë differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondententes summaë linearum $A a, B b, C c, D d, E e$: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areaë Hyperbolicæ his summis analogæ $A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q$, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areais reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum Orbis cujusvis $D I O$ reciproce ut area $D d Q$, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut quadratum distantiaë $S D$. Id quod volui primo demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quamplurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes, & his rectis circa axem revolutis concipere Orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi factò, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a Globo

Globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus est; neque adeo motum, quo minus hac lege fiat, impedit. Si annuli, qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta æquatores; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro Globi. Quod volui secundo demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolute & uniformiter fluidam, & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem Fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportionem manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam quam ad Polos; debet causa aliqua adesse qua particulae singulae in circulis suis retineantur; ne materia quæ ad Eclipticam est, recedat semper a centro & per exteriora Vorticis migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro globi, & velocitates absolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente simili & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actio-

DE MOTU
CORPORUM

ne perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui plane invariata; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiae absorbetur. Materia inter sphaericas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem a materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat, quam imprimat in materiam Vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motus raperetur fluidum in Vorticem: & primo revolveretur hic Vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressae, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permetterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. assignatam) & Vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquaque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde Vortices non desinentur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones Vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in Corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem

positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet & in Vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum simile claudatur in vase spherico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in Vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quam sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro Vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum inclusum & globus servant hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si Systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quam sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in Corollariis 8. 9. & 10. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde vero si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus.

DE MOTU motibus revolvebantur, permittatur Systema totum Legibus Me-
CORPORUM chanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque
motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt,
quam eorum tempora periodica æquentur inter se, & Systema to-
tum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materia quoad densitatem & fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes & æquales, ad æquales semper a se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitatem partium vel lentorem aliave aliqua conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est magis cohærebit & segnior erit, adeoque motum tardius recipiet, & longius propagabit quam pro ratione superius assignata. Si figura vasis non sit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum a centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius a centro, sed isto recessu tardescent, & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur; & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habent in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio Vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem siqua ratione Phænomena cœlestia per
Vorti-

Vortices explicari possint. Nam Phænomenon est, quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquuplicata distantiarum a centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utrisque quam accuratissime, quatenus observationes Astronomicæ hæcenus prodidere. Ideoque si Planetæ illi a Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debent etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum a centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquuplicatam reduci, nisi vel materia Vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistantiâ, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ (nisi graves sint in centrum) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi Demonstrationum gratia Hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo concesso, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si Vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquuplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaque Philosophi quo pacto Phænomenon illud rationis sesquuplicatæ per Vortices explicari possit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsius partibus (quoad velocitatem & cursus determinationem) moventur.

Nam si Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: &

contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo Vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum sit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere a centro Vorticis quam prius; adeoque Vorticis vim illam, qua prius in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro & revolvens describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi a centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relative quiescit in fluido cui innatat.

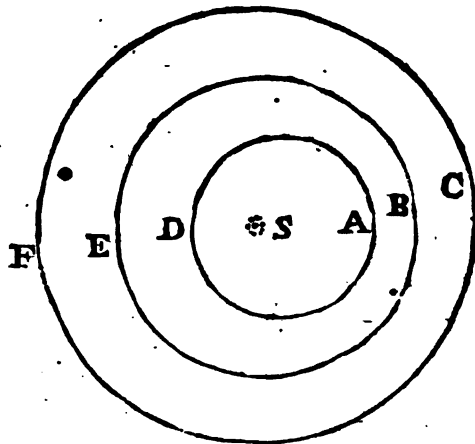
Corol. 2. Et si Vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro Vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet Planetas a Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ secundum Hypothesin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipsis umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD, BE, CF*, Orbes tres circa Solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint *A, B* & Perihelia *D, E*. Ergo corpus quod revolvitur in Orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, secundum leges Astronomicas; cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velocius

velocius moveri debeat quam in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter

se. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbem Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio Signi Piscium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbem illos in principio Piscium debet esse velocior quam in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum



velocitate transire debet. Igitur si Terra in hac Materia cœlesti relative quiescens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quam minorum primorum septuaginta, & in principio Piscium minor quam minorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quam in Principio Piscium. Itaque Hypothesis Vorticum cum Phænomenis Astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo vero motus isti in spatiis liberis absque Vorticibus peraguntur intelligi potest ex Libro primo, & in Mundi Systemate plenius docebitur.

D E

M U N D I S Y S T E M A T E L I B E R T E R T I U S .

IN Libris præcedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maxime spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholiis quibusdam Philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maxime fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus Principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent quibus a multis retro annis insueverunt; & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in Propositiones, more Mathematico, ut ab iis solis legantur qui Principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicæ doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit si quis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulo legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

R E G U L Æ

R E G U L Æ P H I L O S O P H A N D I.

R E G U L A I.

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & vere sint & earum Phænomenis explicandis sufficiant.

Dicunt utique Philosophi : Natura nihil agit frustra , & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

R E G U L A II.

Ideoque Effectuum naturalium ejusdem generis eadem sunt Cause.

Uti respirationis in Homine & in Bestia; descensus lapidum in Europa & in America; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis Lucis in Terra & in Planetis.

R E G U L A III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta institui licet, pro qualitatibus corporum universorum habende sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt; ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter, quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem somnia temere confingenda non sunt, nec a Naturæ analogia recedendum est, cum

DE MUNDI
SYSTEMATE

ea simplex esse soleat. & sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur, Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse non ratione sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universonum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus quibusdam (quas vires inertiae vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiae totius, oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiae partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras esse & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiae præditas. Et hoc est fundamentum Philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas & sibi mutuo contiguas ab invicem separari posse, ex Phænomenis novimus, & partes indivisas in partes minores ratione distingui posse ex Mathematica certum est. Utrum vero partes illæ distinctæ & nondum divisæ per vires Naturæ dividi & ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum & solidum, divisionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quod non solum partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu Terræ gravia esse in Terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, & Lunam gravem esse in Terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare nostrum grave esse in Lunam, & Planetas omnes graves esse in se mutuo, & Cometarum similem esse gravitatem, per experimenta & observationes Astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc Regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de gravitate universali, quam de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus Cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus.

PHÆNO-

P H Æ N O M E N A.

LIBER
TERTIUS.

P H Æ N O M E N O N I.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquuplicata distantiarum ab ipsius centro.

Constat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in sesquuplicata ratione semidiametrorum Orbium consentiunt Astronomi; & idem ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum Jovialium tempora periodica.

1^d. 18^h. 27'. 34". 3^d. 13^h. 13'. 42". 7^d. 3^h. 42'. 36". 16^d. 16^h. 32'. 9".

Distantiæ Satellitum a centro Jovis.

| <i>Ex observationibus</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | } Semidiam. Jovis |
|----------------------------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------------|
| Borelli | $5\frac{2}{3}$ | $8\frac{2}{3}$ | 14 | $24\frac{2}{3}$ | |
| Townlei per Microm. | 5,52 | 8,78 | 13,47 | 24,72 | |
| Cassini per Telescop. | 5 | 8 | 13 | 23 | |
| Cassini per Eclips. Satel. | $5\frac{2}{3}$ | 9 | $14\frac{2}{3}$ | $25\frac{1}{3}$ | |
| <i>Ex temporibus periodicis.</i> | 5,667 | 9,017 | 14,384 | 25,299 | |

P H Æ N O M E N O N II.

Planetas Circumsaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica esse in ratione sesquuplicata distantiarum ab ipsius centro.

Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum a centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satelli-

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

1^d. 21^h. 19'. 2^d. 17^h. 41'. 4^d. 13^h. 47'. 15^d. 22^h. 41'. 79^d. 22^h. 4.

Distantiæ Satellitum a centro Saturni in semidiametris Annuli.

| | | | | | |
|---------------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|-------|--------|
| <i>Ex observationibus</i> | 1 $\frac{12}{20}$. | 2 $\frac{1}{4}$. | 3 $\frac{1}{2}$. | 8 | 24. |
| <i>Ex temporibus periodicis</i> | 1,95. | 2,5. | 3,52, | 8,09. | 23,71. |

P H Æ N O M E N O N III.

Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phaſibus lunaribus demonstratur. Plena facie lucentes ultra Solem ſiti ſunt, dimidiata e regione Solis, falcata cis Solem; per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibboſa in quadraturis, certum eſt quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonstratur.

P H Æ N O M E N O N IV. I

Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica eſſe in ratione ſeſquuplicata mediocrium diſtantiarum à Sole.

Hæc a *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eademque orbium dimenſiones, ſive Sol circa Terram, ſive Terra circa Solem revolvatur. Ac de menſura quidem temporum periodicorum convenit inter Aſtronomos univerſos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Balliadius* omnium diligentiffime ex Obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter a diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula ſequenti videre licet.

Planetarum ac Telluris distantia mediocres à Sole.

| | ☿ | ♃ | ♁ | ♄ | ♅ | ♃ |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
| Secundum Keplerum | 951000. | 519650. | 152350. | 100000. | 72400. | 38806. |
| Secundum Bullialdum | 954198. | 522520. | 152350. | 100000. | 72398. | 38585. |
| Secundum tempora periodica | 953806. | 520116. | 152399. | 100000. | 72333. | 38710. |

De distantis Mercurii & Veneris a Sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De distantis etiam superiorum Planetarum à Sole tollitur omnis disputatio per Eclipses Satellitum Jovis. Etenim per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter se collatis determinatur distantia Jovis.

P H Æ N O M E N O N V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu Terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprimè demonstratur per Eclipses Satellitum, quibus Eclipsibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudes & distantias à Sole determinari diximus.

P H Æ N O M E N O N VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce Phænomenis negligo.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus Planeta Circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in Orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, & esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propositionis per Phænomenon primum, & Propositionem secundam vel tertiam Libri primi: & pars posterior per Phænomenon primum, & Corollarium sextum Propositionis quartæ ejusdem Libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus Planeta primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior Propositionis per Phænomenon quintum, & Propositionem secundam Libri primi: & pars posterior per Phænomenon quartum, & Propositionem quartam ejusdem Libri. Accuratissime autem demonstratur hæc pars Propositionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. 1.) motum Apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

LIBER
TERTIUS

Vim qua Luna retinetur in Orbe suo respicere Terram, & esse reciproce ut quadratum distantiae locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per Phænomenon sextum, & Propositionem secundam vel tertiam Libri primi: & pars posterior per motum tardissimum Lunaris Apogæi. Nam motus illè, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod si distantia Lunæ a centro Terræ sit ad semidiametrum Terræ ut D ad 1 , vis a qua motus talis oriatur sit reciproce ut D^2 , id est, reciproce ut ea ipsius D dignitas cuius index est 2 , hoc est, in ratione distantiae paulo majore quam duplicata inverse, sed quæ partibus $59\frac{2}{3}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione Solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Actio Solis quatenus Lunam distrahit a Terra, est ut distantia Lunæ a Terra quamproxime, ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) est ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad $357,45$ circiter, seu 1 ad $178\frac{2}{3}$. Et neglecta Solis vi tantilla, vis reliqua quæ Luna retinetur in Orbe erit reciproce ut D^2 . Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propositione sequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua Luna retinetur in Orbe, augeatur primo in ratione $177\frac{2}{3}$ ad $178\frac{2}{3}$, deinde etiam in ratione duplicata semidiametri Terræ ad mediocrem distantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad superficiem Terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem Terræ, perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.



Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, & in Orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris a Terra in Syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum plerosque Astronomorum 59 , secundum *Vendelmum* 60 , secundum *Copernicum* $60\frac{1}{2}$, & secundum *Ty-*

De MONDI-SYSTEMATA. *chbonem* 56½. Ast *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam Fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ scrupulistoridem, hoc est, quasi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi 60½ semidiametrorum terrestrium, fere ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum; & Lunarem periodum respectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti a *Gallis* mensurantibus definitum est: Et si Luna motu omni privati fingatur ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe suo retinetur, descendat in Terram, hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses 15½. Colligitur hoc ex calculo vel per Propositionem xxxvi. Libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Nam arcus illius quem Luna tempore minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium 15½ circiter. Unde cum vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicata distantie ratione inversa, adeoque ad superficiem Terræ major sit partibus 60 × 60 quam ad Lunam; corpus vi illa in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses 60 × 60 × 15½, & spatio minuti unius secundi pedes 15½. Atqui corpora in regionibus nostris vi gravitatis cadendo, describunt tempore minuti unius secundi pedes Parisienses 15½, uti *Hugenius* factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonstravit: & propterea (per Reg. I. & II.) vis qua Luna in orbe suo retinetur, illa ipsa est quam nos Gravitatem dicere solemus. Nam si Gravitatis ab ea diversa est, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo, duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describent pedes Parisienses 30½: omnino contra Experientiam.

Calculus hic fundatur in hypothese quod Terra quiescit. Nam si Terra & Luna circum Solem moveantur, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit 60½ semidiametrorum terrestrium; uti computationem (per Prop. IX. Lib. I.) incunt patebit.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

LIBER
TERTIUS.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumsaturnios in Saturnum, & Circumsolares in Solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in Orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumsaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumsolarium circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Reg. 11. à causis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Saturno & Sole decrescant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decrescit in recessu à Terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas universos. Nam Venerem, Mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis (per motus Legem tertiam) mutua sit, Jupiter in Satellites suos omnes, Saturnus in suos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque respicit, esse reciproce ut quadratum distantix locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt Planetæ omnes in se mutuo per Corol. 1. & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibilibiter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares, Sol & Luna perturbant Mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in Planetas singulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantis à centro Planetae, proportionalia esse quantitati materiae in singulis.

Descensus gravium omnium in Terram (dempta saltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua resistentia oritur) æqualibus

Z. 2. 3.

tempo-

DE MONDI SYSTEMATE. temporibus fieri, jamdudum observarunt alii; & accuratissime quidem norare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arena, Sale communi, Ligno, Aqua, Triticis. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus suspendebam (quam potui exacte) in alterius centro oscillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, constituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & aeris resistentiam omnino paria: Et paribus oscillationibus, juxta positæ, ibant una & redibant ditissime. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1. & 6. Prop. xxiv. Lib II.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis actio in totum Aurum ad ejusdem actionem in totum Lignum; hoc est, ut pondus ad pondus. Et sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quam pars millesima materiæ totius, his experimentis manifesto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in Planetas eandem esse atque in Terram, non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terrestria ad usque Orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant; & per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia spatia cum Luna, adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquuplicata distantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata distantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus a Jove distantis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, describerent æqualia spatia; perinde ut fit in gravibus, in hac Terra nostra. Et eodem argumento Planetæ circumsolares ab æqualibus à Sole distantis demissi, descensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. Lxv. Lib I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ suæ, quam cæteri: motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. Lxv. Lib I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole distantis) Satelles aliquis gravior esset in Solem pro quantitate

titate materiæ suæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quacunque data, puta d ad e : distantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis, major semper foret quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione subduplicata quam proxime; uti calculis quibusdam initis inveni. Et si Satelles minus gravis esset in Solem in ratione illa d ad e , distantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quam distantia centri Jovis à Sole in ratione illa subduplicata. Igitur si in æqualibus à Sole distantis, gravitas acceleratrix Satellitis cujusvis in Solem major esset vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum millesima gravitatis totius; foret distantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam distantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantis totius, id est, parte quinta distantis Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis eccentricitas foret valde sensibilis. Sed Orbes Satellitum sunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole distantis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accurate proportionalia. Aliqua autem sunt per Corol. 1. & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium singularum Planetæ cujusque in alium quemcunque, sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maxime abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora Terrestria, quæ apud nos sunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra Experientiam.

Corol.

DE MONDI
SYSTEMATE.

Corol. 2. Corpora univërfa quæ circa Terram funt, gravia funt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ diftant, funt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc eft qualitas omnium in quibus experimenta inftituere licet, & propterea per Reg. III. de univèrſis affirmanda eft. Si Æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ fuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in forma materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis quæ, pro quantitate materiæ, quam maxime gravitant, & viciffim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem fuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in Corollario ſuperiore.

Corol. 3. Spatia omnia non funt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiffimi, & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minime deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque abſque poris rareſieri poſſint, Vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, quarum vires inertix funt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diverſi eſt generis à vi magnetica. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteſt & remitti, eſtque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in reſſu à Magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicata; ſed fere triplicata, quantum ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

P R O-

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitatis materie in singulis.

Planetas omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciproce ut quadratum distantie locorum à centro Planetæ. Et inde consequens est, (per Prop. LXXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materie in iisdem.

Porro cum Planetæ cujuscvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quævis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligitur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debet. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo, cum tamen ejusmodi gravitas nequiquam sentiatur: Respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æqualis est reciproce ut quadratum distantie locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

PROPOSITIO. VIII. THEOREMA. VIII.

*Si Globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undi-
que, in regionibus quæ a centrīs equaliter distant, homogē-
nea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut
quadratum distantie inter centra.*

Postquam invenissem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciproce proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus composita, an vero quam proxime. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantis satis accurate obtineret, prope superficiem Planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per Prop. LXXV. & LXXVI. Libri primi & ipsarum Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverse, & pondera ad superficies Planetarum, aliasve quasvis à centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inversa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum 16 $\frac{1}{2}$, Satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum 16 $\frac{1}{2}$, Satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum 22 $\frac{1}{2}$, & Lunæ circum Terram dierum 27, hor. 7. min. 43, collatis cum distantia mediocri Veneris a Sole & cum elongationibus maximis heliocentricis Satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8 $^{\circ}$. 21 $''$, Satellitis Hugeniani a centro Saturni 3'. 20'', & Lunæ a Terra 10', computum incundo inveni quod corpus æqualium & a Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$ & $\frac{1}{4771}$ respective. Est enim parallaxis Solis ex observationibus novissimis quasi 10'', & *Hab-*
leius noster per emersiones Jovis & Satellitum e parte obscura
Lunæ,

Lunæ, determinavit quod elongatio maxima heliocentrica Satellitis extimi Jovialis a centro Jovis in mediocri Jovis a Sole distantia sit, 8'. 21½", & diameter Jovis 41". Ex duratione Eclipsion Satellitum in umbram Jovis incidentium prodit hæc diameter quasi 40", atque adeo semidiameter 20". Mensuravit autem *Hugentius* elongationem maximam heliocentricam Satellitis a se detecti 3'. 40" a centro Saturni, & hujus elongationis pars quarta, nempe 50", est diameter annuli Saturni e Sole visi, & diameter Saturni est ad diametrum annuli ut 4 ad 9, ideoque semidiameter Saturni e Sole visi est 11". Subducatur lux erratica quæ haud minor esse solet quam 2". vel 3": Et manebit semidiameter Saturni quasi 9". Ex hæc autem & Solis semidiametro mediocri 16. 6" computum incundo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni, ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1077, 889 & 104. Unde, cum pondera æqualium corporum a centrīs Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram, ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective, & auctis vel diminutis distantis pondera diminantur vel augeantur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantis 10000, 1077, 889, & 104 ab eorum centrīs, atque adeo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 835, 525, & 410 respective. Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicemus in sequentibus.

Lunæ
TERTIO.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantis ab eorum centrīs, id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terra sunt ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective. Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quam 10", debeat quantitas materiæ in Terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in Sphæras homogeneas sunt in superficiebus Sphærarum ut Sphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera illa applicata ad Sphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 1077, 889, & 104, & pondera in eosdem ut 10000, 835, 525, & 410, & propterea densitates sunt ut 100, 78, 59, & 396. Densitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & prop.

De Planetis
Systema 73. terea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quam Jupiter, & Jupiter quam Saturnus, & Terra quadruplo densior quam Sol. Nam per ingentem suum calorem Sol rarefcit. Luna vero densior est quam Terra, ut in sequentibus patebit.

Corol. 4. Densiores igitur sunt Planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt Planetæ, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jovè. In diversis utique distantiiis a Sole collocandierant Planetæ ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigeret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quam apud nos: & Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium vero non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hæc nostra, cum materia omniis densior ad operationes Naturales abundas majorem calorem requirat.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quam proxime.

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accurate: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus Planetarum in Cælis diutissime conservari posse.

In Scholio Propositionis XI. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, libere movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentiâ Aeris amitteret motus sui partem $\frac{1}{4386}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcunque magnis & velocibus. Jam vero Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus licet totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quam aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent.

rom. *Exque de Causa Globus terreus aquis, undique coequetus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione opposita. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus.* Eodem argumento maculæ Solares leviores sunt quam materia lucida Solaris cui supernatant. Et in formatione qualicumque Planetarum, materia omnis gravior, quò tempore massa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferior in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quam si tota ex aqua constaret; præsertim cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quam Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Jupiter, paulo densior sit quam aqua, hic spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ partibus 13² levior est quam argentum vivum, minus resistat in eadem ratione, & aer, qui partibus 850 levior est quam aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in cælos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit.

LIBER
TERTIUS.

HYPOTHESIS P.

Centrum Systematis Mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro Systematis quiescere contendunt. Videamus quid inde sequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper

DE MONDI SYSTEMATE.
 progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypothesin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum (per Corol. 2. Prop. VIII) materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1033 ad 1, & distantia Jovis a Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo majore, incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo supra superficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 2411 ad 1, & distantia Saturni a Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo minore, incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem Solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo si Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro a centro Solis distaret. Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, Sol pro vario Planetarum situ in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuo, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motus perpetuo agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maxime gravitant (ut vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum Solis quam minime discedit; & a quo idem adhuc minus discederet, si modo Sol densior esset & major, ut minus moveretur.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetae moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro Solis, si Sol quiesceret & Planetæ reliqui non agerent in se mutuo, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areas describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. I. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in se mutuo perexiguae sunt (ut possint contemni) & motus Planetarum in Ellipsis circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quam si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantis) ut 1 ad 1033, adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni a Jove est ad distantiam Saturni a Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1033 seu 1 ad 204 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in singulis Planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem Astronomi hæreant. Pro vario situ Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, Aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere potest constituendo umbilicum inferiorem Orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuarum. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2418}{25}$ seu 124986, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis

DE MONDI
SYSTEMATE

ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus Astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra paulo altior esset sub æquatore quam ad polos, Mariâ ad polos subfiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis Planetae ad diametros eidem perpendiculares.

Picartus mensurando arcum gradus unius & 22'. 45" inter *Ambianum* & *Malvoisiam*, invenit arcum gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. Unde ambitus Terræ est pedum Parisiensium 123249600, ut supra. Sed cum error quadragesimæ partis digiti, tam in fabrica instrumentorum quam in applicatione eorum ad observationes capiendas, sit insensibilis, & in Sectore decempedali quo *Galli* observarunt Latitudines locorum respondeat minutis quatuor secundis, & in singulis observationibus incidere possit tam ad centrum Sectoris quam ad ejus circumferentiam, & errores in minoribus arcibus sint majoris momenti: * ideo *Cassinus* jussu Regis mensuram Terræ per majora locorum intervalla aggressus est, & subinde per distantiam inter Observatorium Regium *Parisense* & villam *Colioure* in *Roussillon* & Latitudinum differentiam 6^o. 18', supponendo quod figura Terræ sit Sphærica, invenit gradum unum esse hexapedarum 57292, prope ut *Norwoodus* noster antea invenerat. Hic enim circa annum 1634, mensurando distantiam pedum Londinensium 905741 inter *Londinum* & *Eboracum*, & observando differentiam Latitudinum 2^o. 28', collegit mensuram gradus unius esse pedum Londinensium 367196, id est, hexapedarum Parisiensium 57300. Ob magnitudinem intervalli a *Cassino* mensurati, pro mensura gradus unius in medio intervalli illius, id est, inter Latitudines 45^o. & 46^o. usurpabo hexapedas 57292. Unde, si Terra sit Sphærica, semidiameter ejus erit pedum Parisiensium 19695539.

* Vide Historiam Academiæ Regiæ Scientiarum anno 1760.

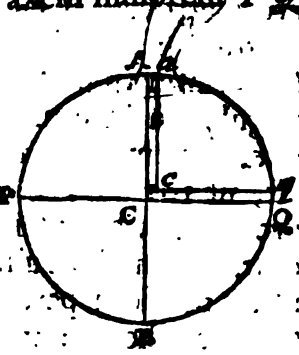
LIBER
TERTIUS.

Penduli in Latitudine Lutetie Parisiorum ad minuta secunda oscillantis longitudo est pedum trium Parisiensium & linearum 8 $\frac{1}{2}$. Et longitudo quod grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus, in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit *Hugenius*) ideoque est pedum Parisiensium 15, dig. 1, lin. 2 $\frac{1}{11}$, seu linearum 2174 $\frac{1}{11}$.

Corpus in circulo, ad distantiam pedum 19695539 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56'. 4" uniformiter revolvens, tempore minuti unius secundi describit arcum pedum 1436,223, cujus sinus versus est pedum 0,05236558, seu linearum 7,54064. Ideoque vis qua gravia descendunt in Latitudine Lutetie, est ad vim centrifugam corporum in Æquatore, a Terræ motu diurno oriundam, ut 2174 $\frac{1}{11}$ ad 7,54064.

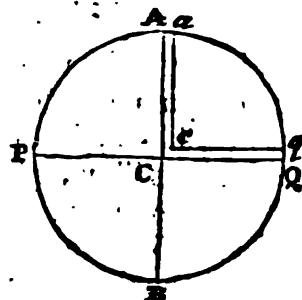
Vis centrifuga corporum in Æquatore, est ad vim centrifugam qua corpora directe tendunt a Terra in Latitudine Lutetie, graduum 48. 50', in duplicata ratione Radii ad sinum complementi Latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia descendunt in Latitudine Lutetie, & corpus in Latitudine Lutetie vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describeret lineas 2177,13, seu pedes Parisienses 15, dig. 1, & lin. 5,32. Et vis tota gravitatis in Latitudine illa, erit ad vim centrifugam corporum in Æquatore Terræ, ut 2177,32 ad 7,54064, seu 289 ad 1.

Unde si *APBQ* figuram Terræ designet jam non amplius Sphæricam sed devaluatione Ellipseos circum axem minorem *PQ* genitam, sitque *ACQ* canalis aque plena, a polo *Q* ad centrum *C*, & inde ad Æquatorem *AB* pergens: dolebit pondus aque in canali crure *AC*, esse ad pondus aque in crure altero *QC*, ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu octa parte unum e pondera pendulus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Rursum (ex Propositionis xxi Corollario secundo, Lib. I.) computationem incedo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motusque omni privaretur, & esset ejus axis *PQ*



De MUNDI
SYSTEMATE

ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in Sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126. Est autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram: propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB , PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in A , in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad 125½, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101. Coniungantur jam hæc tres rationes, 126 ad 125, 126 ad 125½, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in Terram, ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.



Jam cum (per Corol. 3. Prop. xcr. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum a centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars $\frac{1}{289}$ est tantum pars $\frac{1}{3}$.
Et

Et propterea dico, secundum Regulam auream, quod si vis centrifuga $\frac{4}{507}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* superet altitudinem aquæ in crure *QcCq* parte centesima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut excessus altitudinis in crure *ACca* sit altitudinis in crure altero *QcCq* pars tantum $\frac{1}{129}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ semidiameter mediocris, juxta mensuram *Cassini*, sit pedum Parisiensium 19695539, seu miliarium 3939 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000) Terra altior erit ad Æquatorem quam ad Polos excessu pedum 85820, seu miliarium $17\frac{1}{2}$.

LIBR.
TERTIUS.

Si Planeta major sit vel minor quam Terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quacunq; acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et si densitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56', Jupiter autem horis 9. 56', sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & densitates ut 5 ad 1: differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{129}$ ad 1, seu 1 ad 8 quamproxime. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 9 ad 8 quamproxime, & propterea diameter inter polos est 35½". Hæc ita se habent ex hypothesi quod uniformis sit Planetarum materia. Nam si materia densior sit ad centrum quam ad circumferentiam; diameter quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Jovis vero diametrum quæ polis ejus interjacet minorem esse diametro altera *Cassini* dudum observavit, & Terræ diametrum inter polos minorem esse diametro altera patebit per ea quæ dicentur in Propositione sequente.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Quæritur & inter se comparare Pondera corporum in Terra hinc & inde regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ ACQga æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similitur in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reciproce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalibus cruribus similiter sitarum corporum. Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut distantia corporum a centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantia eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantia locorum a centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab Equatore ad Polos, sit quam proxime ut sinus versus Latitudinis duplicatæ, vel, quod perinde est, ut quadratum sinus recti Latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum Latitudinis in Meridiano. Ideoque cum Latitudo Lutetie Parisiorum sit 48[°] 50', ea locorum sub Equatore 00[°] 00', & ea locorum ad Polos 90[°] & duplorum sinus versi sint 11334, 0000 & 20000, existente Radio 10000, & gravitas ad Polum sit ad gravitatem sub Equatore ut 230 ad 229, & excessus gravitatis ad Polum ad gravitatem sub Equatore ut 1 ad 229; erit excessus gravitatis in Latitudine Lutetie ad gravitatem sub Equatore, ut $1 \times \frac{11334}{10000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & in Latitudine Lutetie Parisiorum longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & linearum 87; longitudo penduli sub Equatore superabitur a longitudo synchroni penduli Parisiensis, excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo confit Tabula sequens.

Latitudo

| <i>Latitudo Loci</i> | <i>Longitudo Penduli</i> | | <i>Mensura Gradus unius in Meridiano</i> |
|--------------------------|------------------------------|-----------|--|
| | Gr. | Ped. Lin. | Hexaped. |
| 0 | 3 . | 7,468 | 56909 |
| 5 | 3 . | 7,482 | 56914 |
| 10 | 3 . | 7,526 | 56931 |
| 15 | 3 . | 7,596 | 56959 |
| 20 | 3 . | 7,692 | 56996 |
| 25 | 3 . | 7,811 | 57042 |
| 30 | 3 . | 7,948 | 57096 |
| 35 | 3 . | 8,099 | 57155 |
| 40 | 3 . | 8,261 | 57218 |
| 1 | 3 . | 8,294 | 57231 |
| 2 | 3 . | 8,327 | 57244 |
| 3 | 3 . | 8,361 | 57257 |
| 4 | 3 . | 8,394 | 57270 |
| 45 | 3 . | 8,428 | 57283 |
| 6 | 3 . | 8,461 | 57296 |
| 7 | 3 . | 8,494 | 57309 |
| 8 | 3 . | 8,528 | 57322 |
| 9 | 3 . | 8,561 | 57335 |
| 50 | 3 . | 8,594 | 57348 |
| 55 | 3 . | 8,756 | 57411 |
| 60 | 3 . | 8,907 | 57470 |
| 65 | 3 . | 9,044 | 57524 |
| 70 | 3 . | 9,162 | 57570 |
| 75 | 3 . | 9,258 | 57607 |
| 80 | 3 . | 9,329 | 57635 |
| 85 | 3 . | 9,372 | 57652 |
| 90 | 3 . | 9,387 | 57657 |

Constat autem per hanc Tabulam, quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus Geographicis figura Terræ pro Sphærica haberi possit, quodque inæqualitas diametrorum Terræ facilius & certius per experimenta pendulorum deprehendi possit vel etiam per Eclipses Lunæ, quam per arcus Geographicè mensuratos in Meridiano.

Hæc

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MUNDI
SYSTEMATIBUS

Hæc ita se habent ex hypothefi quod Terra ex uniformi materia conftat. Nam fi materia ad centrum paulo denfior fit quam ad fuperficiem, differentiæ pendulorum & graduum Meridiani paulo majores erunt quam pro Tabula præcedente, propterea quod fi materia ad centrum redundans qua denfitas ibi major redditur, subducatur & feorfim fpectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter denfam, erit reciproce ut diftantia ponderis a centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum diftantiæ a materia illa quamproxime. Gravitatis igitur fub æquatore minor eft in materiam illam redundantem quam pro computo fuperiore: & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius afcendet, & excessus longitudinum Pendulorum & graduum ad polos paulo majores erunt quam in præcedentibus definitum eft.

Jam vero Aftronomi aliqui in longinquas regiones ad obfervationes Aftronomicas faciendas miffi, invenerunt quod horologia ofcillatoria tardius moverentur prope Æquatorem quam in regionibus noftris. Et primo quidem *D. Richer* hoc obfervavit anno 1672 in infula *Cayennæ*. Nam dum obfervaret transitum Fixarum per meridianum mense *Augufto*, reperit horologium fuum tardius moveri quam pro medio motu Solis, existente differentia 2'. 28" fingulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum fimplex ad minuta fingula fecunda per horologium optimum menfurata ofcillaret, notavit longitudinem Penduli fimplicis, & hoc fecit fæpius fingulis feptimanis per menses decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli *Parifienfis* (quæ erat trium pedum *Parifienfum*, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorẽ effe, existente differentia lineæ unius cum quadrante. At ex tarditate horologii ofcillatorii in *Cayenna*, differentia Pendulorum colligitur effe lineæ unius cum femiffe.

Postea *Halleius* nofter circa annum 1677 ad infulam *S^{ta} Helenæ* navigans, reperit horologium fuum ofcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, fed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit plusquam octava parte digiti, feu linea una cum femiffe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non fufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpofuit.

Deinde anno 1682 *D. Varin* & *D. Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli fingulis minutis fecundis ofcillantis in Obfervatorio

vatorio Regio *Parisiensi* esse ped. 3. lin. 8 $\frac{1}{2}$. Et in insula *Gorea* eadem methodo longitudinem Penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$, existente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$.

Posthac *D. Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum Solis medium in Observatorio Regio *Parisiensi* sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, existente differentia 2' 13" in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardius ire quam *Parisiis*, existente differentia 4'. 12" in horis 24. Et affirmat Pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis 2 $\frac{1}{2}$ & *Paraiba* lineis 3 $\frac{1}{2}$ quam *Parisiis*. Rectius posuisset differentias esse 1 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{2}$. Nam hæ differentiæ differentis temporum 2'. 13", & 4'. 12" respondent. Crassioribus hujus Observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) *D. Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granada* longitudo Penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. 6 $\frac{3}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuulleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem Penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium *Parisiensium* & linearum tantum 5 $\frac{7}{12}$, id est tribus fere lineis breviorum quam *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante Observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans; invenit longitudinem Penduli isochroni esse pedum tantum trium *Parisiensium* & linearum 5 $\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraiba* est 6 $^{\circ}$. 38' ad austrum, & ea *Porto-beli* 9 $^{\circ}$. 33' ad boream, & Latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupe*, *Martinica*, *Granada*, *S^u. Christophori*, *S^u. Dominici* sunt respective 4 $^{\circ}$. 55', 14 $^{\circ}$. 40', 14 $^{\circ}$. 00', 14 $^{\circ}$. 44', 12 $^{\circ}$. 6', 17 $^{\circ}$. 19', & 19 $^{\circ}$. 48' ad boream. Et excessus longitudinis Penduli *Parisiensis* supra longitudes Pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas, sunt paulo majores quam pro Tabula longitudinum Penduli superius computata. Et propterea Terra aliquanto altior est sub *Æquatore* quam pro superiore calculo;

DE MENSURA SYSTEMATE: cilio, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in Zona torrida longitudinem Pendulorum aliquantum auxerint.

Observavit utique *D. Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde *D. de la Hire* observavit quod virga ferrea quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi Soli æstivo exponebatur evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quam in posteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad Solem æstivum valde incalescunt. At virga penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori Solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æstivo quam hyberno, sed excessu quartam partem lineæ unius vix superante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diversis regionibus isochrona sunt, diverso calori attribui non potest. Sed neque erroribus Astronomorum è *Gallia* missorum tribuenda est hæc differentia. Nam quamvis eorum observationes non perfecte congruant inter se, tamen errores sunt adeo parvi ut contemni possint. Et in hoc concordant omnes, quod isochrona pendula sunt breviora sub Equatore quam in Observatorio Regio *Parisiensi*, existente differentia duarum circiter linearum seu sextæ partis digiti. Per observationes *D. Richer* in *Cayenna* factas, differentia fuit lineæ unius cum semisse. Error semissis lineæ facile committitur. Et *D. des Hayes* postea per observationes suas in eadem insula factas errorem correxit, inventa differentia linearum $2\frac{1}{8}$. Sed & per observationes in insulis *Gorea*, *Guadaloupa*, *Martinica*, *Granada*, *S. Christophori*, & *S. Dominici* factas & ad Æquatorem reductas, differentia illa prodiit haud minor quam $1\frac{1}{2}$ lineæ, haud major quam $2\frac{1}{2}$ linearum. Et inter hæc limites quantitas mediocris est $2\frac{9}{10}$ linearum. Propter calores locorum in Zona torrida negligamus $\frac{2}{10}$ partes lineæ, & manebit differentia duarum linearum.

Quare cum differentia illa per Tabulam præcedentem, ex hypothese quod Terra ex materia uniformiter densa constet, sit tantum $1\frac{1}{1000}$ lineæ: excessus altitudinis Terræ ad æquatorem supra altitudinem ejus ad polos, qui erat miliarium $17\frac{1}{2}$, jam auctus in ratione

ratione differentiarum, fiet milliarium $31\frac{7}{12}$. Nam tarditas Penduli sub *Æquatore* defectum gravitatis arguit; & quo levior est materia eo major esse debet altitudo ejus, ut pondere suo materiam sub *Polis* in *æquilibrio* sustineat.

LIBER •
TERTIUS.

Hinc figura umbræ *Terræ* per *Eclipses* *Lunæ* determinanda, non erit omnino circularis, sed diameter ejus ab oriente in occidentem ducta major erit quam diameter ejus ab austro in boream ducta, excessu $55''$ circiter. Et *parallaxis* maxima *Lunæ* in *Longitudinem* paulo major erit quam ejus *parallaxis* maxima in *Latitudinem*. Ac *Terræ* *semidiameter* maxima erit pedum *Parisiensium* 19767630, minima pedum 19609820 & *mediocris* pedum 19688725 quamproxime.

Cum gradus unus mensurante *Picarto* sit hexapedarum 57060, mensurante vero *Cassino* sit hexapedarum 57292: suspicantur aliqui gradum unumquemque, pergendo per *Gallias* austrum versus majorem esse gradu præcedente hexapedis plus minus 72, seu parte octingentesima gradus unius; existente *Terra* *Sphæroide* oblonga cujus partes ad polos sunt altissimæ. Quoposito; corpora omnia ad *Polos* *Terræ* leviora forent quam ad *Æquatorem*, & altitudo *Terræ* ad polos superaret altitudinem ejus ad *æquatorem* milliariis fere 95, & pendula *isochrona* longiora forent ad *Æquatorem* quam in *Observatorio* *Regio Parisiensi* excessu semiffis digiti circiter; ut conferenti proportionibus hic positas cum proportionibus in *Tabula* præcedente positis, facile constabit. Sed & diameter umbræ *Terræ* quæ ab austro in boream ducitur, major foret quam diameter ejus quæ ab oriente in occidentem ducitur, excessu $2'. 46''$, seu parte duodecima diametri *Lunæ*. Quibus omnibus *Experientia* contrariatur. Certe *Cassinus*, definiendo gradum unum esse hexapedarum 57292, medium inter mensuras suas omnes, ex hypothesi de *æqualitate* graduum assumpsit. Et quamvis *Picartus* in *Gallia* limite boreali invenit gradum paulo minorem esse, tamen *Norwoodus* noster in *Regionibus* magis borealibus, mensurando majus intervallum, invenit gradum paulo majorem esse quam *Cassinus* invenerat. Et *Cassinus* ipse mensuram *Picarti*, ob parvitatem intervalli mensurati, non satis certam & exactam esse judicavit ubi mensuram gradus unius per intervallum longe majus definire aggressus est. *Differentiæ* vero inter mensuras *Cassini*, *Picarti*, & *Norwoodi* sunt prope insensibiles, & ab insensibilibus observationum erroribus facile oriri potuere, ut *Nutationem* axis *Terræ* præteream.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta Equinoctialia regredi, & axem Terra singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex altis Principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipsis, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbata motus multimode, usque adficiuntur inæqualitates, quæ in Luna notantur. Hæc utique (per Corol. 2, & 3. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram majoris distantia recta pro tempore majorem, Orbemque habet majoris circumferentiæ, accedit ad Terram, in Syzygiis prope in Quadrantibus, nullatenus impedit motus Eccentricitatis. Perihelionis enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Luna in Syzygiis vertitur, & minima ubi idem in Quadrantibus, & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propius, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quam in Quadrantibus. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi Luna inæqualiter. Et Apogæum quidem (per Corol. 7. Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadrantibus, & excessu progressus supra regressum annuum evenit in consequentia. Nodi autem (per Corol. 21. Prop. LXVI.) quædam in Syzygiis suis, & velocissime regrediuntur in Quadrantibus. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius Quadrantibus, per Corol. 10. Prop. LXVI.) quam in Syzygiis: & motus medius tardior in Perihelio Terræ (per Corol. 6.

Prop.

Prop. LXVI.) quam in ipsius Aphelio. Atque hæc sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ.

LIBER
TERTIUS.

Sunt etiam aliæ quædam nondum observatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nulla hæctenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter Eccentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per Corol. 1. & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico, ad Prosthaphæresin Lunæ referri solet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales Satellitum Jovis ☉ Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi Lunarum seu Satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis, est ad motum medium Nodorum Lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste 8⁵. 24'. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujusque in consequentia, est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum, (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis sic inventus in ratione 4 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ respectivæ, ut motus Nodorum & Augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum prio-

rum; ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus Nodorum temporibus quibus Satelles & Luna ad Solem revolvuntur, per idem Corollarium; adeoque in Satellite extimo non superat 5". 12".

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

*Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac
Lunæ oriri.*

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci, minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Ethiopicæ* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjunguntur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimat, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam

tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in Mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad *auspice* venient.

LIBER
TERTIUS.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantis a Terra. In minoribus enim distantis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensione & remissione, adeoque nullam motus reciprocaionem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in Syzygiis Solstitialibus quam in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solstitialibus majores ciebunt æstus quam in Quadraturis Æquinoctialibus; eo quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzygiis comitatur semper minimus in Quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam Solis a Terra, tempore hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium vernum quam sequantur, & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Designet $ApEP$ Tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; P, p polos; AE Æquatorem; F locum quemvis extra Æquatorem; Ff parallelum loci; Dd parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris; L locum quem Luna tribus ante horis occupabat; H locum Telluris ei perpendiculariter subjectum;

pore æstivo matutinos, ad *Phymathum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* vero altitudine quindecim digitorum: observantibus *Colepessio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proxime post Syzygias majores reddit, eosque proxime post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Phymathum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portibus, non sint primi a Syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti a Syzygiis.

Porro fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quam per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquille stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam, & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in porta regni *Tunquini* ad *Batsbam* sub latitudine Boreali

DE MONDI
SYSTEMATE

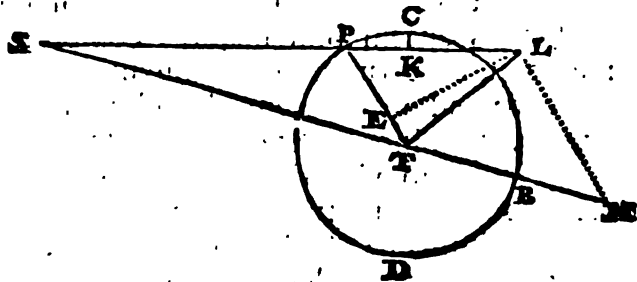
Borali 208^{ti}. 50'. *Halleius* ex Nautarum Observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per Æquatorem sequente stagnat, dein Luna ad Boream declinante incipit fluere & reflueri, non bis, ut in aliis portibus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrefcit, quibus antea creverat; & Luna declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinensi* inter Continentem & Insulam *Lucóniam*, alter a Mari *Indico* inter Continentem & Insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim a Mari *Indico*, & spatio horarum sex a Mari *Sinensi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia Marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Haftenus causas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Designet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *P A D B* orbem Lunæ. In *S P* capiatur *S K* æqualis *S T*; sitque *S L* ad *S K*



in duplicata ratione *S K* ad *S P*, & ipsi *P T* agatur parallela *L M*; & si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam *S T* vel *S K*, erit *S L* gravitas acceleratrix Lunæ in Solem.

Solem. Ea componitur ex partibus SM , LM , quarum LM & ipsius SM pars TM perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expositum est. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas TM & ML designare. Vis ML (in mediocri sua quantitate) est ad vim centripetam, qua Luna in Orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam PT revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17, Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est, in duplicata ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000. ad 178725, seu 1 ad 178 $\frac{29}{40}$. Invenimus autem in Propositione quarta quod, si Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit 60 $\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium Terræ quamproxime. Et vis qua Luna in Orbe circa Terram quiescentem, ad distantiam PT semidiametrorum terrestrium 60 $\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut 60 $\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 \times 60 quamproxime. Ideoque vis mediocris ML est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut 1 \times 60 $\frac{1}{2}$ ad 60 \times 60 \times 60 \times 178 $\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092, 6. Unde ex proportione linearum TM , ML , datur etiam vis TM : & hæc sunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q. E. I.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in Orbe circulari describit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus Lunarum ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic investigandam proponimus. Ut computatio facilius reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero Solis distantiam, ponamus etiam lineas SP , ST sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis LM reducetur semper ad

summa genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP , seu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quiescentem ad distantiam TP , tempore suo periodico $CADB$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in Orbe suo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. 1v. Lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in TP demissum sit ipsius EL pars tertia, & ipsius TP seu ML in Octantibus pars dimidia, vis EL in Octantibus; ubi maxima est, superabit vim ML in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem revolvi posset, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ seu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT seu TP . Exponatur vis maxima EL in Octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA , velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CA$ & triangulum TCG , sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP . Ideoque (per Prop. 1x. Lib. V. Elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analogæ est, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915 + 50, seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia A , ac differentia 11915 - 50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentum differentiam 100 ut Trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG (vel quod perinde est, ut quadratum Sinus PK ad quadratum Radii TP , id est, ut Pd ad TP) & summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P .

Hæc omnia ita se habent, ex Hypothesi quod Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris vere sit die-

DE MUNDIRUM 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa SYSTEMATE in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut 11023—50 ad 11023+50, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad 10973+ Pd , existente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 219,46 & sinus versi duplicatæ distantiae Lunæ a Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille versus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiae Lunæ a Terra conjunctim; & propterea distantia Lunæ a Terra est in ratione composita ex subduplicata ratione Areæ directe & subduplicata ratione motus horarii inverse. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a Terra. Tentent Astronomi quam probe hæc Regula cum Phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratius ex Phænomenis quam antehac definiri potest.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros Orbis in quo Luna, absque eccentricitate, moveri deberet.

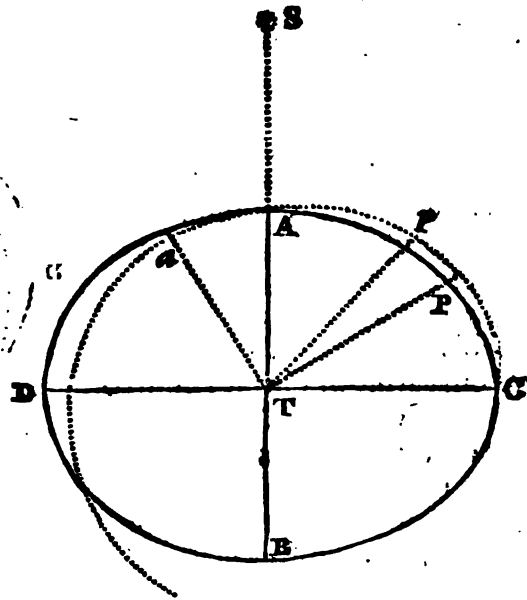
Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendicularum trahatur, describit, est ut attractio directe & quadratum velocitatis inverse. Curvaturas linearum pono esse inter

ter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem 2 PK (Vide *Figur. pag: 394.*) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris *KT*, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur *N*, sunt ut $\frac{178725}{ATq}$ & $\frac{2000}{CT \times N}$

$\frac{178725}{CTq} \times \frac{1000}{AT \times N}$ quam proxime; seu ut $178725 N \times CTq$

— $2000 ATq \times CT$ & $178725 N \times ATq + 1000 CTq \times AT$. Nam si gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris *ML*, quæ in Quadraturis est *PT* vel *TK*

& Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris *TM* in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris *ML* subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur a Terra, quamque jam ante nominavi 2 PK. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis *A* & *B* est ad ipsius velocitatem in Quadraturis *C* & *D*, ut *CT* ad *AT* & momentum aræ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem aræ in Quadraturis conjunctim; id est, ut 11073 *CT* ad 10973 *AT*. Sumatur hæc ratio bis inverse & ratio prior

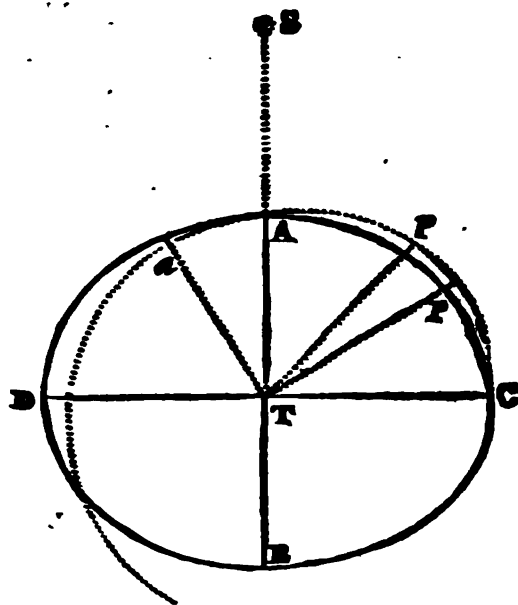


semel directe, & fiet curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis ut $120406729 \times 178725 ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000 ATq \times CT$ ad $122611329 \times 178725 ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000 CTq \times AT$, i.e. ut 2151969 *AT* × *CT* × *N* — 24081 *AT cub.* ad 2191371 *AT* × *CT* × *N* + 12262 *CT cub.*

Quoniam

DE MIBUS
SOLARIBUS

Quoniam Figura Orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin $DBCA$, in cujus centro T Terra collocetur, & cujus axis major DC Quadraturis, minor AB Syzygiis interjacet. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria cujus curvaturam consideramus, describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit Figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvens describit in hoc plano, hoc est Figura Cpa , cujus puncta p inveniuntur capiendò punctum quodvis P in Ellipsi, quod locum Lunæ repræsentet, & ducendo Tp æqualem TP , ea lege ut angulus PTp æqualis sit motui apparenti Solis a tempore Quadraturæ C confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus CTp sit ad angulum CTP ut tempus revolutionis Synodice Lunaræ ad tempus revolutionis Periodicæ seu $30^{\circ} 12' 44''$ ad $27^{\circ} 7' 43''$. Capiatur igitur angulus CTa in eadem ratione ad angulum rectum CTA , & sit longitudo Ta æqualis longitudini TA ; & erit a Apis ima & C Apis summa Orbis hujus Cpa . Rationes autem inveniendò inveniò quod differentia inter curvaturam Orbis Cpa in vertice a , & curvaturam Circuli centro T intervallo TA descripti, sit ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli CTP ad angulum CTp ; & quod curvatura Ellipseos in A sit ad curvaturam Circuli illius, in duplicata ratione TA ad TC ; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro T intervallo TC descripti, ut TC ad TA ; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in C , in duplicata ratione TA ad TC ; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice C & curvaturam Circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam Figuræ Tpa in vertice C & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli



anguli CTP ad angulum CTP . Quæ quidem rationes ex sinibus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter se collatis, prodit curvatura Figuræ Cpa in a ad ipsius curvaturam in C , ut $AT cub + \frac{16824}{100000} CT q \times AT$ ad $CT cub + \frac{16824}{100000} AT q \times CT$. ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^d 7^h 43'$; & $29^d 12^h 44'$ applicatam ad quadratum temporis $27^d 7^h 43'$.

Igitur cum a designet Syzygiam Lunæ, & C ipsius Quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet, cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT , duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062, 79 CT qq - 2151969 N \times CT cub + 368676 N \times AT \times CT q + 36342 AT q \times CT q - 362047 N \times AT q \times CT + 2191371 N \times AT cub. \times 4051,4 AT qq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT semisumma N scribo 1 , & pro eorundem semidifferentia ponendo x , fit $CT = 1 + x$; & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resoluta, obtinetur x æqualis $0,00719$, & inde semidiameter CT fit $1,00719$, & semidiameter AT $0,99281$, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{4}$ & $69\frac{1}{4}$ quam proxime. Est igitur distantia Lunæ a Terra in Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (seposita scilicet Eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{4}$ ad $70\frac{1}{4}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70 .

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire Variationem Lune.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna P in Ellipsi $D.BCA$ circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio TP ad Terram ducto describeret aream CTP tempori proportionalem; esset autem Ellipseos semidiameter maxima CT ad semidiametrum minimam TA ut 70 ad 69 : foret tangens anguli CTP ad tangentem anguli motus medii a Quadratura C computati, ut Ellipseos semidiameter PA ad ejusdem semidiametrum

Ecc

TC

Designet jam PM arcum, quem Luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata 3 IT , eodem tempore describere posset. Jungantur PL , MP , & producantur eæ ad m & l , ubi fecent planum Eclipticæ; inque Tm demittatur perpendicularum PH . Et quoniam recta ML parallela est plano Eclipticæ, ideoque cum recta ml quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula LMP , Lmp . Jam cum MPm sit in plano Orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N, n ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, si tota simul & semel in loco P impressa esset, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda esset LP , atque adeo transferret Lunam de plano $MPmT$ in planum $LPIT$; motus angularis Nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo mTl . Est autem ml ad mP ut ML ad MP , adeoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est, ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl , si modo angulus Tml rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$ & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id est, (ob proportionales Tm & mP , TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam TP , ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml , seu STN obliquus sit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione sinus anguli STN ad Radium. Est igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, sive ut contentum sub sinibus trium angulorum TPI , PTN & STN .

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM , quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit ut 1 ad 59, 575. Nam angulus mPl æqualis est angulo MPM , id est, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem sola vis præfata Solaris 3 IT si tum cessaret Lunæ gravitas dato illo tempore generare posset; & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe suo retinetur, si tum cessaret vis Solaris 3 IT eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus,

$PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ LIBER
est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut FERTIUS.
 $Kk \times PD \times AZ$ qu. id est, ut area $PDdM$ & AZ qu. conjun-
ctim. Q. E. D.

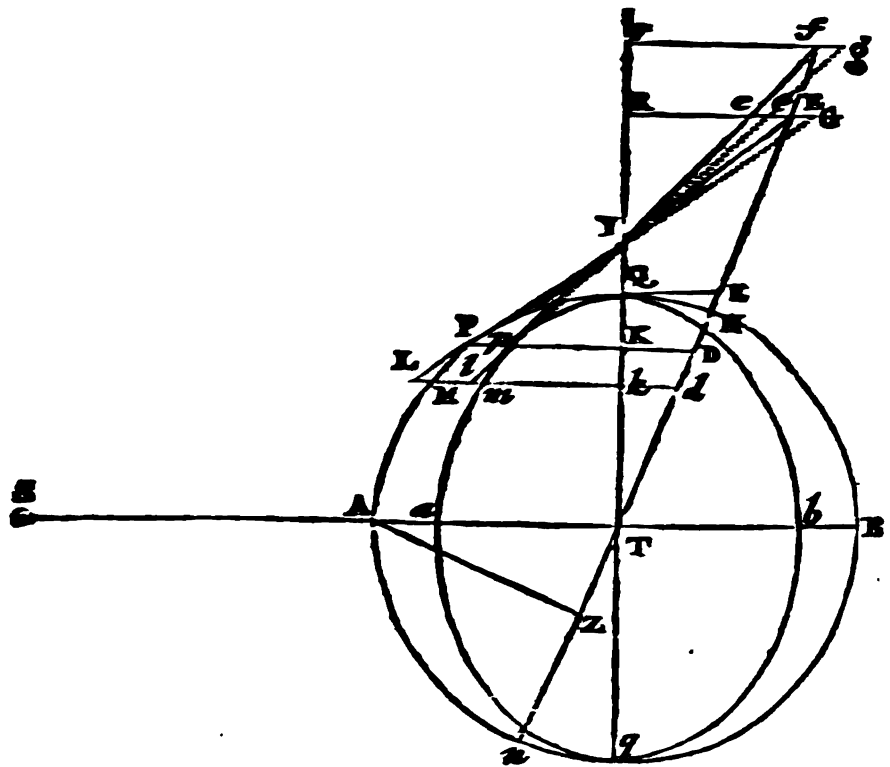
Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semiffis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque est ad $16'' . 35''' . 16'' . 36'$ ut quadratum sinus distantiae Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut AZ qu. ad AT qu. Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq , summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit a Q ad M , erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n , summa illa erit area tota EQA_n quam linea PD describit, dein Luna pergente ab n ad q , linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de area priorè, & cum æqualis sit areæ QEN , relinquet semicirculum NQA_n . Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio MT ; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde Nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in Syzygiis Lunaribus, spatium duplo majus describerent quam revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semiffis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit $33'' . 10''' . 33'' . 12'$, motus mediocris horarius in hoc casu erit $16'' . 35''' . 16'' . 36'$. Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut AZ qu. & area $PDdM$ conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut AZ qu. & area $PDdM$ conjunctim, id est (ob datam aream $PDdM$ in Syzygiis descriptam) ut AZ qu. erit etiam motus mediocris ut AZ qu. atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad $16'' . 35''' . 16'' . 36'$ ut AZ qu. ad AT qu. Q. E. D.

DE MOTU
SÆSERVATE

PROPOSITIO XXXI PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium Nodorum Lune in Orbe Elliptico.

Designet Qq Ellipsin, axe majore Qq , minore ab descriptam, QI Circulum circumscriptum, T Terram in utriusque centro communi, S Solem, p Lunam in Ellipsi motam, & pm arcum quem data temporis particula quam minima describit, N & s Nodos linea Ns iunctos, pK & sk perpendicularia in axem Qq demissa & hinc inde producta, donec occurrant Circulo in P & M ,



& lineæ Nodorum in D & d . Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat temporis proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area $pDdm$.

Nam si Pf tangat Circulum in P , & producta occurrat TN in F , & pf tangat Ellipsin in p & producta occurrat eidem TN in

in Y , conveniant autem hæc tangentes in axe TQ ad T ; & si ML designet spatium quod Luna in Circulo revolvens, intercedum describit arcum PM , urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu transverso describere posset, & ml designet spatium quod Luna in Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, describere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano Eclipticæ in G & g ; & jungantur FG & fg , quarum FG producta secet pf , pg & TQ in c , e & R respective, & fg producta secet TQ in r : Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in Circulo est ad vim $3IT$ seu $3PK$ in Ellipsi, ut PK ad pK , seu AT ad aT ; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut PK ad pK , id est, ob similes figuras PKp & $FTrc$, ut FR ad cR . Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM , PGF) ut PL ad PG , hoc est (ob parallelas Lk , PK , GR) ut pl ad pe , id est, (ob similia triangula plm , cpe) ut lm ad ce ; & inverse ut LM est ad lm , seu FR ad cR , ita est FG ad ce . Et propterea si fg esset ad ce ut fY ad cY , id est, ut fr ad cR (hoc est, ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id est, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT , foret fg ad FG ut fT ad FT ; atque adeo anguli, quos FG & fg subtenderent ad Terram T , æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus Nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum PM , in Ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fY ad cY , id est, si gf æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verum ob similia triangula fgp , cep , est fg

ad ce ut fp ad cp ; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea

angulus, quem fg revera subtendit, est ad angulum priorem, quem FG subtendit, hoc est, motus Nodorum in Ellipsi ad motum

Nodorum in Circulo; ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu

$\frac{ce \times fY}{cY}$, id est, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, seu fp ad fY & cY ad cp ,

hoc est, si ipsi TN parallela occurrat FP in b , ut Fb ad FT & FT ad FP , hoc est, ut Fb ad FT seu Dp ad DP , adeoque

ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum area posterior

DE MONDI SYSTEMATE
 prior proportionalis fit motui Nodorum in Circulo, erit area
 prior proportionalis motui Nodorum in Ellipfi. Q. E. D.

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum $p D d m$, quo tempore Luna pergit a Quadratura ad locum quemvis m , fit area $m p Q E d$, quæ ad Ellipseos tangentem $Q E$ terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, fit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipfi erit ad motum mediocrem Nodorum in Circulo, ut Ellipsis ad Circulum; id est, ut $T a$ ad $T A$, seu 69 ad 70. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in Circulo sit ad $16'' . 35''' . 16'' . 36'$. ut $A Z qu.$ ad $A T qu.$ si capiatur angulus $16'' . 21''' . 3'' . 30'$. ad angulum $16'' . 35''' . 16'' . 36'$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipfi ad $16'' . 21''' . 3'' . 30'$. ut $A Z q$ ad $A T q$; hoc est, ut quadratum sinus distantie Nodi a Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quam in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciproce ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadraturis, ac defectum in Syzygiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a Quadraturis ad Syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in Quadraturis, sit ut quadratum sinus distantie Lunæ a Quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocumque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum sinus distantie Lunæ a Quadraturis & quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias, est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna

per-

percurrit PM , (cæteris paribus) ut ML , & ML est in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073, quam proxime. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, est quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiae Lunæ a Quadratura & semissem quadrati Radii ad semissem quadrati Radii, conjunctim. Unde si Nodi in Quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde distantia, & alia duo a Syzygia & Quadratura iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzygiam & Octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facile constabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream temporalem proportionalem describere supponebatur (erat $32'' . 42''' . 7''$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse, ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud est $17'' . 43'' . 11''$, cujus pars quarta $4''' . 25'' . 48''$, motui horario mediocri superius invento $16'' . 16''' . 37'' . 42''$ subducta, relinquit $16'' . 16''' . 37'' . 42''$ motum medicrem horarium correctum.

Si Nodi versantur extra Quadraturas, & spectentur loca bina a Syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum Nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis & Nodi in Quadraturis versantur, ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Et decremента motuum, a causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum situ, ad $16'' . 16''' . 37'' . 42''$ ut $AZqu.$ ad $ATqu.$; id est, ut quadratum sinus distantiae Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii.

tus medius Nodorum circulo toti respondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergat ab N ad A , est ad $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$ ut area NAZ ad circulum totum.

Hæc ita se habent, ex Hypothefi quod Nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol annu toto completo ad Nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum Sol annu toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{\circ} 38' 7'' 50'''$, seu 39,6355 gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis N fit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut AZq ad ATq : erit motus Solis ad motum Nodi in N , ut 360 ATq ad 39,6355 AZq ; id est, ut $9,0827646 ATq$ ad AZq . Unde si circuli totius circumferentia NAa dividatur in particulas æquales Aa , tempus quo Sol percurrat particulam Aa , si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum T revolvatur, reciproce ut $9,0827646 ATq$ ad $9,0827646 ATq + ZAq$. Nam tempus est reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum NA , exponatur per Sectorem NTA , & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum Aa , exponatur per Sectoris particulam ATa ; & (perpendicularo aT in Na demisso) si in AZ capiatur dZ , ejus longitudinis ut sit rectangulum dZ in ZT ad Sectoris particulam ATa ut AZq ad $9,0827646 ATq + AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2} AZ$ ut ATq ad $9,0827646 ATq + AZq$; rectangulum dZ in ZT designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit Curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus Sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debet etiam area $AaTZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ , quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad $9,0827646 ATq + AZq$. Sic enim rectangulum eZ in ZT erit ad aream $AZTa$ ut decrementum temporis quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum e tangat

DE MUNDI
SYSTEMATE

Curvam $NeFn$, area tota NeZ , quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAu respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus quo tempore arcus totus NA , per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam vero area semicirculi est ad aream Figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæsitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui respondet Circulo toti erat $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$; & propterea motus qui Figuræ $NeFnT$ duplicatæ respondet, est $1^{\circ} 29' 58'' 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{\circ} 19' 5'' 53'''$ motum totum Nodi inter sui ipsius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{\circ} 40' 54'' 7'''$ motum Solis inter easdem Conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annum 360^o ut Nodi motus jam inventus $18^{\circ} 19' 5'' 53'''$ ad ipsius motum annum, qui propterea erit $19^{\circ} 18' 1'' 23'''$. Hic est motus medius Nodorum in anno Sidereo. Idem per Tabulas Astronomicas est $19^{\circ} 21' 21'' 50'''$. Differentia minor est parte trecentesima motus totius, & ab Orbis Lunaris Eccentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Eccentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

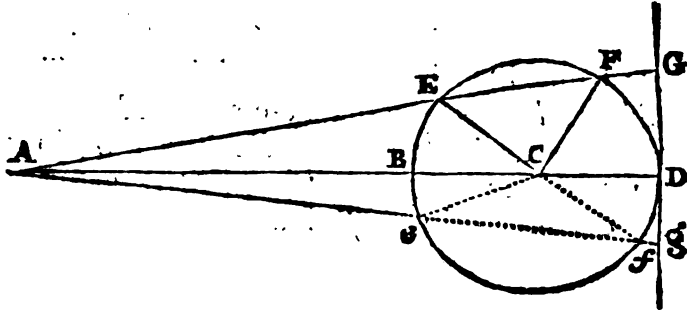
Invenire motum verum Nodorum Lune.

In tempore quod est ut area $NTA - NdZ$, (*in Fig. preced.*) motus iste est ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C , intervallo quovis CD , describatur circulus $BEFD$. Producat DC ad A , ut sit AB ad AC ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt in Quadraturis, (id est, ut $19^{\circ} 18' 1'' 23'''$ ad $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$; atque adeo BC ad AC ut motuum differentia $0^{\circ} 31' 2'' 32'''$, ad motum posteriorem $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$. (hoc est, ut 1 ad $38\frac{1}{2}$ dein per punctum D ducatur infinita Gg , quæ tangat circulum in D ; & si capiatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ distantie Solis a loco Nodi, per motum medium invento;

&

& agatur AE vel AF fecans perpendicularum DG in G ; & capiatur angulus qui sit ad motum totum Nodi inter ipsius Syzygias (id est, ad $9^{\text{h}} 11' 3''$.) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus DAG usurpari potest) ad motum medium Nodorum addatur ubi Nodi

LIBRA
TERTIUS.



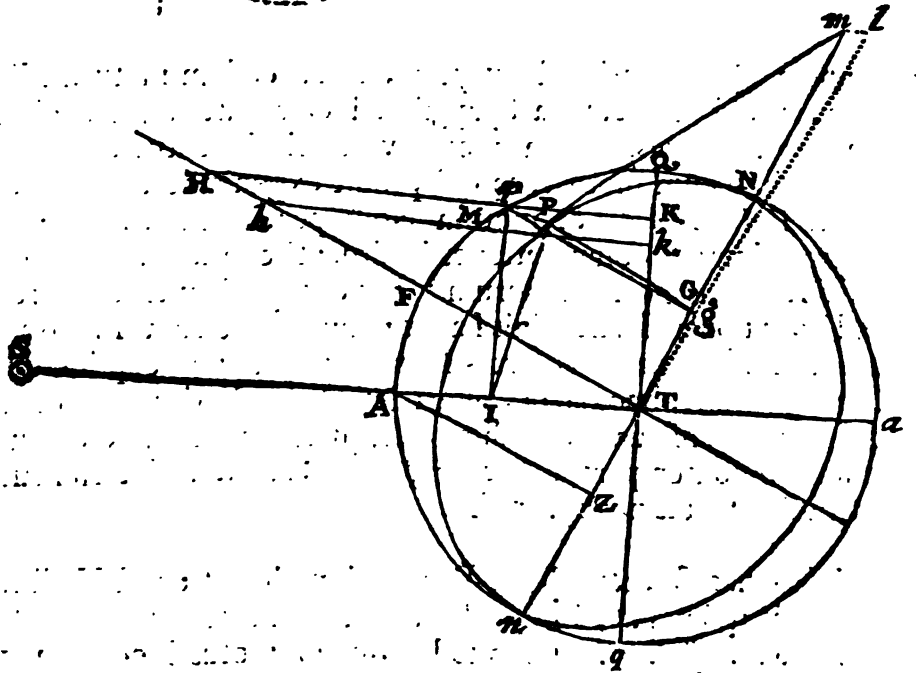
transeunt a Quadraturis ad Syzygias, & ab eodem motu medio subducatur ubi transeunt a Syzygiis ad Quadraturas, habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendenti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minime necessaria est. Nam cum Variatio Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario $16^{\text{h}} 19^{\text{m}} 26^{\text{s}}$. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit $1^{\text{h}} 30'$. Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probe quadrant.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire Variationem horariam Inclinationis Orbis Lunarum ad planum Eclipticæ.

Designent A & a Syzygias; Q & q Quadraturas; N & n Nodos; P locum Lunæ in Orbe suo; p vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & mTl motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam Tm demittatur perpendicularum PG , jungatur pG , & producatur ea donec occurrat Tl in g , & jungatur etiam Pg : erit angulus PGp Inclinationis Orbis Lunarum ad planum Eclipticæ,



ubi Luna versatur in P ; & angulus PGp Inclinationis ejusdem post momentum temporis completum; adeoque angulus GPg Variatio momentanea Inclinationis. Est autem hic angulus GPg ad angulum GTg , ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus GTg (per Proposit. xxx.) sit ad angulum $33^\circ. 10''$, $33''$. ut

$IT \times PG \times AZ$ ad AT^3 , erit angulus $G P g$ (seu Inclinatio horaria Variatio) ad angulum $33^\circ 10' 33''$, ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT^3 . Q. E. I.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe Circulari uniformiter gyrat. Quod si Orbis ille Ellipticus sit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Inclinatio Variatio.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendicularum TF , sitque $p M$ motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendiculara $p K, M k$ in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H & b : erit IT ad AT ut Kk ad Mp , & TG ad Hp ut TZ ad AT , ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc est, æquale areæ

$Hp Mb$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$; & propterea Inclinatio horaria ad $33^\circ 10' 33''$, ut $Hp Mb$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT^3 .

Corol. 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinatio Variatio tempore mensis illius foret ad $33^\circ 10' 33''$, ut aggregatum omnium arearum $Hp Mb$, in revolutione puncti p genitarum, & sub signis propriis + & - conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT^3$. id

est, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT^3$. hoc est, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2Mp \times AT^3$.

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex qua per mensem uniformiter continuata Variatio illa menstrua generari posset, est ad $33^\circ 10' 33''$, ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT^3$, sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{4AT}$ ad $PG \times 4AT$, id

Ggg est

DE MONDI
SYSTEMATE

est (cum Pp sit ad PG ut sinus Inclinacionis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2} AT}$ sit ad $4 AT$ ut sinus duplicati anguli $AT\#$ ad radium quadruplicatum) ut Inclinacionis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantie Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam Inclinacionis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per hanc Propositionem) ad angulum $33''. 10'''. 33''$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT cub. id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2 AT$, hoc est, ut sinus duplicatæ distantie Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est, spatio horarum 177 $\frac{1}{2}$;) erit ad summam totidem angulorum $33''. 10'''. 33''$, seu $5878''$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantie Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam: id est, si Inclinatio sit $5^{\circ} 1'$. ut $7 \times \frac{521}{1000}$, ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est $163''$, seu $2'. 43''$.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

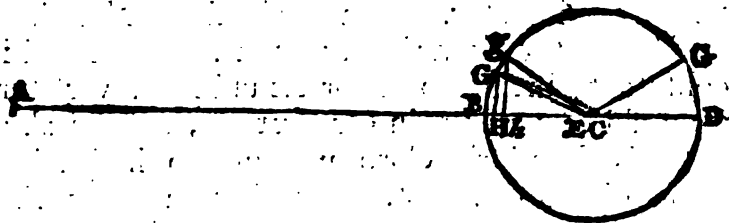
Dato tempore invenire Inclinacionem Orbis Lunarum ad planum Eclipticæ.

Sit AD sinus Inclinacionis maximæ, & AB sinus Inclinacionis minimæ. Bisecetur BD in C , & centro C , intervallo BC , describatur Circulus BGD . In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam EB habet ad $2 BA$; Et si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantie Nodorum à

Qua-

Quadraturis, & ad AD demittatur perpendicularum GH ; erit AH sinus Inclinationis quaesitæ. LIBER
TERTIUS.

Nam GEq æquale est $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2.BH \times BE = REq + 2.EC \times BH = 2.EC \times AB + 2.EC \times BH = 2.EC \times AH$. Ideoque cum $2.EC$ detur, est GEq ut AH . Designet jam AEG duplicatam distantiam Nodorum à Quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg , ob datum



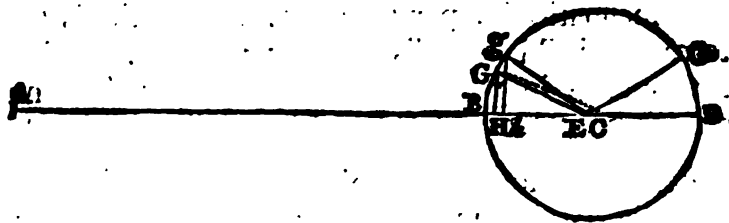
angulum GEG , erit ut distantia GE . Est autem Hb ad Gg ut GH ad GC , & propterea Hb est ut contentum $GH \times Gg$ seu $GH \times GE$; id est, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ seu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id est, ut AH & sinus anguli AEG conjunctim. Igitur si AH in casu aliquo sit sinus Inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu Inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D hanc sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hac demonstratione supposui angulum BEG , qui est duplicata distantia Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, & in hoc casu Gg esse augmentum horarium duplæ distantie Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis Variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad $33'' . 10''' . 33''$. ut contentum sub Inclinationis sinu AH & sinu anguli recti BEG , qui est duplicata distantia Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris Inclinationis sinus AH ad radium quadruplicatum; hoc est (cum Inclinationis illa mediocris sit quasi $5^{\circ} 8\frac{1}{2}'$) ut ejus sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem Variatio tota, sinuum differentie BD respondens, ad Variationem illam horariam ut diameter BD ad arcum Gg .

DE MONDI
SYSTEMATE

arcum Gg ; id est, ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes jungantur, fiet Variatio tota BD ad $33''$. $10'''$. 33^{iv} ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, & inde Variatio illa BD prodibit $16'$. $23''\frac{1}{2}$.

Hæc est Inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam Inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, Inclinatio minor est ubi Luna versatur in Syzygiis, quam ubi ea versatur in Quadraturis, excessu $2'$. $43''$; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio $1'$. $21''\frac{1}{2}$. Variatio tota mediocris BD in Quadraturis Lunaribus diminuta fit $15''$. $2''$, in ipsius autem Syzygiis aucta fit $17'$. $45''$. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit $17'$. $45''$: adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit 4° . $17'$. $20''$; eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 4° . $59'$. $35''$. Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus.



Si jam desideretur Orbis Inclinatione illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat AB ad AD ut sinus graduum 4° . $59'$. $35''$ ad sinum graduum 5° . $17'$. $20''$, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiae Nodorum à Quadraturis; & erit AH sinus Inclinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinatione, ubi Luna distat 90° à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas mensura, quam inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem mensuram motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

Scholium:

Hiscæ motuum Lunarum computationibus ostendere volui quod motus Lunares, per Theoriam Gravitatis, a causis suis computari possint. Per eandem Theoriam inveni præterea quod *Æquatio Annua* medii motus Lunæ oriatur a varia dilatatione Orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. cxvi. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major est, & Orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor est, & Orbem illum contrahi permittit. In Orbe dilatato Luna tardius revolvitur, in contracto citius; & *Æquatio Annua* per quam hæc inæqualitas compensatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla est, in mediocri Solis a Terra distantia ad $11'. 50''$ circiter ascendit, in aliis locis *Æquationi* centri Solis proportionalis est; & additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab Aphelio suo ad Perihelium, & in opposita Orbis parte subducitur. Assumendo radium Orbis magni 1000 & Eccentricitatem Terræ $16\frac{1}{2}$, hæc *Æquatio* ubi maxima est, per Theoriam Gravitatis prodiit $11'. 49''$. Sed Eccentricitas Terræ paulo major esse videtur, & aucta Eccentricitate hæc *Æquatio* augeri debet in eadem ratione. Sit Eccentricitas $16\frac{1}{2}$, & *Æquatio* maxima erit $11'. 52''$.

Inveni etiam quod in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi Lunæ velocius moventur quam in Aphelio ejus, idque in triplicata ratione distantie Terræ a Sole inverse. Et inde oriuntur *Æquationes Annuæ* horum motuum *Æquationi* centri Solis proportionales. Motus autem Solis est in duplicata ratione distantie Terræ a Sole inverse, & maxima centri *Æquatio* quam hæc inæqualitas generat, est $18'. 56'. 26''$ prædictæ Solis Eccentricitati $16\frac{1}{2}$ congruens. Quod si motus Solis esset in triplicata ratione distantie inverse, hæc inæqualitas generaret *Æquationem* maximam $28'. 56'. 9''$. Et propterea *Æquationes* maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, sunt ad $28'. 56'. 9''$, ut motus medius diurnus Apogæi & motus medius diurnus Nodorum Lunæ sunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodiit *Æquatio* maxima medii motus Apogæi $19'. 52''$; & *Æquatio* maxima medii motus Nodorum $9'. 27''$. Additur vero *Æquatio* prior & subducitur posterior, ubi Terra pergit a Perihelio suo ad Aphelium: & contrarium fit in opposita Orbis parte.

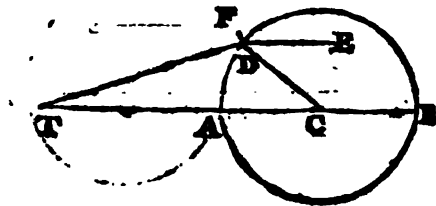
DE MONDI
SYSTEMATE

Per Theoriam Gravitatis consistit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit ubi transversa diameter Orbis Lunaris transit per Solem, quam ubi eadem ad rectos est angulos cum linea Terram & Solem jungente: & propterea Orbis Lunaris paulo major est in priore casu quam in posteriore. Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris, pendens a situ Apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima est cum Apogæum Lunæ versatur in Octante cum Sole; & nulla cum illud ad Quadraturas vel Syzygias pervenit: & motui medio additur in transitu Apogæi Lunæ a Solis Quadratura ad Syzygiam, & subducitur in transitu Apogæi a Syzygia ad Quadraturam. Hæc Æquatio quam Semestrem vocabo, in Octantibus Apogæi quando maxima est, ascendit ad 3'. 45" circiter, quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia a Terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione distantiae Solis inverse, adeoque in maxima Solis distantia est 3'. 34", & in minima 3'. 56" quamproxime: ubi vero Apogæum Lunæ situm est extra Octantes, evadit minor; estque ad Æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiae Apogæi Lunæ a proxima Syzygia vel Quadratura ad radium.

Per eandem Gravitatis Theoriam actio Solis in Lunam paulo major est ubi linea recta per Nodos Lunæ ducta transit per Solem, quam ubi linea ad rectos est angulos cum recta Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motus Lunaris Æquatio, quam Semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi Nodi in Solis Octantibus versantur, & evanescit ubi sunt in Syzygiis vel Quadraturis, & in aliis Nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiae Nodi alterutrius a proxima Syzygia aut Quadratura: additur vero medio motui Lunæ dum Nodi transeunt a Solis Quadraturis ad proximas Syzygias, & subducitur in eorum transitu a Syzygiis ad Quadraturas; & in Octantibus ubi maxima est, ascendit ad 47" in mediocri Solis distantia a Terra, uti ex Theoria Gravitatis colligo. In aliis Solis distantis hæc Æquatio, in Octantibus Nodorum, est reciproce ut cubus distantiae Solis a Terra, ideoque in Perigæo Solis ad 45" in Apogæo ejus ad 49" circiter ascendit.

Per eandem Gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum Sole Quadraturam facit. Et Eccentricitas sit maxima in priore casu & minima in posteriore, per Corol:

7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & Æquationem principalem Apogæi generant, quam Semestrem vocabo. Et Æquatio maxima Semestris est $12^{\text{st}}. 18'$ circiter, quantum ex Observationibus colligere potui. *Horroxius* noster Lunam in Ellipsi circum Terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. *Halleius* centrum Ellipseos in Epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in Epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu & regressu Apogæi & quantitate Eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris Lunæ a Terra in partes 100000; & referat T Terram & TC Eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 4505. Producat TC ad B , ut sit CB sinus Æquationis maximæ Semestris $12^{\text{st}}. 18'$ ad radium TC , & circulus BDA centro C intervallo CB descriptus, erit Epicyclus ille in quo centrum Orbis Lunaris locatur & secundum ordinem literarum BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ semel æquato, & erit CTD Æquatio



Semestris Apogæi Lunæ & TD Eccentricitas Orbis ejus in Apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & Eccentricitate, ut & Orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in Orbe & distantia ejus a Terra, idque per Methodos notissimas.

In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum Orbis Lunæ velocius movetur circum centrum C quam in Aphelio, idque in triplicata ratione distantiæ Terræ a Sole inverse. Ob Æquationem centri Solis in Argumento annuo comprehensam, centrum Orbis Lunæ velocius movetur in Epicyclo BDA in duplicata ratione distantiæ Terræ a Sole inverse. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione simplici distantiæ inverse; ab Orbis centro D agatur recta DE versus Apogæum Lunæ, seu rectæ TC parallela, & capiatur angulus EDF æqualis excessui Argumenti

Solis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita $2'. 25''$ sunt ad *Æquationem* Centri Secundam, addendam si summa illa sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus Longitudo in ipsis Luminarium Syzygiis.

Si computatio accuratior desideretur, corrigendus est locus Lunæ in Orbe ut supra inventus per Variationem duplicem. De Variatione Prima & principali diximus supra, hæc maxima est in Octantibus Lunæ. Variatio altera maxima est in Quadrantibus, & oritur a varia Solis actione in Orbem Lunæ pro varia positione Apogæi Lunæ ad Solem, computatur vero in hunc modum. Ut radius ad sinum versum distantie Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in consequentia, ita angulus quidam P ad quartum proportionalem. Et ut radius ad sinum distantie Lunæ a Sole, ita summa hujus quarti proportionalis & anguli cujusdam alterius Q ad Variationem Secundam, subducendam si Lunæ lumen augetur, addendam si diminuitur. Sic habebitur locus verus Lunæ in Orbe, & per Reductionem loci hujus ad Eclipticam habebitur Longitudo Lunæ. Anguli vero P & Q ex Observationibus determinandi sunt. Et interea si pro angulo P usurpentur $2'$. & pro angulo Q $1'$, non multum errabitur.

Cum Atmosphæra Terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, & refringendo spargat eandem in Umbram Terræ, & spargendo lucem in confinio Umbræ dilatat Umbram: ad diametrum Umbræ quæ per Parallaxim prodit, addo minutum unum primum in Eclipsibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria vero Lunæ primo in Syzygiis, deinde in Quadraturis, & ultimo in Octantibus per Phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Observatorio Regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommode sequentes adhibebit: nempe motum medium Solis $20^{\text{hr}} 43'. 40''$, & Apogæi ejus $7^{\text{hr}} 44'. 30''$, & motum medium Lunæ $14^{\text{hr}} 20'. 00''$, & Apogæi ejus $8^{\text{hr}} 20'. 00''$, & Nodi ascendentis $\Omega 17^{\text{hr}} 24'. 20''$; & differentiam meridianorum Observatorii hujus & observatorii Regii *Parisienfis* $0^{\text{hor.}} 9^{\text{min.}} 20^{\text{sec.}}$.

rude Aquæ sub Æquatore superet ejus altitudinem sub Polaris mensura pedum Parisiensium 34207 vis Solaris de qua egimus hinc fit ad vim gravitatis ut 1 ad 128682004, itaque ad vim centrifugam ut 186 ad 12868260 seu 11 ad 44527, efficiet ut altitudo Aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis, superet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus distant a Sole, mensura tantum pedum unius Parisiensis & digitorum undecim octo octava parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 5820 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda est ex ejus proportionem ad vim Solis, & hæc proportio colligenda est ex proportionem motuum Maris, quæ ab his viribus oriuntur. Ante ortum fluvii *Aponæ* ad lapidem tertium infra *Bristoliam*, tempore verno & autumnali totus Aquæ ascensus in Conjunctione & Oppositione Luminarium (observante *Samuele Sturmio*) est pedum plus minus 45, in Quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore versantium & mediocriter a Terra distantium sunt vires S & L, & erit L + S ad L - S ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu *Plymathi* Æstus maris (ex observatione *Samuelis Colepreffi*) ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo Æstus in Syzygiis superare potest altitudinem ejus, in Quadraturis, pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit L + S ad L - S ut 20½ ad 11½ seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum priore. Ob magnitudinem Æstus in portu *Bristoliæ*, observationibus *Sturmi* magis fidendum esse videntur, ideoque donec aliquid certius consiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, Æstus maximi non incidunt in ipsas Luminarium Syzygias, sed sunt tertii a Syzygiis ut dictum fuit, seu proxime sequuntur tertium Lunæ post Syzygias appulsam ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmo* notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, seu post horam

DE MONDI
SYSTEMATE

ram a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, adeoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragessimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ideoque proxime sequuntur appulsu Lunæ ad meridianum, ubi Luna distat a Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novendecim in consequentia. Æstas & Hyems maxime vigent, non in ipsis Soltitiis, sed ubi Sol distat a Soltitiis decima circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus Æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna distat a Sole decima circiter parte motus totius ab Æstu ad Æstum. Sit distantia illa graduum plus minus 18½. Et vis Solis in hac distantia Lunæ a Syzygiis & Quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quam in ipsis Syzygiis & Quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiae hujus duplicatae seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S. scribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis Lunæ in Quadraturis, ob declinationem Lunæ ab Æquatore, diminui debet. Nam Luna in Quadraturis, vel potius in gradu 18½ post Quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13' versatur. Et Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad Mare movendum diminuitur in duplicata ratione sinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis Lunæ in his Quadraturis est tantum 0,8570327 L. Est igitur L. + 0,7986355 S ad 0,8570327 L - 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea diametri Orbis in quo Luna absque Eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia Lunæ a Terra in Syzygiis est ad distantiam ejus in Quadraturis, ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiae ejus in gradu 18½ a Syzygiis ubi Æstus maximus generatur, & in gradu 18½ a Quadraturis ubi Æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam, ut 69,098747 & 69,897345 ad 69½. Vires autem Lunæ ad Mare movendum sunt in triplicata ratione distantiarum inverse, ideoque vires in maxima & minima harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia, ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L. + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L. - 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L. ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravi-

Corol. 1. Cum Aqua vi Solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum octava parte digiti, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum & digitorum octo, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum semisse, & ubi Luna est in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum semisse & ultra, præsertim ubi Æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes Maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in Mari *Pacífico*, & Maris *Atlantici* & *Ethiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem *Pacífico*, quod profundius est & latius patet, Æstus dicuntur esse majores quam in *Atlantico* & *Ethiopico*. Etenim ut plenus sit Æstus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor esse debet quam graduum nonaginta. In Mari *Ethiopico*, ascensus aquæ intra Tropicos minor est quam in Zonis temperatis, propter angustiam Maris inter *Africam* & Australem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in Insulis, quæ à littoribus longissime absunt, perexiguus esse solet. In Portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent esse solito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepstowe* in *Anglia*; ad montes *S. Michæls* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Avranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa miliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadisorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circumdatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis, per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora vero quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo Æstus respondet viribus Solis & Lunæ.

PHILOSOPHIE NATURALIS

Corol. 2. Luna ad Mare movendum, sit ad vim gravi-
peripicuum est quod vis illa sit longe
experimentis Pendulorum, vel in Staticis
quibusconque sentiri possit. In Aëre solo ma-
edit effectum.

Corol. 3. Luna ad Mare movendum, est ad Solis
ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14.
Lib. I.) sunt ut densitates corporum Lunæ & Solis
diametrorum apparentium conjunctim; densitas Lunæ erit
densitatem Solis, ut 4,4815 ad 1 directe & cubus diametri
Lunæ ad cubum diametri Solis inverse: id est (cum diametri me-
diocres apparentes Lunæ & Solis sint 31'. 16 1/2" & 32'. 12") ut
891 ad 1000. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ,
ut 100 ad 396; & propterea densitas Lunæ est ad densitatem
Terræ, ut 4891 ad 3960 seu 21 ad 17. Est igitur corpus Lunæ
densius & magis terrestre quam Terra nostra.

Corol. 4. Et cum vera diameter Lunæ (ex Observationibus
Astronomicis) sit ad veram diametrum Terræ, ut 100 ad 365;
erit massa Lunæ ad massam Terræ; ut 1 ad 39371.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ, erit quass
triplo minor quam gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

Corol. 6. Et distantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ad di-
stantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ,
ut 40,371 ad 39,371.

Corol. 7. Et mediocris distantia centri Lunæ a centro Terræ, erit
semidiametrorum maximarum Terræ 604 quamproxime. Nam
semidiameter maxima Terræ fuit pedum Parisiensium 19767630,
& mediocris distantia centrorum Terræ & Lunæ ex hujusmodi
semidiametris 604 constans, æqualis est pedibus 1190999707. Et
hæc distantia (per Corollarium superius) est ad distantiam centri
Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ; ut 40,371 ad
39,371, quæ proinde est pedum 1161498340. Et cum Luna re-
volvatur respectu Fixarum, diebus 27, horis 7 & minutis primis 43,
sinus versus anguli quem Luna, tempore minuti unius primi motu
suo medio, circa commune gravitatis centrum Terræ & Lunæ de-
scribit, est 1275237, existente radio 100, 00000, 000000. Et ut
radius est ad hunc sinum versus, ita sunt pedes 1161498340 ad
pedes 14,811833. Luna igitur vi illa qua retinetur in Orbe, ca-
dendo in Terram, tempore minuti unius primi describet pedes
14,811833. Et si hæc vis augeatur in ratione 177 1/2 ad 178 1/2, ha-
bebitur

habitur vis tota gravitatis in Orbe Lunæ, per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi describere deberet pedes 14,89517. Et ad sexagesimam partem hujus distantiae, id est, ad distantiam pedum 1984999, a centro Terræ, corpus grave cadendo, tempore minuti unius secundi describere deberet etiam pedes 14,89517. Diminuat hęc distantia in subduplicata ratione pedum 14,89517, ad pedes 15,12028, & habebitur distantia pedum 19701678 a qua grave cadendo, eodem tempore minuti unius secundi describet pedes 15,12028, id est, pedes 15, dig. 1, lin. 5,32. Et hac vi gravia cadunt in superficie Terræ, in Latitudine urbis *Luætiæ Parisiorum*, ut supra ostensum est. Est autem distantia pedum 19701678 paulo minor quam semidiameter globi huic Terræ æqualis, & paulo major quam Terræ hujus semidiameter mediocris, ut oportet. Sed differentia sunt insensibiles. Et propterea vis qua Luna retinetur in Orbe suo, ad distantiam maximarum Terræ semidiametrorum $60\frac{1}{2}$, ea est quam vis Gravitatis in superficie Terræ requirit.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, est mediocrium Terræ semidiametrorum $60\frac{1}{2}$ quamproxime. Nam semidiameter mediocris, quæ erat pedum 19688725, est ad semidiametrum maximam pedum 19767630, ut $60\frac{1}{2}$ ad $60\frac{1}{2}$ quamproxime.

In his computationibus Attractionem magneticam Terræ non consideravimus, cujus utique quantitas perparva est & igneratur. Si quando vero hæc attractio investigari poterit, & mensuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum Maris, & parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis & Lunæ ex Phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum esset ad instar Maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, esset ad vim Lunæ, quæ Mare nostrum in partibus & sub Luna & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diame-

diametrum Terræ conjunctim, id est, ut 39,371 ad 1 & 105 ad 365 conjunctim, seu 1079 ad 100. Unde cum Mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes 8½, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93½. Eaque de causa Figura Lunæ Sphærois effret, cujus maxima diameter producta transfret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculâres excessu pedum 187. Talem igitur Figuram Lunæ affectat, eamque sub initio induere debuit.

Q. E. I.

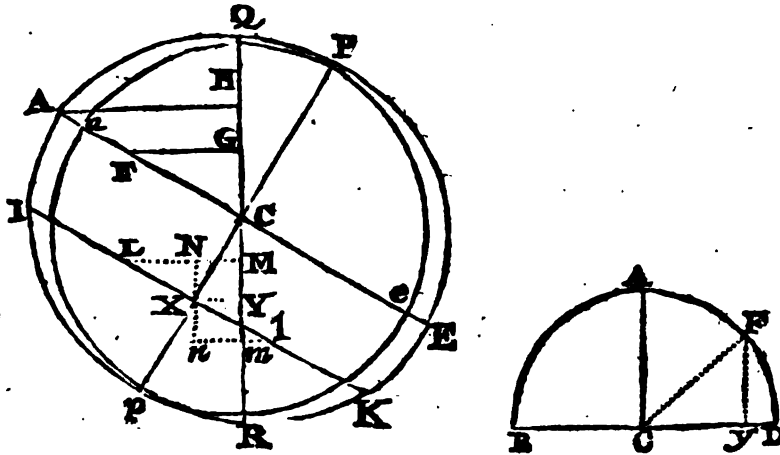
Corol. Inde vero fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longè tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem in Prop. xviii. allatam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

L E M M A I.

Si A P E p Terram designet uniformiter densam, centroque C & Polîs P, p & Equatore A E delineatam; & si centro C radio CP describi intelligatur Sphæra P a p e; sit autem QR planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terra totius exterioris P a p A P e p E, quæ Sphæra modo descripta altior est, particula singula conentur recedere hinc inde a plano QR, sitque conatus particula cujusque ut ejusdem distantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium, in Equatoris circulo A E, extra globum uniformiter per totum circum centrum ejus rotandam, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in Equatoris puncto A, quod a plano QR maxime distat, consistentium vim & efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum arcem, in communi sectione Equatoris & plani QR jacentem, peragetur.

Nam centro C diametro BD describatur semicirculus BAFDC. Dividi intelligatur semicircumferentia BAD in partes

partes innumeras æquales, & a partibus singulis F ad diametrum BD demittantur sinus FT . Et summa quadratorum ex sinibus omnibus FT æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus omnibus CT , & summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semidiametris CF ; adeoque summa quadratorum ex omnibus FY , erit duplo minor quam summa quadratorum ex totidem semidiametris CF .



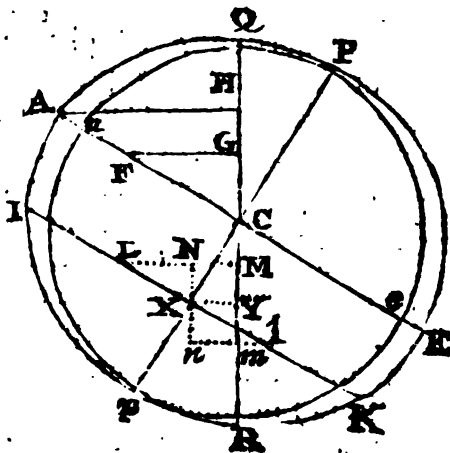
Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendicularum FG , ut & a puncto A perpendicularum AH . Et vis qua particula F recedit a plano QR , erit ut perpendicularum illud FG per hypothesin, & hæc vis ducta in distantiam CG , erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Adeoque efficacia particulæ in loco F , erit ad efficaciam particulæ in loco A , ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc est, ut FCq ad ACq ; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F , erit ad efficaciam particularum totidem in loco A , ut summa omnium FCq ad summam totidem ACq , hoc est, (per jam demonstrata) ut unum ad duo. *Q.E.D.*

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano QR , idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eadem convertent circumferentiam circuli *Æquatoris*, eique in hærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano *Æquatoris* jacentem.

LEMMA II.

Isdem positis: Dico secundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in Æquatoris circulo AE , uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.

Sit enim IK circulus quilibet minor Æquatori AE parallelus, sintque L, l particulae duae quævis æquales in hoc circulo extra globum $Pape$ sitæ. Et si in planum QR , quod radio in Solem ducto perpendicularare est, demittantur perpendiculara LM, lm : vires totæ quibus particulae illæ fugiunt planum QR , proportionales erunt perpendicularis illis LM, lm . Sit autem recta Ll plano $Pape$ parallela & bifecetur eadem in X , & per punctum X agatur Nn , quæ parallela sit plano QR & perpendi-



culis LM, lm occurrat in N ac n , & in planum QR demittatur perpendicularum XY . Et particularum L & l vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times nC - nm \times mC$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC$
- NM

— $NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times MC + mC$, Lemma
Terræ.
 est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentię pars affirmativa $LN \times Mm$ seu $2 LN \times NX$, est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2 AH \times HC$, ut LXq ad ACq . Et pars negativa $NM \times MC + mC$ seu $2 XT \times CT$, ad particularum earundem in A consistentium vim $2 AH \times HC$, ut CXq ad ACq . Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L & l simul sumptarum vis ad Terram rotandam, est ad vim particularum duarum fisdem æqualem & in loco A consistentium, ad Terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq . Sed si circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L , erunt omnes LXq ad totidem LXq ut 1 ad 2, (per Lem. I.) atque ad totidem ACq , ut IXq ad $2 ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2 CXq$ ad $2 ACq$. Quare vires conjunctę particularum omnium in circuitu circuli IK , sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A , ut $IXq - 2 CXq$ ad $2 ACq$: & propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE , ut $IXq - 2 CXq$ ad ACq .

Jam vero si Sphęrę diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK ; materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq : ideoque vis materię illius ad Terram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2 CXq$. Et vis materię ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq . Et propterea vis particularum omnium materię totius, extrā globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli **maximi** AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq - 2 CXq$ ad totidem IXq in ACq , hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3 CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq , id est, ut omnia $ACqq - 4 ACq \times CXq + 3 CXqq$ ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens cujus fluxio est $ACqq - 4 ACq \times CXq + 3 CXqq$, ad totam quantitatem fluentem cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac proinde per Methodum Fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{1}{2} ACq \times CX cub. + \frac{1}{3} CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{2} ACq \times CX cub.$, id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC , ut $\frac{1}{2} ACqc$ ad $\frac{1}{2} ACqc$, hoc est, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

L E M M A III.

Isdem positis: Dico tertio quod motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione qua componitur ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadranti circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000.

Est enim motus Cylindri circum axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

H Y P O T H E S I S II.

Si annulus prædictus Terra omni reliqua sublata, solus in Orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium siue annulus iste fluidus esset, siue is ex materia rigida & firma constaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire Præcessionem Equinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi sunt in Quadraturis, erat $16'' . 35''' . 16''$, $36''$. & hujus dimidium $8'' . 17'' . 38''$, $18''$. (Ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto sidereo $20^{\text{hr}} . 11' . 46''$. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim $20^{\text{hr}} . 11' . 46''$ in antecédentia; & si plures essent Lunæ motus Nodorum cujusque, per Corollar. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent ut tempora periodica; si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad $20^{\text{hr}} . 11' . 46''$. ut dies sidereus horarum $23 . 56'$. ad tempus periodicum Lunæ dierum $27 . 7 \text{ hor. } 43'$; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquecant & in anulum continuum formentur, sive denique anulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit Terræ omni *Pap APepE* quæ globo *Pape* superior est; (*Vid. Fig. pag 434.*) & quoniam globus iste ad Terram illam superiorem ut *aCqu.* ad *ACqu.* — *aCqu.* id est (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* fit ad diametrum majorem *AC* ut 229 ad 230,) ut 52441 ad 459; si annulus iste Terram secundum Æquatorem cingeret & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur; motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum quo ipsius Nodi seu puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum Æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum Æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi, ad motum

DE MONDI
SYSTEMATE

20^s. 11'. 46", ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeo quibus puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 317, in Fig. pag. 403 & 404.) sunt in singulis particulis ut distantiae particularum à plano QR, & his viribus particule illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ P p A P p E, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Equatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta Æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annus Æquinoctiorum regressus jam esset ad 20^s. 11'. 46", ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9". 56". 50".

Cæterum hic motus, ob inclinationem plani Equatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum 23½) ad Radium 100000. Quæ ratione motus iste jam fiet 9". 7". 29". Hæc est annua Præcessio Æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad Mare movendum erat ad vim Solis, ut 4, 4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda, est ad vim Solis in eadem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præcessio a vi Lunæ oriunda 40". 52". 52"; ac tota Præcessio annua a vi utraque oriunda 50". 00". 12". Et hic motus cum Phænomenis congruit. Nam Præcessio Æquinoctiorum ex Observationibus Astronomicis est minorum secundorum plus minus quinquaginta.

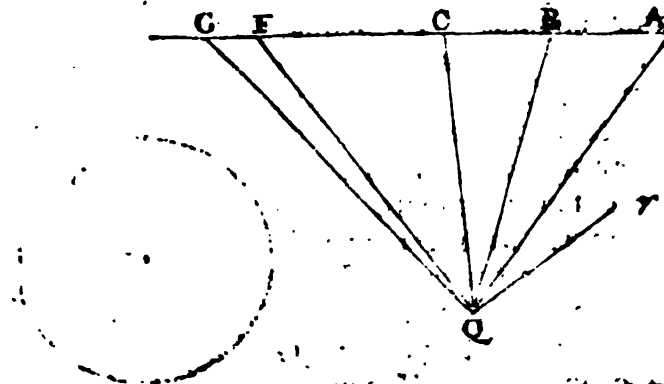
Si altitudo Terræ ad Equatorem superet altitudinem ejus ad Poles, miliaribus pluribus quam 17½, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & Præcessio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Descripsimus jam Systema Solis, Terræ, Lunæ, & Planctarum: superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA IV.

Cometas esse Luna superiores & in regione Planetarum versari.

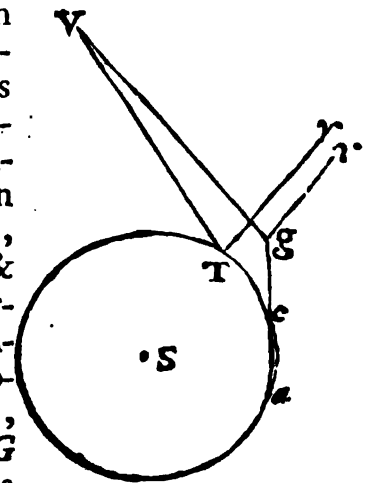
Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublimates, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at iusto celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et e contra qui pergunt contra ordinem signorum sunt iusto celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & iusto tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem tanto celerius fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa e Terra spectatus, ob motum suum tardiozem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ,



(detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sumto rQA , rQB , rQC observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, fitque rQF longitudo ultimo observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur

DE MONDI
SYSTEMATE

Agatur recta ABC , cujus partes AB , BC rectis QA & QB , QB & QC interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producat AC ad G , ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur QG . Et si Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progresseretur; foret angulus $\angle QG$ longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur $\angle FQG$, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $\angle QG$, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergat in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiosem reddit, vel forte retrogradum, uti modo exposui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a Cometæ motu inæquabili in Orbe proprio oriri possit. Distantia vero Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet S Solem, acT Orbem magnum, a locum Terræ in observatione prima, c locum Terræ in observatione tertia, T locum Terræ in observatione ultima, & Tv lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus $\angle TV$ æqualis angulo $\angle QF$, hoc est, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in T . Jungatur ac , & producat ac ad g , ut sit ag ad ac ut AG ad AC , & erit g locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur gv ipsi Tv parallela, & capiatur angulus $\angle gv$ angulo $\angle QG$ æqualis, erit hic angulus $\angle gv$ æqualis longitudini Cometæ e loco g spectati; & angulus $\angle TVg$ parallaxis erit, quæ oritur a translatione Terræ de loco g in locum T ; ac proinde V locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus V Orbe Jovis inferior esse solet.



Idem

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit dispartes Cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in Perigæis & Peribeliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbem Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis coelestis a Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiae: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione subduplicata lucis ad lucem inverse. Sic minima capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum a *Flamstedio* observata & Micrometro mensurata, æquabat 2'. 0". Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11" vel 12". Luce vero & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21", adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30": erit distantia Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad 44 inverse; & 12" ad 30" directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense *Aprilis*, ut auctor est *Hevelius*, claritate sua pene Fixas omnes superabat, quin etiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6', at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore interme-

die Saturni, tunc ipsi aequalis iudicatur. Porro: cum diameter capillitii Cometarum raro superet 8' vel 12', diameter vero nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hæcæ ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet, manifestum est quod Cometa omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cælo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: quæ certe ratione non magis illustrari deberent a Sole nostro, quam Planetæ, qui hic sunt, illustrantur a Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maxime copiosum & crassum, quo caput circumdatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile sit Cometas longe infra spheram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæc vel ex reflexione fumi sparsi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita sub Sole desiccantur, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trahiunt ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitis crescente in recessu Cometarum a Terra Solem versus, ac decrecente in eorum recessu a Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1667 (observante Hevelio,) ex parte conspicui cepit, remittebat semper

de motu suo apparente, adeoque præterierat Perigæum: Splendor vero capitis millonibus in dies crescebat, usque dum Cometa radiis Solaribus obtectus desit apparere. Cometa Anni 1689, observante eodem *Hevelio*, in fine Mensis *Julii* ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in Orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur usque ad *Sept. 4.* quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis Micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug. 6.* esse tantum 6'. 5" inclusa coma, at *Sept. 2.* esse 9'. 7". Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Promde toto hoc tempore, ob recessum ipsius a Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Mensis *Decembris*, & iste Anni 1680 circa finem ejusdem Mensis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb. 1.* majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb. 16.* (jam in Perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan. 7.* *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & a *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum a Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb. 15* & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decemb. 26.* velocissime motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori *Pegasi*, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan. 3.* apparebat ut Stella quartæ, *Jan. 9.* ut Stella quintæ, *Jan. 13.* ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan. 25.* vix æquabat Stellam magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia a Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales a Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maxime splenduerunt, ex altera Perigæi parte evanuerunt. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum

regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis a se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum, deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniore qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est a latere Terræ quod Solem respicit, inque parte illa majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniore, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod Cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum, diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphære inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata est, quæ situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficiliter cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

LIBER
TERTIUS.

Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per Corol. 1. Propof. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt: Orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquuplicata. Ideoque Cometæ maxima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine Orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis Orbis Cometæ sit quadruplo major axe Orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ, absque erroribus sensibilibus, adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis, erit semper ad velocitatem Planetæ cujuscvis circa Solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiæ Planetæ a centro Solis, ad distantiam Cometæ a centro Solis quamproxime. Ponamus radium Orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum maximam, esse partium 10000000: & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes 71675½. Ideoque Cometa in eadem Telluris a Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes 101364½. In majoribus autem vel minoribus distantis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde si Latus rectum Parabolæ quadruplo majus sit radio Orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 10000000: area quam Cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium 1216373½, & singulis horis area illa erit partium 50682½. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione subduplicata.

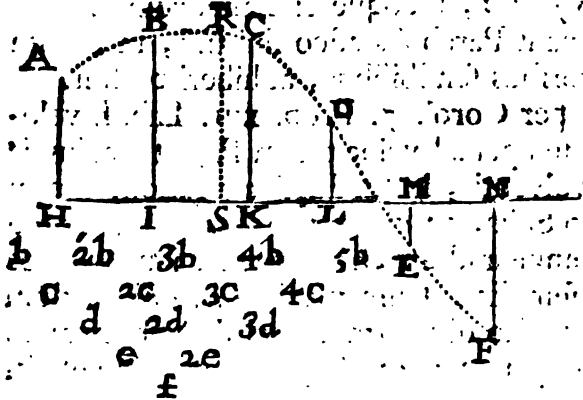
DE MONST
SYSTEMATE

DE LINEA PARABOLICA

Invenire lineam curvam generis Parabolici, que per data quocumque puncta transibat.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F , &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam HN demitte perpendiculara quocumque AH, BI, CK, DL, EM, FN .

Cas. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N equalia sunt intervalla HI, IK, KL , &c. collige perpendicularorum AH, BI, CK , &c. differentias primas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c. secundas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias $d, 2d, 3d$, &c. id est, ita ut fit $AI - BI = b, BI - CK = 2b, CK - DL = 3b, DL - EM = 4b, EM - FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$, &c.



& sic pergatur ad differentiam ultimam quae hic est f . Deinde erecta quacunq; perpendiculari RS , quae fuerit ordinatim applicata ad curvam quaesitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM , &c. unitates esse, & dic $AH = a, -HS = p, p$ in $-IS = q, q$ in

$+SK = r, r$ in $+SL = s, s$ in $+SM = t$; pergetido videlicet ad usque penultimum perpendicularum ME , & praeposendo signa negativa terminis HS, IS , &c. qui jacent ad partes puncti S versus A , & signa affirmativa terminis SK, SL , &c. qui jacent ad alteras partes puncti S . Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Cas. 2. Quod si punctorum H, I, K, L &c. inaequalia sint intervalla HI, IK , &c. collige perpendicularorum AH, BI, CK , &c. differentias primas per intervalla perpendicularorum divisas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$; secundas per intervalla bina divisas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas $d, 2d, 3d$, &c. quartas per inter-

Lemma
Tercium.

intervalla quaterna divisas $e, 2e, \&c.$ & sic deinceps; id est, ita
ut sit $b = \frac{AH-BI}{HI}$, $2b = \frac{BI-CK}{IK}$, $3b = \frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein

$c = \frac{b-2b}{IK}$, $2c = \frac{2b-3b}{IK}$, $3c = \frac{3b-4b}{IK}$, &c. Postea $d = \frac{c-2c}{IM}$,
 $2d = \frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic. p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$;

pergendo scilicet ad usque perpendicularum penultimum ME , & erit
ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc aræ curvarum omnium inveniri possunt quampro-
xime. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta ali-
quot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ
hujus eadem quam proxime cum aræ curvæ illius quadrandæ.
Potest autem Parabola, per Methodos notissimas, semper quadrari
Geometrice.

LEMMA VI.

*Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad
tempus quodvis intermedium datum.*

Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes,
(in Fig. præced.) HA, IB, KC, LD, ME observatas quinque
longitudines Cometæ, HS tempus datum inter observationem pri-
mam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E
duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per Lemma supe-
rius inveniatur ejus ordinatim applicata RS , erit RS longitudo
quæsitæ.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur
latitudo ad tempus datum.

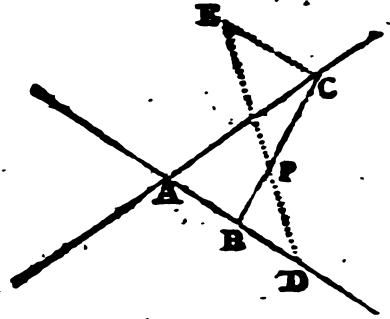
Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta gra-
duum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor
ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores
sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes
quinque adhiberi.

LEMMA

LEMMA VII

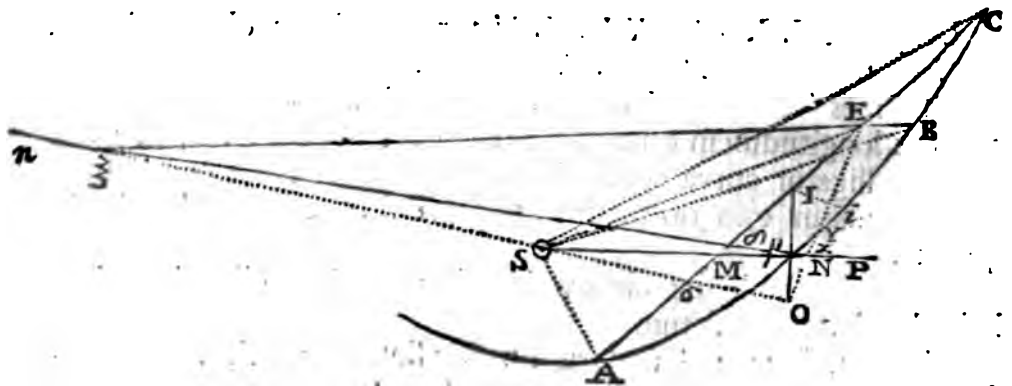
Per datum punctum P ducere rectam lineam BC , cujus partes PB, PC , rectis duabus positione datis AB, AC abscissa, datam habeant rationem ad invicem.

A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD , & producat eadem versus rectam alteram AC usque ad E , ut sit PE ad PD in data illa ratione. Ipsi AD parallela sit EC ; & si agatur CPB , erit PC ad PB ut PE ad PD . Q.E.F.



LEMMA VIII.

Sit ABC Parabola umbilicum habens S . Chorda AC bisecta in I abscindatur segmentum $ABCI$, cujus diameter sit $I\mu$ & vertex μ . In $I\mu$ producta capiatur μO equalis dimidio ipsius



$I\mu$. Fungatur OS , & producat eam ad ξ , ut sit $S\xi$ equalis $2SO$. Et si Cometa B moveatur in arcu CBA , & agatur ξB secans AC in E : dico quod punctum E abscindet de chorda AC segmentum AE temporis proportionale quamproxime.

Junga-

Jungatur enim EO secans arcum Parabolicum ABC in T , & agatur μX quæ tangat eundem arcum in vertice μ & actæ EO occurrat in X ; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACT\mu A$ ut AE ad AC . Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCT\mu A$ ut AE ad AC . Cum autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX , erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde si ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB , & de summa auferatur triangulum SEB , manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque adeo ad aream $ASCY\mu A$ ut AE ad AC . Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis est area $ASBY\mu A$, quamproxime, & hæc area $ASBY\mu A$ est ad aream $ASCT\mu A$, ut tempus descripti arcus AB , ad tempus descripti arcus totius AC . Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Ubi punctum B incidit in Parabolæ verticem μ , est AE ad AC in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ , & in ea capiatur ξn quæ sit ad μB ut 27 MI ad 16 $M\mu$: acta Bn secabit chordam AC in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ , si punctum B magis distat a vertice principali Parabolæ quam punctum μ ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

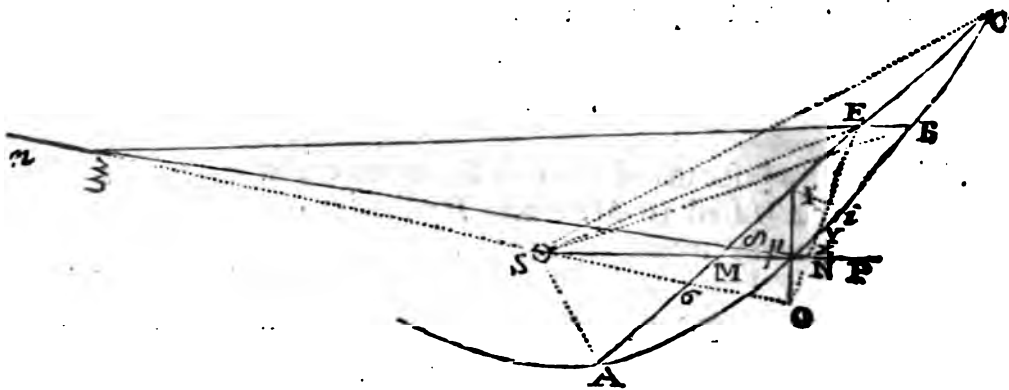
Rectæ $I\mu$ & μM & longitudo $\frac{AIC}{4S\mu}$ æquantur inter se.

Nam $4S\mu$ est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem μ

LEMMA X.

Si producat^r $S\mu$ ad N & P , ut μN sit pars tertia ipsius μI , & SP sit ad SN ut SN ad $S\mu$. Cometa, quo tempore describit arcum $A\mu C$, si progred^retur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi SP equali, describeret longitudinem æqualem chordæ AC .

Nam si Cometa velocitate quam habet in μ , eodem tempore progred^retur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ ; area quam radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ Parabolicæ $ASC\mu$. Ideoque contentum sub longitudine in tangente descripta & longitudine $S\mu$, esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM , ut area $ASC\mu$ ad triangulum $ASC\mu$, id est, ut SN ad SM . Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN . Cum autem velocitas



Cometæ in altitudine SP sit (per Corol. 6 Prop. xvi. Lib. I.) ad velocitatem in altitudine $S\mu$, in subduplicata ratione SP ad $S\mu$ inverse, id est, in ratione $S\mu$ ad SN ; longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN . Igitur AC & longitudo hac nova velocitate descripta, cum sint ad longitudinem in tangente descriptam in eadem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$, eodem tempore describeret chordam AC quamproxime.

LEMMA

LEMMA XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN seu $S\mu + I\mu$ demitteretur, ut caderet in Solem, & ea semper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem, qua urgetur sub initio; idem semisse temporis quo in Orbe suo describat arcum AC , descensu suo describeret spatium longitudini $I\mu$ aequale.

Nam Cometa quo tempore describat arcum Parabolicum AC , eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine SP (per Lemma novissimum) describet chordam AC , adeoque (per Corol. 7. Prop. xvi. Lib. I.) eodem tempore in Circulo cujus femidiameter esset SP , vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam AC , in subduplicata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine SP , cadendo de altitudine illa in Solem, describeret semisse temporis illius (per Corol. 9. Prop. iv. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP , id est, spatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine SN , sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine SP , ut SP ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id est, spatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

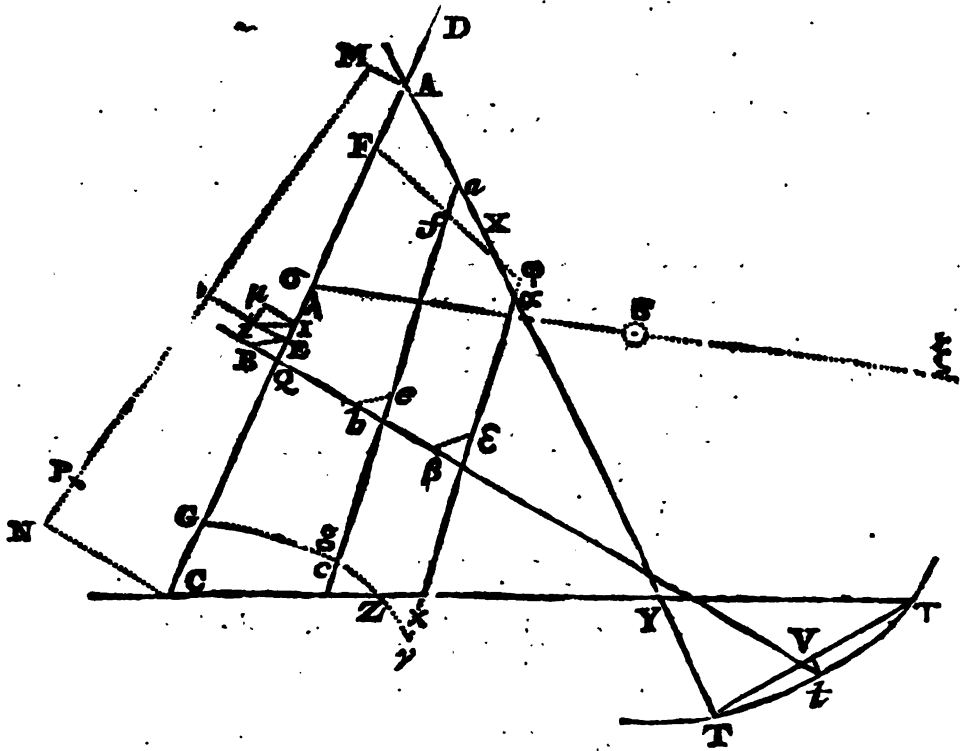
Cometæ in Parabola moti Trajectoriam ex datis tribus Observationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimode aggressus, composui Problemata quædam in Libro Primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciore excogitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet

Sicut

temporum, ut summa tem-
porum sexcentos; vel ut punctum E incidat in
& inde aberret versus I potius quam
observationes non præsto sint, inveniendus est
Lemma sextum.
Cometæ locus per
Designent S Solem, T , t , r tria loca Terræ in Orbe magno,
 T , t , r observatas tres longitudes Cometæ, V tempus in-
ter observationem primam & secundam, W tempus inter secun-
dam ac tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore,
cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distan-
tia, describere posset, quæque per Corol. 3. Prop. XL. Lib. III.
invenienda est, & tV perpendicularum in chordam Tt . In longi-



tudine media tB sumatur utcumque punctum B pro loco Co-
metæ in plano Eclipticæ, & inde versus Solem S ducatur linea
 BE , quæ sit ad sagittam tV , ut contentum sub SB & St quad.
ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt SB &
tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium tB .

Et

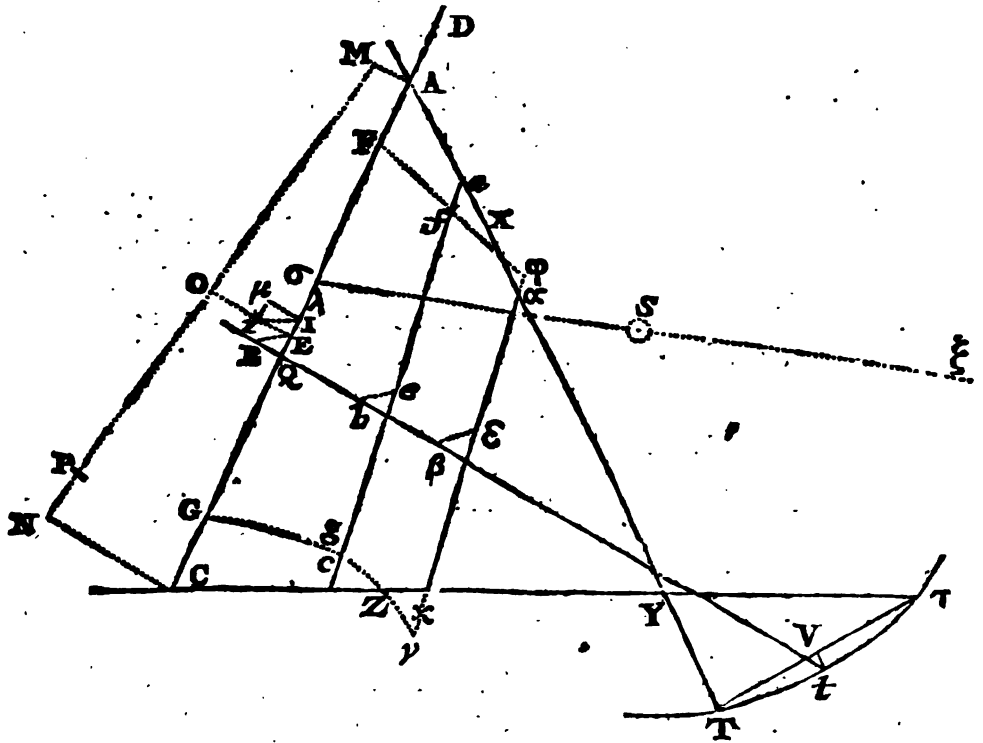
Et per punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta AEC , cujus partes AE , EC ad rectas TA & τC terminatae, sint ad invicem ut tempora V & W : & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in observatione prima ac tertia quamproxime, si modo B sit locus ejus recte assumptus in observatione secunda.

Ad AC bisectam in I erige perpendicularum Ii . Per punctum B age occultam Bi ipsi AC parallelam. Junge occultam Si secantem AC in λ , & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A , E , C , I , a puncto B versus punctum ξ duc occultam novam BE , quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiae BS ad quantitatem $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem, ut tempora inter observationes V & W . Et erunt A & C loca Cometæ magis accurate.

Ad AC bisectam in I erigantur perpendiculara AM , CN , IO , quarum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios TA & τC . Jungatur MN secans IO in O . Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$, & agatur occulta OD . Deinde in MN versus N capiatur MP , quæ sit ad longitudinem supra inventam N , in subduplicata ratione mediocritatis distantiae Telluris a Sole (seu semidiametri Orbis magni) ad distantiam OD . Si punctum P incidat in punctum N ; erunt A , B , C tria loca Cometæ, per quæ Orbis ejus in plano Eclipticæ describi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N ; in recta AC capiatur CG ipsi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad easdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E , A , C , G , ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e , a , c , g , & ϵ , α , κ , γ . Deinde si per G , g , γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, secans rectam τC in Z : erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et si in AC , ac , $\alpha\kappa$ capiuntur AF , af , $\alpha\phi$ ipsis CG , cg , $\kappa\gamma$ respective æquales, & per puncta F , f , ϕ ducatur circumferentia circuli $Ff\phi$, secans rectam AT in X ; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ ; & habebuntur loca duo Cometæ in Orbe proprio. Denique (per Prop. XI. Lib. I.) umbilico S , per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. L.*

Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur : quippe cum recta AC secetur in E in ratione temporum, per Lemma VII, ut oportet per Lem. VIII: & BE per Lem. XI. fit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. x.) longitudo fit chordæ arcus, quem Cometa in Orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modo B sit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.



Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt , in quo vestigium Orbis in plano Eclipticæ descriptum secat rectam tB , præterpropter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC , quæ sit ad tT in subduplicata ratione SQ ad St . Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt , determinabitur punctum B quod prima vice usurpare licet. Tum recta AC deleta & secundum præcedentem constructionem iterum ducta, & inventa

inventa infuper longitudine MP ; in tB capiatur punctum b , Liber TARTIUS. ea lege, ut si TA , & C se mutuo fecerint in T , fit distantia Tb ad distantiam TB , in ratione composita ex ratione MP ad MN & ratione subduplicata SB ad sb . Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β , si modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia Bb perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta F, f & G, g , actæ rectæ Ff & Gg secabunt TA & C in punctis quæsitis X & Z .

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum a *Plamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

| | Tem. appar. | Temp. verum | Long. Solis | Long. Cometæ | Lar. Cometæ |
|-----------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| | h. m. s. | h. m. s. | gr. m. s. | gr. m. s. | gr. m. s. |
| 1680 Dec. | 12 | 4.46 | 1.51.23 | 6.31.21 | 8.26.0 |
| | 21 | 6.32½ | 11.6.44 | 5.7.38 | 21.45.30 |
| | 24 | 6.12 | 14.9.26 | 18.49.10 | 25.23.24 |
| | 26 | 5.14 | 16.9.22 | 28.24.6 | 27.0.57 |
| | 29 | 7.55 | 19.19.43 | 13.11.45 | 28.10.5 |
| | 30 | 8.2 | 20.21.9 | 17.39.5 | 28.11.12 |
| 1681 Jan. | 5 | 5.51 | 26.32.18 | 8.49.10 | 26.15.26 |
| | 9 | 6.49 | 0.29.2 | 18.43.18 | 24.12.42 |
| | 10 | 5.54 | 1.27.43 | 26.40.52 | 23.44.0 |
| | 13 | 6.56 | 4.33.10 | 25.59.34 | 22.17.36 |
| | 25 | 7.44 | 16.45.36 | 9.35.48 | 17.56.54 |
| | 30 | 8.7 | 21.49.58 | 13.19.36 | 16.40.57 |
| Feb. | 2 | 6.20 | 24.46.59 | 15.13.48 | 16.2.2 |
| | 5 | 6.50 | 27.49.51 | 16.59.52 | 15.27.23 |

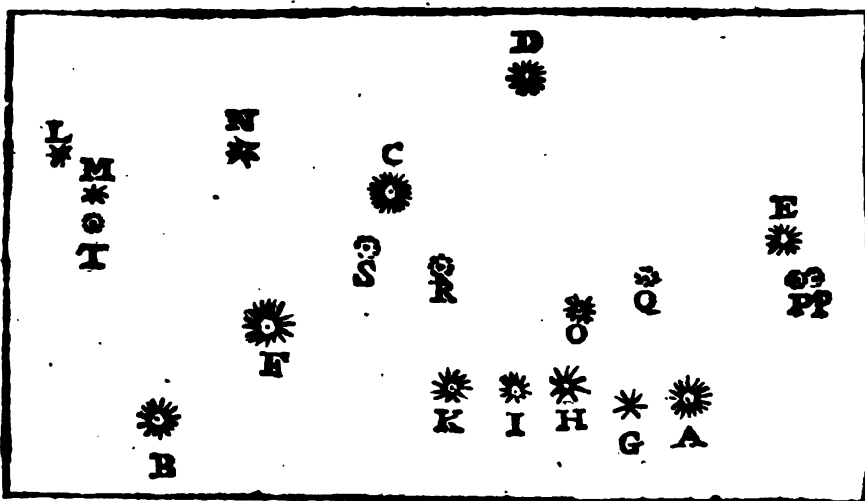
His adde Observationes quasdam e nostris.

| | Temp. appar. | Cometæ Longit. | Com. Lar. |
|-------|--------------|----------------------|-------------------------|
| Febr. | 25 | 8 ^h . 30' | 128 ^{gr} . 46½ |
| | 27 | 8 . 15 | 12 . 36½ |
| Mart. | 1 | 11 . 0 | 12 . 24½ |
| | 2 | 8 . 0 | 11 . 20 |
| | 5 | 11 . 30 | 12 . 3½ |
| | 9 | 8 . 30 | 11 . 45½ |

Hæ Observationes Telescopio septupedali, & Micrometro filif- que in foco Telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis &

DE MONDI
SYSTEMATE

& positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero*), *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero* ?) & *C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P, Q, R, S, T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia *AB* partium $80\frac{1}{2}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{2}$, *BC* $58\frac{1}{2}$, *AD* $57\frac{1}{2}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{1}{2}$, *AE* $29\frac{1}{2}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AL* $27\frac{7}{12}$, *BL* $52\frac{1}{2}$, *CL* $36\frac{7}{12}$,



DI $53\frac{1}{11}$, *AK* $38\frac{2}{7}$, *BK* 43 , *CK* $31\frac{1}{2}$, *FK* 29 , *FB* 23 , *FC* $36\frac{1}{2}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{12}$, *BN* $46\frac{1}{11}$, *CN* $31\frac{1}{2}$, *BL* $45\frac{1}{12}$, *NL* $31\frac{1}{2}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hac recta esset $\frac{1}{2}$ *CD*. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* existentis distantia a stella *E* erat minor quam $\frac{2}{11}$ *AE*, major quam $\frac{1}{7}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{3}{7}$ *AE* proxime; & angulus *Ape* non-nihil obtusus erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, distantia Cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{7}$ *pE*.

Eadem nocte, hora $9\frac{1}{2}$, Cometæ in *P* existentis distantia a stella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{2}}$ *AE*, adeoque æqua-

lis

lis $\frac{1}{47} AE$, seu $\frac{1}{39} AE$ quamproxime. A perpendicularo autem a stella A ad rectam PE demisso, distantia Cometæ erat $\frac{1}{3} PE$.

Die 6^{ta}, Feb. 27. hor. 8 $\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in Q existentis distantia a stella O æquabat distantiam stellarum O & H , & recta QO producta transibat inter stellas K & B . Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes, magis accurate definire non potui.

Die 8^{ta}, Mart. 1, hor. 11. P. M. Cometa in R existens, stellis K & C accurate interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam $\frac{1}{3} CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{3} CR$, adeoque æqualis $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{9} CR$ seu $\frac{4}{9} CK$.

Die 9^{ta}, Mart. 2. hor. 8. P. M. Cometæ existentis in S , distantia a stella C erat $\frac{1}{3} FC$ quamproxime. Distantia stellæ F a recta CS producta erat $\frac{1}{4} FC$, & distantia stellæ B ab eadem recta, erat quintuplo major quam distantia stellæ F . Item recta NS producta transibat inter stellas H & I , quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quam stellæ I .

Die 11^{ta}, Mart. 5. hor. 11 $\frac{1}{2}$. P. M. Cometa existente in T , recta MT æqualis erat $\frac{1}{2} ML$, & recta LT producta transibat inter B & F , quadruplo vel quintuplo propior F quam B , auferens a BF quintam vel sextam ejus partem versus F . Et MT producta transibat extra spatium BF ad partes stellæ B , quadruplo propior existens stellæ B quam stellæ F . Erat M stella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum A & B distantia esset 2⁵. 6'. 46", & stellæ A longitudo γ 26⁵. 41'. 50" & latitudo borealis 12⁵. 8' $\frac{1}{2}$, stellæque B longitudo γ 28⁵. 40'. 24" & latitudo borealis 11⁵. 17' $\frac{2}{3}$;) derivabam longitudes & latitudes Cometæ. Micrometro parum affabre constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris orientur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultima Mart. 9. ubi positiones stellarum minus accurate determinare potui. *Cassinus* qui ascensionem rectam Cometæ eodem tempore observavit, declinationem ejus tanquam invariata manentem parum diligenter definivit. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine

motus sui notabiliter deflectere coepit boream versus, a parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hætenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec. 21, Jan. 5, & Jan. 25*. Ex his inveni *S* partium 9842, 1 & *V* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter Orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *t B* partium 5657, inveni *S B* 9747, *B E* prima vice 412, *S μ* 9503, *ι λ* 413: *B E* secunda vice 421, *OD* 10186, *X* 8528, 4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *t b* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias *TX* 4775 & *τ Z* 11322. Ex quibus Orbem definiendo, inveni Nodos ejus descendentem in \mathfrak{S} & ascendentem in ψ 1^u. 53'; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61^u. 20'; verticem ejus (seu Perihelium Cometæ) distare a Nodo 8^u. 38', & esse in \mp 27^u. 43' cum latitudine australi 7^u. 34'; & ejus latus rectum esse 236,8, areamque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri Orbis magni posito 10000000; Cometam vero in hoc Orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb. 8^d. 0^h. 4'*. P.M. in vertice Orbis seu Perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula sinuum naturalium collectas, determinavi Graphice; construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter Orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16 $\frac{1}{2}$ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc Orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

| | | Distant. Co- metæ a Sole. | Long. Collect. | Lat. Collect. | Long. Obs. | Lat. Obs. | Differ. Long. | Differ. Lat. |
|--------------|----|------------------------------|------------------------------|-----------------------|---------------------------------|-----------------------|------------------|--------------------|
| <i>Dec.</i> | 12 | 2792 | ψ 6 . 32 | 8 . 18 $\frac{1}{2}$ | ψ 6 . 31 $\frac{1}{2}$ | 8 . 26 | + 1 | - 7 $\frac{1}{2}$ |
| | 29 | 8403 | χ 13 . 13 $\frac{1}{2}$ | 28 . 0 | χ 13 . 11 $\frac{1}{2}$ | 28 . 10 $\frac{1}{2}$ | + 2 | - 10 $\frac{1}{2}$ |
| <i>Febr.</i> | 5 | 16669 | φ 17 . 0 | 15 . 29 $\frac{1}{2}$ | φ 16 . 59 $\frac{1}{2}$ | 15 . 27 $\frac{1}{2}$ | + 0 | + 2 $\frac{1}{2}$ |
| <i>Mar.</i> | 5 | 21737 | 29 . 19 $\frac{1}{2}$ | 12 . 4 | 29 . 20 $\frac{1}{2}$ | 12 . 3 $\frac{1}{2}$ | - 1 | + $\frac{1}{2}$ |

Postea vero *Halleius* noster Orbitam, per calculum Arithmeticum, accuratius determinavit quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum Nodorum in \mathfrak{S} & ψ 1^u. 53', & Inclinationem plani Orbitæ ad Eclipticam 61^u. 20'; ut & tempus Perihelii Cometæ *Decemb. 8^d. 0^h. 4'*: distantiam vero Peri-

heli a Nodo ascendente, in Orbita Cometæ mensuratum, invenit esse 9^h 20', & Latus rectum Parabolæ esse 243 partium, existente mediocri Solis a Terra distantia partium 10000. Et ex his datis, calculo itidem Arithmetico accurate instituto, loca Cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

LIEBK
TEATJUS.

| | Tempus verum | | Distantia Cometæ a ☉ | Long. comp. | Lat. comp. | Errores in | |
|------|--------------|-----------|----------------------|-------------|---------------|------------|--------|
| | d. | h. m. | | | | Long. | Lat. |
| Dec. | 12. | 4. 46. 0 | 28028 | 6. 29. 25 | 8. 26. 0 Bor. | -1. 56 | +0. 0 |
| | 21. | 6. 36. 59 | 61076 | 5. 6. 30 | 21. 43. 20 | -1. 8 | -2. 10 |
| | 24. | 6. 17. 52 | 70008 | 18. 48. 20 | 25. 22. 40 | -0. 50 | -0. 44 |
| | 26. | 5. 20. 44 | 75576 | 28. 22. 45 | 27. 1. 36 | -1. 21 | +0. 59 |
| | 29. | 8. 3. 2 | 84021 | 13. 12. 40 | 28. 10. 10 | +0. 55 | +0. 55 |
| | 30. | 8. 10. 26 | 86661 | 17. 40. 5 | 28. 11. 20 | +1. 0 | +0. 8 |
| Jan. | 5. | 6. 1. 38 | 101440 | 8. 49. 49 | 26. 15. 15 | +0. 59 | -0. 11 |
| | 9. | 7. 0. 53 | 110959 | 18. 44. 36 | 24. 12. 54 | +1. 18 | +0. 12 |
| | 10. | 6. 6. 10 | 113162 | 20. 41. 0 | 23. 44. 10 | +0. 3 | +0. 10 |
| | 13. | 7. 8. 55 | 120000 | 26. 0. 21 | 22. 17. 30 | +0. 47 | -0. 6 |
| | 25. | 7. 58. 42 | 145370 | 9. 33. 40 | 17. 57. 55 | -2. 8 | +1. 1 |
| | 30. | 8. 21. 53 | 155303 | 13. 17. 41 | 16. 42. 7 | -1. 55 | +1. 10 |
| Feb. | 2. | 6. 34. 51 | 160951 | 15. 11. 11 | 16. 4. 15 | -2. 17 | +2. 13 |
| | 5. | 7. 14. 41 | 166686 | 16. 58. 25 | 15. 29. 13 | -1. 27 | +1. 50 |
| | 25. | 8. 19. 0 | 202570 | 26. 15. 46 | 12. 48. 0 | -2. 31 | +1. 8 |
| Mar. | 5. 11. 21. 0 | 216205 | 29. 18. 35 | 12. 5. 40 | -2. 16 | +2. 10 | |

Apparuit etiam hic Cometa mense *Novembri* præcedente, & die undecimo hujus mensis stylo veteri, ad horam quintam matutinam, *Cantuarie* in *Anglia*, visus fuit in $\approx 12\frac{1}{2}$ cum latitudine boreali 2^h circiter. Crassissima fuit hæc Observatio: meliores sunt quæ sequuntur.

Nov. 17, st. vet: *Ponthæus* & focii hora sexta matutina *Romæ* (id est, hora 5, 10' *Londini*) filis ad fixas applicatis Cometam observarunt in $\approx 8. 30'$, cum latitudine australi 0^h 40'. Extant eorum Observationes in tractatu quem *Ponthæus*, de hoc Cometa, in lucem edidit. *Cellius* qui aderat & observationes suas in Epistola ad *D. Cassinum* missa, Cometam eadem hora vidit in $\approx 8. 30'$ cum latitudine australi 0^h 30'. Eadem hora *Galletius* etiam Cometam vidit in $\approx 8. 5'$ sine latitudine.

Nov. 18. hora matutina 6. 30' *Romæ* (id est, hora 5, 40' *Londini*) *Ponthæus* Cometam vidit in $\approx 13. 30'$ cum latitudine australi 1^h 20'. *Cellius* in $\approx 13. 00'$, cum latitudine australi 1^h 00'. *Galletius* autem hora matutina 5. 30' *Romæ*, Cometam vidit in $\approx 13. 00'$, cum latitudine australi 1^h 00'. Et *R. P. Anjo* in Academia *Flexiensi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id est, hora 5, 9' *Londini*) Cometam vidit in medio inter stellas

duas parvas, quarum una media est trium in recta linea in Virgīnis australi manu, & altera est extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in $\approx 12. 46'$, cum latitudine australi $50'$. Eodem die *Bostonia* in *Nova-Anglia* in Latitudine $42\frac{1}{2}$ graduum, hora quinta matutina, (id est *Londini* hora matutina 9. 44') Cometa visus est prope ≈ 14 , cum latitudine australi $1^{\circ} 30'$, uti a *Cl. Halley* accipi.

Nov. 19. hora mat. $4\frac{1}{2}$ *Cantabrigiæ*, Cometa (observante juvene quodam) distabat a Spica \approx quasi 2° Boreazephyrum versus. Eodem die hor. 5. mat. *Bostoniæ* in *Nova-Anglia*, Cometa distabat a Spica \approx gradu uno, differentia latitudinum existente $40'$. Eodem die in Insula *Jamaica*. Cometa distabat a Spica intervallo quasi gradus unius. Et ex his observationibus inter se collatis colligo, quod hora 9. 44'. *Londini*, Cometa erat in $\approx 18^{\circ} 40'$, cum latitudine australi $1^{\circ} 18'$ circiter. Eodem die D. *Arthurus Starer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in confinio *Virginie* in Lat. $38\frac{1}{2}^{\circ}$ hora quinta matutina (id est, hora 10^a *Londini*) Cometam vidit supra Spicam \approx , & cum Spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi $\frac{3}{4}^{\circ}$. Observator idem, eadem hora diei sequentis, Cometam vidit quasi 2° inferiorem Spica. Congruent hæ observationes cum observationibus in *Nova-Anglia* & *Jamaica* factis, si modo distantia (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore superior esset Spica \approx , altitudine 1° circiter, ac die posteriore inferior eadem stella, altitudine perpendiculari $3^{\circ} 40'$.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, hora sexta matutina *Venetis* (id est, hora 5 10' *Londini*) Cometam vidit in $\approx 23^{\circ}$, cum latitudine australi $1^{\circ} 30'$. Eodem die *Bostoniæ*. distabat Cometa a Spica \approx , 4° longitudinis in orientem, adeoque erat in $\approx 23^{\circ} 24'$ circiter.

Nov. 21. *Ponthaus* & focii hor. mat. $7\frac{1}{2}$ Cometam observarunt in $\approx 27^{\circ} 50'$, cum latitudine australi $1^{\circ} 16'$; *Ango* hora quinta matutina in $\approx 27^{\circ} 45'$, *Montenarus* in $\approx 27^{\circ} 51'$. Eodem die in Insula *Jamaica*, Cometa visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica *Virginis*, id est, $2^{\circ} 2'$.

Nov. 22. Cometa visus est a *Montenaro* in $\approx 2. 33'$. *Bostoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in $\approx 3^{\circ}$ circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id est, $1^{\circ} 30'$. Eodem die *Londini*,

hora

hora mat. 6^h; *Hookius* noſter Cometam vidit in m 3^h. 30' circiter, idque in linea recta quæ tranſit per Spicam Virginis & Cor Leonis, non exacte quidem, ſed a linea illa paululum deſtendentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a Cometa per Spicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per australe latus Cordis Leonis, interpoſito perparvo intervallo inter Cor Leonis & hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis & Spicam Virginis tranſiens, Eclipticam ſecuit in m 3^h. 46', in angulo 2^h. 51'. Et ſi Cometa locatus fuiſſet in hac linea in m 3^h, ejus latitudo fuiſſet 2^h. 26'. Sed cum Cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hac linea boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ m , eratque 1^h. 30' circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro*, & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam 1^h. 30'. Inter limites autem jam conſtitutos 2^h. 26' & 1^h. 30', magnitudine mediocri latitudo erit 1^h. 58' circiter. Cauda Cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad Spicam m , declinans aliquantulum a Stella iſta, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & Cauda Æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deſlectebatur ab oppoſitione Solis boream verſus.

Nov. 24. Ante ortum Solis Cometa viſus eſt a *Montenaro* in m 12^h. 52', ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis & Spicam Virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem, quam 2^h. 38'. Hæc latitudo, uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam 1^h. 58'; & magnitudine mediocri, abſque notabili errore, ſtatu poteſt 2^h. 18'. Latitudinem *Ponthæus* & *Galleſius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & *Obſervator* in *Nova-Anglia* eandem fere magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, ex præſertim quæ per Azimuthos & Altitudines capiebantur, ut & eæ *Galleſii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones Cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & *Obſervatore* in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ.

Jam collatis Obſervationibus inter ſe, colligere videor quod Cometa hoc menſe circum fere maximum deſcripſit, ſecantem Eclipticam in m 25. 12', idque in angulo 3^h. 12' quamproxime. Nam & *Montenarus* Orbitam ab Ecliptica in austrum, tribus ſal-

tem gradibus declinasse dicit. Et cognita cursus positione, longitudines Cometæ ex observationibus collectæ, ad incudem jam revocari possunt & melius nonnunquam determinari, ut fit in sequentibus. *Cellius* Novemb; 17. observavit distantiam Cometæ a Spica α , æqualem esse distantia ejus a stella lucida in dextra ala Corvi: & hinc locandus est Cometa in interfectione hujus circuli quem Cometa motu apparente descripsit, cum circulo maximo qui a fixis illis duabus æqualiter distat, atque adeo in $\approx 7^{\circ} 54'$, cum latitudine australi $43'$. Præterea *Montenarus*, Novemb. 20. hora sexta matutina *Venetis*, Cometam vidit non totis quatuor gradibus distantiam a Spica; dicitque hanc distantiam, vix æquasse distantiam stellarum duarum lucidarum in alis Corvi, vel duarum in juba Leonis, hoc est 3° & $30'$ vel $32'$. Sit igitur distantia Cometæ a Spica $3^{\circ} 30'$, & Cometa locabitur in $\approx 22^{\circ} 48'$, cum latitudine australi $1^{\circ} 30'$. Adhæc *Montenarus*, Novemb. 21, 22, 24 & 25 ante ortum Solis, Sextante æneo quintupedali ad minuta prima & semiminuta diviso & vitris Telescopicis armato, distantias mensuravit Cometæ a Spica $8^{\circ} 28'$, $10^{\circ} 13'$, $23^{\circ} 30'$, & $28^{\circ} 13'$: & has distantias, per refractionem nondum correctas, addendo longitudini Spicæ, collegit Cometam his temporibus fuisse in $\approx 27^{\circ} 51'$. $m 2^{\circ} 33'$, $m 12^{\circ} 52'$ & $m 17^{\circ} 45'$. Si distantia illæ per refractiones corrigantur, & ex distantis correctis differentia longitudinum inter Spicam & Cometam probe deriventur, locabitur Cometa his temporibus in $\approx 27^{\circ} 52'$. $m 2^{\circ} 36'$, $m 12^{\circ} 58'$ & $m 17^{\circ} 53'$ circiter. Latitudines autem ad has longitudes in via Cometæ captas, prodeunt $1^{\circ} 45'$, $1^{\circ} 58'$, $2^{\circ} 22'$ & $2^{\circ} 31'$. Harum quatuor observationum horas matutinas *Montenarus* non posuit. Priores duæ ante horam sextam, posteriores (ob viciniam Solis) post sextam factæ videntur. Die 22, ubi Cometa ex observatione *Montenari* locatur in $m 2^{\circ} 36'$, *Hookius* noster eundem locavit in $m 3^{\circ} 30'$ ut supra. *Montenarus* in defectu, *Hookius* in excessu errasse videntur. Nam Cometa, ex serie observationum, jam fuit in $m 1^{\circ} 56'$ vel $m 3^{\circ}$ circiter.

Observationum suarum ultimam inter vapores & diluculum captam, *Montenarus* suspectam habebat. Et *Cellius* eodem tempore (id est, Novem. 25) Cometam per ejus Altitudinem & Azimuthum locavit in $m 15^{\circ} 47'$, cum latitudine australi quasi gradus unius. Sed *Cellius* observavit etiam eodem tempore, quod Cometa erat in linea recta cum stella lucida in dextro femore

Vir

Virginis & cum Lance australi Libræ, & hæc linea fecat viam LIBRA
TERTIUS. Cometæ in m 18^{gr} 36'. *Ponthæus* etiam eodem tempore observavit, quod Cometa erat in recta transeunte per Chelam austrinam Scorpii & per stellam quæ Lancem borealem sequitur: & hæc recta fecat viam Cometæ in m 16^{gr} 34'. Observavit etiam, quod Cometa erat in recta transeunte per stellam supra Lancem australem Libræ & stellam in principio pedis secundi Scorpii: & hæc recta fecat viam Cometæ in m 17^{gr} 55'. Et inter longitudes ex his tribus Observationibus sic derivatas, longitudo mediocris est m 17^{gr} 42', quæ cum observatione *Montenari* satis congruit.

Erravit igitur *Cellius* jam locando Cometam in m 15^{gr}. 47', per ejus Azimuthum & Altitudinem. Et similibus Azimuthorum & Altitudinum observationibus, *Cellius* & *Ponthæus* non minus erraverunt locando Cometam in m 20 & m 24 diebus duobus frequentibus, ubi stellæ fixæ ob diluculum vix aut ne vix quidem apparuere. Et corrigendæ sunt hæc observationes per additionem duorum graduum, vel duorum cum semisse.

Ex omnibus autem Observationibus inter se collatis & ad meridianum *Londini* reductis, colligo Cometam hujusmodi cursum quamproxime descripsisse.

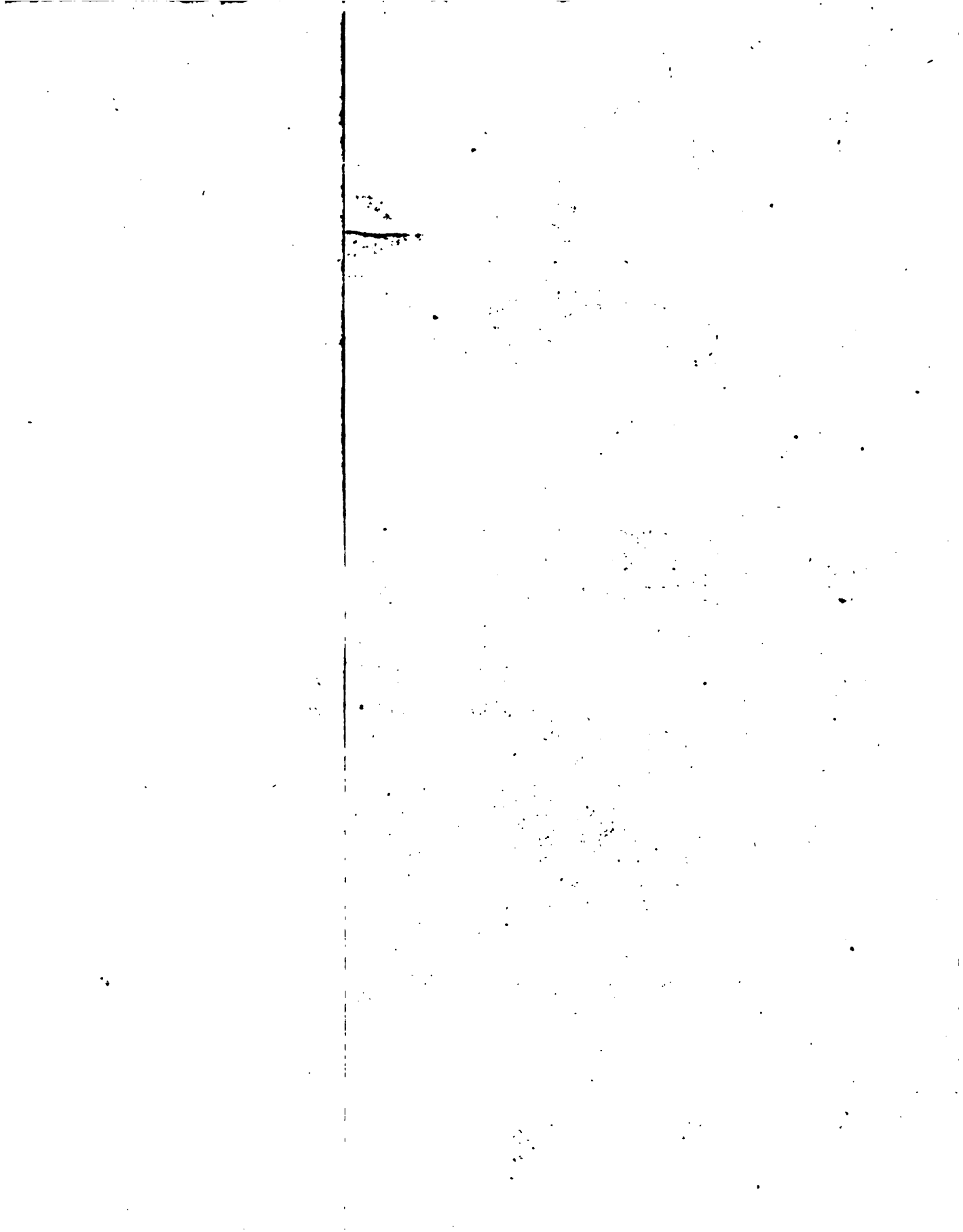
| Temp. med. st. vet. | | | Long. Cometæ | | Lat. Cometæ | |
|---------------------|-----|----------|--------------|-----|-------------|-------|
| d. | h. | | gr. | ' | gr. | ' |
| Nov. | 16. | 17 . 10 | m 8 . | 0 | 0.44 | Auft. |
| | 17. | 17 . 10 | 12 . | 52 | 1 . | 0 |
| | 18. | 21 . 44 | 18 . | 40 | 1.18 | |
| | 19. | 17 . 10 | 22 . | 48 | 1.30 | |
| | 20. | 17 fere | 27 . | 52 | 1.45 | |
| | 21. | 17 fere | m 2 . | 56 | 1.58 | |
| | 23. | 17½ fere | 12 . | 58 | 2.20 | |
| | 24. | 17½ fere | 17 . | 53 | 2.29 | |
| | 26. | 18 . 00 | 26 vel 27 | gr. | 2.42 | |

Loca autem Cometæ in Orbe Parabolico computata, ita se habent.

| Temp. verum | | Dist. Com. a ☉ | Long. comp. | | Lat. comp. | |
|-------------|-----|----------------|-------------|--------------|------------|---------------|
| h. | h. | | gr. | ' | gr. | ' |
| Nov. | 16. | 17 . 0 | 83920 | m 8 . | 0.25 | 0.43.20 Auft. |
| | 18. | 21.34 | 78020 | 18.41.50 | 1.17.30 | |
| | 20. | 16.50 | 73012 | 27.59.40 | 1.44.25 | |
| | 23. | 17 . 5 | 64206 | m 13.19.15 | 2.21.8 | |
| | 26. | 17 . 0 | 54799 | 26.46.30 | 2.42.30 | |

Con-

Congruunt igitur Observationes Astronomicæ, tam mense *Novembri* quam mensibus quatuor sequentibus, cum motu Cometæ circum Solem in Trajectoria hacce Parabolica, atque adeo unum & eundem Cometam fuisse, qui mense *Novembri* ad Solem descendit, & mensibus sequentibus ab eodem ascendit, abunde confirmant, ut & hunc Cometam in Trajectoria hacce Parabolica delatum fuisse quamproxime. Mensibus *Decembri*, *Januario*, *Februario* & *Martio*, ubi Observationes hujus Cometæ sunt satis accuratæ, congruunt eadem cum motu ejus in hac Trajectoria, non minus accurate quam observationes Planetarum congruere solent cum eorum Theoriis. Mense *Novembri*, ubi observationes sunt crassæ, errores non sunt majores quam qui crassitudini observationum tribuantur. Trajectoria Cometæ bis secuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine Virginis & principio Capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus Cometæ plurimum deflectebatur a Circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab Ecliptica in austrum declinabat, & postea mense *Decembri* gradibus 29 vergebat ab Ecliptica in septentrionem, partibus duabus Orbitæ in quibus Cometa tendebat in Solem & redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic Cometa per signa fere novem, a Virginis scilicet duodecimo gradu ad principium Geminorum; præter signum Leonis per quod pergebat antequam videri cœpit: & nulla alia extat Theoria, qua Cometa tantam Cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris*, descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea vero motu iterum accelerato, descripsit gradus fere quinque singulis diebus. antequam motus iterum retardari cœpit. Et Theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe respondet, quæque easdem observat leges cum Theoria Planetarum, & cum accuratis observationibus Astronomicis accurate congruit, non potest non esse vera. Cometa tamen sub finem motus deviat ab hac Trajectoria Parabolica versus axem Parabolæ, ut ex erroribus minuti unius primi duorumve in latitudinem mense *Februario* & *Martio* conspirantibus, colligere videor; & propterea in Orbe Elliptico



Linea Nodorum Orbis

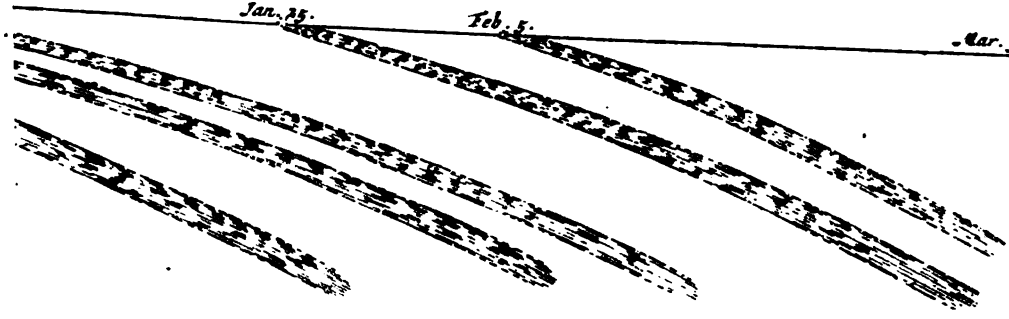
Orbis Cometae

Axis Orbis

Jan. 25.

Feb. 5.

Mar. 5.



liptico circum Solem movebatur, spatio annorum plusquam quingentorum, quantum ex erroribus illis judicare licuit, revolutionem peragens.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa descripsit, & Caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere: Observationibus sequentibus in Cauda desumenda adhibitis.

Nov. 17 Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov. 18* Cauda 30^{gr} longa, Solique directe opposita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam δ , quæ tunc erat in $9^{\text{gr}} 54'$. *Nov. 19* in *Mary-Land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec. 10* Cauda (observante *Fiamstedio*) transibat per medium distantiam inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in Aquilæ australi ala, & desinebat prope stellas *A, u, b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in $19\frac{1}{2}^{\text{gr}}$ cum latitudine boreali $33\frac{1}{4}^{\text{gr}}$ circiter. *Dec. 11* surgebat ad usque caput Sagittæ (*Bayero, a, b,*) desinens in $26^{\text{gr}} 43'$, cum latitudine boreali $38^{\text{gr}} 34'$. *Dec. 12* transibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, desinens in 4^{gr} , cum latitudine boreali $42\frac{1}{4}^{\text{gr}}$ circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec. 12*, hora 5, 40' *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra Cygni Uropygium ad gradus 10 sese extulit; atque ab hac stella ejus latus ad occasum & boream min. 45 destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat a Stella illa $2^{\text{gr}} 15'$ austrum versus, & terminus superior erat in 22^{gr} cum latitudine boreali 61^{gr} . *Dec. 21* surgebat fere ad cathedram *Cassiopeie*, æqualiter distans a β & *Schedir*, & distantiam ab utraque distantiam earum ab invicem æqualem habens, adeoque desinens in 24^{gr} cum latitudine $47\frac{1}{4}^{\text{gr}}$. *Dec. 29* tangebatur *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54^{gr} adeoque desinebat in 19^{gr} cum latitudine 35^{gr} . *Jan. 5* tetigit stellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus suum dextrum, & stellam μ in ejus cingulo, ad latus sinistrum; & (juxta Observationes nostras) longa erat 40^{gr} ; curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum

octo. *Jan.* 13 Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Al-mesh* & *Algol*, & luce tenuissima desinebat e regione *stellæ* α in latere *Persei*. Distantia termini caudæ a circulo *Solem* & *Cometam* jungente erat 3^u $50'$; & inclinatio chordæ caudæ ad circum illum $8\frac{1}{2}^u$. *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissima & ægerrime sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad *Lucidam* in humero orientali *Aurigæ* accurate, adeoque declinabat ab oppositione *Solis* boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 16 Caudam oculis armatis aspecti gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per ultra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7 se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua *Cometæ* hujus *Phænomena* in animo revolventi, haud difficulter constabit quod corpora *Cometarum* sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum *Planetarum*. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes *Terræ*, *Solis* & *Planetarum*, *Cometa* hicce in transitu suo per viciniam *Solis* statim dissipari debuisset. Est enim calor *Solis* ut radiorum densitas, hoc est, reciproce ut quadratum distantia locorum a *Sole*. Ideoque cum distantia *Cometæ* a centro *Solis* *Decemb.* 8 ubi in *Perihelio* versabatur, esset ad distantiam *Terræ* a centro *Solis* ut 6 ad 1000 circiter, calor *Solis* apud *Cometam* eo tempore erat ad calorem *Solis* æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum *Solem*, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis, adeoque calor quem terra arida apud *Cometam* in *Perihelio* versantem ex radiis *Solaribus* concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in *Perihelio* suo calorem immensum ad *Solem* concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambicantis

... de latitudine boreali 28^o 6', Sole existente in ♄ 18^o 26'. Et Cometa Anni 1577, Dec. 29 versabatur in ♄ 8^o 41' cum latitudine boreali 28^o 40', Sole etiam existente in ♄ 18^o 26' circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eadem coeli parte: in priori tamen casu cauda Cometæ (ex meis & aliorum Observationibus) declinabat angulo graduum 4½ ab oppositione Solis aquilonem versus; in posteriore vero (ex Observationibus Tychois) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiata coelorum refractione, superest ut Phenomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriverentur.

Caudam autem a capitibus oriri & in regiones a Sole averfas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis

planis Orbium Cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes, quas capita in Orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus a Sole directe averfis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad Orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in recta sunt linea a Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiore & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non sunt per refractionem cœlorum, sed a capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus: ita in Cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel recta petere, si corpus fumans quiescit; vel oblique, si corpus progrediendo loca semper deserit a quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De Caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus Aeris nostri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obscurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lactæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint; ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatii tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligitur ex raritate Aëris nostri. Nam Aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quam Aqua ejusdem ponderis, ideoque Aëris columna cylindrica pedes 850 alta, ejusdem est ponderis cum Aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem Aëris ad summitatem Atmosphære affurgens æquat pondere suo columnam Aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si columnæ totius Aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam Aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypothesi multis experimentis confirmata, quod compressio Aëris sit ut pondus Atmosphære incumbentis, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantie locorum a centro Terræ) computationem per Corol. Prop. xxii. Lib. II. inveni quod Aer, si ascendatur a superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longe majori, quam spatii omnis infra Orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus Aëris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, implet omnes Planetarum regiones ad usque spheram Saturni & longe ultra. Proinde cum Aer adhuc altior in immensum rarefcat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debet cauda esse quam rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aëris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut Aer in spatiis coelestibus inque Cometarum caudis non adeo rarefcat; perexiguam tamen quantitatem Aëris & vaporum, ad omnia illa caudarum Phenomena abunde sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum miliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam vero caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento transluere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam Aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in mare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam fecat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat a Sole, ascendere coepit a capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non recta ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ Orbem fecat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inversi quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan. 25*, ascendere coeperat a capite ante *Dec. 11*, adeoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec. 10* apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui a tempore Perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia Solis celerrime ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni constabat qui a tempore Perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam a Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo a capitibus, & mox evanescent, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cælos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes a Sole averfas *Keplerus* adscribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est a ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impeditissimis in regionibus nostris, a radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam a Sole ascendere.

DE MONDI
SYST. MATHE

dere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servata quantitate materiae intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiae caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu Aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit a Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam qua prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur a Sole recedere, at Solis Atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem a Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia Solis, ubi Orbes curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt, & caudas quam longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsis pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant a capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadunt, vel simul in ascensu suo retardabuntur; adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem a causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque, facillime accipiant & postea liberrime servent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum Periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu a capitibus propagari debent, & subinde, in Periheliis Cometarum illorum qui ad usque Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuo rarefcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem

riorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per coelos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri, rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis, requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decedit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum fumerent, perpetuo decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor Spiritum illum, qui Aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem, excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum a Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur si modo Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsitan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus, crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terra distantis, obscurius apparuit post Perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferris solebat, at Mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigiensi*, *Novemb.* 19, Cometa hicce luce sua quantumvis plumbea & obtusa, æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus Mense *Decembri*, ubi caudam

DE MONDI
SÆCULI

maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ, qui Mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emisserunt, apparuerint subobscura & exigua. Nam Anno 1668. *Mart. 5.* St. nov. hora septima vespertina *R. P. Valentinus Estancius, Brasilia* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere coeli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra Horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est quod caput a Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et similis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, cujus Stella erat parva & obscura (ut ille anni 1680) sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat, ut habet *Hevolus* ex *Simone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio Mensis *Februarii*, circa vespèram, ad occasum Solis brumalem. Inde vero & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. A Sole, inquit *Matthæus Parisiensis*, distabat quasi cubito uno, ab hora tertia [rectius sexta] usque ad horam nonam radium ex se longum emittens. Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. I. *Meteor. 6.* cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardonem [caudæ scilicet] nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore (ait *Aristoteles*) cum [cauda] jam minus flagraret, reddita est [capiti] Cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque caeli partem [id est, ad 60^o] extendit. Apparuit autem tempore

tempore hyberno, & ascendens usque ad circulum Orionis ibi commisit. L. 1222
T. 2. 125.
Cometa ille anni 1688, qui ex radiis Solaribus caudatissimus emerfit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometæ esse genus Planetarum in Orbibus vultu eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e Planetis non caudatis, minores esse solent qui in Orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, sic etiam Cometæ, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, ne Solem attractione sua nimis agitent, rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iisdem Orbibus post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Trajectoriam Cometæ Graphice inventam corrigere.

Oper. 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem Graphice inventa; & feligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maxime distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longe a Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniuntur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunt D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota D + E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20' vel 30', quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex

prædictis tribus Cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut supra:) deinde etiam Orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e , nec non tempus totum t quo area tota $d+e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam $20'$ vel $30'$, quæ dicantur Q . Deinde ex observatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e , & tempus totum t quo area tota $d+e$ describi debeat.

Jam sit C ad i ut A ad B , & G ad i ut D ad E , & g ad i ut d ad e , & γ ad i ut δ ad ϵ ; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis $+$ & $-$ probe observatis quærantur numeri m & n , ea lege, ut sit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $2T - 2S$ æquale $mT - mt + nT - nr$. Et si, in operatione prima, I designet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique si in operatione prima, secunda ac tertia, quantitates R , r & ρ designent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{r}{L}$, $\frac{r}{l}$, $\frac{\rho}{\lambda}$ ejusdem Latera transversa respective: erit $R+mr - mR + n\rho - nR$ verum Latus rectum, & $\frac{I}{L+ml - m} \frac{I}{L+n\lambda - nL}$ verum Latus transversum Trajectoriæ quam Cometa describit. Dato autem Latere transverso datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

Cæterum Cometarum revolvantium tempora periodica, & Orbium latera transversa, haud satis accurate determinabuntur, nisi per collationem Cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures Cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem Orbem descripsisse reperiantur; concludendum erit hos omnes esse unum & eundem Cometam, in eodem Orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus, dabuntur Orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur Orbes Elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur Cometarum plurimum Trajectoriæ, ex hypothesi quod sint Parabolicæ. Nam hujusmodi Trajectoriæ cum Phænomenis semper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex Trajectoria Parabolica Cometæ anni 1680, quam cum observationibus supra contuli, sed etiam ex ea Cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudes & latitudes hujus Cometæ computavit, sed minus accurate. Ex iisdem observationibus, *Halleius* noster loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis sic inventis Trajectoriam Cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum ascendentem in π 21^h. 13'. 55", Inclinationem Orbitæ ad planum Eclipticæ 21^h. 18'. 40", distantiam Perihelii a Nodo in Orbita 49^h. 27'. 30". Perihelium in Ω 8^h. 40'. 30" cum Latitudine austrina heliocentrica 16^h. 1'. 45". Cometam in Perihelio *Novemb.* 24^d. 11^h. 52'. P.M. tempore æquato *Londini*, vel 13^h. 8' *Gedani*, stylo veteri, & Latus rectum Parabolæ 410286, existente mediocri Terræ a Sole distantia 100000. Quam probe loca Cometæ in hoc Orbe computata, congruunt cum observationibus, patebit ex Tabula sequente ab *Halleio* supputata.

| Temp. Appar. <i>Gedani</i> | Observata Comete distantia | Loca observata: | Loca computata in Orbe. |
|---|----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <i>Decemb.</i> 3 ^d . 18 ^h . 29 ¹ / ₂ | a Corde Leonis | 8 ^h . 7. 1. 0 | 8 ^h . 7. 1. 0 |
| | a Spica Virginis | 21. 38. 50 | 21. 38. 50 |
| 4. 18. 1 ¹ / ₂ | a Corde Leonis | 6. 15. 0 | 6. 16. 5 |
| | a Spica Virginis | 22. 24. 0 | 22. 24. 0 |
| 7. 17. 48 | a Corde Leonis | 3. 6. 0 | 3. 7. 33 |
| | a Spica Virginis | 25. 22. 0 | 25. 21. 40 |
| 17. 14. 43 | a Corde Leonis | 2. 56. 0 | 2. 56. 0 |
| | ab Humero Orionis dextr. | 49. 25. 0 | 49. 25. 0 |
| 19. 9. 25 | a Procyone | 28. 40. 30 | 28. 43. 0 |
| | a Lucid. Mandib. Ceti | 45. 48. 0 | 45. 46. 0 |
| 20. 9. 53 ¹ / ₂ | a Procyone | 13. 3. 0 | 13. 5. 0 |
| | a Lucid. Mandib. Ceti | 39. 54. 0 | 39. 53. 0 |
| 21. 9. 9 ¹ / ₂ | ab Hum. dextr. Orionis | 2. 16. 0 | 2. 18. 30 |
| | a Lucid. Mandib. Ceti | 33. 41. 0 | 33. 39. 40 |
| 22. 9. 0 | ab Hum. dextr. Orionis | 24. 24. 0 | 24. 27. 0 |
| | a Lucid. Mandib. Ceti | 27. 45. 0 | 27. 46. 0 |
| 26. 7. 58 | a Lucida Arietis | 9. 0. 0 | 9. 2. 28 |
| | ab Aldebaran | 12. 56. 0 | 12. 54. 13 |

Temp.

DE MUNDI
SYSTEMATE

| Temp. Appar. Galen. | | Observata Cometae distantia | Loca observata | Loca in Orbe | |
|------------------------|----|-----------------------------|---|--|--|
| d. | h. | | | | |
| 27 | 6 | 45 | a Lucida Arctis ab Aldebaran | Long. γ 7. 5. 40 Lat. a. 10. 25. 0 | γ 7. 8. 34 10. 29. 13 |
| 28 | 7 | 37 | a Lucida Arctis a Palhicio | Long. γ 5. 24. 45 Lat. a. 8. 22. 50 | γ 5. 27. 52 8. 23. 37 |
| 31 | 6 | 43 | a Cing. Androm. a Palhicio | Long. γ 2. 7. 40 Lat. a. 4. 13. 0 | γ 2. 8. 20 4. 16. 25 |
| Jan. | | | a Cing. Androm. a Palhicio | Long. γ 23. 14. 47 Lat. bor. 0. 54. 0 | γ 23. 24. 0 0. 53. 0 |
| 7 | 7 | 37 | a Palhicio a Cing. Androm. | Long. γ 26. 29. 15 Lat. bor. 5. 25. 50 | γ 26. 28. 50 5. 26. 0 |
| 24 | 7 | 29 | Cometa ab <i>Halleo</i> prope secundam Arctis observata, <i>Mer.</i> 14. 7 ^h . 0' <i>Londini</i> , cum | | Long. γ 29. 17. 10 Lat. bor. 8. 37. 10 |
| Mer. | | | | | γ 29. 18. 10 8. 36. 12 |
| 1 | 8 | 5 | | | |

Apparuit hic Cometa per menses tres, signaque fere sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, Theoria a principio ad finem cum observationibus non minus accurate congruit, quam Theoriæ Planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi Cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter Nodum ascendentem & Perihelium, seu constituendo angulum illum $49^{\circ} 27' 18''$. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) parallaxis annua insignis fuit, & inde demonstratur motus annuus Terræ in Orbe magno.

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in Orbe cujus planum cum plano Eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus Nodus ascendens (computante *Halleo*) erat in π $23^{\circ} 23'$; Inclinatio Orbitæ ad Eclipticam $83^{\circ} 11'$; Perihelium in π $25^{\circ} 29' 30''$; Distantia perihelia a Sole 56020, existente radio Orbis magni 10000, & tempore Perihelii *Julii* 2^d. 3^h. 50'. Loca autem Cometæ in hoc Orbe ab *Halleo* computata, & cum locis a *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in Tabula sequente.

| 1683 | Locus Solis. | Cometæ | Lat. Bor. | Cometæ | Lat. Bor. | Differ. | Differ. |
|-----------------|--------------|--------------|------------|---------------|------------|---------|---------|
| Temp. Aequat. | | Long. Comp. | Comp. | Long. Obs. | Obscr. | Long. | Lat. |
| h. d. / | gr. / " | gr. / " | gr. / " | gr. / " | gr. / " | /' " | /' " |
| Jul. 23. 22. 95 | ♌ 1. 2. 50 | ♄ 13. 5. 42 | 29. 28. 13 | ♄ 13. 6. 42 | 29. 28. 20 | + 1. 0 | + 0. 7 |
| 15. 11. 15 | 2. 53. 12 | 11. 37. 48 | 29. 34. 0 | 12. 39. 43 | 29. 34. 50 | + 1. 55 | + 0. 59 |
| 27. 10. 20 | 4. 41. 45 | 10. 7. 6 | 29. 33. 30 | 10. 8. 40 | 29. 34. 0 | + 1. 34 | + 0. 30 |
| 23. 13. 40 | 10. 38. 21 | 5. 10. 27 | 28. 51. 42 | 5. 11. 30 | 28. 50. 28 | + 1. 3 | - 1. 14 |
| 25. 14. 5 | 12. 55. 28 | 3. 27. 53 | 24. 24. 47 | 3. 27. 0 | 28. 23. 40 | - 0. 52 | - 1. 7 |
| 31. 9. 42 | 18. 9. 22 | II 27. 55. 3 | 25. 22. 52 | II 27. 54. 26 | 26. 22. 25 | - 0. 39 | - 9. 27 |
| 31. 14. 55 | 18. 21. 53 | 27. 41. 7 | 26. 16. 57 | 27. 41. 8 | 26. 14. 50 | + 0. 1 | - 2. 7 |
| Aug. 2. 24. 56 | 20. 17. 16 | 25. 29. 32 | 25. 16. 19 | 25. 28. 46 | 25. 17. 28 | - 0. 46 | + 1. 9 |
| 4. 10. 49 | 22. 2. 50 | 23. 18. 20 | 24. 10. 49 | 23. 16. 55 | 24. 12. 19 | - 1. 25 | + 1. 30 |
| 6. 10. 9 | 23. 56. 45 | 20. 42. 23 | 22. 47. 5 | 20. 40. 32 | 22. 49. 5 | - 1. 51 | + 2. 0 |
| 9. 10. 26 | 26. 50. 52 | 16. 7. 57 | 20. 6. 37 | 16. 5. 55 | 20. 6. 10 | - 2. 2 | - 0. 27 |
| 15. 14. 1 | 2. 47. 13 | 3. 30. 48 | 11. 37. 33 | 3. 26. 18 | 11. 32. 1 | - 4. 30 | - 5. 32 |
| 16. 15. 10 | 3. 48. 2 | 0. 43. 7 | 9. 34. 16 | 0. 41. 55 | 9. 34. 13 | - 1. 12 | - 0. 3 |
| 22. 15. 44 | 5. 45. 33 | ♃ 24. 52. 53 | 5. 12. 15 | ♃ 24. 49. 5 | 6. 9. 11 | - 3. 48 | - 2. 4 |
| | | | Austr. | | Austr. | | |
| 22. 14. 44 | 9. 35. 49 | 11. 7. 14 | 5. 16. 53 | 11. 7. 12 | 5. 16. 50 | - 0. 2 | - 0. 3 |
| 23. 15. 52 | 10. 36. 48 | 7. 2. 18 | 8. 17. 9 | 7. 3. 17 | 8. 16. 41 | - 1. 1 | - 0. 28 |
| 26. 16. 2 | 13. 3. 10 | ♃ 24. 45. 21 | 16. 38. 0 | ♃ 24. 44. 0 | 16. 38. 20 | - 1. 31 | + 0. 20 |

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ retrogradi qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus ascendens (computante *Mablio*) erat in $♄ 21^{\circ} 16' 30''$. Inclinatio Orbitæ ad planum Eclipticæ $17^{\circ} 56' 0''$. Perihelium in $♄ 2^{\circ} 52' 50''$. Distantia perihelia a Sole 58328. Et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4^d. 7^h. 39'. Loca vero ex observationibus *Flamstedii* computata, & cum locis per Theoriam computatis collata, exhibentur in Tabula sequente.

| 1682 | Locus Solis. | Cometæ | Lat. Bor. | Cometæ | Lat. Bor. | Differ. | Differ. |
|-----------------|--------------|--------------|------------|--------------|------------|---------|---------|
| Temp. Apar. | | Long. Comp. | Comp. | Long. Obs. | Obscr. | Long. | Lat. |
| h. d. / | gr. / " | gr. / " | gr. / " | gr. / " | gr. / " | /' " | /' " |
| Aug. 19. 16. 38 | ♌ 7. 0. 7 | ♄ 18. 14. 28 | 25. 50. 7 | ♄ 18. 14. 40 | 25. 49. 55 | - 0. 12 | + 0. 12 |
| 20. 15. 38 | 7. 55. 52 | 24. 46. 23 | 26. 14. 42 | 24. 46. 22 | 26. 12. 52 | + 0. 1 | + 1. 50 |
| 21. 8. 21 | 8. 36. 14 | 29. 37. 15 | 26. 20. 3 | 29. 38. 2 | 26. 17. 37 | - 0. 47 | + 2. 16 |
| 22. 8. 8 | 9. 33. 55 | ♌ 6. 29. 53 | 26. 8. 42 | ♌ 6. 30. 3 | 26. 7. 12 | - 0. 10 | + 1. 30 |
| 29. 8. 20 | 16. 22. 40 | ♄ 12. 37. 54 | 18. 37. 47 | ♄ 12. 37. 49 | 18. 34. 5 | + 0. 5 | + 3. 42 |
| 30. 7. 45 | 17. 19. 41 | 15. 36. 1 | 17. 26. 45 | 15. 35. 18 | 17. 27. 17 | + 0. 45 | - 0. 34 |
| Sept. 1. 7. 33 | 19. 16. 9 | 20. 30. 13 | 15. 13. 0 | 20. 27. 4 | 15. 9. 49 | + 3. 49 | + 3. 11 |
| 4. 7. 22 | 22. 11. 28 | 25. 42. 0 | 12. 23. 48 | 25. 40. 58 | 12. 22. 0 | + 1. 2 | + 1. 48 |
| 5. 7. 32 | 23. 10. 29 | 27. 0. 46 | 11. 31. 8 | 26. 59. 24 | 21. 33. 51 | + 1. 22 | - 0. 45 |
| 8. 7. 16 | 26. 5. 58 | 29. 58. 44 | 9. 26. 46 | 29. 58. 45 | 9. 26. 43 | - 0. 1 | + 0. 3 |
| 9. 7. 26 | 27. 5. 9 | ♌ 0. 44. 10 | 8. 49. 10 | ♌ 0. 44. 4 | 8. 48. 25 | + 0. 6 | + 0. 45 |

His exemplis abunde satis manifestum est, quod motus Cometarum per Theoriam a nobis expositam non minus accurate exhibentur,

hibentur, quam solent motus Planetarum per eorum Theorias. Et propterea Orbes Cometarum per hanc Theoriam enumerari possunt, & tempus periodicum Cometæ in quolibet Orbe revolventis tandem sciri, & tum demum Orbium Ellipticorum latera transversa & Apheliorum altitudines innotescunt.

Cometa retrogradus qui apparuit anno 1607, descripsit Orbem cujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in $8\ 20^{\text{e}}\ 21'$. Inclinatio plani Orbis ad planum Eclipticæ erat $17^{\text{e}}\ 2'$. Perihelium erat in $\approx 2^{\text{e}}\ 16'$, & distantia perihelia a Sole erat 58680, existente radio Orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* $16^{\text{d}}\ 3^{\text{h}}\ 50'$. Congruit hic Orbis quamproxime cum Orbe Cometæ qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa spatio annorum 75, & axis major Orbis ejus erit ad axem majorem Orbis magni, ut $\sqrt{c}: 75 \times 75$ ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. Et distantia aphelia Cometæ hujus a Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit Orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt si Cometa spatio annorum septuaginta quinque, in hoc Orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius ascendere.

Cæterum Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum a Sole distantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non est expectandum ut Cometa idem, in eodem Orbe & iisdem temporibus periodicis, accurate redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quam quæ a causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco (more Planetarum) sed inde migrent & motibus variis in omnes coelorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis suis ubi tardissime moventur, quam longissime distent ab invicem & se mutuo quam minime trahant. Qua de causa Cometæ qui altius descendunt, adeoque tardissime moventur in Apheliis, debent altius ascendere.

Cometa qui anno 1680 apparuit, minus distabat a Sole in Perihelio suo quam parte sexta diametri Solis; & propter summam velocitatem in vicinia illa, & densitatem aliquam Atmosphæræ Solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari,

dari & propius ad Solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio ubi tardissime movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari potest & subinde in Solem incidere. Sic etiam Stellæ fixæ quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro Stellis Novis haberi. Vapores autem qui ex Sole & Stellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in Atmosphæras Planetarum, & ibi condensari & converti in aquam & spiritus humidos, & subinde per lentum calorem in sales, & sulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & substantias alias terrestres paulatim migrare. Decrescente autem corpore Solis motus medii Planetarum circum Solem paulatim tardescunt, & crescente Terra motus medius Lunæ circum Terram paulatim augetur. Et collatis quidem observationibus Eclipsium *Babylonis* cum iis *Albategni* & cum hodiernis, *Halleius* noster motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum, paulatim accelerari, primus omnium quod sciam deprehendit.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypothesis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unusquisque radio ad Solem ducto areas describat tempore proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent esse in duplicata ratione distantiarum a Sole. Ut periodica Planetarum tempora sint in proportione sesquuplicata distantiarum a Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent esse in eadem distantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conserventur & tranquille natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis Solaris deberent esse æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes suos ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus Cometarum sunt summe regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest nisi Vortices tollantur.

Projectilia, in aere nostro, solam aeris resistentiam sentiunt. Sublato aere, ut fit in Vacuo *Boylano*, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc

Dr. MONDI
SYSTEMATA

Vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium quæ sunt supra atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrime moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus specie & positione datis, secundum leges supra expofitas, perpetuo, revolvi. Perfeverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hæc minime potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium Planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis Mechanicis; siquidem Cometæ in Orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes libere feruntur. Quo motus genere Cometæ per Orbes Planetarum celerissime & facillime transeunt, & in Apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur, quam longissime distant ab invicem, & se mutuo quam minime trahunt. Elegantissima hæc Solis, Planetarum & Cometarum compages non nisi consilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si Stellæ fixæ sint centra similium systematum; hæc omnia simili consilio constructa, suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux Fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, & systemata omnia hæc in omnia invicem immittant.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, sed ut univerforum Dominus; & propter dominium suum Dominus Deus

* Id est, Imperator universalis.

* παντοκράτωρ dici solet. Nam Deus est vox relativa & ad servos refertur: & Deitas est dominatio Dei non in corpus proprium, sed in servos. Deus summus est Ens æternum, infinitum, absolute perfectum; sed Ens utcumque perfectum sine dominio, non est Dominus Deus. Dicimus enim Deus meus, Deus vester, Deus Israelis: sed non dicimus Æternus meus, Æternus vester, Æternus Israelis; non dicimus Infinitus meus, Infinitus vester, Infinitus Israelis; non dicimus Perfectus meus, Perfectus vester, Perfectus Israelis. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox Deus passim significat Dominum, sed omnis Dominus non est Deus. Dominatio Entis spiritualis Deum constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione vera sequitur, Deum verum esse vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus suam esse vel summe perfectum.

fectum. *Aternus est & Infinitus, Omnipotens & Omnisciens*, id est, durat ab aeterno in aeternum & adest ab infinito in infinitum, omnia regit & omnia cognoscit quæ sunt aut sciri possunt. Non est aternitas vel infinitas, sed aternus & infinitus; non est duratio vel spatium, sed durat & adest. Durat semper & adest ubique, & existendo semper & ubique durationem & spatium, aternitatem & infinitatem constituit. Cum utriusque spatii particula sit semper, & unumquodque durationis indivisibile momentum ubique; certe rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *numquam nusquam*. Omnipræsens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*; nam virtus sine substantia subsistere non potest. In ipso * continentur & moventur universa, sed absque mutua *passione*. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræsencia Dei. Deum summum necessario existere in confesso est: Et eadem necessitate semper est & ubique. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi & agendi; sed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus ideam non habet colorum, sic nos ideam non habemus modorum quibus Deus sapientissimus sentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorsus destituitur, ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus Substantia minime cognoscimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum sonos, tangimus tantum superficies externas, olfacimus odores solos, & gustamus sapes; Intimas substantias nullo sensu, nulla actione reflexa cognoscimus, & multo minus ideam habemus substantiæ Dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates suas & attributa, & per sapientissimas & optimas rerum structuras, & causas finales; veneramur autem & colimus ob dominium. Deus enim sine dominio, providentia, & causis finalibus, nihil aliud est quam Fatum & Natura. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis differere, ad *Philosophiam Experimentalem* pertinet.

* Ita sentiebant veteres, Aratus in Phænom: sub initio. Paulus in Act. 7. 27. 28. Masius Deum. 4. 39. & 10. 14. David Psal. 139. 7, 8. Solomon Reg. 8. 27. Job. 22. 12. Jeremias Propheta 23. 23, 24.

Hactenus Phænomena coelorum & maris nostri per Vim gravitatis exposui, sed causam Gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc Vis a causa aliqua quæ penetrat ad usque centra Solis

& Planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum in quas agit (ut solent causæ Mechanicæ,) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicata ratione distantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in singulas Solis particulas, & recedendo a Sole decrescit accurate in duplicata ratione distantiarum ad usque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifestum est, & ad usque ultima Cometarum Aphelia, si modo Aphelia illa quiescant. Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheses non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur, *Hypothesis* vocanda est; & Hypotheses seu Metaphysicæ, seu Physicæ, seu Qualitatum occultarum, seu Mechanicæ, in *Philosophia Experimentalis* locum non habent. In hac Philosophia Propositiones deducuntur ex Phænomenis, & redduntur generales per Inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod Gravitas revera existat, & agat secundum leges a nobis expositas, & ad corporum cœlestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente, cujus vi & actionibus particulae corporum ad minimas distantias se mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Sensatio omnis excitatur, & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus Spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum & a cerebro in musculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritus accurate determinari & monstrari debent.

F I N I S.

INDEX RERUM ALPHABETICUS.

N. B. Citationes facta sunt ad normam sequentis Exempli. III, 10: 444, 20: 471, 28 designant Libri tertii Propositionem decimam: Pagina 444^{am} lineam 20^{am}: Pagina 471^{am} lineam 28^{am}.

A.

Æ Quinquehorum præcessio
causæ hujus motus indicantur III,
21

quantitas motus ex causis computatur III, 39

Aeris

densitas ad quamlibet altitudinem colligitur
ex Prop. 22. Lib. II. quanta sit ad altitudinem
unius semidiametri Terrestris. ostenditur
470, 11

elastica vis quali causæ tribui possit II, 23

gravitas cum Aquæ gravitate collata 470, 3

resistentia quanta sit, per Experimenta Pendulorum colligitur 286, 28; per Experimenta corporum cadentium & Theoriam accuratius invenitur 327, 13

Anguli contactus non sunt omnes ejusdem generis, sed alii aliis infinite minores p. 32

Apsidum motus expenditur I, Sect. 9

Arcus quas corpora in gyros acta, radiis ad centrum virium ductis, describunt, conferuntur cum temporibus descriptionum I, 1, 2, 3, 58, 65

Attractio corporum universorum demonstratur III, 7; qualis sit hujus demonstrationis certitudo ostenditur 358, 28: 484, 11

Attractionis causam vel modum nullibi desinit Auctor 5, 17: 147, 32: 172, 31: 483, 34.

C.

Calore virga ferrea compacta est augeri longitudine 386, 4

Calor Solis quantum sit in diversis a Sole distantis 466, 20

quantus apud Mercurium 374, 12

quantus apud Cometam anni 1680 in Perihelio versantem 466, 22

Centrum commune gravitatis corporum plurimum, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis p. 17

Centrum commune gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere III, 11; confirmatur ex Cor. 2. Prop. 14. Lib. III.

Centrum commune gravitatis Terræ & Lunæ motu annuo percurrit Orbem magnum 376, 6 quibus intervallis distat a Terra & Luna 430, 22

Centrum Virium quibus corpora revolvantia in Orbibus retinentur

quali Arcuum indicio invenitur 38, 14

qua ratione ex datis revolvantium velocitatibus invenitur I, 5

Circuli circumferentia, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcumque datum describi potest a corpore revolvente 1, 4, 7, 8

Cœli

resistentia deserviuntur III, 10: 444, 20: 471, 28; & propterea Fluido omni corporeo 328, 18

transitum Luci præbent absque ulla refractione 467, 33

Cometæ

Genus sunt Planetarum, non Meteororum 444, 24: 466, 15

Luna superiores sunt, & in regione Planetarum versantur p. 439

Distantia eorum qua ratione per Observationes colligi potest quamproxime 439, 21

Plures observati sunt in hemisphærio Solem versus, quam in hemisphærio opposito; & unde hoc fiat 444, 5

Splendent luce Solis a se reflexa 444, 4; Lux illa quanta esse solet 441, 12

Cinguntur Atmosphæris ingentibus 442, 12: 444, 27

Qui ad Solem propius accedunt ut plurimum minores esse existimantur 475, 7

Quo fine non comprehenduntur Zodiaco (more Planetarum) sed in omnes cœlorum regiones varie feruntur 480, 30

Posiunt aliquando in Solem incipere & novum illi alimentum ignis præbere 480, 37

Usus eorum suggeritur 473, 1: 481, 7

Cometæ

INDEX RERUM.

Cometæ cæcæ
 & transire a Sole 428, 39
 nisi sint lux & fulgurantur fieri possunt
 transire per viciniam Solis 467. 8
 insignis eorum raritas 470, 32
 origo & natura expenditur 442, 19: 467, 29
 quo temporis spatio a capite ascendunt 471, 1

Cometæ
 Moventur in Sectionibus Conicis umbilicos
 in centro Solis habentibus, & radius ad So-
 lem ductis describuntur æque temporibus pro-
 portionales. Et quidem in Ellipsis mo-
 ventur si in Orbem redeunt, hæc tamen
 Parabolis erunt maxime finitimæ III, 40
 Trajectoria Parabolica ex datis tribus Obser-
 vationibus invenitur III, 41; Inventa cor-
 rigitur III, 42
 Locus in Parabola invenitur ad tempus da-
 tum 445, 30: I, 30
 Velocitas cum velocitate Planetarum confer-
 tur 445, 17

Cometa annorum 1664 & 1665
 Hujus motus observatus expenditur, & cum
 Theoria accurate congruere deprehenditur
 p. 477.

Cometa annorum 1680 & 1681
 Hujus motus observatus cum Theoria accu-
 rate congruere invenitur p. 455 & seqq.

Videbatur in Ellipsi revolvi spatio annorum
 plusquam quingenorum 464, 37
 Trajectoria illius & Cauda singulis in locis
 delineantur p. 465.

Cometa anni 1682
 Hujus motus accurate respondet Theoriae
 p. 479

Comparuisse visus est anno 1607, iterumque re-
 diturus videtur periodo 75 annorum 480, 6

Cometa anni 1683
 Hujus motus accurate respondet Theoriae
 p. 478

Curvæ distinguuntur in Geometricæ rationales &
 Geometricæ irrationales 100, 5

Curvarum figurarum qua ratione æstimanda sit
 235, 28: 392, 33.

Cycloidis seu Epicycloidis
 rectificatio I, 48, 49: 142, 18
 Evoluta I, 50: 142, 22

Cylindri attractio ex particulis trahentibus com-
 positi quarum vires sunt reciproce ut qua-
 drata distantiarum 198, 1

D.

Dei Natura p. 481 & 483
 Descensus gravium in vacuo quantus sit, ex lon-
 gitudine Penduli colligitur 379, 1
 Descensus vel Ascensus rectilinei spatia descri-
 pta, tempora descriptionum & velocitates ac-

quisque constituantur, postea descriptis ge-
 neris committitur I, Sect. 7.
 Descensus & Ascensus temporum in Mediâ re-
 ctitudinis II, 3, 8, 9, 40, 13, 14

Ellipsis
 qua lege vis centripete tendentis ad centrum
 figuræ describitur a corpore revolvente
 I, 10, 64
 qua lege vis centripete tendentis ad umbili-
 cum figuræ describitur a corpore revol-
 vente I, 11

F.

Fluidi definitio p. 260
 Fluidorum densitas & compressio quas leges ha-
 bent, ostenditur II, Sect. 5
 Fluidorum per fibras in vaso facti efflu-
 vium determinatur motus II, 36
 Fumi in camino ascensus obiter explicatur 478, 4

G.

Graduum in Meridiano Terræ mensuræ exhi-
 beretur, & quana sit exigua inæquitas osten-
 ditur ex Theoria III, 20

Gravitas
 diversi est generis a vi Magnética 368, 29
 motus est inter Terræ & ejus partes 22, 18
 ejus causa non assignatur 483, 34
 datur in Planetis universis 369, 15; & per-
 gendo a superficialibus Planetarum sursum
 decreta in duplicata ratione distantiarum
 a centro III, 8; deorsum decreta in sim-
 plici ratione quamproxiat III, 9
 datur in corpora omnia, & proportionaliter
 quantitati materię in singulis III, 7

Gravitatem esse vim illam qua Luna retinetur
 in Orbe III, 4, computo accuratiori com-
 probatur 450, 25

Gravitatem esse vim illam qua Planetæ primarii
 & Satellites Jovis & Saturni retinentur in
 Orbibus III,

H.

Hydrostaticæ principia traduntur II, Sect. 5
Hyperbola

qua lege vis centrifuga tendentis a figuræ cen-
 tro describitur a corpore revolvente 47, 26
 qua lege vis centrifuga tendentis ab umbilico
 figuræ describitur a corpore revolvente 50, 6
 qua lege vis centripete tendentis ab umbilico
 figuræ describitur a corpore revolvente I, 11
 Hypotheses conjunctæque generis rejiciuntur ab
 hac Philosophia 484, 6.

INDEX RERUM

I.

Inertia vis definitur p. 6
Jovis

- distans a Sole 46, 2
- semidiameter apprens 372, 3
- semidiameter vera 372, 24
- attractiva vis quanta sit 370, 33
- pondus corporum in ejus superficie 371, 37
- quantitas materiae 371, 27
- perturbatio a Saturno quanta sit 373, 33
- diametrorum proportio computo exhibetur 381, 27
- conversio circum axem quo tempore absolvi-
tur 381, 25
- cingulae causa subindicatur 444, 32.

L.

Locus definitur, & distinguitur in absolutum &
relativum 6, 12.

Locus corporum in Sectionibus conicis noto-
sum invenitur ad tempus assignatum I,
Sect. 6

Lunae

- propagatio non est instantanea 207, 5; non
fit per agnationem Mediae alicujus Liberei
342, 36
- velocitas in diversis Mediis diversa I, 95
- reflexio quaedam explicatur I, 96
- refractio explicatur I, 94; non fit in puncto
solum incidentiae 207, 29
- instauratio prope corporum terminos Expe-
rimentis observata 207, 8

Lunae

- corporis figura computo colligitur III, 38
- inde causa patefacta, cur eandem semper fa-
ciem in Terram obvertat 432, 9
- & librationes explicantur III, 17
- diameter mediocri apprens 430, 12
- diameter vera 430, 17
- pondus corporum in ejus superficie 430, 20
- densitas 430, 15
- quantitas materiae 430, 19
- distans a mediocri a Terra quos continet
maximas Terrae semidiametros 430, 25;
- quos mediocres 431, 28
- parallelismatima in longitudinem parte ma-
jor est quam parallelis maxima in latitu-
dinem 387, 8
- vis ad Mare movendum quanta sit III, 37;
- non fieri potest in Experimentis pendu-
losa, vel in Staticis aut Hydrostaticis
quibuscunque 430, 8
- tempus periclitium 430, 32
- tempus revolutionis (synodicae) 398, 7
- motus medius cum diurno motu Terrae col-

latus paulatim accelerari deprehenditur ab
Halleyo 481, 16

Lunae motus & motuum inaequalitates a causis
suis derivantur III, 22: p. 421 & seqq.

- tardius revoluitur Luna dilata Orbe, in pe-
rihelio Terrae; citius in aphelio, contracto
Orbe III, 22: 421, 6
- tardius revoluitur, dilata Orbe, in Apogei
Syzygiis cum Sole; citius in Quadrantibus
Apogei, contracto Orbe 422, 2
- tardius revoluitur, dilata Orbe, in Syzygiis
Nocti cum Sole; citius in Quadrantibus Mo-
di, contracto Orbe 422, 21
- tardius movetur in Quadrantibus suis cum Sole,
citius in Syzygiis; & radio ad Terram
distans describit arcum pro tempore mino-
rem in priore casu, majorem in posteriore
III, 22: Inaequalitas hanc Arcuum con-
putatur III, 26. Orbem insuper habet ma-
gis curvum & longius a Terra recedit in
priore casu, minus curvum habet Orbem
& propius ad Terram accedit in posteriore
III, 22. Orbis hujus figura & proportio
diametrorum ejus computo colligitur III,
28. Et subinde proponuntur methodus in-
veniendae distantiae Lunae a Terra ex motu
ejus duratio III, 27
- Apogium tardius movetur in Aphelio Terrae,
velocissime Perihelio III, 22: 421, 21
- Apogium ubi est in Solis Syzygiis, maxime
progreditur; in Quadrantibus regreditur III,
22: 422, 37
- Eccentricitas maxima est in Apogei Syzygiis
cum Sole; minima in Quadrantibus III, 22
422, 39
- Nodi tardius moventur in Aphelio Terrae, 207;
locus in Perihelio III, 22: 421, 21
- Nodi quiescunt in Syzygiis suis cum Sole, &
velocissime regrediuntur in Quadrantibus
III, 22. Nodorum motus & inaequalitates
maximam computantur ex Theoria Gravi-
tatis III, 30, 31, 32, 33
- Inclinatio Orbis ad Eclipticam maxima est in
Syzygiis Nodorum cum Sole, minima in
Quadrantibus I, 66 Cor. 10. Inclinacionis va-
riaciones computantur ex Theoria Gravitatis
III, 34, 35
- Lunarium motuum Aequationes ad usus Astro-
nomicos p. 421 & seqq.
- Motus medii Lunae
- Equatio annua 421, 4
- Equatio semestris prima 422, 2
- Equatio semestris secunda 422, 21
- Equatio centri prima 423, 20: p. 368 &
seqq.
- Equatio centri secunda 424, 37
- Variatio prima III, 29
- Variatio secunda 424, 3.

Motus

INDEX RERUM.

Motus mediæ Apogei
Æquatio annua 421, 21
Æquatio semestris 422, 37
Eccentricitatis
Æquatio semestris 422, 37
Motus mediæ Nodorum
Æquatio annua 421, 21
Æquatio semestris III, 33
Inclinationis Orbitæ ad Eclipticam
Æquatio semestris 420, 22
Lunarium motuum Theoria, qua Methodo stabilienda sit per Observationes 425, 33.

M.

Magnetica vis 22, 13: 271, 25: 368, 29: 431, 23.
Maris æstus a causis suis derivatur III, 24, 36, 37
Martis
 distantia a Sole 361, 1
 Aphelii motus 376, 33
Materiæ
 quantitas definitur p. 1
 vis insita seu vis inertie definitur p. 2
 vis impressa definitur p. 2
 extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, vis inertie, gravitas, qua ratione innotescunt 357, 16: 484, 10
 divisibilitas nondum constat 358, 18
Materia subtilis Cartesianorum ad examen quoddam revocatur 292, 12
Materia vel subtilissima Gravitæ non definitur 368, 1
Mechanicæ, quæ dicuntur, Potentiæ explicantur & demonstrantur p. 14 & 15: p. 23
Mercurii
 distantia a Sole 361, 1
 Aphelii motus 376, 33
Methodus
 Rationum primarum & ultimarum I. Sect. 2
 Transmutandi figuras in alias quæ sunt ejusdem Ordinis Analytici I, Lem. 22. pag. 79
 Fluxionum II, Lem. 2. p. 224
 Differentialis III, Lemm. 5 & 6. pagg. 446 & 447
 Inveniendi Curvarum omnium quadraturas proxime veras 447, 8
 Serierum convergentium adhibetur ad solutionem Problematum difficiliorum p. 127. 128: 202: 235: 414
Motus quantitas definitur p. 2
Motus absolutus & relativus p. 6: 7: 8: 9 ab invicem fecerari possunt, exemplo demonstratur p. 10
Motus Leges p. 12 & seqq.
Motuum compositio & resolutio p. 14.
Motus corporum congregientium post reflexionem, quali Experimento rectè colligi possunt,

ostenditur 19, 21
Motus corporum
 in Conicis sectionibus eccentricis I, Sect. 3
 in Orbibus mobilibus I, Sect. 9
 in Superficiebus datis & Funependulorum motus reciprocos I, Sect. 10
Motus corporum viribus centripetis se mutuo petentium I, Sect. 11
Motus corporum Minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur I, Sect. 14.
Motus corporum quibus resistitur
 in ratione velocitatis II, Sect. 1
 in duplicata ratione velocitatis II, Sect. 2
 partim in ratione velocitatis, partim in eadem ratione duplicata II, Sect. 3
Motus
 corporum sola vi insita progredientium in Mediis resistentibus II, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12: 302, 1
 corporum recta ascendentium vel descendendum in Mediis resistentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 3, 8, 9, 40, 13, 14
 corporum projectorum in Mediis resistentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 4, 10
 corporum circumgyrantium in Mediis resistentibus II, Sect. 4
 corporum Funependulorum in Mediis resistentibus II, Sect. 6
Motus & resistentia Fluidorum II, Sect. 7
Motus per Fluida propagatus II, Sect. 8
Motus circularis seu Vorticolas Fluidorum II, Sect. 9
Mundus originem non habet ex causis Mechanicis p. 482, 12.

N.

Navium constructioni Proposio non inutilis 300, 4.

O.

Opticarum ovalium inventio quam Cartesius celaverat I, 97. *Cartesiani Problematis generalior solutio* I, 98
Orbitarum inventio
 quas corpora describunt, de loco dato data cum velocitate, secundum datam sectam egressa; ubi vis centripeta est reciproce ut quadratum distantie & vis illius quantitas absoluta cognoscitur I, 17
 quas corpora describunt ubi vires centripetæ sunt reciproce ut cubi distantiarum 45, 18: 118, 27: 125, 25
 quas corpora viribus quibuscumque centripetis agitata describunt I, Sect. 8.

.P. Para-

INDEX RERUM.

P.

Parabola, qua lege vis contripeta tendentis ad umbilicum figuræ, describitur a corpore revolvente I, 13
Pendulorum affectiones explicantur I, 50, 51, 52, 53: II, Sect. 6.
Pendulorum isochronorum longitudines diversæ in diversis locorum Latitudinibus inter se conferuntur, tum per Observationes, tum per Theoriam Gravitatis III, 20
Philosophandi Regula p. 357
Planæ
 non deferuntur a Vorticibus corporeis 352, 37: 354, 25: 481, 21
Primarii
 Solem circum 360, 7
 moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis III, 13
 radiis ad Solem ductis describunt areas temporibus proportionales 361, 15: III, 13
 temporibus periodicis revolvuntur quæ sunt in sesquuplicata ratione distantiarum a Sole 360, 17: III, 13 & I, 15
 retinentur in Orbibus suis a vi Gravitatis qua respicit Solem, & est reciproce ut quadrarum distantiarum ab ipsius centro III, 2, 5
Secundarii
 moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Primariorum III, 22
 radiis ad Primarios suos ductis describunt areas temporibus proportionales 359, 3, 22: 361, 27: III, 22
 temporibus periodicis revolvuntur quæ sunt in sesquuplicata ratione distantiarum a Primariis suis 359, 3, 22: III, 22 & I, 15
 retinentur in Orbibus suis a vi Gravitatis quæ respicit Primarios, & est reciproce ut quadrarum distantiarum ab eorum centrīs III, 1, 3, 4, 5
Planetarum
 distantia a Sole 361, 1
 Orbium Aphelia & Nodi prope quiescunt III, 14
 Orbes determinantur III, 15, 16
 loca in Orbibus inveniuntur I, 31
 densitas calori quem a Sole recipiunt, accommodatur 372, 7
 conversionis diurnæ sunt æquabiles III, 17
 axes sunt minores diametris quæ ad eisdem axes normaliter ducuntur III, 18
Pondera corporum
 in Terram vel Solem vel Planetam quemvis, paribus distantis ab eorum centrīs sunt ut quantitates materiarum in corporibus III, 6
 non pendunt ab eorum formis & ætate 367, 35

in diversis Terræ regionibus inventuntur & inter se comparantur III, 20
Problematis

Kepleriani solutio per Trochoidem & per Approximationes I, 31
Veterum de quatuor lineis, a Pappo memorati, a Cartesio per calculum Analyticum tentati, compositio Geometrica 70, 19
Projectilia, seposita Medii resistentia, moveri in Parabola colligitur 47, 23: 202, 23: 236, 29
Projectilium motus in Mediis resistentibus II, 4, 10
Pulsuum Aeris, quibus Soni propagantur, determinantur intervalla seu latitudines II, 50: 344, 18. Hæc intervalla in apertarum Fistularum Sonis æquari duplis longitudinibus Fistularum verosimile est 344, 26

Q.

Quadratura generalis Ovalium dari non potest per finitos terminos I, Lem. 28. p. 98
Qualitates corporum qua ratione innotescunt & admittuntur 357, 16
Quies vera & relativa p. 6, 7, 8, 9.

R.

Resistentiæ quantitas
 in Mediis non continuis II, 35
 in Mediis continuis II, 38
 in Mediis cujuscunque generis 302, 32
Resistentiarum Theoria confirmatur per Experimenta Pendulorum II, 30, 31, Sch. Gen. p. 284
 per Experimenta corporum cadentium II, 40, Sch. p. 319
Resistentia Mediorum
 est ut eorundem densitas, cæteris paribus 290, 29: 291, 35: II, 33, 35, 38: 327, 14
 est in duplicata ratione velocitatis corporum quibus resistitur, cæteris paribus 219, 24: 284, 33: II, 33, 35, 38: 324, 23
 est in duplicata ratione diametri corporum Sphæricorum quibus resistitur, cæteris paribus 288, 4: 289, 11: II, 33, 35, 38: Sch. p. 319
 non minuitur ab actione Fluidi in partes posticas corporis moti 312, 23
Resistentia Fluidorum duplex est; oriturque vel ab Inertia materiarum fluidarum, vel ab Elasticitate, Tenacitate & Frictione partium ejus 318, 1.
Resistentia quæ sentitur in Fluidis fere tota est prioris generis 326, 32, & minus non potest per subtilitatem partium Fluidi, manente densitate 328, 7
Resistentiæ Globi ad resistentiam Cylindri proportionis, in Mediis non continuis II, 34
Resisten-

INDEX RERUM

Refractio quae patitur a Fluido frustum Conicum, qua ratione fit minima 299, 30
Refractio minima Solidum 300, 19

S.

Saellius

Jovialis extimi elongatio maxima heliocentrica a centro Jovis 370, 35
Magestani elongatio maxima heliocentrica a centro Saturni 371, 5

Saellium

Jovialium tempora periodica & distantiae a centro Jovis 359, 12
Saturniorum tempora periodica & distantiae a centro Saturni 360, 1
Jovialium & Saturniorum inaequales motus a motibus Lunae derivari posse ostenditur III, 23.

Saturni

distantia a Sole 361, 1
 semidiameter apparens 371, 9
 semidiameter vera 371, 14
 vis attractiva quanta fit 370, 33
 pondus corporum in ejus superficie 371, 19
 densitas 371, 37
 quantitas materiae 371, 27
 perturbatio a Jovo quanta fit 375, 16
 diameter apparens Annuli quo cingitur 371, 8
Sectiones Conicae, qua lege vis centripetae tendentis ad punctum quodcumque datum, describuntur a corporibus revolventibus 58, 20
Sectionum Conicarum descriptio Geometrica ubi dantur Umbilici I, Sect. 4
 ubi non dantur Umbilici I, Sect. 5, ubi dantur Centra vel Asymptoti 87, 9
 Sesequialtera ratio definitur 31, 49

Sol

circum Planetarum omnium commune gravitatis centrum movetur III, 12
 semidiameter ejus mediocri apparens 371, 12
 semidiameter vera 371, 14
 parallaxis ejus horizontalis 370, 33
 parallaxis menstrua 376, 4
 vis ejus attractiva quanta fit 370, 33
 pondus corporum in ejus superficie 371, 19
 densitas ejus 371, 27
 quantitas materiae 371, 27
 vis ejus ad perturbandos motus Lunae 365, 15; III, 25
 vis ad Mare movendum III, 36.

Sonorum

natura explicatur II, 43, 47, 48, 49, 50
 propagatio divergit a recto tramite 332, 9, fit per agitationem Aeris 343, 1
 velocitas computo colligitur 343, 8, paululum major esse debet Aestivo quam Hybernico tempore, per Theoriam 344, 11
 cessatio fit statim ubi cessat motus corporis sonori 344, 29

auguratio per vires Saelliorum 344, 32

Spirium

absolutum & relativum p. 5, 7
 non est aequaliter plenum 46, 18
Spiriculum Astronomicum. XNUMX particulae vires sunt responsive in quantitate distantiam 198, 21
Spiralis quae facit radius duntaxat in angulo dato, qua lege vis centripetae tendentis ad centrum Spiralis rectam partem a corpore revolvente, effunditur I, 9; III, 25, 16
Spiritus quendam naturam pervadentem & in corporibus latentem, ad plurimum motus phaenomena solvenda, insuper auguratur 424, 17

Sellarum fixarum

quies demonstratur 376, 18
 radiatio & scintillatio quibus causis referendae sunt 467, 38

Sellae Novae modo ortu possunt 481, 5

Substantiae terrae omnium circumferuntur 483, 22

T.

Tempus absolutum & relativum p. 5, 7

Temporis Aequatio Astronomica per Horologium oscillatorium & Eclipses Saellium Jovis comprobatur 7, 15

Tempora periodica corporum revolventium in Ellipsis, ubi vires centripetae ad umbilicum tendunt I, 15.

Terrae

dimensio per **Ptoleum** 378, 11, per **Cassium** 378, 21, per **Norwoodum** 378, 28

figura invenitur, & proportio diametrorum, & mensura graduum in Meridiano III, 19, 20.

altitudinis ad Aequatorem supra altitudinem ad Polos quantus fit excessus 381, 7; 387, 1
 semidiameter maxima, minima & mediocri 387, 10

globus densior est quam si totus ex Aqua constaret 372, 31

globus densior est ad centrum quam ad superficiem 386, 1.

molem Indies augeri verosimile est 473, 28; 481, 13.

axis nutatio III, 21.

motus annuus in Orbe magno demonstratur III, 12, 13; 478, 26

Eccentricitas quanta fit 421, 15.

Aphelii motus quanta fit 376, 33.

V.

Vacuum dicitur, vel spatia omnia (si dicatur esse plena) non sunt aequaliter plena 328, 12, 368, 25.

Veloci

INDEX RERUM.

- Velocitas maxima quam Globus, in Mediore-**
sistente cadendo, potest acquirere II, 38,
 Cor. 2^o.
- Velocitates corporum in Sectionibus conicis mo-**
torum, ubi vires centripetz ad umbilicum
tendunt I, 16.
- Veneris**
 distantia a Sole 361, 1
 tempus periodicum 370, 23
 Aphelii motus 376, 33
 Virium compositio & resolutio p. 14.
- Vires attractivæ corporum**
 sphericorum ex particulis quacunque lege
 trahentibus compositorum, expenduntur
 I, Sect. 12.
 non sphericorum ex particulis quacunque
 lege trahentibus compositorum, expenduntur
 I, Sect. 13.
- Vis centrifuga corporum in Æquatore Terræ**
 quanta sit 379, 22.
- Vis centripeta definitur** p. 2.
 quantitas ejus absoluta definitur p. 4.
 quantitas acceleratrix definitur p. 4.
 quantitas motrix definitur p. 4.
 proportio ejus ad vim quamlibet notam, qua
 ratione colligenda sit, ostenditur 40, 1.
- Virium centripetarum inventio, ubi corpus in**
spatio non resistente, circa centrum immo-
bile, in Orbe quocunque revoluitur I, 6: I,
 Sect. 2 & 3.
- Viribus centripetis datis ad quodcunque pun-**
ctum tendentibus, quibus Figura quævis a-
corpore revolvente describi potest; dantur
vires centripetz ad aliud quodvis punctum
tendentes, quibus eadem Figura eodem tem-
pore periodico describi potest 44, 3.
- Viribus centripetis datis quibus Figura quævis**
describitur a corpore revolvente; dantur vires
quibus Figura nova describi potest, si Ordi-
nate auvantur vel minuantur in ratione qua-
cunque data, vel angulus Ordinationis utcum-
que mutetur, manente tempore periodico
 47, 28.
- Viribus centripetis in duplicata ratione distanti-**
rum decrefcentibus, quænam Figura describi
possunt, ostenditur 53, 1: 150, 8.
- Vi centripeta**
 quæ sit reciproce ut cubus ordinacim applica-
 tæ tendentis ad centrum virium maxime
 longinquum, corpus movebitur in data
 quavis conicæ sectione 45, 1
 quæ sit ut cubus ordinacim applicatæ tenden-
 tis ad centrum virium maxime longinquum,
 corpus movebitur in Hyperbola 202, 26.
- Umbra Terræstris in Eclipsibus Lunæ augenda est,**
propter Atmosphæræ refractionem 425, 27.
- Umbrae Terræstris diametri non sunt æquales;**
quanta sit differentia ostenditur 387, 8.
- Undarum in aquæ stagnantis superficie propa-**
gatarum velocitas invenitur II, 46.
- Vorticum natura & constitutio ad examen re-**
vocatur II, Sect. 9: 481, 21.
- U.** Hujus voculæ significatio Mathematica de-
 finitur 30, 19.

E U N U S.

ALBUQUERQUE

Number of
Date of



