



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

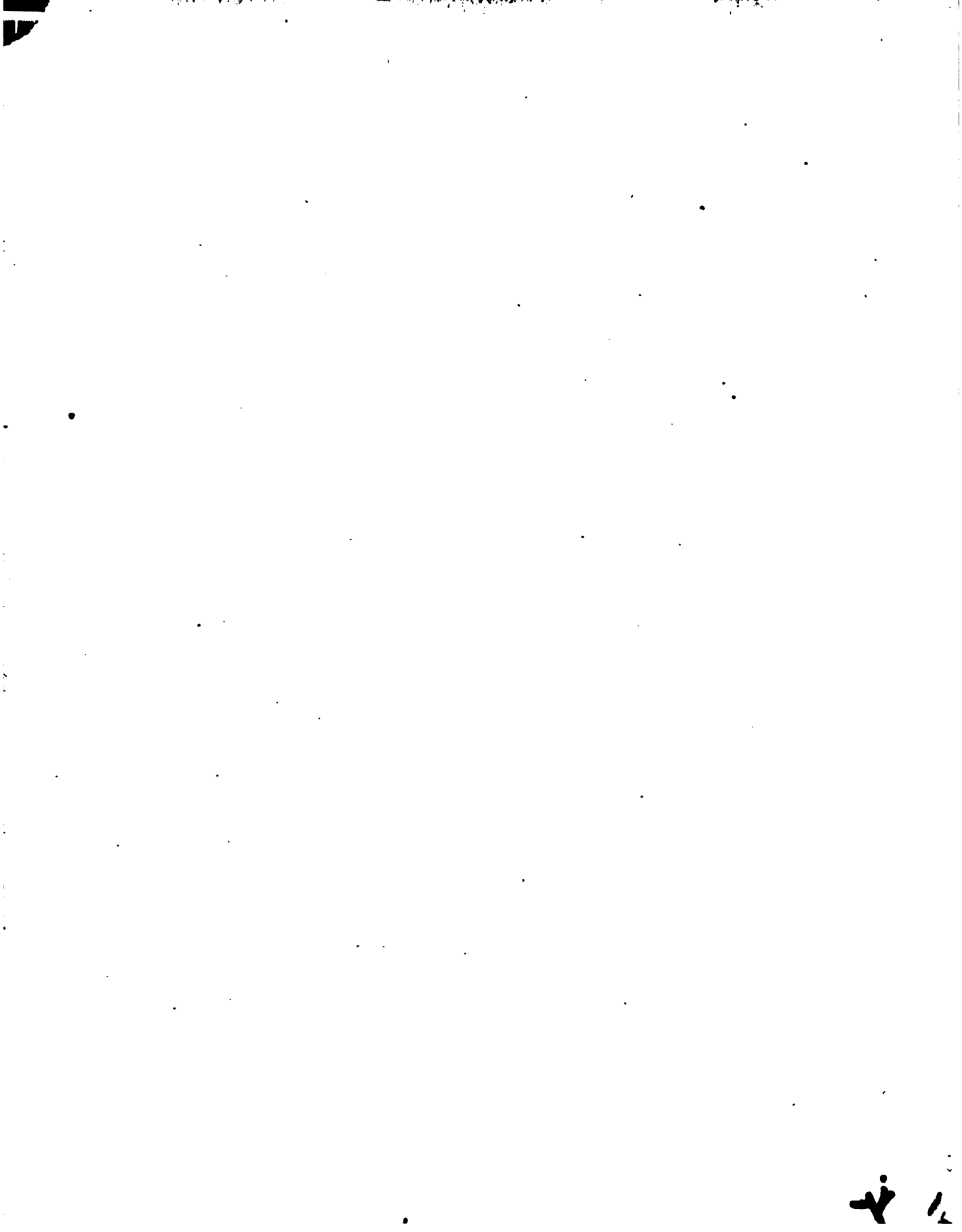
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

1860 d. 69



12





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.
EDITIO ULTIMA
AUCTIOR ET EMENDATIO.

AMSTÆLODAMI
SUMPTIBUS SOCIETATIS,

MDCCLXIV.

1860 d. 69

D.

to

Palmer



ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVEDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIIS

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ANNÆ

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTONUS,



I N
VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI

OPUS HOC CE

MATHEMATICO-PHYSICUM

Seculi Gentisque nostræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Conderet, omnipotens sibi Leges ipse Creator
Dixerit, atque operum quæ fundamenta locarit.
Intima panduntur victi penetralia Cœli,
Nec latet, extremos quæ Vis circumrotet Orbis.
Sol folio residens ad se jubet omnia pronò
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.
Hinc patet, horrificis qua sit flexa Cometis:
Discimus hinc tandem, qua causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis eat, & cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeent Nodi, curque Auges progrediantur.
Discimus, & quantis refluxum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellat; fessis dum fluctibus ulvam
Deserit, ac nautis suspectas nudat arenas;
Alternisve ruens spumantia littora pulsat.

Quæ

Quæ toties animos veterum torfere Sophorum,
 Quæque Scholas hodie rauco certamine vexant,
 Obvia conspicimus; nubem pellente Mathesi:
 Quæ superas penetrare domos, atque ardua Cœli,
 NEWTONI auspiciis, jam dat contingere Tempora.
 Surgite Mortales, terrenas mittite curas;
 Atque hinc cœligenæ vires cognoscite Mentis,
 A pecudum vita longe longeque remotæ.
 Qui scriptis primus Tabulis compescere Cædes,
 Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
 Quive vagis populis circumdari mœnibus Urbes
 Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
 Vel qui curarum lenimen pressit ab Uva;
 Vel qui Niliaca monstravit arundine pictos
 Consociare sonos, oculisque exponere Voces;
 Humanam sortem minus extulit; utpote pauca
 In commune ferens miseræ solatia vitæ.
 Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
 Jura poli tractare licet, jamque abdita diæ
 Claustra patent Naturæ, & rerum immobilis ordo;
 Et quæ præteritis latuere incognita sæclis.
 Talia monstrantem justis celebrate Camænis,
 Vos qui cœlesti gaudetis nectare vesci,
 NEWTONUM clausi reserantem scrinia Veri,
 NEWTONUM Musis carum, qui pectore puro
 Phœbus adest, totoque incescit Numine mentem:
 Nec fas est propius Mortali attingere Divos.

ED. HALLET.

AUC.



25 June 1820.

AUCTORIS

P R Æ F A T I O

A D

L E C T O R E M.

CUm Veteres Mechanicam (uti auctor est Pappus) in rerum Naturalium investigatione maximi fecerint; & Recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phenomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu Mathesin excolere, quatenus ea ad Philosophiam spectat. Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem, quæ per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad Practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus Geometria fundatur, ad Mechanicam pertinent. Has lineas describere Geometria non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro in easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat Geometriæ; dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & Circulos describere Problemata sunt, sed non Geometrica. Ex Mechanica postulatur horum solutio, in Geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur
Geo.



AUCTORIS PRÆFATIO.

IN hac Secunda Principiorum Editione, multa sparsim emendantur & nonnulla adjiciuntur. In Libri primi Sectione II, Inventio virium quibus corpora in Orbibus datis revolvi possint, facilior redditur & amplior. In Libri secundi Sectione VII, Theoria resistentiæ Fluidorum accuratius investigatur & novis Experimentis confirmatur. In Libro tertio Theoria Lune & Præcessio Æquinoctiorum ex Principiis suis plenius deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratius computatis Orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

29 June. E D I T O R I S

P R Æ F A T I O.

NEWTONIANÆ Philosophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque desideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex Indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philosophiæ.

Qui Physicam tractandam susceperunt, ad tres fere classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus Qualitates específicas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ Scholasticæ, ab *Aristotelo* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos Effectus ex corporum singularibus Naturis oriri; at unde sint illæ Naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; Sermonem quendam Philosophicum censendi sunt adinvenisse, Philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiae laudem consequi sperarunt, rejecta Vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam universam homogeneam esse, omnem vero Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progressio instituitur a simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit Natura. Verum ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus; quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglecta rerum constitutione vera: quæ sane frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas Observationes investigari possit. Qui speculationum

h

EDITORIS

suarum fundamentum desumunt ab Hypothesibus, etiamsi deinde secundum leges Mechanicas accuratissime procedant; Fabulam quidem elegantem forte & venustam, Fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

20. 11. 18. Relinquitur adeo tertium genus, qui Philosophiam scilicet Experimentalem profitentur. Hi, quidem, ex simplicissimis (quibus possunt) principiis, rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem Principii loco assumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in Physicam recipiunt, nisi ut Quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque Methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam Phænomenis per Analysin deducunt, ex quibus deinde per Synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est Philosophandi ratio longe optima, quam præ ceteris merito amplectendam censuit Celeberrimus Auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit Exemplum, Mundani nempe Systematis explicationem e Theoria Gravitatis felicissime deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus Ille & solus ex Apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis Viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo Principio ægre assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: Tibi potius, Benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus Tute ipse iudicium non iniquum feras.

Igitur ut Argumenti sumatur exordium a simplicissimis & proximis; despiciamus paulisper qualis sit in Terrestribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Cœlestia, longissime a sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in Terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit Experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas relativa, non est vera Levitas, sed apparens solummodo: & oritur a præpollente Gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitant in Terram, ita Terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; Gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguat^r Terræ totius

P R Æ F A T I O.

totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra Experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, Gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

≡ Pondera corporum, æqualiter a centro Terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet Aeris resistentia: accuratius autem comprobatur per Experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantibus, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in Terram & Terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis qua corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque Terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem aucta vel diminuta mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium Actionibus conflari censenda erit; atque adeo corpora omnia Terrestria se mutuo trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis sit in Cœlis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; Naturæ lex est ab omnibus recepta Philosophis. Inde vero sequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, Vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo: Planetis igitur in Orbibus curvis revolventibus necessario aderit Vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter a Tangentibus deflectantur.

EDITORIS

Jam illud concedi æquum est, quod Mathematicis rationibus colligitur & certissime demonstratur; Corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano descripta, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcunque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a Viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confesso sit apud Astronomos, Planetas primarios circum Solem, secundarios vero circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut Vis illa, qua perpetuo detorquentur a Tangentibus rectilineis, & in Orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in Orbitalium centris. Hæc itaque Vis non inepte vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, Centripeta; respectu autem corporis centralis, Attractiva; a quacunque demum causa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda sunt, & Mathematicè demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in Circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum a centro communi; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in Orbitis quæ sunt Circulis finitimæ, & quiescant Orbitalium Apsides; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in Planetis universis consentiunt Astronomi. Itaque Vires centripetæ Planetarum omnium sunt reciproce ut quadrata distantiarum ab Orbium centris. Si quis objiciat Planetarum & Lunæ præsertim, Apsides non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest, etiamsi concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod Vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum Mathematicum inveniri posse & plane insensibilem esse. Ipsa enim ratio Vis centripetæ Lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit responsio, si dicamus hanc Apsidum progressionem, non ex aberratione a duplicata proportione, sed ex alia prorsus diversa causa oriri, quemadmodum egregie commonstratur in hac Philosophia. Restat ergo ut Vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt versus Solem & secundarii versus primarios suos, sint accurate ut quadrata distantiarum reciproce.

Ex

P R Æ F A T I O.

Ex iis quæ hætenus dicta sunt, constat Planetas in Orbitis suis retineri per Vim aliquam in ipsos perpetuo agentem: constat Vim illam dirigi semper versus Orbitalium centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum distantiae, diminui in eadem proportione qua distantiae quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter Planetarum Vires centripetas & Vim Gravitatis, annon ejusdem forte sint generis. Ejusdem vero generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eadem eademque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: Hoc utique consequitur ex ratiociniis Mathematicis. Erit igitur Vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis, ad Vim Gravitatis in superficie Terræ, ut spatium quod tempore quam minimo describeret Luna descendendo per Vim centripetam versus Terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium quod eodem tempore quam minimo describit grave corpus in vicinia Terræ, per Vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus a Luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui Lunæ translationem de Tangente, factam a Vi centripeta, metitur; atque adeo computari potest ex datis tum Lunæ tempore periodico tum distantia ejus a centro Terræ. Spatium posterius invenitur per Experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. In itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis ad vim Gravitatis in superficie Terræ, erit ut quadratum semidiametri Terræ ad Orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis ad vim Lunæ centripetam prope Terræ superficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ superficiem æqualis est vi Gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem: si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quam ex vi sola Gravitatis. Constat igitur Vim illam centripetam, qua Luna perpetuo de Tangente vel trahitur vel impellitur & in Orbita retinetur, ipsam esse vim Gravitatis terrestris ad Lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese Virtus extendat: cum

EDITORIS

cum nullam ejus sensibilem immutationem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutua, Terra vicissim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac Philosophia, ubi agitur de Maris æstu & Æquinoctiorum præcessione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis Gravitatis decrescat in majoribus a Tellure distantis. Nam cum Gravitatio non diversa sit a Vi centripeta Lunari, hæc vero sit reciproce proportionalis quadrato distantiae; diminuetur & Gravitatio in eadem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & secundariorum circa Jovem & Saturnum sunt Phænomena generis ejusdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versus centrum Solis, secundariorum versus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta versus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centrīs, quemadmodum vis Lunæ est ut quadratum distantiae a Terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra vicissim in Lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim in secundarios; sic & omnes primarii in Solem, & Sol vicissim in primarios.

Igitur Sol in Planetas universos gravitat & universi in Solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum Solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipsos. Secundarios vero Planetas in Solem gravitare abunde insuper constat ex inæqualitatibus Lunaribus; quarum accuratissimam Theoriam, admiranda sagacitate patefactam, in tertio hujus Operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoersum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissime colligi potest ex motu Cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipsum proxime accedunt ut Globum ejus, in Periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum Theoriam ab Astronomis antehac frustra quæsitam, nostro tandem sæculo feliciter inventam & per Observationes certissime demonstratam, Præstantissimo nostro Auctori debemus. Patet igitur

P R Æ F A T I O.

igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce vero Phænomenis manifestum est & Mathematicè comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis suis, respicere Solem & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantum ad corpora Planetarum in datis distantiiis & in eodem fere plano collocata, sed etiam ad Cometas in diversissimis Cœlorum regionibus & in diversissimis distantiiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium; ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero sequitur, Planetas & Cometas universos se mutuo trahere, & in se mutuo graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Astronomis non incognita, & ab actionibus horum Planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo Apſidum, qui supra memoratus est, quique a causa consimili proficiscitur.

Et demum pervenimus ut dicendum sit, & Terram & Solem & corpora omnia cœlestia, quæ Solem comitantur, se mutuo attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum supra de Terreſtribus ostensum est. In diversis autem distantiiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere Globos eadem lege trahentes, Mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur Philosophis; Effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si Gravititas sit causa descensus Lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si Gravititas mutua fuerit inter Lapidem & Terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva Lapidis & Terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac Regula fundatur omnis Philosophia: quippe qua sublata nihil affirmare possumus de Universis. Constitutio rerum singularum innotescit per Observationes & Experimenta: inde vero non

EDITORIS

nisi per hanc Regulam de rerum universalium natura judicamus.

Jam cum Gravia sint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Coelis reperiuntur, de quibus Experimenta vel Observationes institui licet; omnino dicendum erit, Gravitationem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint Extensa, Mobilia, & Impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint Gravia. Corporum Extensio, Mobilitas, & impenetrabilitas non nisi per Experimenta innotescunt; eodem plane modo Gravitatio innotescit. Corpora omnia de quibus Observationes habemus, Extensa sunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus Observationes non habemus, Extensa esse & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt Gravia, de quibus Observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus Observationes non habemus, Gravia esse. Si quis dicat corpora Stellarum inerrantium non esse Gravia, quandoquidem eorum Gravitatio nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque Extensa esse, nec Mobilia, nec Impenetrabilia, cum hæc Fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? Inter primarias qualitates corporum universalium vel Gravitatio habebit locum; vel Extensio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum Gravitationem, vel non recte explicabitur per corporum Extensionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid musitare. Gravitationem scilicet Occultam esse quid, perpetuo argutari solent; occultas vero causas procul esse ablegandas a Philosophia. His autem facile respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per Observationes clarissime demonstratur, sed has solum quarum occulta est & ficta existentia nondum vero comprobata. Gravitatio ergo non erit occulta causa motuum coelestium; siquidem ex Phænomenis ostensum est, hanc virtutem revera existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas; qui nescio quos Vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omnino ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitatio occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur e Philosophia, quod causa ipsius Gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuunt absurdi,

P R Æ F A T I O.

furdi, unde totius tandem Philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent a compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? simul vero exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent, usque dum a causis omnibus vacua fuerit & probe purgata Philosophia.

Sunt qui Gravitationem præter naturam esse dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in Physica præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa Philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim Gravitationem corporibus omnibus inditam esse negabunt, quod tamen dici non potest: vel eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex causis Mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones, quæ, quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis sit deinde futura Philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota Physica cœlestis vel ideo minus placet, quod cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His sua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. *NEWTONIANAM* itaque Philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per Phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis vere existentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit Summus Opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut a pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit Effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua vere atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in Philosophia vera. In Horologiis automatis idem Indicis horarii motus vel ab appenso Pondere vel ab intus concluso Elatere oriri potest. Quod si oblatum Horologium revera sit instructum Pondere; ridebitur

EDITORIS

ridebitur qui finget Elaterem, & ex Hypothesi sic præpropere conficta motum Indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam Machinæ fabricam penitus perscrutari, ut ita motus propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non ab simile feretur iudicium de Philosophis illis, qui materia quadam subtilissima Cœlos esse repletos, hanc autem in Vortices indefinenter agi voluerunt. Nam si Phænomenis vel accuratissime satisfacere possent ex Hypothesibus suis; veram tamen Philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cœlestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has revera existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum Attractionem habere verum locum in rerum natura; quin etiam ostensum fuerit, qua ratione motus omnes cœlestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per Vortices explicari debere, etiam si id fieri posse vel maxime concesserimus. Non autem concedimus: Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore nostro abunde quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somniis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur a Vorticibus; oportet corpora delata & Vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque cursus determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem Vim inertiae pro mole materiae. Constat vero Planetas & Cometas, dum versantur in iisdem regionibus Cœlorum, velocitatibus variis variaque cursus determinatione moveri. Necessario itaque sequitur, ut Fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias a Sole revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut transire possint Planetæ; alia, ut transire possint Cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri a materia Vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque Vortice, sed a pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium Soli circumjectum pervadant.

Si plures Vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuo penetrare, motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt

P R Æ F A T I O.

sunt summe regulares , & peraguntur in Sectionibus Conicis , nunc valde eccentricis , nunc ad Circulorum proxime formam accedentibus ; jure quærendum erit , qui fieri possit , ut iidem integri conserventur , nec ab actionibus materiæ occurrentis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sane si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficilius explicantur , quam veri illi motus Planetarum & Cometarum ; frustra mihi videntur in Philosophiam recipi : omnis enim causa debet esse Effectu suo simplicior. Concessa Fabularum licentia , affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmosphæris , adinstar Telluris nostræ ; quæ quidem Hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam Hypothesis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmosphæras , ex natura sua , circa Solem moveri & Sectiones Conicas describere ; qui sane motus multo facilius concipi potest , quam consimilis motus Vorticum se invicem permeantium. Denique Planetas ipsos & Cometas circa Solem deferri ab Atmosphæris suis credendum esse statuat , & ob repertas motuum coelestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc Fabulam rejiciendam esse putet , idem & alteram Fabulam rejiciet : nam ovum non est ovo similius , quam Hypothesis Atmosphærarum Hypothesi Vorticum.

Docuit *Galilaus* , lapidis projecti & in parabola moti deflexionem a cursu rectilineo oriri a Gravitate lapidis in Terram , ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis , nasi acutioris , Philosophus causam aliquam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem , quæ nec visu , nec tactu , neque ullo sensu percipitur , versari in regionibus quæ proxime contingunt Telluris superficiem. Hanc autem materiam , in diversas plagas , variis & plerumque contrariis motibus ferri , & lineas Parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre sic expediet , & vulgi plausum merebitur. Lapis , inquiet , in Fluido illo subtili natat ; & cursui ejus obsequendo , non potest non eandem una semitam describere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis ; ergo lapidem in Parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce Philosophi ingenium , ex causis Mechanicis , materia scilicet & motu , phænomena Naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis ? Quis vero non subsannabit bonum illum *Galileum* , qui magno molimine Mathematico qualitates occultas , e Philosophia feliciter exclusas , denuo revocare sustinuerit ? sed pudet nugis diutius immorari.

EDITORIS

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summe regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant. Moventur in Orbibus Conicis, hi orbis sunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes Coelorum partes, & Planetarum regiones liberrime pertranseunt, & sæpe contra Signorum ordinem incedunt. Hæc Phænomena certissime confirmantur ex Observationibus Astronomicis: & per Vortices nequeunt explicari: Imo, ne quidem cum Vorticibus Planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus e Coelis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem a Vorticibus devehuntur; Vorticium partes, quæ proxime ambiunt unumquemque Planetam, ejusdem densitatis erunt ac Planeta; uti supra dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est Orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus densitatem: quæ vero jacet intra Orbem magnum atque Orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio Vorticis permanere possit, debent partes minus densæ centrum occupare, magis densæ longius a centro abire. Cum enim Planetarum tempora periodica sint in ratione sesquuplicata distantiarum a Sole, oportet partium Vorticis periodos eandem rationem servare. Inde vero sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minus densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, qua partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius Vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina Fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut Fluidum, cujus major est densitas, majore vi Gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omnino dicendum est, densiores Vorticis partes majore vi centrifuga petere supremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars Vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, densitatem habebit atque adeo vim inertię pro mole materiæ, quæ non minor erit quam densitas & vis inertię Telluris: inde vero Cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse merito videatur. Constat autem ex motu Cometarum

P R Æ F A T I O.

metarum prorsus regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimum sentiri potest; atque adeo neutiquam in materiam ullam incurfare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis Inertiæ. Nam resistentia Mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sane vix observari potest in Fluidis vulgo notis, nisi valde tenacia fuerint adinstar Olei & Mellis. Resistentia quæ sentitur in Aere, Aqua, Hydrargyro, & hujusmodi Fluidis non tenacibus fere tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente Fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistentia: quemadmodum clarissime demonstratum est ab Auctore nostro in peregrina Resistentiarum Theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac secunda vice, & per Experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut Fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem Fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi a Fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio Fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in Fluidum ad partes anticæ, hoc est, nisi velocitas relativa qua Fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in Fluidum, id est, nisi velocitas absoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta Fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest Fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiae. Itaque concludendum erit; Fluidi coelestis nullam esse vim inertiae, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim qua motus communicetur, cum nulla sit vis inertiae: nullam esse vim qua mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cum nulla sit vis qua motus communicetur: nullam esse omnino efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc Hypothesin, quæ fundamentoplane destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & Philosopho prorsus

EDITORIS

sus indignam. Qui coelos materia fluida repletos esse volunt, hanc vero non inertem esse statuunt; Hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nulla fecerni possit ab inani Spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeo usque dediti Materiae, ut Spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus Naturae subsidium praesens haberi posset ab Aethere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex Cometarum phaenomenis, nullam esse hujus Aetheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa Mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quadam Naturae. Tandem igitur delabi oportet in faeces sordidas Gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant Fato universa regi, non Providentia; Materiam ex necessitate sua semper & ubique extitisse, infinitam esse & aeternam. Quibus positis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam si necessario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illae omnes quae dicuntur Naturae leges: in quibus multa sane sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed Observando atque Experiendo addiscere debemus. Qui verae Physicae principia Legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet, vel statuere Mundum ex necessitate fuisse, Legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo Naturae, se tamen, homuncionem
misellum

P R Æ F A T I O .

misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissime cernuntur Consilium optimum & Dominium summum sapientissimi & potentissimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sint futura. His vel Miracula vel Qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiose indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere Philosophiam in Atheismo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda Philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos Judices præstantissima Philosophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Observationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro Illustrissimi nostri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, merito admirantur & suspiciunt quicumque paulo profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergo referatis, aditum Nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis Mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitus perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, Rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque Naturæ majestatem propius jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, Conditorem vero ac Dominum Universorum impensius colere & venerari, qui fructus est Philosophiæ multo uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur Eximium NEWTONI Opus adversus Atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam Catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis Concionibus Anglice Latineque editis, primus egregie demonstravit Vir in omni Literarum genere præclarus idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi sui & Academiæ nostræ magnum Ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* Magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri

EDITORIS. PRÆFATIO.

debeo: Huic & Tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore Celeberrimi Auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud Posteris censei non minoris æstimat, quam propriis Scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) Amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum Exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio coemenda superessent; suavit Ille crebris efflagitationibus & tantum non objurgando perpulit denique Virum Præstantissimum, nec modestia minus quam eruditione summa Insignem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: Mihi vero, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor *Plumianus*.

INDEX

INDEX CAPITUM.

TOTIUS OPERIS.

	PAG.
DEFINITIONES.	I
AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.	12
DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.	
SECT. I. D E Methodo rationum primarum & ultimarum.	24
SECT. II. De inventione Virium centripetarum.	34
SECT. III. De motu corporum in Conicis sectionibus eccentricis.	48
SECT. IV. De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.	59
SECT. V. De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.	66
SECT. VI. De inventione Motuum in Orbibus datis.	97
SECT. VII. De corporum Ascensu & Descensu rectilineo.	105
SECT. VIII. De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revoluntur.	114
SECT. IX. De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Apsidum.	121
SECT. X. De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproca.	132
SECT. XI. De Motu corporum Viribus centripetis se mutuo-potentium.	147
SECT. XII. De corporum Sphaericorum Viribus attractivis.	173
	SECT.

SECT. XIII. <i>De corporum non Sphaericorum Viribus attracti-</i> <i>vis.</i>	192
SECT. XIV. <i>De Motu corporum Minimorum, quae Viribus</i> <i>centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes</i> <i>tendentibus agitantur.</i>	203

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECT. I. D E Motu corporum quibus resistitur in ratione <i>Velocitatis.</i>	211
SECT. II. <i>De Motu corporum quibus resistitur in duplicata ra-</i> <i>tione Velocitatis.</i>	220
SECT. III. <i>De Motu corporum quibus resistitur partim in ra-</i> <i>tione Velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.</i>	245
SECT. IV. <i>De corporum Circulari motu in Mediis resistenti-</i> <i>bus.</i>	253
SECT. V. <i>De densitate & compressione Fluidorum, deque Hy-</i> <i>drostatica.</i>	260
SECT. VI. <i>De Motu & Resistentia corporum Funependulo-</i> <i>rum.</i>	272
SECT. VII. <i>De motu Fluidorum & resistentia Projectilium.</i>	294
SECT. VIII. <i>De motu per Fluida propagato.</i>	329
SECT. IX. <i>De motu Circulari Fluidorum.</i>	345

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS.

R EGULÆ PHILOSOPHANDI.	357
PHENOMENA.	359
PROPOSITIONES.	362
SCHOLIUM.	481

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas Materiae est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

AER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiae conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; adeoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, & dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III.

Materia vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materia, sic ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissime Vis Inertiæ dici potest. Exerct vero corpus hæc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium ejus sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertie. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex lotu, ex Pressione, ex vi Centripeta.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utrunque tendunt.

Hujus generis est Gravitatis, qua corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, qua ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circum-

actus.

actus, a circumagente ~~manu~~ ~~abire~~ ponatur, & conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, ~~avolat~~. Vim conatui illi contrariam, qua ~~facta~~ ~~rapidem~~ in ~~manum~~ perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a ~~centris orbium recedere~~; & nisi adsit vis aliqua conatui illi contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi Gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in linea recta abiret in coelos; idque uniformi cum motu, si modo aeris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate sua & velocitate motus. Quo minor erit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviat a cursu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbens, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarum, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circumiret priusquam caderet; vel denique ut in terram nunquam caderet; sed in coelos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circumire, potest & Luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & absque tali vi Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire Vim, qua corpus indato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri possit, & vicissim invenire Vim curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egressum a data vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripeta Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intensiõne virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripeta Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantis a globo terræ; in æqualibus autem distantis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) subtrata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII.

Vis centripeta Quantitas Motrix est ipsius mensura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in coelis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratiã nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratiã referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum ex propensionibus omnium partium compositam; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causã aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causã illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro

centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas & sedes Physicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus; at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuo promiscue usurpo; has vires non Physice sed Mathematice tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires vere & Physice tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerit.

Scholium.

Haftenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Nam Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hæc non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares distingui.

I. Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & natura sua absque relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apprens, & vulgare est sensibilis & externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

DEFINITIONES.

II. *Spatium Absolutum*, natura sua absque relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile: *Relativum* est spatium hujus mensura seu dimensio quolibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aëri vel coelestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, movetur; spatium Aëris nostri, quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aër transit, nunc alia pars ejus; & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. *Locus* est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; adeoque locus totius idem cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. *Motus Absolutus* est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, *Relativus* de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis passis fertur, relativus corporis Locus est navigii regio illa in qua corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur una cum navi: & *Quies relativa* est permansio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permansio corporis in eadem parte spatii illius immoti in qua navis ipsa una cum cavitata sua & contentis universis movetur. Unde si Terra verè quiescit, corpus quod relative quiescit in navi, movebitur verè & absolute ea cum velocitate qua navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur; orietur verus & absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terra: & si corpus etiam movetur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terra, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem

PRINCIPIA MATHEMATICA.

7

tem versus cum velocitatis parte una: movebitur Nauta vere & absolute in spatio immoto cum velocitatis partibus 1000 in orientem, & relative in terra occidentem versus cum velocitatis partibus nona.

DEFINITIONES.

Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam aequales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successioneis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæc Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguantur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per Proprietates suas & Causas & Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longe ultra, quiescat absolute; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum

DEFINI-
TIONES.

quum illud datam positionem servet æcne; quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motus igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia; præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absque translatione, de vicinia corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur una Locatum: adeoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest absque viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

manantur ut situs relativus conservetur, conservabitur ratio in qua motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

DEFINITIONES.

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem & absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorsione admodum rigeat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quiescat; tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam, vi in aquam paulatim impressa, effecit vas, ut hæc quoque sensibilibus revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim a medio; ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatioe semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo; quiescat in eodem relative. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circulare verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative. Igitur conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus vere circularis, conatui unico tantquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Systemate eorum qui Cælos nostros infra Cælos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas secum deferre; singulæ Cælorum partes, & Planetæ qui relative quidem in Cælis suis proximis quiescunt, moventur

DEFINITIONES. **DEFINITIONES.** tur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensurarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hæc de quantitativis mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentia, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circulaarem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augetetur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocumque globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si
 atten-

attenderetur ad filum, & deprenderetur tensionem ejus illam ipsam **DEFINI-**
esse quam motus globorum requireret; concludere liceret mo- **TIONES.**
tum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum ex
translatione globorum inter corpora, determinationem hujus mo-
tus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus,
& apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus seu
veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fu-
sus in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem
composui.

A X I O M A T A ,

S I V E

L E G E S M O T U S .

L E X I .

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus a resistentia aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

L E X II .

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

L E X

LEX III.

LEGES
MOTUS.

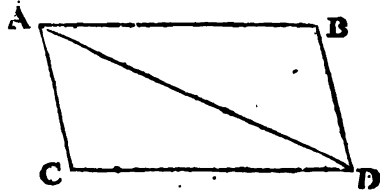
Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impeditur progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutue) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola M in loco A impressa, ferretur uniformi cum motu ab A ad B ; & vi sola N in eodem loco impressa, ferretur ab A ad C : compleatur parallelogrammum $ABDC$, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab A ad D . Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis per Legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD , sive vis N imprimatur, sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD . Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea CD , & idcirco in utriusque lineæ concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab A ad D per Legem I.



geret illud hæc plana viribus pN , HN perpendiculariter, nimirum LEGES
MOTUS. planum pQ vi pN , & planum pG vi HN . Ideoque si tollatur planum pQ , ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendò pondus jam vicem præstat plani sublatis, tendetur illud eadem vi pN , qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN , ut pN ad pH . Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum pN , AM a centro rotæ, & ratione directæ pH ad pN ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque adeo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p , planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus p urget planum pQ sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH ; atque ad vim, qua urget planum alterum pG , ut pN ad NH . Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur Corollarii hujus latissime patet, & late patendo veritatem suam evincit; cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique ascendentes, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendò summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, adeoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphericum A sit triplo majus corpore spherico B , habeatque duas velocitatis partes; & B sequatur in eadem recta cum velocitatis

AXIOMATA
SIVE

locitatis partibus decem, adeoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summa partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum una parte progrediatur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum una parte regrediatur amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regrediatur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergunt, inveniatur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; inveniatur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus: dein corporis utriusque motus (per Corol. II.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

COROL.

COROLLARIUM IV.

-LEGES
MOTUS.

Commune gravitatis Centrum, corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc postea in Lemmate XXI^{II} demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quocunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, adeoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantia centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plarium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus

AXIOMATA, mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciproce proportionales, adeoque centrīs illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum absque motu circulari.

Nam differentiz motuum tendentium ad eandem partem, & summae tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 11 æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

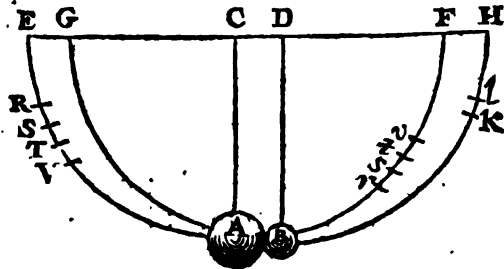
Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergunt omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitibus movendorum corporum)

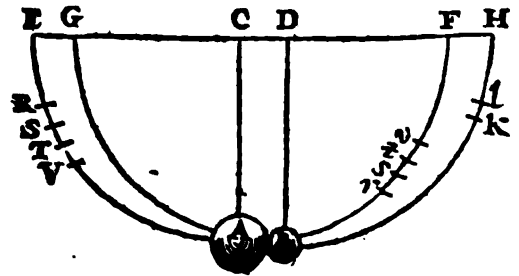
rum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per Legem 11. adeoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se. LEGES
MOTUS.

Scholium.

Haftenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per Leges duas primas & Corollaria duo prima *Galileus* invenit descensum Gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aeris resistentiam aliquantulum retardantur. Ab iisdem Legibus & Corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium Pendulorum, suffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his iisdem & Lege tertia *Christophorus Wrennus* Eques Auratus, *Johannes Wallisus S.T.D.* & *Christianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisus*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum: quod etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum Theoriis ad amissim congruat, habenda est ratio cum resistentiæ aeris, tum etiam vis Elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora *A, B* filis parallelis & æqualibus *AC, BD*, a centris *C, D*. His centris & intervallis describantur semicirculi *EAF, GBH* radiis *CA, DB* bisecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (subducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum *V*. Est *RV* retardatio ex resistentia aeris; Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta sita in medio, ita scilicet ut *RS* & *TV* æquantur, sitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et ista *ST* exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam proxime. Restituatur corpus *B* in locum suum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*, absque errore sensibili, tanta erit ac si



AXIOMATA, si in vacuo cecidisset de loco T . Exponatur igitur hæc velocitas
 SIVE per chordam arcus TA . Nam velocitatem Penduli in puncto infimo
 esse ut chordam arcus quem cadendo descripsit, Propositio est Geometris
 notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum s , & corpus B ad locum k .
 Tollatur corpus B & inveniat locus v ; a quo si corpus A demittatur & post unam
 oscillationem redeat ad locum r , fit st pars quarta ipsius rv sita in medio,
 ita videlicet ut rs & tv æquantur; & per chordam arcus tA exponatur
 velocitas quam corpus A proxime post reflexionem habuit in loco A .
 Nam t erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A , sublata
 aeris resistantia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit
 locus k , ad quem corpus B ascendit, & inveniendus locus l , ad quem
 corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia
 perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus
 A in chordam arcus TA (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur
 motus ejus in loco A proxime ante reflexionem; deinde in chordam
 arcus tA , ut habeatur motus ejus in loco A proxime post reflexionem.
 Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcus Bl , ut habeatur
 motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora
 duosimul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque
 tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt
 motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in
 Pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus
 quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis,
 puta pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi
 semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi
 mutuo directe occurrebant, quod æquales erant mutationes motuum
 corporibus in partes contrarias illatæ, atque adeo quod actio & reactio
 semper erant æquales. Ut si corpus A incidebat in corpus B cum
 novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post
 reflexionem cum duabus; corpus B resiliabat cum partibus istis septem.
 Si corpora obviam ibant A cum duodecim partibus & B cum sex,
 & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, facta detractio
 partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur
 partes duodecim, & restabit nihil.



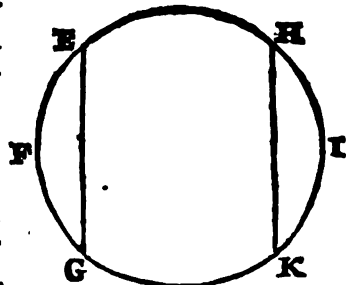
nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis *B* partium sex subducendo partes quatuordecim, sient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de *A* in *B*. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summa motuum conspirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accurate. Difficile erat, tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca *s*, & notare, ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis pilis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat Regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfecte elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; addo quod Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si Regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda est, debet solummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elasticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus. Certius id affirmabitur de perfecte Elasticis. In imperfecte Elasticis velocitas reditus minuenda est simul cum vi Elasticæ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa, quæ sit ad relativam velocitatem concursus in data ratione. Id in pilis ex lana arte conglomerata & fortiter constricta sic tentavi. Primum demittendo Pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant Experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad relativam velocitatem concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata est, quæ cum experientia plane congruit.



AXIOMATA,
SIVE In Attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis A, B se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur versus corpus alterum B , quam illud alterum B in prius A , obstaculum magis urgebitur possessione corporis A quam pressione corporis B ; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum & obstaculi moveatur in directum in partes versus B , motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debet systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & Ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aqua stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter Terram & ejus partes, mutua est. Secetur Terra FI plano quovis EG in partes duas EGF & EGI ; & æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio HK quod priori EG parallelum sit, pars major EGI secetur in partes duas $EGKH$ & HKI , quarum HKI æqualis sit parti prius abscissæ EGG ; manifestum est quod pars media $EGKH$ pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, & quiescet. Pars autem extrema HKI toto suo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam EGF ; ideoque vis qua partium HKI & $EGKH$ summa EGI tendit versus partem tertiam EGF , æqualis est ponderi partis HKI , id est ponderi partis tertiæ EGF . Et propterea pondera partium duarum EGI, EGF in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, Terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eofugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent; quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ: sic in movendis Instrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium

virium æstimatæ; sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ; quæ oscillante Librâ sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est pondera; si recta ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt reciproce ut punctorum a quibus suspenduntur distantia ab axe Libræ; sin planis obliquis aliivve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt oblique, æquipollent quæ sunt reciproce ut ascensus & descensus, quatenus facti secundum perpendicularum: id adeo ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochlea seu Polyspasto vis manus funem directe trahentis, quæ fit ad pondus vel directe vel oblique ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In Horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, si sint reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus est ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus presum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendicularares. Et par est ratio Machinarum omnium.

LEX
MOTUS.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistantiam vi data superandi. Nam si Machinæ ita formentur, ut velocitates Agentis & Resistentis sint reciproce ut vires; Agens resistantiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistantia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistantia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producat. Ceterum Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quam late pateat quamque certa sit Lex tertia. **MOTUS.** Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate:

AXIOMATA, *tate conjunctim ; & similiter Resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione , cohæsione , pondere , & acceleratione oriundis ; erunt actio & reactio , in omni instrumentorum usu , sibi invicem semper æquales . Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens , ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.*

DE

MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum , cujus ope sequentia demonstrantur.

LEMMA I.

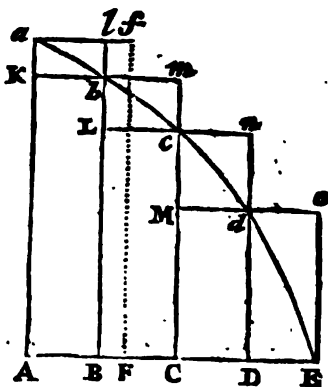
Quantitates , ut & quantitatum rationes , que ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt , & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia , fiunt ultimo æquales.

Si negas ; fiant ultimo inæquales , & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

LEMMA

LEMMA II.

Si in Figura quavis $AacE$, rectis Aa , AE & curva acE comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque Ab , Bc , Cd , &c. sub basibus AB , BC , CD , &c. equalibus, & lateribus Bb , Cc , Dd , &c. Figuræ lateri Aa parallelis contenta; & compleantur parallelogramma $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuat, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem Figura inscripta $AKbLcMdD$, circumscripta $AalbmcndoE$, & curvilinea $AabcdE$, sunt rationes equalitatis.



Nam Figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum Kl , Lm , Mn , Do , hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summa Aa , id est, rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) Figura inscripta & circumscripta & multo magis Figura curvilinea intermedia sunt ultimo æquales. *Q.E.D.*

LEMMA III.

Eadem rationes ultimæ sunt etiam rationes equalitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB , BC , CD , &c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $FAaf$. Hoc erit majus quam differentia Figuræ inscriptæ & Figuræ circumscriptæ; at latitudine sua AF in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum Figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis Figura rectilinea, quæ chordis evanescentium

D

centium

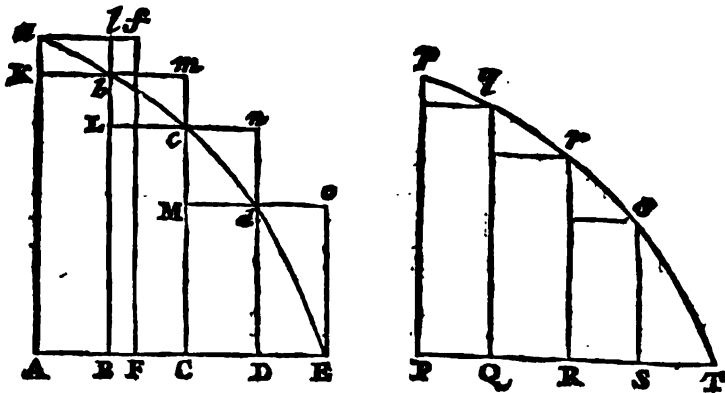
DE MOTU centium arcuum $ab, bc, cd, \&c.$ comprehenditur, coincidit ultimo
CORPORUM cum Figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & Figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ Figuræ ultimæ (quoad perimetros $a c E,$) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

L E M M A I V.

Si in duabus Figuris AacE, PprT, inscribantur (ut supra) due parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una Figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod Figure due AacE, PprT, sunt ad invicem in eadem illa ratione.



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita Figura ad Figuram; existente nimirum Figura priore (per Lemma III) ad summam priorem, & Figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus Figuris sumantur parallelo-

rallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothefin) in ultima ratione partis ad partem.

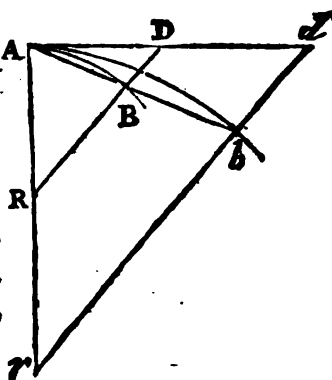
LIBER
PRIMUS

LEMMA V.

Similium Figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areae sunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus AB subtendatur chorda AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continua, tangatur a recta utrinque producta AD; dein puncta A, B ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus BAD, sub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evanescet.



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus AB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothefin.

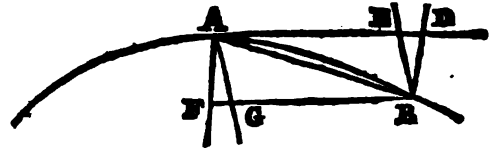
LEMMA VII.

Isdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio equalitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper A & AD ad puncta longinqua b ac d produci, & secanti BD parallela agatur bd. Sitque arcus Ab semper similis arcui AB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus dAb, per Lemma superius, evanescet; adeoque rectæ semper finitæ Ab, Ad & arcus intermedius Ab coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius AB

DE MOTU evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*
 CORPORUM *Corol. 1.* Unde si per B ducatur tangenti parallela BF , rectam

quamvis AF per A transeun-
 tem perpetuo secans in F ,
 hæc BF ultimo ad arcum eva-
 nescentem AB rationem habe-
 bit æqualitatis, eo quod com-
 plecto parallelogrammo $AFBD$
 rationem semper habet æqualitatis ad AD .



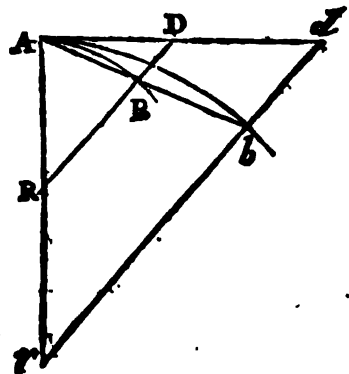
Corol. 2. Et si B & A ducantur plures rectæ BE , BD , AF ,
 AG , secantes tangentem AD & ipsius parallelam BF ; ratio ulti-
 ma abscissarum omnium AD , AE , BF , BG ; chordæque & arcus
 AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ul-
 timis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR cum arcu AB, chorda AB & tangente AD, triangula tria ARB, ARB, ARD constituunt; dein puncta A, B accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A
 accedit, intelligantur semper AB , AD ,
 AR ad puncta longinqua b , d & r produ-
 ci, ipsique RD parallela agi rb , & arcui
 AB similis semper sit arcus Ab .
 Et coeuntibus punctis A, B , angulus bAd
 evanescoet, & propterea triangula tria
 semper finita rAb , rAb , rAd coinci-
 dent, suntque eo nomine similia & æ-
 qualia. Unde & hisce semper similia &
 proportionalia RAB , RAB , RAD
 fient ultimo sibi invicem similia & æqua-
 lia. *Q. E. D.*

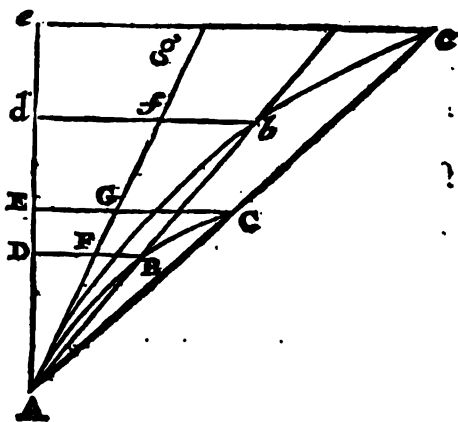


Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argu-
 mentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta AE & curva ABC positione data se mutuo secent in angulo dato A, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, CE, curvæ occurrentes in B, C; dein puncta B, C simul accedant ad punctum A: dico quod areae triangulorum ABD, ACE erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.

Etenim dum puncta *B, C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur temper *AD* produci ad puncta longinqua *d & e*, ut sint *Ad, Ae* ipsis *AD, AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db, ec* ordinatis *DB, EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB, AC* productis in *b & c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB, EC, db, ec* in *F, G, f, g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B, C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evanescente, coincident areae curvilineæ *Abd, Ace* cum rectilineis *Afd, Age*: adeoque (per Lemma v) erunt in duplicata ratione laterum *Ad, Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areae *ABD, ACE*, & his lateribus latera *AD, AE*. Ergo & areae *ABD, ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD, AE*. Q. E. D.



LEMMA X.

Spatia que corpus urgente quacunque Vi finita describit, sive Vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione Temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD, AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB, EC*; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areae *ABD, ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per Lemma IX.) in duplicata ratione temporum *AD, AE*. Q. E. D.

De Motu *Corol. 1.* Et hinc facile colligitur, quod corporum similes simi-
CORPORUM lium Figurarum partes temporibus proportionalibus describentium
Errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter ap-
plicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum a Fi-
gurarum similium locis illis ad quæ corpora eadem temporibus
iisdem proportionalibus absque viribus istis pervenirent, sunt ut
quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes
Figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt
ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ cor-
pora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus
initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, de-
scripta directe & quadrata temporum inverse.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directe
& vires inverse.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur
inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directe
vel inverse: sensus est, quod prior augetur vel diminuitur in
eadem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si
earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directe vel
inverse; sensus est, quod prima augetur vel minuitur in ratione
quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciproca
augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directe &
C directe & D inverse: sensus est, quod A augetur vel diminuitur
in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$, hoc est, quod A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad
invicem in ratione data.

L E M M A XI.

*Subtensa evanescentis anguli contactus, in curvis omnibus cur-
vaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ul-
timo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.*

Cas. 1. Si arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli con-
tactus ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcus AB. Hæc
subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG,
concur-

DE MOTU *Corol. 5.* Et quoniam DB , db sunt ultimo parallelæ & in dupli-
CORPORUM catura ratione ipsarum AD , Ad : erunt areæ ultimæ curvilinearæ
 ADB , Abb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulo-
rum rectilinearum ADB , Abb ; & segmenta AB , Ab partes ter-
tiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta e-
runt in triplicata ratione tum tangentium AD , Ad ; tum chorda-
rum & arcuum AB , Ab .

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec in-
finite majorem esse angulis contactuum, quos Circuli continent cum
tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est curvaturam
ad punctum A , nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu
intervallum Af finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut
 AD^3 : quo in casu Circulus nullus per punctum A inter tangentem
 AD & curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit
infinite minor Circularibus. Et simili argumento si fiat DB succes-
sive ut AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 , &c. habebitur series angulorum
contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infi-
nite minor priore. Et si fiat DB successive ut $AD^{\frac{1}{2}}$, $AD^{\frac{1}{3}}$,
 $AD^{\frac{1}{4}}$, $AD^{\frac{1}{5}}$, $AD^{\frac{1}{6}}$, $AD^{\frac{1}{7}}$, &c. habebitur alia series infinita an-
gulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum Cir-
cularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite ma-
jor priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series
utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inferi, quo-
rum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si
inter terminos AD^2 & AD^1 inseratur series $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$,
 $AD^{\frac{7}{2}}$, $AD^{\frac{9}{2}}$, $AD^{\frac{11}{2}}$, $AD^{\frac{13}{2}}$, $AD^{\frac{15}{2}}$, $AD^{\frac{17}{2}}$, &c. Et rursus
inter binos quosvis angulos hujus seriei inferi potest series nova an-
gulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium.
Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demon-
strata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas &
contenta. Præmissi vero hæc Lemmata, ut effugerem tædium de-
ducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum,
ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per
methodum Indivisibilium. Sed quoniam durior est Indivisibilium hy-
pothesis, & propterea methodus illa minus Geometrica censetur;
malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum
eva-

evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum Indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemma-tum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendere posset nullam esse corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum non antequam evanescent, non postea, sed quacum evanescent. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri & minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex Indivisibilibus, contra quam *Euclides* de Incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc Objectio falsæ innititur hypothese. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero

DE MOTU transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in
CORPORUM infinitum. Res clarius intelligitur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dantur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, siquando facili rerum conceptui consulens dixerò quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

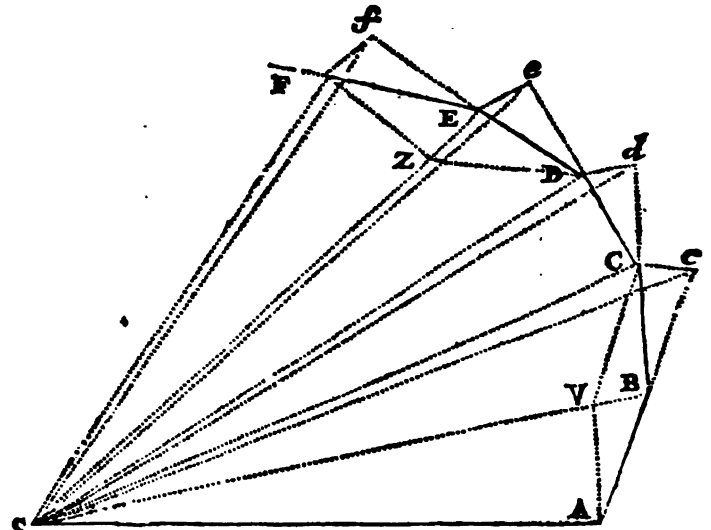
S E C T I O II.

De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam AB . Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad c , (per Leg. 1.) describens lineam Bc æqualem ipsi AB ; adeo ut radiis AS, BS, cS ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ $ASB, BS c$. Verum ubi corpus venit ad B , agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta Bc declinet & pergat in recta BC . Ipsi BS parallela agatur cC , occurrens BC in C ; & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1.) reperietur in C , in eodem



eodem plano cum triangulo ASB . Junge SC ; & triangulum SBC , ob parallelas SB, Cc , æquale erit triangulo Sbc , atque adeo etiam triangulo SAB . Simili argumento si vis centripeta successive agat in C, D, E , &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD, DE, EF , &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC , & SDE ipsi SCD , & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS, SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF , (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: adeoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indefinenter; areæ vero quævis descriptæ $SADS, SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q.E.D.*

LIBER
PRIMUS

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciproce ut perpendicularum a centro illo in Orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E , ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF ; & hæ bases sunt reciproce ut perpendiculara in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successive descriptorum chordæ AB, BC compleantur in parallelogrammum $ABC\mathcal{U}$, & hujus diagonalis $B\mathcal{U}$ in ea positione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producat utrinque; transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3 Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma $ABC\mathcal{U}, DEFZ$; vires in B & E sunt ad invicem in ultima ratione diagonalium $B\mathcal{U}, EZ$, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum Corol. 1.) ex motibus $Bc, B\mathcal{U}$ & Ef, EZ : atqui $B\mathcal{U}$ & EZ ipsi Cc & Ff æquales, in Demonstratione Propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B & E , ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbis curvos sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bifecant

De Motu ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ sagittæ sunt se-
CORPORUM missiles diagonalium de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eadem sunt ad vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum Parabolicorum quos projectilia eodem tempore describunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum Corol. iv, ubi plana in quibus corpora moventur, una cum centris virium quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano descripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima $SAB, SBC, SCD,$ &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi cC (per Prop. xl. Lib. 1 Elem. & Leg. 11.) hoc est, secundum lineam BS ; & in loco C secundum lineam ipsi dD parallelam, hoc est, secundum lineam SC , &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S . *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est sive quiescat superficies in qua Corpus describit figuram rectilineam, sive moveatur eadem una cum corpore, figura descripta, & puncto suo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In Spatiis vel Mediis non resistantibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radorum; sed inde declinant in consequentia seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In Mediis etiam resistantibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant a concursu radorum versus plagam in quam fit motus.

Scholium.

*Scholium.*LIBER
PRIMUS

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat perpetuo secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano sui motus; sed quantitatem superficiæ descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L* & corpus alterum *T*: & (per Legum Corol. vi.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum *T* sibi met ipsi jam relictum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id est, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per Theor. 11.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad

DE MOTU corpus alterum T , erunt areae illae temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus L radio ad alterum corpus T ducto describit areas quae, cum temporibus collatae, sunt valde inaequales; & corpus illud alterum T vel quiescit vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetae ad corpus illud alterum T tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocumque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quae restat post subtractionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

Scholium.

Quoniam aequabilis arearum descriptio Index est Centri, quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo & in orbita sua retinetur: quidni usurpemus in sequentibus aequabilem arearum descriptionem, ut Indicem Centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quae diversos circulos aequabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circularum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circularum radios.

Tendunt hae vires ad centra circularum per Prop. 11. & Corol. 11. Prop. 1; & sunt inter se ut arcuum aequalibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per Corol. 1v. Prop. 1; hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circularum applicata per Lem. VII: & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis aequalibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circularum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur, cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetae sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circularum: hoc est, ut cum Geometris loquar, vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse.

Corol.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica sint in ratione composita ex ratione radorum directe & ratione velocitatum inverse, vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; hoc est, in ratione composita ex ratione radorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

LIBER
PRIMUS.

Corol. 3. Unde, si tempora periodica æquentur & propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. Si & tempora periodica & velocitates sint in ratione subduplicata radorum; æquales erunt vires centripetæ inter se: & contra.

Corol. 5. Si tempora periodica sunt ut radii & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica sint in ratione sesquuplicata radorum & propterea velocitates reciproce in radorum ratione subduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radorum: & contra.

Corol. 7. Et universaliter, si tempus periodicum sit ut Radii R potestas quælibet R^n , & propterea velocitatis reciproce ut Radii potestas R^{n-1} ; erit vis centripeta reciproce ut Radii potestas R^{2n-1} ; & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum a centris pro radiis usurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvens tempore quovis describit, medius est proportionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus (ut sensum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Halleus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrecentem in duplicata ratione distantiarum a centris, decrevi fusius in sequentibus exponere.

Porro

DE MOTU
CORPORUM

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea Gravitatis. Nam si corpus in circulo Terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem, ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. IX. Et hujusmodi propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu de *Horologio Oscillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quocunque. Et si corpus, in polygони lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit: ut ejus velocitas: adeoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium: adeoque, si polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, qua corpus urget circulum: & huic æqualis est vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

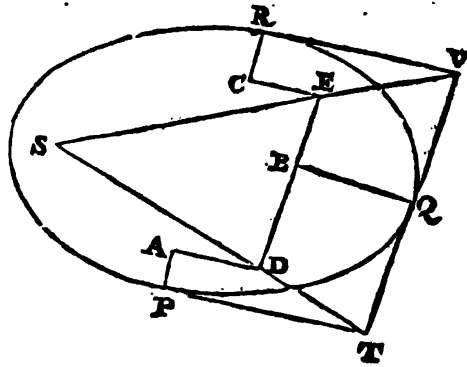
PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

Data quibuscunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT, TQ, VR , in punctis totidem P, Q, R , concurrentes in T & V . Ad tangentes erigantur perpendiculara PA, QB, RC , velocitati bus corporis in punctis illis P, Q, R , a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est, ita ut sit PA ad QB , ut velocitas in Q ad velocitatem in P , & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q . Per perpendicularorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentes in D & E : Et actæ TD, VE concurrent in centro quæsito S .

Nam

Nam perpendiculara a centro S in tangentes PT , QT demissa (per Corol. 1 Prop. 1.) sunt reciproce ut velocitates corporis in punctis P & Q ; adeoque per constructionem ut perpendiculara AP , BQ directe, id est ut perpendiculara a puncto D in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta S , D , T , sunt in una recta. Et simili argumento



puncta S , E , V sunt etiam in una recta; & propterea centrum S in concursu rectarum TD , VE versatur. *Q.E.D.*

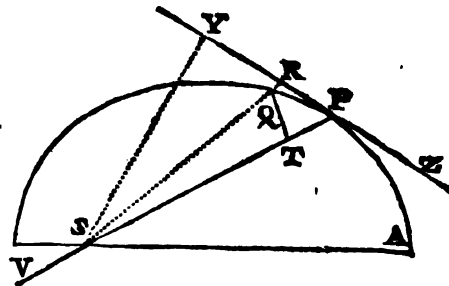
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in Orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directe & tempus bis inverse.

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4. Prop. 1.) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per Corol. 2 & 3. Lem. XI.) adeoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q.E.D.*

Idem facile demonstratur etiam per Corol. 4. Lem. X.

Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S describat lineam curvam APQ , tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P , & ad tangentem ab alio quovis Curvæ puncto Q agatur QR distantia SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam illam SP : vis centripeta erit reciproce ut solidum SP quad. \times QT quad.



$\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q . Nam QR æqualis est

F

est

DE MOTU est sagittæ dupli arcus QP , in cuius medio est P , & duplum trian-
CORPORUM guli SQP five $SP \times QT$, tempori quo arcus iste duplus describitur
proportionale est, ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut solidum
 $\frac{STq \times QPq}{QR}$, si modo ST perpendicularum sit a centro virium in Or-
bis tangentem PR demissum. Nam rectangula $ST \times QP$ & $SP \times QT$
æquantur.

Corol. 3. Si Orbis vel circulus est, vel angulum contactus cum cir-
culo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundem-
que radium curvaturæ ad punctum contactus P , & si PV chorda
sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centri-
peta reciproce ut solidum $STq \times PV$ est. Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$.

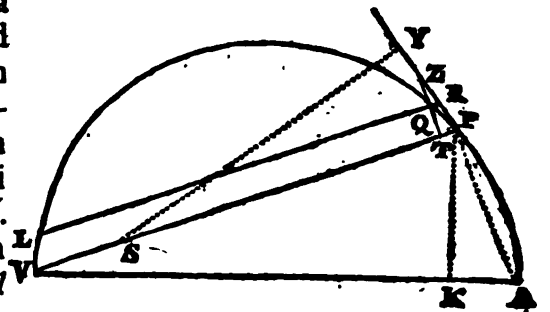
Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe,
& chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendicu-
lum ST per Corol. 1 Prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ , & in ea
detur etiam punctum S ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur,
inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a cursu
rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur
eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel so-
lidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $STq \times PV$ huic vi reciproce pro-
portionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

*Gyretur corpus in circumferentia Circuli, requiritur Lex vis
centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.*

Esto Circuli circumferentia
 $VQP A$, punctum datum ad
quod vis ceu ad centrum suum
tendit S , corpus in circumferen-
tia latum P , locus proximus in
quem movebitur Q , & circuli
tangens ad locum priorem PRZ .
Per punctum S ducatur chorda
 PV , & acta circuli diametro $V A$
jungatur AP , & ad SP demitta-
tur perpendicularum QT , quod productum occurrat tangenti PR in Z ,



ac denique per punctum Q agatur LR quæ ipsi SP parallela LIBER
PRIMUS. sit & occurrat tum circulo in L tum tangenti PZ in R . Et ob similia triangula ZQR , ZTP , VPA ; erit RP quad. hoc est QRL ad QT quad. ut AV quad. ad PV quad. Ideoque $\frac{QRL \times PV \text{ quad.}}{AV \text{ quad.}}$ æquatur QT quad. Ducantur hæc æqualia in

$\frac{SP \text{ quad.}}{QR}$ & punctis P & Q coeuntibus, scribatur PV pro RL .

Sic fiet $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$. Ergo (per

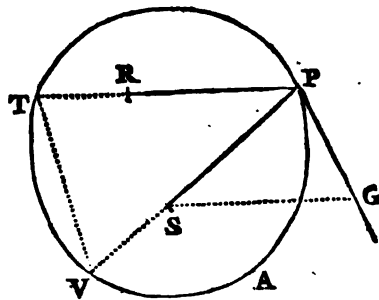
Corol. 1 & 5 Prop. vi.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SP^3 \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ id est (ob datum AV quad.) reciproce ut quadratum distantiae seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. $Q. E. I.$

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendicularum ST , & ob similia triangula STP , VPA ; erit AV ad PV ut SP ad ST , ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale ST , & $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale $ST \text{ quad.} \times PV$. Et propterea (per Corol. 3 & 5 Prop. vi.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SP^3 \times PV \text{ cub.}}{AV^3}$ hoc est, ob datam AV , reciproce ut $SP^3 \times PV \text{ cub.}$ $Q. E. I.$

Corol. 1. Hinc si punctum datum S ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V ; erit vis centripeta reciproce ut quadrato cubus altitudinis SP .

Corol. 2. Vis qua corpus P in circulo APT circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest ut $RP \text{ quad.} \times SP$ ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiz corporis a secundo virium centro parallela est. Nam, per constructionem hujus Propositionis, vis prior est ad vim posteriorem, ut $RP^3 \times PT \text{ cub.}$ ad $SP^3 \times PV \text{ cub.}$ id



DE MOTU
CORPORUM

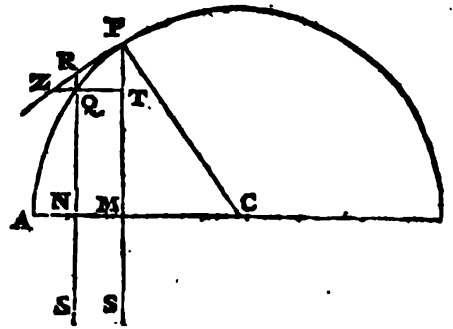
id est, ut $SP \times RP q$ ad $\frac{SP \text{ cub.} \times PV \text{ cub.}}{PT \text{ cub.}}$ five (ob similia triangula PSG , TPV) ad $SG \text{ cub.}$

Corol 3. Vis, qua corpus P in Orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RP q$ contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro S & quadrato distantiae ejus a secundo virium centro R ad cubum rectae SG quae a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis a secundo virium centro distantiae RP parallela est. Nam vires in hoc orbe, ad ejus punctum quodvis P , eadem sunt ac in Circulo ejusdem curvaturæ.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in circulo PQA : ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetae tendentis ad punctum adeo longinquum S , ut lineae omnes PS , RS ad id ductae, pro parallelis haberi possint.

A Circuli centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N , & jungatur CP . Ob similia triangula CPM , PZT & RZQ est $CP q$ ad $PM q$ ut $PR q$ ad $QT q$ & ex natura Circuli $PR q$ æquale est rectangulo $QR \times RN \times QN$ si- ve coeuntibus punctis P , Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo est $CP q$ ad $PM \text{ quad.}$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT \text{ quad.}$ adeoque $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$



æquale $\frac{2PM \text{ cub.}}{CP \text{ quad.}}$, & $\frac{QT \text{ quad.} \times SP \text{ quad.}}{QR}$ æquale $\frac{2PM \text{ cub.} \times SP \text{ qu.}}{CP \text{ quad.}}$.

Est ergo (per Corol 1 & 5. Prop. v.1.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM \text{ cub.} \times SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$ hoc est neglecta ratione determinata $\frac{2SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$

reciproce ut $PM \text{ cub.}$ Q. E. I.

Idem facile colligitur etiam ex Propositione præcedente.

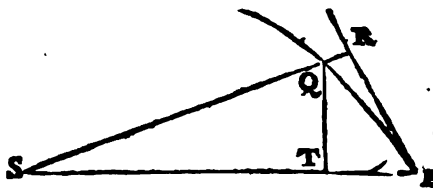
Scho-

Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in Spirali PQS secante radios omnes SP, SQ, &c. in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis.



Detur angulus indefinite parvus PSQ , & ob datos omnes angulos dabitur specie figura $SPQRT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$ estque

$\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ ut QT , hoc est ut SP . Mutetur jam utcunque angulus PSQ , & recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius PR vel QT . Ergo manebit $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut SP . Quare $\frac{QT \text{ quad.} \times SP \text{ quad.}}{QR}$ est ut $SP \text{ cub.}$ adeoque (per Corol. I & 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut cubus distantia SP . *Q.E.I.*

Idem aliter.

Perpendiculum ST in tangentem demissum, & circuli Spiralem tangentis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus, ideoque $SP \text{ cub.}$ est ut $ST \text{ quad.} \times PV$, hoc est (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

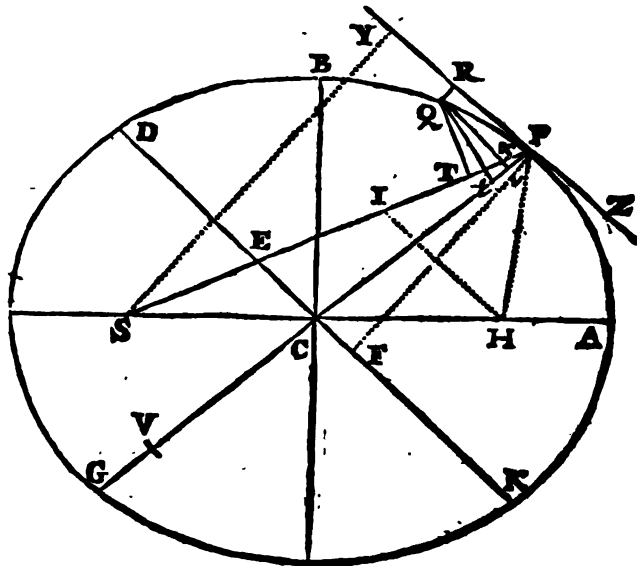
Parallelogramma omnia, circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta, esse inter se equalia.

Constat ex Conicis.

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto CA, CB semiaxes Ellipseos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendiculara ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP ; & si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex Conicis) PvG ad Pv quad. ut PC quad. ad CD quad. & (ob similia triangula Qvt, PCF) Qv quad. est ad Qt quad. ut PC quad. ad PF quad. & conjunctis rationibus, PvG ad Qt quad. ut PC quad. ad CD quad. & PC quad. ad PF quad. id est, vG ad $\frac{Qt \text{ quad.}}{Pv}$ ut PC quad.



ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non, punctis P & Q coeuntibus, $2PC$ pro vG , & ductis extremis & mediis in se mutuo, fiet $\frac{Qt \text{ quad.} \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia PC . *Q.E.I.*

Idem aliter.

In PG ab altera parte puncti t posita intelligatur tu æqualis ipsi tv ; deinde cape uV quæ sit ad vG ut est DC quad. ad PC quad. Et quoniam ex Conicis est Qv quad. ad PvG , ut DC quad. ad PC quad.: erit Qv quad. æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chordæ

dæ arcus PQ erit æquale rectangulo VPv ; adeoque Circulus qui tangit Sectionem Conicam in P & transit per punctum Q , transibit etiam per punctum V . Coeant puncta P & Q , & hic circulus ejusdem erit curvaturæ cum sectione conica in P , & PV æqualis erit

$\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis qua corpus P in Ellipsi revolvitur erit reci-

proce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per Corol. 3. Prop. vi.) hoc est (ob datum $2DCq$ in PFq) directe ut PC . $Q.E.I.$

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro Ellipseos: & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique Ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Ellipsis universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipsis similibus æqualia sunt per Corol. 3. & 8, Prop. iv: in Ellipsis autem communem habentibus axem majorem, sunt ad invicem ut Ellipseon arcæ totæ directe & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est; ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse; hæc est, ut axes illi minores directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverse; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est Theorema Galilei, Et si conici sectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam versa. Et quemadmodum in Circulo vel Ellipsi, si vires tendunt ad centrum figuræ in Abscissa positum, hæ vires augendo vel diminuendo Ordinatæ in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis Ordinarum ad Abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica manent æqualia: sic etiam in figuris universis, si Ordinatæ augeantur vel diminuuntur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in Abscissa positum tendentes a binis quibusvis figurarum locis, ad quæ terminantur Ordinatæ correspondentibus Abscissarum punctis insistentes, augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

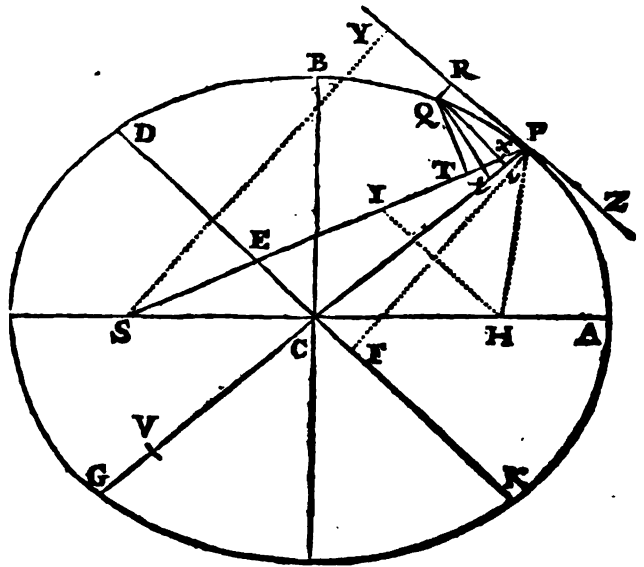
S E C T I O III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI

Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Esto Ellipseos umbilicus S . Agatur SP secans Ellipseos tum diametrum DK in E , tum ordinatim applicatam Qv in x , & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC , eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquentur ES, EI , adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI , id est (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH , quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicu-



laris QT , & Ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BCquad.}{AC}$) dicto L , erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv , id est ut PE seu AC ad PC ; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv ; & GvP ad $Qvquad.$ ut $PCquad.$ ad $CDquad.$; & (per Corol. 2 Lem. vii.) $Qvquad.$ ad $Qxquad.$ punctis, Q & P coeuntibus, est ratio æqualitatis; & $Qxquad.$ seu $Qvquad.$ est ad $QTquad.$ ut $EPquad.$ ad $PFquad.$, id est ut $CAquad.$ ad $PFquad.$ sive (per Lem. xii.) ut $CDquad.$ ad $CBquad.$ Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad $QTquad.$ ut $AC \times L \times PCq. \times CDq.$ seu $2CBq. \times PCq. \times CDq.$ ad $PC \times Gv \times CDq. \times CBq.$ sive ut $2PC$ ad Gv .
Sed,

Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquantur $2PC$ & Gv . Ergo & his LIBER
PRIMUS.
 proportionalia $L \times QR$ & QT quad. æquantur. Ducantur hæc æqua-
 lia in $\frac{SPq}{QR}$ & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq. \times QTq.}{QR}$. Ergo (per Co-
 rol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$. id
 est, reciproce in ratione duplicata distantiz SP . *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum Ellipseos tendens qua corpus P in Ellipsi
 illa revolvi potest, sit (per Corol. 1 Prop. x) ut CP distantia cor-
 poris ab Ellipseos centro C ; ducatur CE parallela Ellipseos tangen-
 ti PR : & vis qua corpus idem P , circum aliud quodvis Ellipseos
 punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E , erit ut
 $\frac{PE cub.}{SPq}$ (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbili-
 cus Ellipseos, adeoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q. E. I.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Para-
 bolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob digni-
 tatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit ca-
 sus ceteros demonstratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

*Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur Lex vis centri-
 petæ tendentis ad umbilicum figure.*

Sunto CA, CB semi-axes Hyperbolæ; PG, KD diametri con-
 jugatæ; PF, Qt perpendicularia ad diametros; & Qp ordinatim ap-
 plicata ad diametrum GP . Agatur SP secans cum diametrum
 DK in E , tum ordinatim applicatam Qv in x , & compleatur pa-
 rallelogrammum $QR Pv$. Patet EP æqualem esse semiaxi trans-
 verso AC , eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico H linea
 HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH , æquentur ES, EI ;
 adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI , id est (ob pa-
 rallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum $PS,$
 PH , quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP de-
 mittatur perpendicularis QT . Et Hyperbolæ latere recto princi-
 pali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L , erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv ,
 id est, ut PE seu AC ad PC ; Et $L \times Pv$ ad GvP ut L ad
 G
 Gv ;

Corol. 1. Ex tribus novissimis Propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P , secundum lineam quamvis rectam PR , quacunque cum velocitate exeat de loco P , & vi centripeta quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, simul agitur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico & puncto contactus & positione tangentis, describi potest sectio Conica quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: & Orbes duo se mutuo tangentes, eadem vi centripeta describi non possunt.

Corol. 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco suo P , ea sit, qua lineola PR in minima aliqua temporis particula describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR : movebitur hoc corpus in Conica aliqua sectione, cujus latus rectum principale est quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$ quæ ultimo fit ubi lineolæ PR , QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipsin, & casum excipio ubi corpus recta descendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiae locorum a centro; dico quod Orbium Latera recta principalia sunt in duplicata ratione arcarum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore describunt.

Nam, per Corol. 2. Prop. XIII, Latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q . Sed lineola minima QR , dato tempore, est ut vis centripeta generans, hoc est (per Hypothesin) reciproce ut SPq . Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$. hoc est, latus rectum L in duplicata ratione arcæ $QT \times SP$. Q.E.D.

Corol.

DE MOTU
CORPORUM

Corol. Hinc Ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$ quæ dato tempore describitur ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Isdem positis, dico quod Tempora periodica in Ellipsis sunt in ratione sesquuplicata majorum axium.

Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & sesquuplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Prop. XIV. est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquuplicata ratio majoris axis æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsis eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

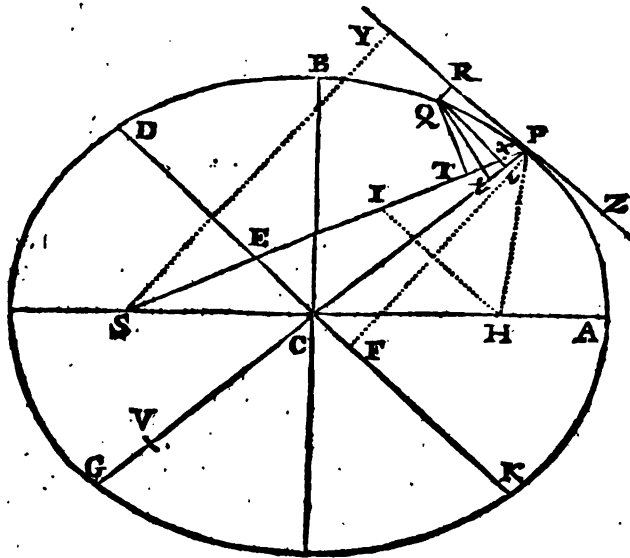
PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Isdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant Orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod Velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendicularium inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendicularum ST & velocitas corporis P erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{STq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus, quam minimus PQ in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens PR , id est (ob proportionales PR ad QT & SP ad ST) ut $\frac{SP \times QT}{ST}$, sive ut ST reciproce & $SP \times QT$ directe; estque

 $SP \times QT$

SPXQT ut area dato tempore descripta, id est, per Prop. XLV. LIBER PRIMUS.
 in subduplicata ratione lateris recti. Q. E. D.



Corol. 1. Latera recta principalia sua in ratione composita ex duplicata ratione perpendicularorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in Conica sectione, in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in Circulo in eadem à centro distantia, in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsis gyantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem quæ corporum gyantium in Circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol. 6. Prop. iv.) reciproce in subduplicata ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semi-axes minores; & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum subduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio subduplicata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diversis, quarum latera

DE MOTU latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est re-
CORPORUM ciproce ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in subduplicata ratione distantiae corporis ab umbilico figuræ; in Ellipsi magis variatur, in Hyperbola minus, quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. xiv.) perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in subduplicata ratione distantiae. In Hyperbola perpendicularum minus variatur, in Ellipsi magis.

Corol. 7. In Parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam, est ad velocitatem corporis revolventis in Circulo ad eandem a centro distantiam, in subduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Propositionis quartæ, servatur eadem proportio in omnibus distantis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in Circulo in distantia dimidii lateris recti principalis Sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Prop. iv.) velocitas gyrantis in hoc Circulo sit ad velocitatem gyrantis in Circulo quovis alio, reciproce in subduplicata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in Circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

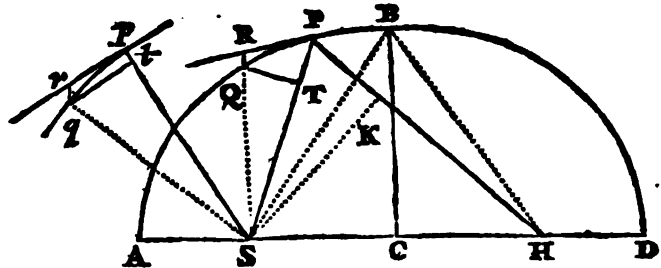
PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantie locorum a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur Linea quam corpus describit, de loco dato, cum data velocitate, secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit qua corpus p in orbita quavis data pq gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco p .

De

De loco P , secundum lineam PR , exeat corpus P , cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coni-
sectionem PQ . Hanc igitur recta PR tanget in P . Tangat itidem
recta aliqua pr Orbitam pq in p , & si ab S ad eas tangentes demitti
intelligentur perpendiculara, erit (per Corol. 1. Prop. xvi.) latus rec-
tum principale Conisectionis ad latus rectum principale Orbitæ, in
ratione composita ex duplicata ratione perpendicularorum & dupli-
cata ratione velocitatum, atque adeo datur. Sit istud L . Datur
præterea Coni-
sectionis umbilicus S .



Anguli $RP S$ comple-
mentum ad duos
rectos fiat angulus
 RPH , & dabitur
positione linea PH ,
in qua umbilicus alter
 H locatur. De-
missio ad PH perpen-
diculo SK , erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC , & erit
 $SPq. - 2KPH + PHq. = SHq. = 4CHq. = 4BHq. - 4BCq. =$
 $\frac{SP + PH}{SP + PH} \text{ quad.} - L \times \frac{SP + PH}{SP + PH} = SPq. + 2SPH + PHq.$
 $- L \times \frac{SP + PH}{SP + PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq. - PHq.$
 $+ L \times \frac{SP + PH}{SP + PH}$, & fiet $L \times \frac{SP + PH}{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$,
seu $SP + PH$, ad PH , ut $2SP + 2KP$ ad L . Unde datur PH
tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P
velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$,
jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS , adeo-
que figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis S, H , & axe princi-
pali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta sit corporis velocitas ut latus
rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit,
& propterea figura erit Parabola axem habens SH parallelum lineæ
 PK , & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum veloci-
tate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alte-
ram partem tangentis, adeoque tangente inter umbilicos pergente,
figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differen-
tiz linearum SP & PH , & inde dabitur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc in omni Conisectione ex dato vertice principali D ,
latere recto L , & umbilico S , datur umbilicus alter H capiendo DH ,
ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum &
 $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L ,
H in

DE MOTU in casu hujus Corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4DS$ ad L &
 CORPORUM divisim DS ad DH ut $4DS - L$ ad L .

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D , invenietur Orbita expedite, capiendò scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam DS , in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in Circulo, ad distantiam DS , gyrantis (per Corol. 3. Prop. xvi.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

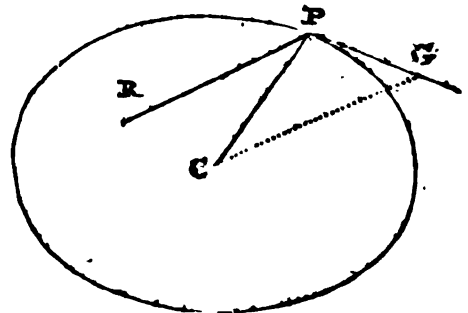
Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex Orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest Orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsu loco, secundum rectam positione datam, exhibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.

Si corpus P vi centripeta ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque Sectionis conicæ cujus centrum sit C , & requiratur Lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & Orbis tangenti PG occurrens in G ; & vis illa (per Corol. 1 & Schol. Prop. x., & Corol. 3. Prop. vii.) erit ut

CG cub.
 RP quad.

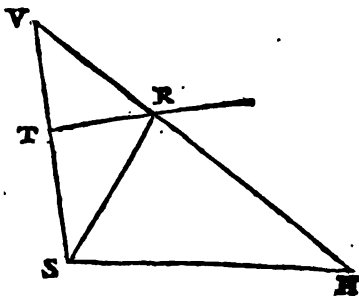


S E C T I O IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

L E M M A XV.

Si ab Ellipseos vel Hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ SV, HV, quarum una HV æqualis sit axi principali figuræ, altera SV a perpendicularo TR in se demisso bisecetur in T; perpendicularum illud TR sectionem Conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit HV æqualis axi principali figuræ.



Secet enim perpendicularum TR rectam HV productam, si opus fuerit, in R ; & jungatur SR . Ob æquales TS , TV , æquales erunt & rectæ SR , VR & anguli TRS , TRV . Unde punctum R erit ad Sectionem Conicam, & perpendicularum TR tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus describere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

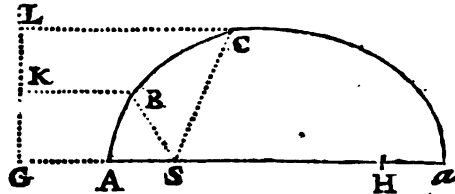
Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis Trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod Trajectoria debet transire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB - SP$, si orbita sit ellipsis, vel $AB + SP$, si ea sit Hyperbola, describatur circulus HG . Ad tangentem TR demittatur perpendicularum ST , & producatum idem ad V , ut sit TV æqualis ST ; centroque V & intervallo AB describatur circulus FH . Hac

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

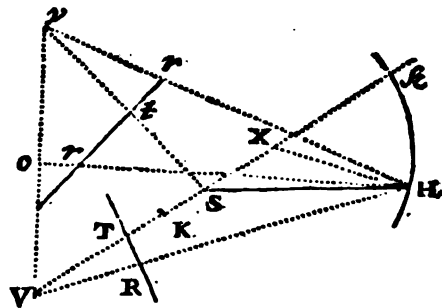
LIBER PRIMUS.

Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis specie datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.

Caf. 1. Dato umbilico S , describenda sit Trajectoria ABC per puncta duo B, C . Quoniam Trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape KB ad BS , & LC ad CS . Centris B, C , intervallis BK, CL , describe circulos duos, & ad rectam KL , quæ tangat eosdem in K & L , demitte perpendicularum SG , idemque secat in A & a , ita ut sit GA ad AS & Ga ad aS ut est KB ad BS , & axe Aa , verticibus A, a , describatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter Figuræ descriptæ, & cum sit GA ad AS ut Ga ad aS , erit divisim $Ga - GA$ seu Aa ad $aS - AS$ seu SH in eadem ratione, adeoque in ratione quam habet axis principalis Figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea Figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. Cumque sint KB ad BS & LC ad CS in eadem ratione, transibit hæc. Figura per puncta B, C , ut ex Conicis manifestum est.



Caf. 2. Dato umbilico S , describenda sit Trajectoria quæ rectas duas TR, tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendiculara ST, St & produc eadem ad V, v , ut sint TV, tv æquales TS, tS . Biseca Vv in O , & erige perpendicularum infinitum OH , rectamque VS infinite productam secat in K & k ita, ut sit VK ad KS & Vk ad kS ut est Trajectoriæ describendæ axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro Kk describatur circulus secans OH in H ; & umbilicis S, H , axe principali ipsam VH æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Nam biseca Kk in X , & junge HX, HS, HV, Hv . Quoniam est VK ad KS ut Vk ad kS ; & compositæ ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; divisimque:

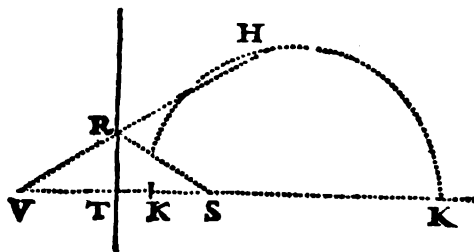


H 3

ut

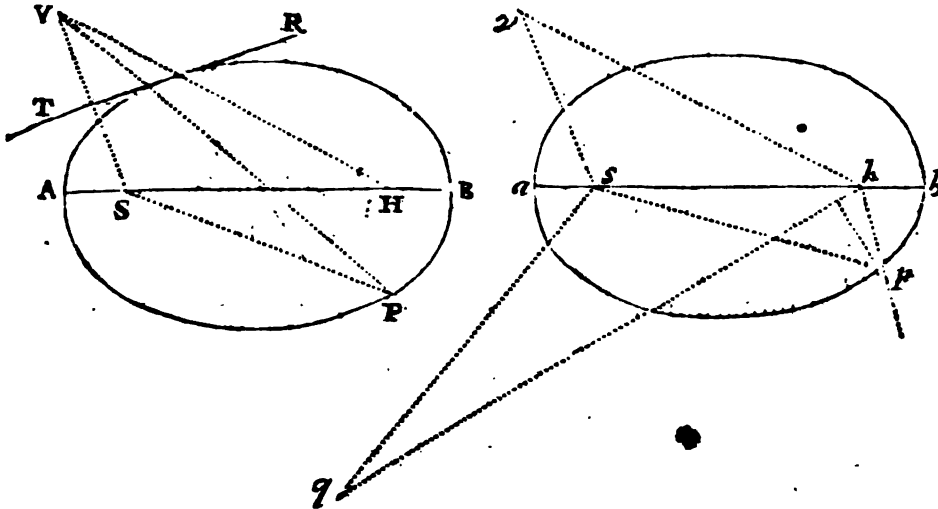
DE MOTU ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id est ut $2 VX$ ad $2 KX$ & $2 KX$ ad
CORPORUM $2 SX$, adeoque ut VX ad HX & HX ad SX , similia erunt tri-
 angula VXH, HXS , & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH ,
 adeoque ut VK ad KS . Habet igitur Trajectoriæ descriptæ axis
 principalis VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH ,
 quam habet Trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius um-
 bilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum
 VH, vH , æquentur axi principali, & VS, vS a rectis TR, tr per-
 pendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate xv, rectas illas
 Trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*

Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit Trajectoria quæ rectam
 TR tanget in puncto dato R . In rectam TR demitte perpendicula-
 rem ST , & produc eandem ad V , ut sit TV æqualis ST . Junge
 VR , & rectam VS infinite productam seca in K & k , ita ut sit
 VK ad SK & Vk ad Sk ut Ellipseos describendæ axis principalis ad
 distantiam umbilicorum; circuloque super diametro Kk descripto,
 secetur producta recta VR in H , & umbilicis S, H , axe principali
 rectam VH æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Nam-
 que VH esse ad SH ut VK ad
 SK , atque adeo ut axis principa-
 lis Trajectoriæ describendæ ad
 distantiam umbilicorum ejus, pa-
 tet ex demonstratis in Casu se-
 cundo, & propterea Trajecto-
 riam descriptam ejusdem esse
 speciei cum describenda; rectam
 vero TR qua angulus $VR S$ bisecatur, tangere Trajectoriam in
 puncto R , patet ex Conicis. *Q. E. F.*



Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit Trajectoria APB ,
 quæ tangat rectam TR , transeatque per punctum quodvis P extra
 tangentem datum, quæque similis sit Figuræ apb , axe principali
 ab & umbilicis s, b descriptæ. In tangentem TR demitte per-
 pendiculum ST , & produc idem ad V , ut sit TV æqualis ST . An-
 gulis autem VSP, SVP fac angulos hsq, shq æquales; centro-
 que q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe circulum
 secantem Figuram apb in p . Junge sp & age SH quæ sit ad sb
 ut est SP ad sp , quæque angulum PSH angulo psb & angulum
 VSH angulo psq æquales constituat. Denique umbilicis S, H ,
 & axe principali AB distantiam VH æquante, describatur sectio
 Conica. Dico factum. Nam si agatur sv quæ sit ad sp ut est sb
 ad

ad sq , quæque constituat angulum vsp angulo bsq & angulum vsh angulo psq æquales, triangula svh , spq erunt similia & propterea vb erit ad pq ut est sb ad sq , id est (ob similia triangula



VSP , bsq) ut est VS ad SP seu ab ad pq : Æquantur ergo vb & ab . Porro ob similia triangula VSH . vsh , est VH ad SH ut vb ad sb , id est, axis Conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis ab ad umbilicorum intervallum sb ; & propterea Figura jam descripta similis est Figuræ apb . Transiit autem hæc Figura per punctum P , eo quod triangulum PSH simile sit triangulo psb ; & quia VH æquatur ipsius axi & VS bisecatur perpendiculariter a recta TR , tangit eadem rectam TR .
Q. E. F.

L E M M A XVI

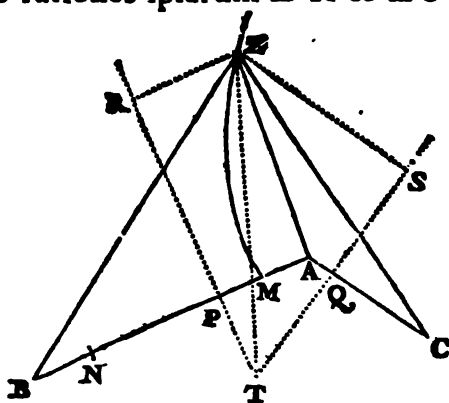
A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. I. Sunto puncta illa data A, B, C & punctum quartum Z , quod invenire oportet; Ob datam differentiam linearum AZ, BZ , locabitur punctum Z in Hyperbola cujus umbilici sunt A & B , & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN . Cape PM .

adi

DE MOTU ad MA ut est MN ad AB , & erecta PR perpendiculari ad AB ,
CORPORUM demissaque ZR perpendiculari ad PR ; erit, ex natura hujus Hyperbolæ, ZR ad AZ ut est MN ad AB . Simili discursu punctum Z locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt A, C & principalis axis differentia inter AZ & CZ , ducique potest QS ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS , hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC . Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad

AZ & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque si rectæ RP, SQ concurrant in T , & agatur TZ , figura $TRZS$, dabitur specie, & recta TZ in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Eadem methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt B & C & axis principalis differentia rectarum BZ, CZ , inveniri potest alia recta in qua punctum Z locatur. Habitis autem duobus Locis rectilineis, habetur punctum quæsitum Z in eorum interfectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ æquantur, punctum Z locabitur in perpendicularo bisecante distantiam AB , & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro Circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum Tactionum *Apollonii a Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus S , punctum P , & tangens TR , & invenendus sit umbilicus alter H . Ad tangentem demitte perpendicularum ST , & produc idem ad T , ut sit TT , æqualis ST , & erit TH æqualis axi principali. Junge SP, HP , & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangentes

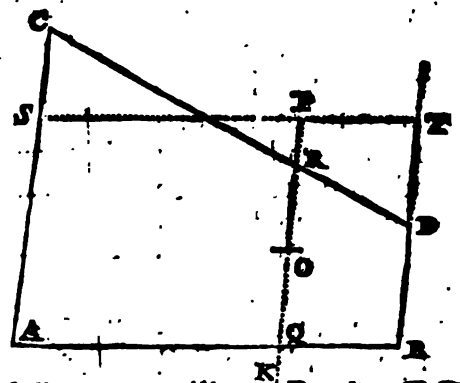
S E C T I O V.

Inuentio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

L E M M A XVII.

Si a data Conica Sectionis puncto quouis P, ad Trapezii alicujus ABDC, in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta AB, CD, AC, DB, totidem recta PQ, PR, PS, PT in datis angulis ducantur, singula ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera $PQ \times PR$, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita $PS \times PT$ in data ratione.

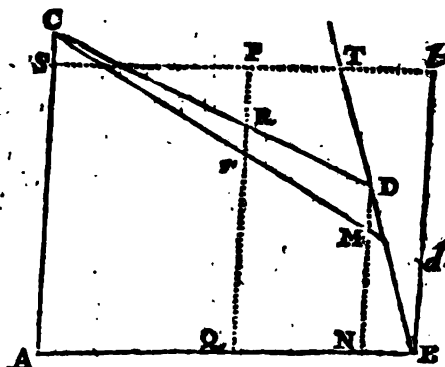
Cas. i. Ponamus primo lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC , & PS ac PT lateri AB . Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta AC & BD , sibi invicem parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis & bisecabit etiam RQ . Sit O punctum in quo RQ bisecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K ut sit OK æqualis PO , & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B , & K sint ad Conicam sectionem, & PK secet AB in dato angulo, erit (per Prop. 17. & 18. Lib. III. Conicorum Apollonii) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in data ratione. Sed QK & PR æquales sunt, utpote æqualium OK, OP , & OQ : OR differentiæ, & inde etiam rectangula PQK & $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque adeo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum AQB , hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in data ratione., *Q. E. D.*

*Cas.*

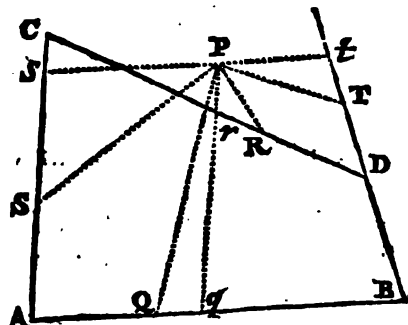
Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera opposita AC & BD non esse parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t , tum Conicæ sectioni in d . Junge Cd secantem PQ in r ,

LIBER PRIMUS.

& ipsi PQ parallelam age DM secantem Cd in M & AB in N . Jam ob similia triangula BTt , DBN ; est Bt seu PQ ad Tt ut DN ad NB . Sic & Rr est ad AQ seu PS ut DM ad AN . Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum PS in Tt , ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB , & (per *Cas. 1.*) ita rectangulum PQ in Pr est ad rectangulum PS in Pt , ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. Q. E. D.



Cas. 3. Ponamus denique lines quatuor PQ , PR , PS , PT non esse parallelas lateribus AC , AB , sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age Pq , Pr parallelas ipsi AC ; & Ps , Pt parallelas ipsi AB ; & propter datos angulos triangulorum PQq , PRr , PSs , PTt , dabuntur rationes PQ ad Pq , PR ad Pr , PS ad Ps , & PT ad Pt ; atque adeo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data est: Ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Q. E. D.

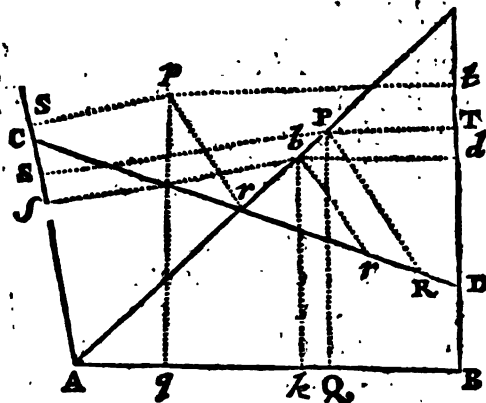


LEMMA XVIII.

Iisdem positis rectangulum ductarum ad opposita duo latera Trapezii $PQ \times PR$ sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera $PS \times PT$ in data ratione; punctum P, a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam sectionem circa Trapezium descriptam.

DE MOTU
CORPORUM

Per puncta A, B, C, D & aliquod infimorum punctorum P , puta p , concipe Conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge AP secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in P , si fieri potest, puta in b . Ergo si ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ pq, pr, ps, pt , & bk, br, bs, bd ; erit ut $bk \times br$ ad $bs \times bd$ ita (per Lem. xvii) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per Hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$.



Est & propter similitudinem Trapeziorum $bkAs$, $PQAS$, ut bk ad bs ita PQ ad PS . Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit br ad bd ut PR ad PT . Ergo Trapezia æquiangula $Drbd$, $DRPT$ similia sunt, & eorum diagonales Db , DP propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum AP , DP adeoque coincidit cum puncto P . Quare punctum P , ubicunque sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si rectæ tres PQ, PR, PS a puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC , singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertie PS quad. in data ratione: punctum P , a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conicæ quæ tangit lineas AB, CD in A & C ; & contra. Nam coeat linea BD cum linea AC manente positione trium AB, CD, AC ; dein coeat etiam linea PT cum linea PS : & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS quad. rectæque AB, CD quæ curvam in punctis A & B, C & D secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangunt.

Scholium.

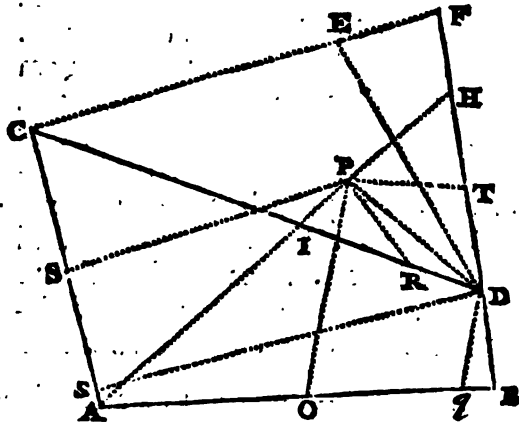
Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam Rectilinea per verticem Coni transiens, quam Circularis basi parallela includatur. Nam si punctum P incidit in rectam, quæ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D junguntur, Conicæ sectio

verte-

vertetur in geminas Rectas, quarum una est recta illa in quam punctum P incidit, & altera est recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si Trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera, ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinibus angulorum S, T , in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum sub sinibus angulorum Q, R in quibus duæ primæ PQ, PR ducuntur. Cæteris in casibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii $ABCD$ substitui potest Quadrilaterum cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor A, B, C, D , possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu Sectio Conicæ transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEMMA XIX.

Invenire punctum P , a quo si recte quatuor PQ, PR, PS, PT , ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC, BD , singule ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis, $PQ \times PR$, sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ in data ratione.



Lineæ AB, CD , ad quas rectæ duæ PQ, PR , unum rectangulorum continentes ducuntur, convenient cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A, B, C, D . Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet AH , in qua velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas BD, CD , nimirum BD in H , & CD in I , & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA & PA

DE MOTU ad PS , adeoque ratio PQ ad
CORPORUM PS . Auferendo hanc a data ra-
tione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$,
dabitur ratio PR ad PT , &
addendo datas rationes PI ad
 PR , & PT ad PH dabitur
ratio PI ad PH atque adeo
punctum P . *Q. E. I.*

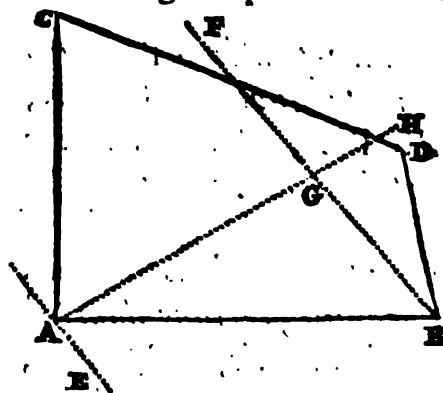
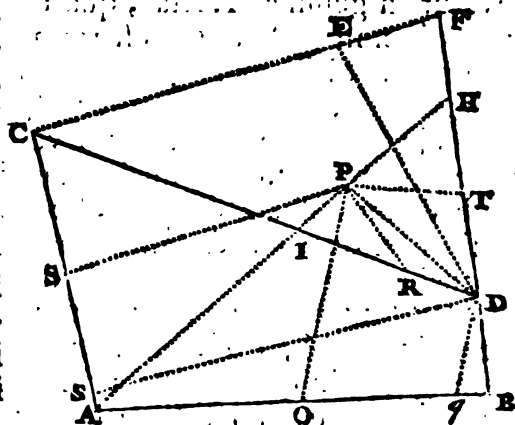
Corol. 1. Hinc etiam ad Loci
punctorum infinitorum P pun-
ctum quodvis D tangens duci
potest. Nam chorda PD ubi
puncta P ac D conveniunt,
hoc est, ubi AH ducitur per punctum D , tangens evadit. Quo in
casu ultima ratio evanescentium IP & PH invenietur ut supra.
Ipsi igitur AD duc parallelam CF , occurrentem BD in F , & in ea
ultima ratione sectam in E , & DE tangens erit, propterea quod
 CF & evanescentes IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri potest.
Per quodvis punctorum A, B, C, D , puta A , duc Loci tangentem
 AE & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF
occurentem Loco in F . Invenietur autem punctum F per Lem. xix.
Bifeca BF in G , & acta indefinita
 AG erit positio diametri ad quam
 BG & FG ordinatim applicantur.
Hæc AG occurrat Loco in H , &
erit AH diameter sive latus trans-
versum, ad quod latus rectum erit
ut $BGq.$ ad AGH . Si AG nullibi
occurrit Loco, linea AH existente
infinita, Locus erit Parabola & la-
tus rectum ejus ad diametrum AG

pertinens erit $\frac{BGq.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit
ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G : & Ellipsis,
ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit & insuper
 BG quad. æquale rectangulo AGH , quo in casu Circulus habebitur.

Atque ita Problematis Veterum de quatuor lineis ab *Euclide* in-
capti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geome-
trica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

LEM-

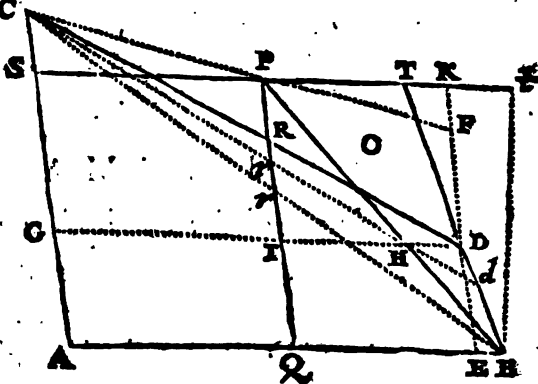


LEMMA XX.

LIBER
PRIMUS.

Si Parallelogrammum quodvis ASPQ angulis duobus oppositis A & P tangit sectionem quamvis Conicam in punctis A & P; & lateribus unius angulorum illorum infinite productis AQ, AS, occurrit eidem sectioni Conicæ in B & C; a punctis autem occursum B & C ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum D agantur rectæ duæ BD, CD occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus PS, PQ in T & R: erunt semper abscissæ laterum partes PR & PT ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum D tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.

Cas. 1. Jungantur BP, CP & a puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipsi AB parallela sit & occurrat PB, PQ, CA in H, I, G; altera DE parallela sit ipsi AC & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per Lemma xvii.) rectangulum DE x DF ad rectangulum DG x DH in ratione data. Sed est PQ ad DE (seu IQ) ut PB ad HB, adeoque ut PT ad DH; &



vicissim PQ ad PT ut DE ad DH. Est & PR ad DF ut RC ad DC, adeoque ut (IG vel) PS ad DG, & vicissim PR ad PS ut DF ad DG; & conjunctis rationibus fit rectangulum PQ x PR ad rectangulum PS x PT ut rectangulum DE x DF ad rectangulum DG x DH, atque adeo in data ratione. Sed dantur PQ & PS & propterea ratio PR ad PT datur. Q. E. D.

Cas. 2. Quod si PR & PT ponatur in data ratione ad invicem, tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum DE x DF ad rectangulum DG x DH, in ratione data, adeoque punctum D (per Lemma xviii.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P: Q. E. D.

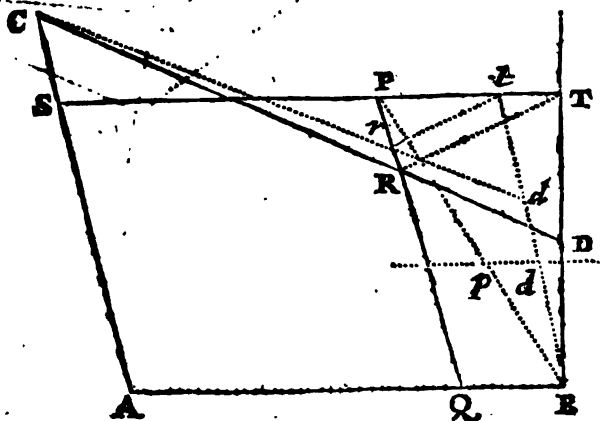
Corol.

DE MOTO **CORPORUM** **Stum** M perpetuo tangit lineam Rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum M versari in linea Curvæ absurdum est. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque A, B, C, P, D . Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C , quæ poli nominentur, age rectas AB, AC ,

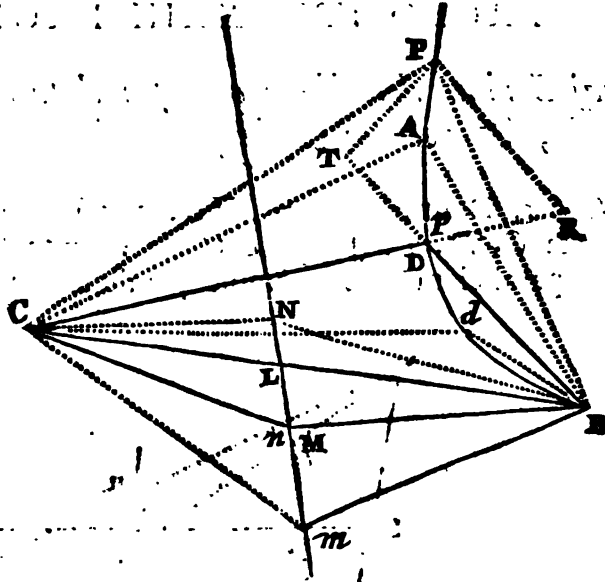


hisque parallelas TPS, PRQ per punctum quartum P . Deinde a polis duobus B, C age per punctum quintum D infinitas duas BDT, CRD , novissime ductis TPS, PRQ (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in T & R . Denique de rectis PT, PR , acta recta tr ipsi TR parallela, abscinde qualvis Pt, Pr ipsis PT, PR proportionales; & si per earum terminos t, r & polos B, C actæ Bt, Cr concurrant in d , locabitur punctum illud d in Trajectoria quæsitâ. Nam punctum illud d (per Lemma XX) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor A, B, C, P transiente; & lineis Rr, Tt evanescentibus, coit punctum d cum puncto D . Transfit ergo sectio Conica per puncta quinque A, B, C, P, D . *Q. E. D.*

Idem

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis A, B, C ; & , circum duo eorum B, C ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB , applicentur crura BA, CA primo ad punctum D , deinde ad punctum P , & notentur puncta M, N in quibus altera crura BL, CL casu utroque se decussant. Agatur recta infinita MN , & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, C , ea lege ut crurum BL, CL vel BM, CM intersectio quæ jam sit m incidat semper in rectam illam infinitam MN & crurum BA, CA , vel BD, CD intersectio, quæ jam sit d , Trajectoriam quæsitam $PADdB$ delineabit. Nam punctum d , per Lem. XXI, continget sectionem Conicam per puncta B, C transeuntem; & ubi punctum m accedit ad puncta L, M, N , punctum d (per constructionem) accedet ad puncta A, D, P . Describetur itaque sectio Conica transiens per puncta quinque A, B, C, P, D . ~~Q, E, F .~~



Corol. 1. Hinc recta expedite duci potest quæ Trajectoriam quæsitam, in puncto quovis dato B , continget. Accedat punctum d ad punctum B , & recta Bd evadet tangens quæsitæ.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum Centra, Diametri & Latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX.

Scholium.

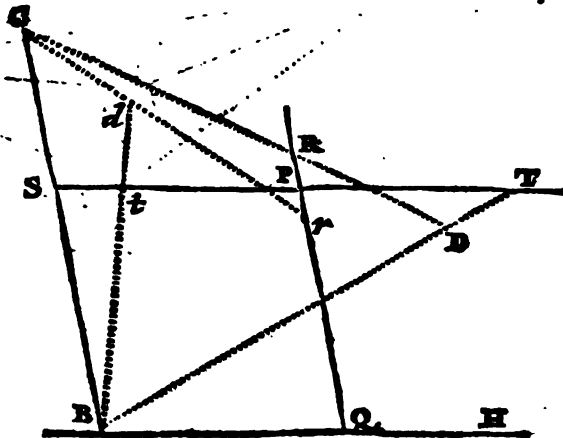
Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo BP , & in ea, si opus est, producta capiendo Bp ad BP ut est PR ad PT ; & per p agendo rectam infinitam pd ipsi SPT parallelam, inque ea capiendo semper pd æqualem Pr ; & agendo rectas Bd, Cr concurrentes in d . Nam cum sint Pr ad Pt , PR ad PT , pB, PB , pd ad Pt in eadem ratione; erunt pd & Pr semper æquales.

DE MOTU CORPORUM les. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in constructione secunda, describere. Mechanice.

PROPOSITIO XXIII PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

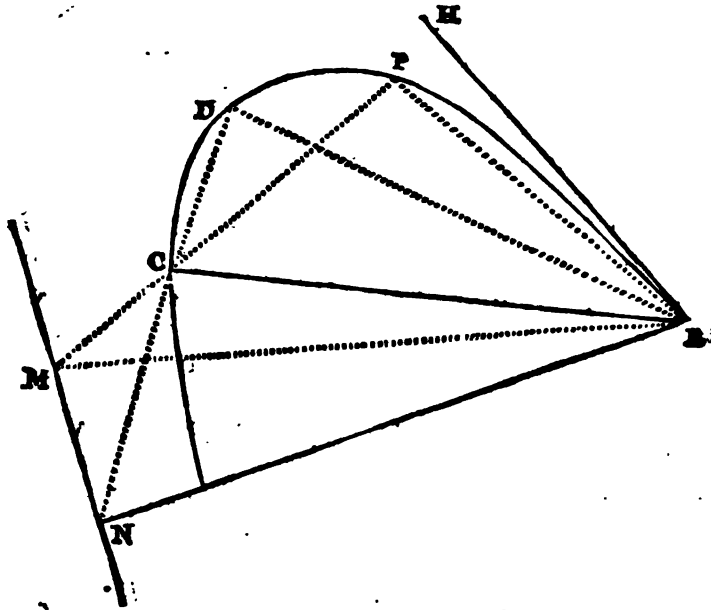
Caf. I. Dentur tangens HB , punctum contactus B , & alia tria puncta C, D, P . Junge BC , & agendo PS parallelam BH , & PQ parallelam BC , comple parallelogrammum $BSPQ$.



Age BD secantem SP in T , & CD secantem PQ in R . Denique, agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ , PS abscinde Pr , Pt ipsis PR , PT proportionales respective; & actarum Cr , Bt concursus d (per Lem. xx) incidet semper in Trajectoriam describendam.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus $C B H$ circa polum B , tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus DC circa polum C . Notentur puncta M, N in quibus anguli crus BC secat radium illum ubi crus alterum BH concurrir cum eodem radio in punctis P & D . Deinde ad actam infinitam MN concu-



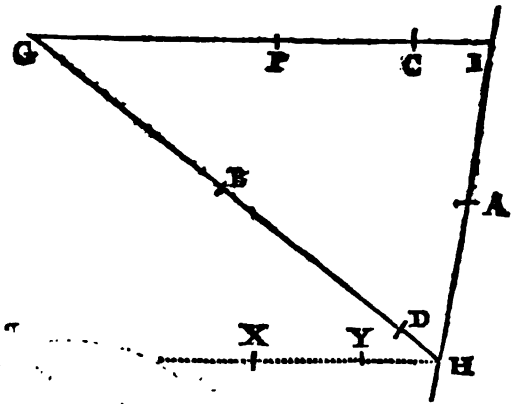
rant perpetuo radius ille CP vel CD & anguli crus BC , & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit Trajectoriam quaesitam.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum A ad punctum B , lineae CA & CB coincident, & linea AB in ultimo suo situ fiet tangens BH , atque adeo constructiones ibi positae evadent eadem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem Conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B . *Q. E. F.*

Caf. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem HI sita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G , tangente

DE MOTU
CORPORUM

tique occurrentibus in H & I . Secetur tangens in A , ita ut sit HA ad AI , ut est rectangulum sub media proportionali inter CG & GP & media proportionali inter BH & HD , ad rectangulum sub media proportionali inter DG & GB & media proportionali inter PI & IC ; & erit A punctum contactus. Nam si rectæ PI parallela HX Trajectoriam secet in punctis quibusvis X & Y :

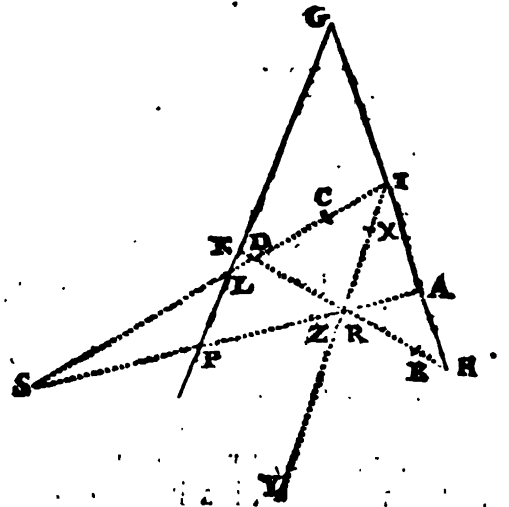


erit (ex Conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA quad. ad AI quad. in ratione composita ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIG . Invenio autem contactus puncto, A , describetur Trajectoria ut in casu primo. $Q. E. F.$ Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I , vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes HI, KL & puncta B, C, D . Per punctorum duo quævis B, D age rectam infinitam BD tangentibus occurrentem in punctis H, K . Deinde etiam per alia duo quævis C, D age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I, L . Actas ita seca in R & S , ut sit HR ad KR ut est media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD ; & IS ad LS ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL



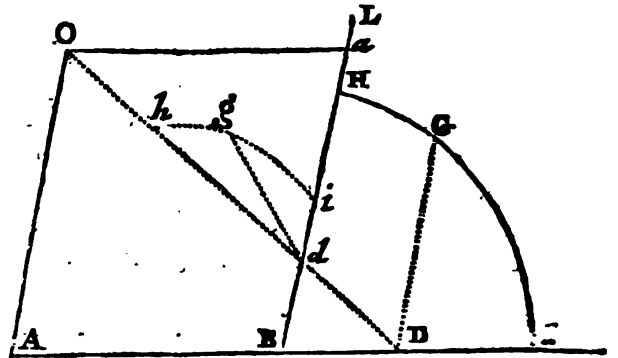
&

DE MOTU
CORPORUM

Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurreret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abscissam primam, ad abscissam novam; O polum, OD radium abscindentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, si punctum G tangit rectam Lineam positione datam, punctum g tanget etiam Lineam rectam positione datam. Si punctum G tangit Conicam sectionem, punctum g tanget etiam Conicam sectionem. Conicis sectionibus hic Circulum annumero.

Porro si punctum G tangit Lineam tertii ordinis Analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut est ad ad OA ita



sunt Od ad OD , dg ad DG , & AB ad AD ; adeoque AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum G tangit rectam Lineam, atque adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD , &

$\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG , producetur æquatio nova, in qua abscissa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque adeo quæ designat Lineam rectam. Sin AD & DG (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem ad & dg ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione secunda & AD, DG in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum & propterea Lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.

Dico

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figura nova, atque adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figura utraque. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmūtanda est, sufficit rectarum a quibus conflatur intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmūtare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmūtando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmūtantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo, lineam quamvis rectam quæ per concursum convergentium transit: id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmūtetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsitæ.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum Problematum. Nam quoties duæ sectiones Conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmūtare licet earum alterutram, si Hyperbola sit vel Parabola, in Ellipsin: deinde Ellipsis facile mutatur in Circulum. Recta item & sectio Conica, in constructione Planorum Problematum, vertuntur in Rectam & Circulum.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

*Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit
& rectas tres continget positione datas.*

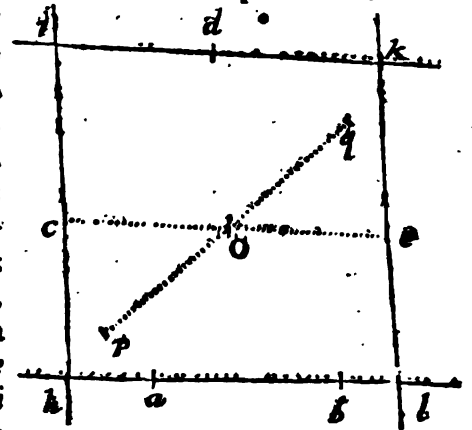
Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmūtetur figura, per Lemma superius, in figuram novam. In

L

hac

DE MOTU
CORPORUM

hac figura tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunto hi, kl tangentes illæ duæ parallelæ, ik tangens tertia, & bl recta huic parallela transiens per puncta illa a, b , per quæ Conica sectio in hac figura nova transire debet, & parallelogrammum $bikl$ complens. Secentur rectæ hi, ik, kl in c, d, e , ita ut sit bc ad latus quadratum rectanguli abb , ic ad id , & ke ad kd ut est summa rectorum hi & kl ad summam trium linearum



quarum prima est recta ik , & alteræ duæ sunt latera quadrata rectorum abb & alb : & erunt c, d, e puncta contactuum. Et enim, ex Conicis, sunt bc quadratum ad rectorum abb , & ic quadratum ad id quadratum, & ke quadratum ad kd quadratum, & el quadratum ad rectorum alb in eadem ratione; & propterea bc ad latus quadratum ipsius abb , ic ad id , ke ad kd , & el ad latus quadratum ipsius alb sunt in subduplicata illa ratione, & compositæ, in data ratione omnium antecedentium hi & kl ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectorum abb & rectorum ik & latus quadratum rectorum alb . Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum c, d, e , in figura nova. Per inversas operationes Lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per Probl. XIV., describetur Trajectoria. Q. E. F. Ceterum perinde ut puncta a, b jacent vel inter puncta b, l , vel extra, debent puncta c, d, e vel inter puncta b, i, k, l capi, vel extra. Si punctorum a, b alterutrum cadit inter puncta b, l , & alterum extra, Problema impossibile est.

PROPOSITIO XXVI PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

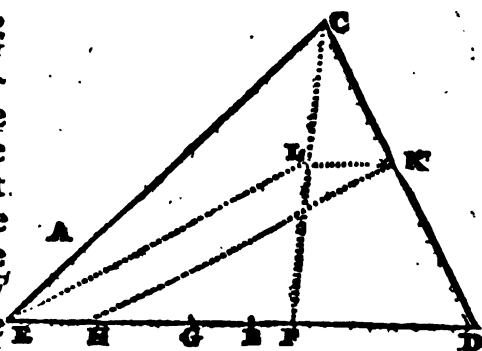
Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita,

ta, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. xxii.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallele. Sumpto illis bi & kl , ik & bl continentes parallelogrammum $bikl$. Sitque p punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum O agatur pq , & existente Oq æquali Op , erit q punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis xxii operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. xvii. *Q. E. F.*

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ AC, BD ad data puncta A, B, terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta CD, qua puncta indeterminata C, D junguntur, secetur in ratione data in K: dico quod punctum K locabitur in recta positione data.

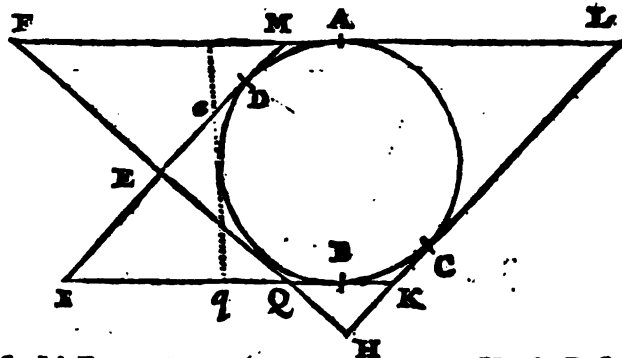
Concurrant enim rectæ AC , BD in E , & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC , sitque FD semper æqualis datæ EG ; & erit ex constructione EC ad GD , hoc est, ad EF at AC ad BD , adeoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum EFC . Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD ; &, ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum EFL ; proindeque punctum L locabitur in recta EL positione data. Junge LK , & similia erunt triangula CLK , CFD ; &, ob datam FD & datam rationem LK ad FD , dabitur LK . Hanc æqualis capiatur EH , & erit semper $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK . *Q. E. D.*



Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant Sectionem quamcunque Conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminate ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium, est ad abscissarum alteram.

Tangent parallelogrammi $MLIK$ latera quatuor ML, IK, KL, MI sectionem Conicam in A, B, C, D , & secet tangens quinta FQ

hæc latera in F, Q, H & E ; sumantur autem laterum MI, KI abscissæ ME, KQ , vel laterum KL, ML abscissæ KH, MF : dico quod sit ME ad MI ut BK ad KQ , & KH ad KL ut AM ad MF . Nam per Corollarium secundum



Lemmatis superioris, est ME ad EI ut $(AM$ seu) BK ad BQ , & componendo ME ad MI ut BK ad KQ . $Q.E.D.$ Item KH ad HL ut $(BK$ seu) AM ad AF , & dividendo KH ad KL ut AM ad MF . $Q.E.D.$

Corol. 1. Hinc si datur parallelogrammum $IKLM$, circa datam Sectionem Conicam descriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens $e q$ tangentibus KI, MI occurrens in q & e ; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME , & divisim ut Qq ad Ee .

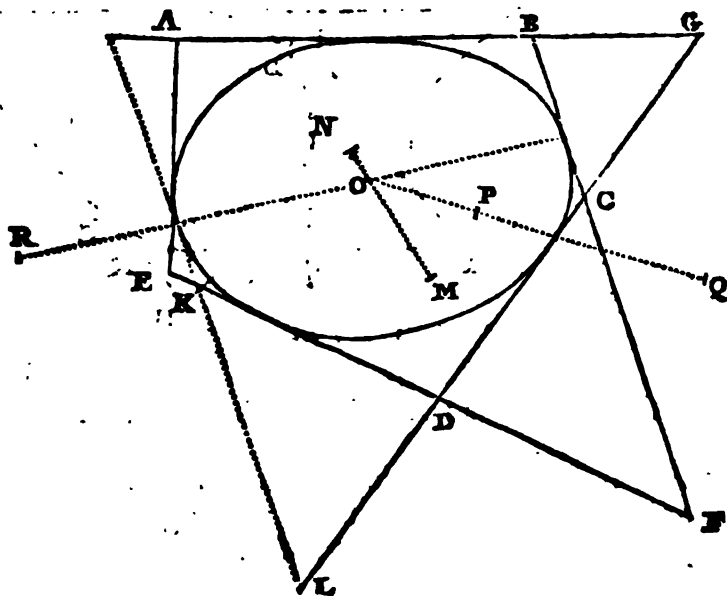
Corol. 3. Unde etiam si Eg, eQ jungantur & biscentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit Qq ad Ee ut KQ ad Me , transibit ea-

DE MOTU
CORPORUMdem recta per medium omnium $E q$, $e Q$, $M K$; (per Lem. xxiii)
& medium rectæ $M K$ est centrum Sectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

*Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas
continget.*

Dentur positione tangentes ABG , BCF , GCD , FDE , $E A$.
Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ dia-
gonales AF , BE biseca, & (per Corol. 3. Lem. xxv) recta MN
per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rur-
sus Figuræ quadrilateræ $B G D F$, sub aliis quibusvis quatuor



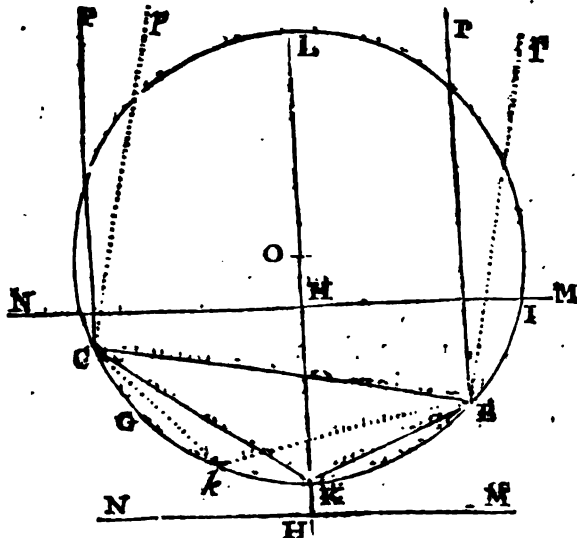
tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD , GF bise-
ca in P & Q : & recta $P Q$ per puncta bisectionum acta transibit
per centrum Trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu
bifecantium. Sit illud O . Tangenti cuius BC parallelam age KL ,
ad eam distantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur,
& acta KL tanget Trajectoriam describendam. Sécet hæc tan-
gentes

gentes alias quasvis duas GCD, FDE in L & K . Per harum LIBER
PRIMUS
tangentialium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL
concurfus C & K, F & L age CK, FL concurrentes in R , & rec-
ta OR ducta & producta secabit tangentes parallelas CF, KL in
punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. xxiv. Eadem
methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum
per Probl. xiv. Trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Scholium.

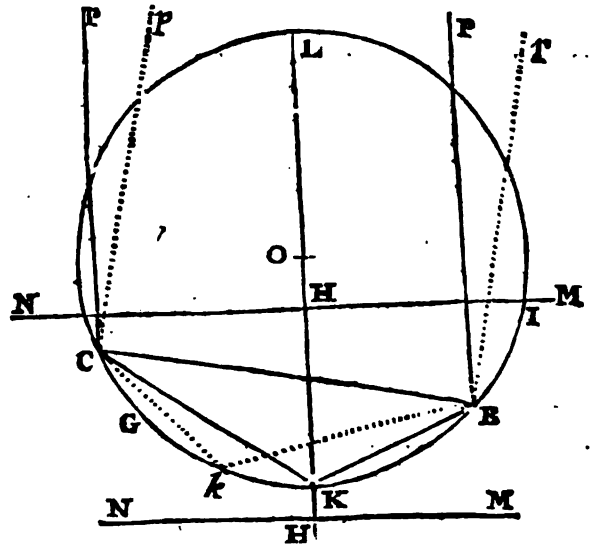
Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Asympto-
ti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus
una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a
centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem
pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita
loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipite tangentis cujusvis
punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in A-
symptoton, atque constructiones Problematis xiv. & Casus primi
Problematis xv. vertentur in constructiones Problematum ubi A-
symptoti dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbi-
licos ejus hac methodo. In constructione & figura Lemmatis xxx,
fac ut angulorum mobi-
lium PBN, PCN cru-
ra BP, CP , quorum
concurfu Trajectoria de-
scribebatur, sicut sibi invi-
cem parallela, eumque
servantia situm revolvan-
tur circa polos suos B, C
in figura illa. Interea ve-
ro describant altera an-
gulorum illorum crura
 CN, BN , concursu
suo K vel k , Circulum
 $IBKG$. Sit Circuli
hujus centrum O . Ab
hoc centro ad Regulam
 MN , ad quam altera illa crura CN, BN interea concurrebant
dum.



DE MOTU dum Trajectoria describatur, demitte normalem OH Circulo
CORPORUM occurrentem in K & L . Et ubi crura illa altera CK , BK concurrunt ad punctum illud K quod Regulæ propius est; crura prima CP , BP parallela erunt axi majori; & perpendicularia minori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L . Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axiom vero quadrata sunt ad invicem ut KH ad LH , & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituentur poli C , B , tertium dabit angulos mobiles PKC , PBK ; his autem datis describi potest Circulus $IBKG C$. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK , adeoque ipsa OH . Centro O & intervallo OH describe alium circulum, & recta quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum CK , BK , ubi crura prima CP , BP concurrunt ad quartum datum punctum erit Regula illa MN cujus ope Trajectoria describetur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis Sectione Conica inscribi potest.



Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Coni-sectionem in punctis duobus interfecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Coni-sectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

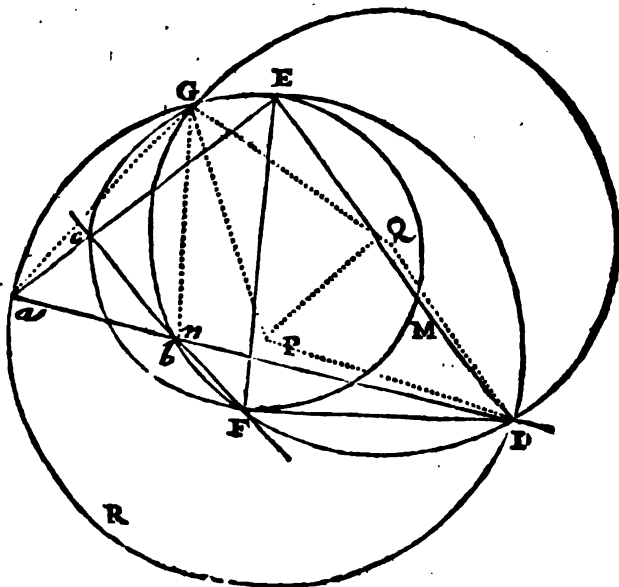
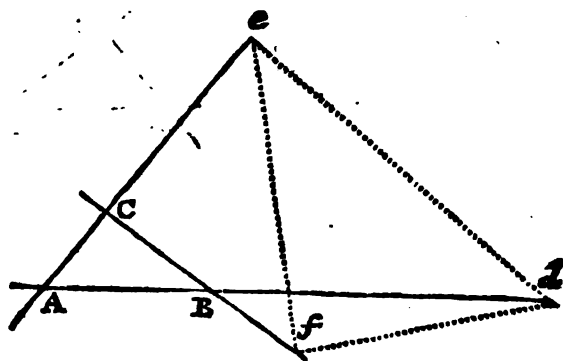
LEMMA

LEMMA XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallele, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC , & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB , an-

gulus E lineam AC , & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF describe tria circulorum segmenta DRE, DGF, EMF , quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum DE, DF, EF ut literæ DRE eodem ordine cum literis BAC , literæ DGF eodem cum literis ABC , & literæ $EMFE$ eodem cum literis ACB in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in G , sintque centra eorum P & Q . Junctis GP, PQ , cape Ga ad AB ut est GP ad PQ , & centro G , intervallo Ga



describere circulum, qui secet circulum primum DGE in a . Jungatur aD secans circulum secundum DFG in b , tum aE secans circulum

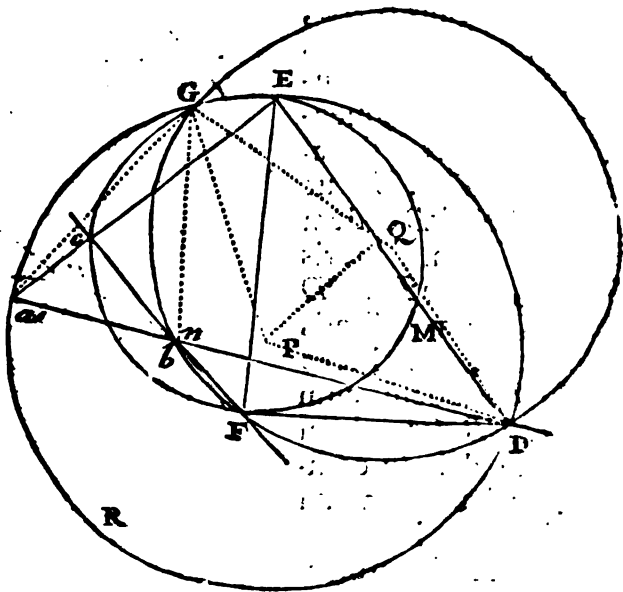
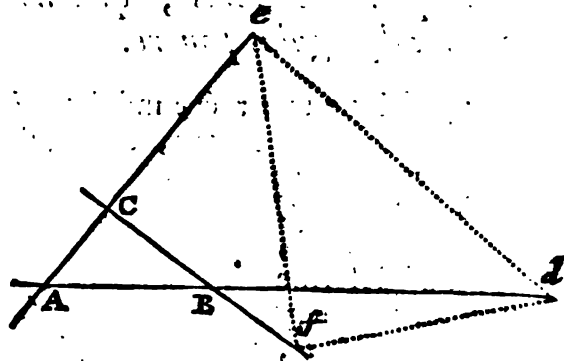
M

culum

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

De Motu. Сохраняем.
 culum tertium EMF in e . Et, compleatur Figura $ABC def$ simili-
 & æqualis Figuræ $abcDEF$. Dico factum.

Agatur enim Fc ipsi aD occurrens in n , & jungantur aG , bG , QG , QD , PD . Ex constructione est angulus EaD æqualis an-
 gulo CAB , & angulus $a c F$ æqualis angulo ACB , adeoque trian-
 gulum anc triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus anc seu $F n D$ angulo ABC ,
 adeoque angulo FbD æqualis est; & propterea punctum n incidit in
 punctum b . Porro an-
 gulus GPQ , qui di-
 midius est anguli ad
 centrum GPD æqua-
 lis est angulo ad cir-
 cumferentiam $G a D$;
 & angulus GQP , qui
 dimidius est anguli ad
 centrum GQD , æ-
 qualis est complemen-
 to ad duos rectos an-
 guli ad circumferenti-
 am $G b D$, adeoque æ-
 qualis angulo $G b a$;
 suntque ideo triangu-
 la GPQ , $G a b$ similia;
 & Ga est ad ab ut GP
 ad PQ ; id est (ex
 constructione) ut Ga
 ad AB . Æquantur itaque ab & AB ; & propterea triangu-
 la abc , ABC , quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia.
 Unde, cum tangant insuper trianguli DEF anguli D, E, F trian-
 guli abc latera ab, ac, bc respective compleri potest Figura ABC
 def Figuræ $abcDEF$ similis & æqualis, atque eam complendo
 solvetur Problema. $Q.E.F.$



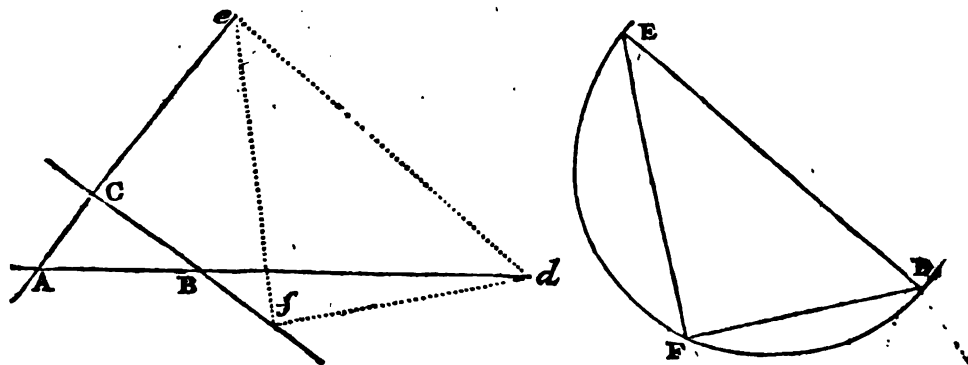
Corol.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF , puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE , DF in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data DE rectis positione datis AB , AC , & pars data DF rectis positione datis AB , BC interponi debet, & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur Problema.

PROPOSITIO XXVIII PROBLEMA XX

Trajectoriam speciei & magnitudinis datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit Trajectoria quæ sit similis & æqualis Lineæ curvæ DEF , quæque a rectis tribus AB , AC , BC positione datis,

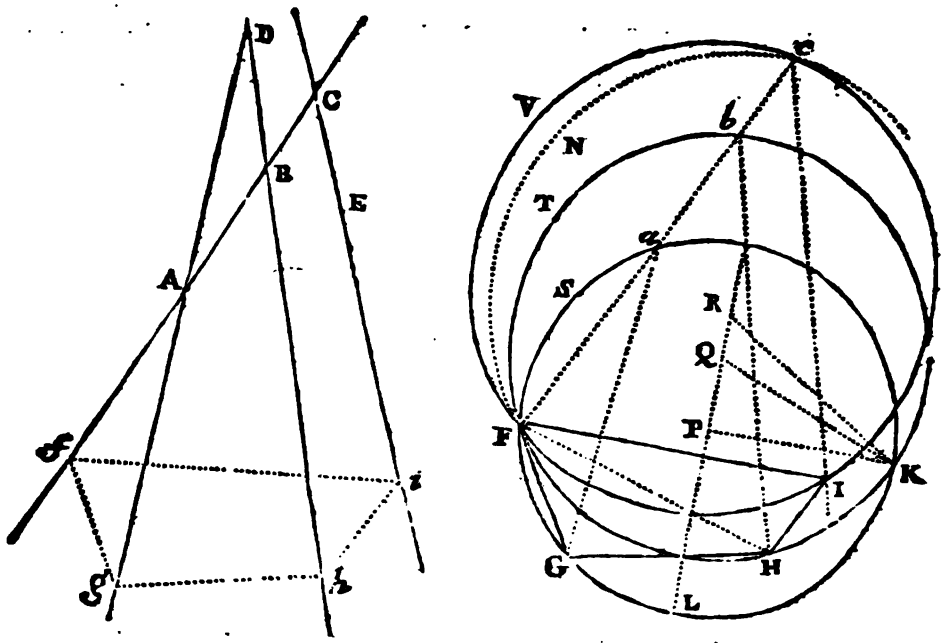


in partes datis hujus partibus DE & EF similes & æquales secabitur.

Age rectas DE , EF , DF , & trianguli hujus DEF pone angulos D , E , F ad rectas illas positione datas (per Lem. xxvi.) Dein circa triangulum describe Trajectoriam Curvæ DEF similem & æqualem. Q. E. F.

Trapezium specie datum describere cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor ABC , AD , BD , CE , quarum prima secet secundam in A , tertiam in B , & quartam in C : & describendum sit Trapezium $fgbi$ quod sit Trapezio $FGHI$



simile, & cujus angulus f , angulo dato F æqualis, tangat rectam ABC , cæterique anguli g, b, i , cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lines AD, BD, CE respective. Jungatur FH & super FG, FH, FI describantur totidem circulorum segmenta FSG, FTH, FVI , quorum primum FSG capiat angulum

lum æqualem angulo BAD , secundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD , ad tertium FVI capiat angulum æqualem angulo ACE . Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI , ut literarum $FSGF$ idem sit ordo circularis qui literarum $BADB$, utque literæ $FTHF$ eodem ordine cum literis $CBDC$, & literæ $FVIF$ eodem cum literis $ACEA$ in orbem redeant. Compléantur segmenta in circulos integros, sitque P centrum circuli primi FSG , & Q centrum secundi FTH . Jungatur & utrinque producat PQ , & in ea capiatur QR in ea ratione ad PQ quam habet BC ad AB . Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q ut literarum P, Q, R idem sit ordo atque literarum A, B, C : centroque R & intervallo RF describatur circulus quartus FNc secans circulum tertium FVI in c . Jungatur Fc secans circulum primum in a & secundum in b . Agantur aG, bH, cI , & Figuræ $abcFGHI$ similis constituatur Figura $ABCfghi$: Eritque Trapezium $fghi$ illud ipsum quod constituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi FSG, FTH se mutuo in K . Jungantur PK, QK, RK, aK, bK, cK , & producat QP ad L . Anguli ad circumferentias FaK, FbK, FcK sunt semisses angulorum FPK, FQK, FRK ad centra, adeoque angulorum illorum dimidiis LPK, LQK, LRK æquales. Est ergo Figura $PQRK$ Figuræ $abcK$ æquiangula & similis, & propterea ab est ad bc ut PQ ad QR , id est, ut AB ad BC . Angulis insuper FaG, FbH, FcI æquantur fAg, fBh, fCi per constructionem. Ergo Figuræ $abcFGHI$ Figura similis $ABCfghi$ compleri potest. Quo factò Trapezium $fghi$ constituetur simile Trapezio $FGHI$ & angulis suis f, g, h, i tanget rectas ABC, AD, BD, CE, Q, E, F .

Carol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI usque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant, & in hoc casu construendo Problema, ducetur recta $fghi$ cujus partes fg, gh, hi , rectis quatuor positione datis AB & AD, AD & BD, BD & CE interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI , eundemque servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

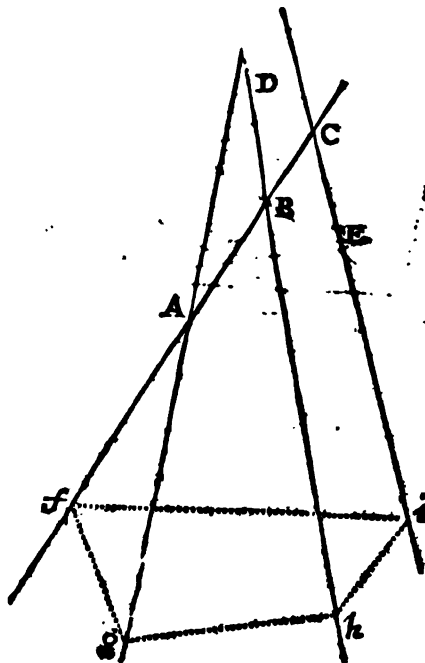
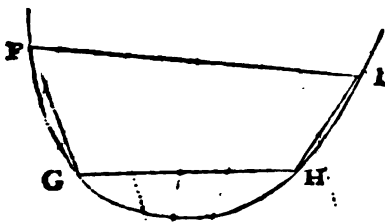
Produ-

In constructione Corollarii hujus postquam ducitur LK secans CE in i , producere licet iE ad V , ut sit EV ad Ei ut FH ad HI , & agere Vf parallelam ipsi BD . Eodem recidit si centro i , in intervallo IH , describatur circulus secans BD in X , & producatur iX ad T , ut sit iT æqualis IF , & agatur Tf ipsi BD parallela.

Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisus* olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

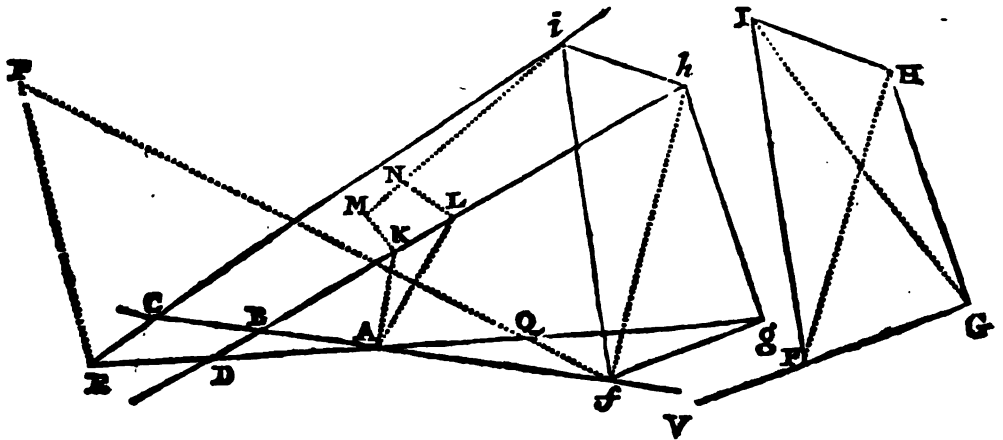
Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.



Describenda sit Trajectoria $fghi$, quæ similis sit Lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes fg, gb, bi illius partibus FG, GH, HI similes & proportionales, rectis AB & AD , AD & BD , BD & CE positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG, GH, HI, FI , describatur (per Lem. xxvii.) Trapezium $fghi$ quod sit Trapezio $FGHI$ simile & cujus anguli f, g, b, i tangant rectas illas positione datas AB, AD, BD, CE , singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc Trapezium describatur Trajectoria curvæ Lineæ $FGHI$ confimilis.

Scholium

. Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis FG , GH , HI , FI produc GF ad V , jungeque FH , IG , & angulis FGH , VFH fac angulos CAK , DAL æquales. Concurrant AK , AL cum recta BD in K & L , & inde agantur KM , LN , quarum KM constituat angulum AKM æqualem angulo GHI , sitque ad AK ut est HI ad GH ; & LN constituat angulum ALN æqualem angulo FHI , sitque ad AL ut HI ad FH . Ducantur autem AK , KM , AL , LN ad eas partes linearum AD , AK , AL , ut literæ $CAKMC$, $ALKA$, $DALND$ eodem ordine cum literis $FGHIF$ in orbem redeant; & acta MN occurrat rectæ CE in i . Fac angulum iEP æqua-



lem angulo IGF , sitque PE ad Ei ut FG ad GI ; & per P agatur PQf , quæ cum recta ADE contineat angulum PQE æqualem angulo FIG , rectæque AB occurrat in f , & jungatur fi . Agantur autem PE & PQ ad eas partes linearum CE , PE , ut literarum $PEiP$ & $PEQP$ idem sit ordo circularis qui literarum $FGHIF$, & si super linea fi eodem quoque literarum ordine constituatur Trapezium $fgbi$ Trapezio $FGHI$ simile, & circumscribatur Trajectoria specie data, solvetur Problema.

Haftenus de Orbibus inveniendis. Superest ut Motus corporum in Orbibus inventis determinemus.

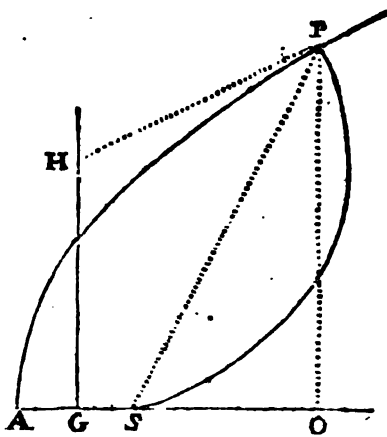
S E C T I O VI.

De Inventione Motuum in Orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, sitque $4 AS \times M$ æquale areæ Parabolicæ abscindendæ APS , quæ radio SP , vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Bifeca AS in G , erigeque perpendicularum GH æquale $3M$, & Circulus centro H , intervallo HS descriptus secabit Parabolam in loco quaesito P . Nam, demissa ad axem perpendiculari PO & ducta PH , est



$$AGq + GHq (=HPq = AO - AG: quad. + PO - GH: quad.)$$

$$= AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq. \text{ Unde}$$

$$2GH \times PO (=AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{1}{2}POq.$$

Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductis que in $2AS$ fiet $\frac{1}{3}GH \times AS (= \frac{1}{3}AO \times PO + \frac{1}{3}AS \times PO$

$$= \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO = \text{areæ } APO - SPO)$$

= areæ APS . Sed GH erat $3M$, & inde $\frac{1}{3}GH \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo area abscissa APS æqualis est abscindendæ $4AS \times M$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS , ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendicularum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et Circulo ASP per corpus motum P perpetuo transiente, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus habuit

DE MOTU
CORPORUM in vertice A , ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P , ea cum velocitate quam habuit in vertice A , describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP . Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H .

L E M M A XXVIII.

Nulla extat Figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu; & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra Ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si areæ Ovalis a recta illa abscissæ incrementum per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis est, adeoque omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea recta cujusvis positione data intersectio cum Spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta Spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, adeoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam Circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam inveniat. Quoniam duarum sectionum Conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferentem exhibere. Unde

Unde etiam intersectiones Sectionum Conicarum & Curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum Curvarum tertiæ potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & plusquam Solida ad Solida. Loquor hic de Curvis potestate irreducibilibus. Nam si æquatio per quam Curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: Curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum & sectionum Conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum; ternæ rectarum & Curvarum irreducibilium tertiæ potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & Curvarum irreducibilium quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo rectæ & Spiralis intersectiones numero infinitæ, cum Curva hæc sit simplex & in Curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendicularum, & perpendicularum illud una cum secante revolvatur circa polulum, intersectiones Spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & Spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

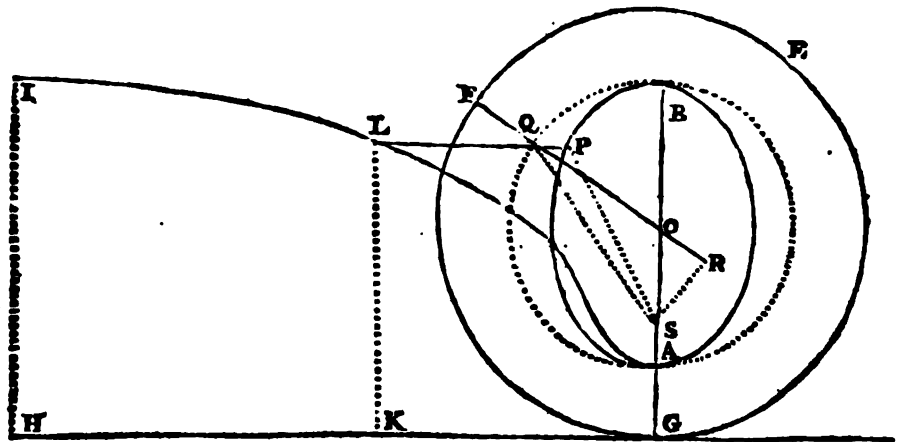
Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo Spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De Ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem Curvarum Geometricæ rationalium determinari nequit. Curvas Geometricæ rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometricæ irracionales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irracionales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometricæ irracionalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, & O centrum, sitque P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G , ut sit OG ad OA ut OA ad OS . Erige perpendicularum GH , cen-



troque O & intervallo OG describe circulum EFG , & super regula GH , ceu fundo, progrediatur Rota GEF revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo A describendo Trochoidem ALI . Quo

Quo facto, cape GK in ratione ad Rotæ perimetrum $GEFG$, ut est tempus quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum AP , ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendicularum KL occurrens Trochoidi in L , & acta LP ipsi KG parallela occurret Ellipsi in corporis loco quæsito P .

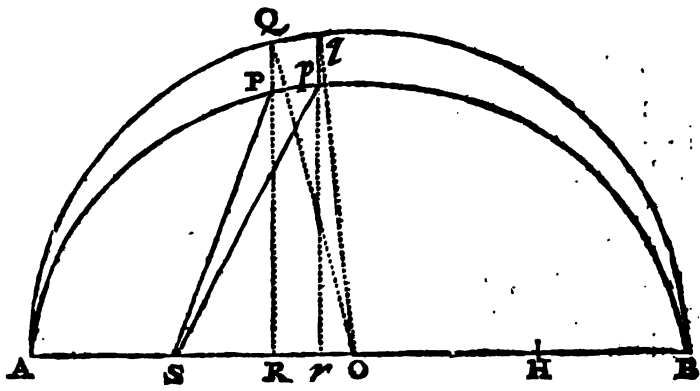
LIBER PRIMUS.

Nam centro O , intervallo OA describatur semicirculus AQB , & arcui AQ occurrat LP producta in Q , junganturque SQ, OQ . Arcui EF occurrat OQ in F , & in eandem OQ demittatur perpendicularum SR . Area APS est ut area AQS , id est, ut differentia inter sectorem OQA & triangulum OQS , sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR , adeoque (ob æqualitatem datarum rationum SR ad sinum arcus AQ , OS ad OA , OA ad OG , AQ ad GF , & divisim $AQ - SR$ ad $GF - \sin. \text{arc. } AQ$) ut GK differentia inter arcum GF & sinum arcus AQ . *Q. E. D.*

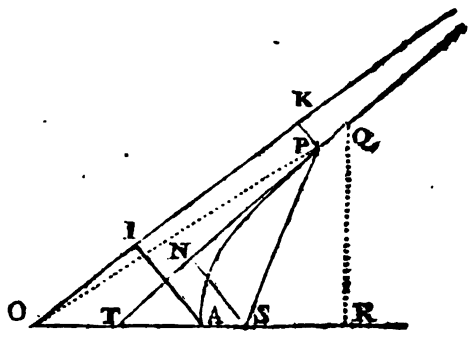
Scholium.

Cæterum, cum difficilis sit hujus Curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B , qui sit ad angulum graduum $57, 29578$, quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia SH ad Ellipseos diametrum AB ; tum etiam longitudo quædam L , quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem quamvis (vel

atcunque conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus P proximus vero ejus loco p . Demissaque ad axem Ellipseos ordinatim applicata PR , ex proportionem diametrorum Ellipseos, dabitur Circuli circumscripti AQB ordinatim applicata RQ , quæ sinus est anguli AOQ existente AO radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus temporis proportionalis,

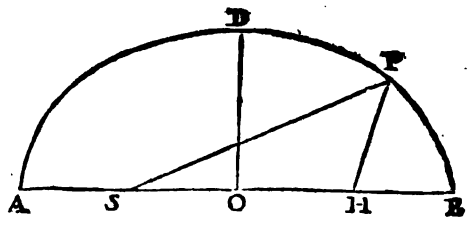


noscat quantitas areæ abscindendæ temporì proportionalis. Sit enī A , & fiat conjectura de positione rectæ SP , quæ aream APS abscindat veræ proximam. Jungatur OP , & ab A & P ad Asymptoton agantur AI , PK Asymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eique æqualis area OPA , quæ subducta de triangulo OPS reliquet aream abscissam APS . Applicando aream abscindendæ A & abscissæ APS differentiam duplam $2 APS - 2$



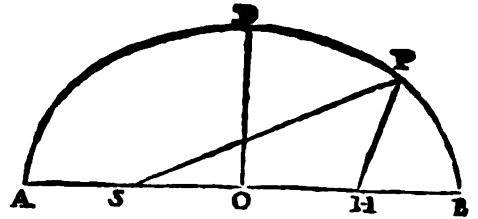
A vel $2A - 2APS$ ad lineam SN , quæ ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis est, oriatur longitudo chordæ PQ . Inscrībatur autem chorda illa PQ inter A & P , si area abscissa APS major sit area abscindenda A , secus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita inveniatur idem accuratior in perpetuum.

Atque his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum ubi Astronomicis accommodatur est calculus particularis qui sequitur. Existentibus AO, OB, OD semiaxibus Ellipseos, & L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem OD & lateris recti semissem $\frac{1}{2}L$; quære tum angulum Y , cujus sinus sit ad Radium ut est rectangulum sub differentia illa D , & semisumma axium $AO + OD$ ad quadratum axis majoris AB ; tum angulum Z , cujus sinus sit ad Radium ut est duplum rectangulum sub umbilicorum distantia SH & differentia illa D ad triplum quadratum semiaxis majoris AO .



His angulis semel inventis; locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem temporì quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V (primam medii motus æquationem) ad angulum Y (æquationem maximam primam) ut est sinus dupli anguli T ad Radium; atque

De Motu atque angulum X (æquationem secundam) ad angulum Z (æquationem maximam secundam) ut est cubus sinus anguli T ad cubum Radii. Angulorum T, V, X vel summæ T + X + V, si angulus T recto minor est, vel differentiæ T + X - V, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum BHP (motum medium æquatum;) & si HP occurrat Ellipsi in P, acta SP abscindet aream BSP temporalem proportionalem quamproxime. Hæc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X (in minutis secundis, si placet, positurorum) figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accurata est ad Theoriam Planetarum. Nam in Orbe vel Martis ipsius, cujus Æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati BHP, angulus veri motus BSP & distantia SP in promptu sunt per Wardi methodum notissimam.



Hactenus de motu corporum in lineis Curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi Motus spectant, pergo jam exponere.

De Motu
Corporum

Caf. 2. Si Figura illa RPB Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principale AB Hyperbola rectangula BED : & quoniam areae CSP , $CBfP$, $SPfB$ sunt ad areas CSD , $CBED$, $SDEB$, singulae ad singulas, in data ratione altitudinum CP , CD ; & area $SPfB$ proportionalis est tempori quo corpus P movebitur per arcum PfB ; erit etiam area $SDEB$ eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolae RPB in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus PB cum recta CB & umbilicus S cum vertice B & recta SD cum recta BD . Proinde area $BDEB$ proportionalis erit tempori quo corpus C recto descensu describit lineam CB . *Q. E. I.*

Caf. 3. Et simili argumento si Figura RPB Parabola est, & eodem vertice principali B describatur alia Parabola BED , quae semper maneat data interea dum Parabola prior in cuius perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea CB ; fiet segmentum Parabolicum $BDEB$ proportionale tempori quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B . *Q. E. I.*

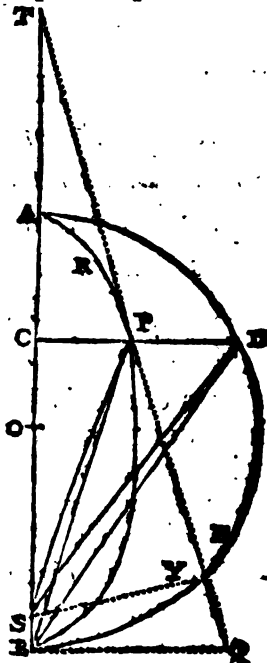
PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum describentis, in subduplicata ratione quam AC, distantia corporis a Circuli vel Hyperbolae rectangulae vertice ulteriore A, habet ad Figuræ semidiametrum principale $\frac{1}{2} AB$.

Bisecetur AB , communis utriusque Figuræ RPB , DEB diameter, in O ; & agatur recta PT quæ tangat Figuram RPB in P , atque etiam

etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T , fitque ST ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque Figuræ RPB latus rectum ponatur L . Constat per Cor. 9. Prop. xvi, quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P fit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum Circulum describentis in subduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times SP$ ad ST quadratum. Est autem ex Conicis ACB ad CPq ut AO ad L ,

adeoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L . Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST quad. Porro ex Conicis est CO ad BO ut BO ad TO , & composite vel divisim ut CB ad BT . Unde vel dividendo vel componendo fit BO — vel + CO ad BO ut CT ad BT , id est AC ad AO ut CP ad BQ ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum Figuræ RPB latitudo CP , sic ut punctum P coeat cum puncto C , punctumque S cum puncto B , & linea SP cum linea BC , lineaque ST cum linea BQ ; & corporis jam recta descendens in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum describentis, in subduplicata ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq ; hoc est (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq) in subduplicata ratione AC ad AO sive $\frac{1}{2} AB$. Q. E. D.



LIBER PRIMUS.

$\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est

$\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum Figuræ RPB latitudo CP , sic ut punctum P coeat cum puncto C , punctumque S cum puncto B , & linea SP cum linea BC , lineaque ST cum linea BQ ; & corporis jam recta descendens in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum describentis, in subduplicata ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq ;

hoc est (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq) in subduplicata ratione AC ad AO sive $\frac{1}{2} AB$. Q. E. D.

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO .

Corol. 2. Corpus ad datam a centro distantiam in Circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si Figura BED Parabola est, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati qua corpus centro B dimidio intervalli sui BC Circulum uniformiter describere potest.



Nam corporis Parabolam RPB circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per Corol. 7. Prop. xvi) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli SP Circulum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur Parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus Parabolicus PfB cum recta CB , centrum S cum vertice B , & intervallum SP eum intervallo BC coincidat, & constabit Propositio. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod area Figure DES, radio indefinito SD descripta, æqualis sit aræ quam corpus, radio dimidium lateris recti Figure DES æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.

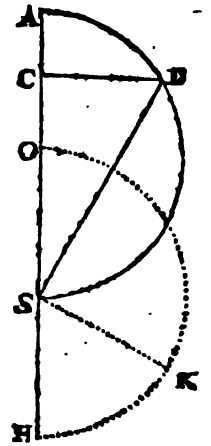
Nam concipe corpus C quam minima temporis particula lineolam Cc cadendo describere, & interea corpus aliud K uniformiter in Circulo OKk circa centrum S gyrando, arcum Kk describere. Erigantur perpendiculara CD , cd occurrentia Figure DES in D , d . Jungantur SD , Sd , SK , Sk & ducatur Dd axi AS occurrens in T , & ad eam demittatur perpendicularum ST .

Cas.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

*Corporis de loco dato A cadentis determinare
Tempora descensus.*

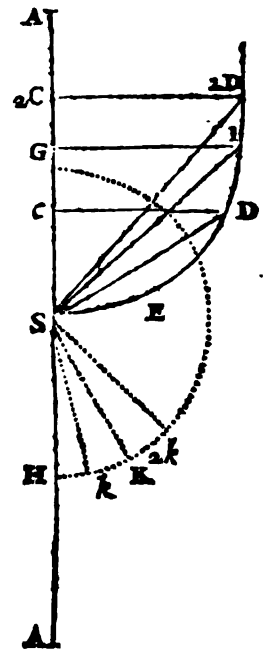
Super diametro AS (distantia corporis a centro sub initio) describe Semicirculum ADS , ut & huic æqualem Semicirculum OKH circa centrum S . De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD . Junge SD , & areæ ASD æqualem constituè sectorem OSK . Patet per Prop. xxxv., quod corpus cadendo describet spatium AC eodem Tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum S gyrandò, describere potèst arcum OK . Q. E. F.



PROPOSITIO XXXVII PROBLEMA XXVI.

*Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire
Tempora ascensus vel descensus.*

Exeat corpus de loco dato G secundum lineam ASG cum velocitate quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in Circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum SG circa centrum S revolvi posset, cape GA ad $\frac{1}{2} AS$. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum A infinite distat, quo casu parabola vertice S , axe SC , latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro SA describi debet. Patet per Prop. xxxiii. Tum centro S , intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur Circulus HKk , & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis G, C , erigantur perpendiculara GI, CD occurrentia Conicæ Sectioni vel Circulo in I ac D .



Dein

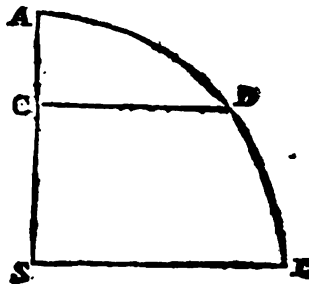
Dein junctis SI , SD , fiant segmentis $SEIS$, $SEDS$, sectores HSK , HSk æquales, & per Prop. xxxv, corpus G describet spatium GC eodem Tempore quo corpus K describere potest arcum Kk . *Q. E. F.*

LIBER
PRIMUS

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod Vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantia locorum a centro, dico quod cadentium Tempora, Velocitates & Spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respective proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A secundum rectam AS ; & centro virium S , intervallo AS , describatur Circuli quadrans AE , sitque CD sinus rectus arcus cujusvis AD ; & corpus A , Tempore AD , cadendo describet Spatium AC , inque loco C acquirat Velocitatem CD .



Demonstratur eodem modo ex Propositione x, quo Propositio xxxii, ex Propositione xi demonstrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt Tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S , & corpus aliud revolvens describit arcum quadrantalem ADE .

Corol. 2. Proinde æqualia sunt Tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. iv.) æquantur.

PROPO

corpus cadendo describit lineolam DE , ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF . Ergo vis ipsi DF vel

LIBER
PRIMUS.

EG proportionalis facit ut corpus ea cum Velocitate descendat quæ sit ut areæ $ABGE$ latus quadratum. Q. E. D.

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE describatur, sit ut velocitas inverse adeoque ut areæ $ABFD$ latus quadratum inverse; sitque DL , atque adeo area nascens $DLME$, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area $DLME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. iv.) Tempus totum quo linea AE describitur ut area tota AME . Q. E. D.

Corol. 1. Si P sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo supponitur Gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco D , & in perpendiculari DF capiatur DR , quæ sit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D , & compleatur rectangulum $PDRQ$, eique æqualis abscindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $DRSE$, cum sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad $2VI$, adeoque ut $\frac{1}{2}V$ ad I , id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area $PQRD$ ad aream $DRSE$, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ DF , DR , adeoque ut areæ nascentes $DFGE$, $DRSE$; erunt (ex æquo) areæ totæ $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e , erigendo ordinatam eg , & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est latus quadratum rectanguli $PQRD$ area curvilinea $DFge$ vel aucti, si locus e est loco D inferior, vel diminuti; si is superior est, ad latus quadratum rectanguli folius $PQRD$, id est, ut $\sqrt{PQRD + \text{vel} - \frac{DFge}{P}}$ ad \sqrt{PQRD} .

Corol.

DE MOTU
CORPORUM

Carol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD + \text{vel} - DFge$, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam *PD* est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam *PE* in subduplicata ratione *PD* ad *PE*, id est (lineola *DE* jamjam nascente) in ratione *PD* ad $PD + \frac{1}{2}DE$ seu $2PD$ ad $2PD + DE$, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam *DE* ut $2PD$ ad *DE*, adeoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream *DLME*; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam *De* ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream *DLme*.

S E C T I O VIII.

De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

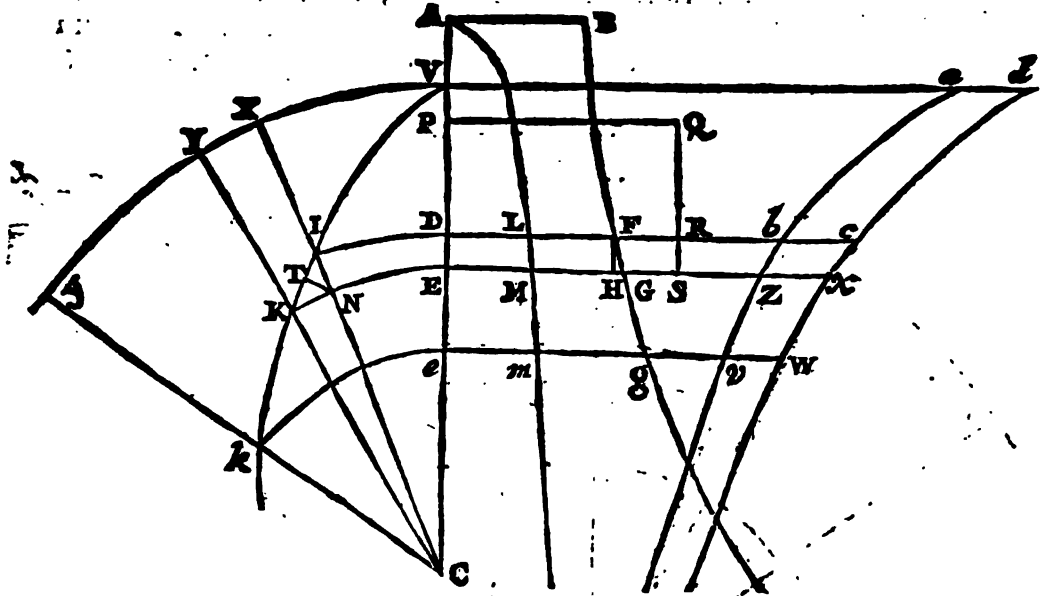
Si corpus, cogente Vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque eorum Velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, Velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in linea curva *VIKk*, Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendicularum *NT*; sitque circumferentiarum circularum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates

DE MOTU CORPORUM porum velocitates in *E* & *K* & eodem argumento semper repetientur æquales in subsequentiis æqualibus distantis. Q. E. D.

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus vel funipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque impedimento vasis absolute lubrici idem præstat quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.



Corol. 2. Hinc etiam si quantitas *P* sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunque revolvens, deque quovis Trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas *A* distantia corporis a centro in alio quovis Orbitæ puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius *A* dignitas quælibet A^{n-1} , cujus Index $n-1$ est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine *A* erit ut $\sqrt{P^2 - A^2}$, atque adeo datur. Namque velocitas recta ascendentis ac descendentis (per Prop. xxxix) est in hac ipsa ratione.

PROPO.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriae in quibus corpora movebuntur, tum Tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quaelibet ad centrum C & invenienda sit Trajectoria $VITKk$. Detur Circulus VXT centro C intervallo quovis CV descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli ID , KE Trajectoriam secantes in I & K rectamque CV in D & E . Age tum rectam $CNIX$ secantem circulos KE , VT in N & X , tum rectam CKT occurrentem circulo VXT in T . Sint autem puncta I & K sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab V per I , T & K ad k ; sitque punctum A locus ille de quo corpus aliud cadere debet ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in I ; & stantibus quæ in Propositione xxxix, lineola IK , dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas atque adeo ut latus quadratum areæ $ABFD$, & triangulum ICK tempori proportionale dabitur, adeoque KN erit reciproce ut altitudo IC , id est, si detur quantitas aliqua Q , & altitudo IC nominetur A , ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z ,

& ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu \sqrt{ABFD} ad Z ut est IK ad KN , & erit in omni casu \sqrt{ABFD} ad Z ut IK ad KN , & $ABFD$ ad ZZ ut IK q. ad KN q. & divisim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut IN quad. ad KN quad.; adeoque

$\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad $(Z \text{ seu } \frac{Q}{A})$ ut IN ad KN , & propterea

$A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $TX \times XC$ sit ad

$A \times KN$ ut CX q. ad AA , erit rectangulum $TX \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur si in perpendicularo DF capiantur

semper Db , Dc ipsi $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2A \sqrt{ABFD - ZZ}}$

æquales respectivè, & describantur curvæ lineæ ab , cd quas

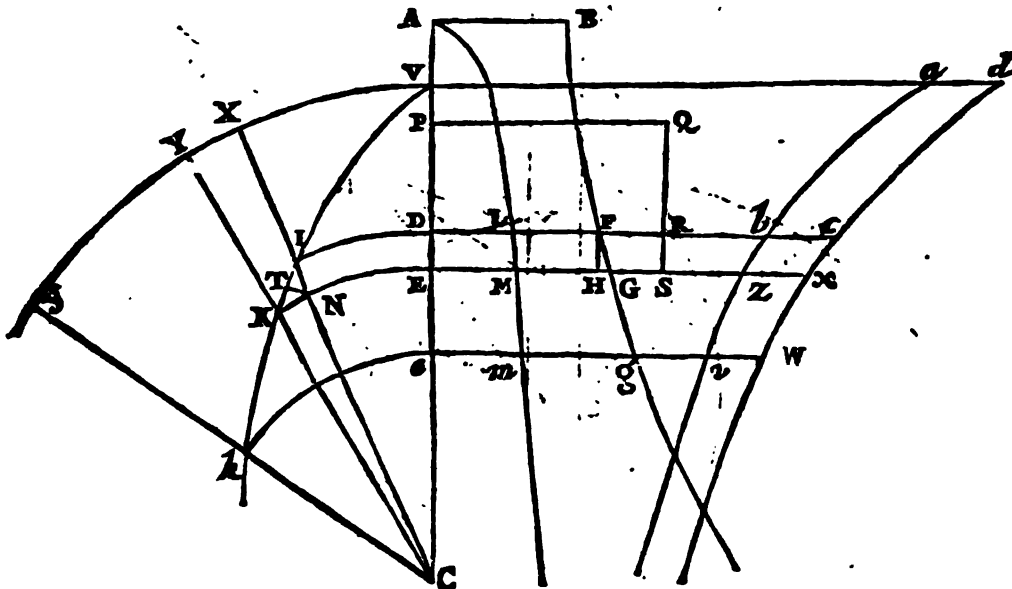
DE MOTU puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC , erigatur perpendiculum Vad abscindens areas curvilineas $VDb a$, $V D c d$, & erigantur etiam ordinatæ Ez , Ez : quoniam rectangulum $D b \times I N$ seu $D b z E$ æquale est dimidio rectanguli $A \times K N$, seu triangulo $I C K$; & rectangulum $D c \times I N$ seu $D c z E$ æquale est dimidio rectanguli $T X \times X C$, seu triangulo $X C T$; hoc est, quoniam arearum $V D b a$, $V I C$ æquales semper sunt nascentes particulæ $D b z E$, $I C K$, & arearum $V D c d$, $V C X$ æquales semper sunt nascentes particulæ $D c z E$, $X C T$, erit area genita $V D b a$ æqualis areæ genitæ $V I C$, adeoque tempori proportionalis, & area genita $V D c d$ æqualis Sectori genito $V C X$. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V , dabitur area ipsi proportionalis $V D b a$, & inde dabitur corporis altitudo $C D$ vel $C I$; & area $V D c d$, eique æqualis Sector $V C X$ una cum ejus angulo $V C I$. Datis autem angulo $V C I$ & altitudine $C I$ datur locus I , in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est Apfides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim Apfides puncta illa in quibus recta $I C$ per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam $V I K$: id quod fit ubi rectæ $I K$ & $N K$ æquantur, adeoque ubi area $A B F D$ æqualis est $Z Z$.

Corol. 2. Sed & angulus $K I N$, in quo Trajectoria alibi secat lineam illam $I C$, ex data corporis altitudine $I C$ expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut $K N$ ad $I K$, id est, ut Z ad latus quadratum areæ $A B F D$.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V describatur Sectio quælibet Conica $V R S$, & a quovis ejus puncto R agatur Tangens $R T$ occurrens axi infinite producto $C V$ in puncto T ; dein juncta $C R$ ducatur recta $C P$, quæ æqualis sit abscissæ $C T$, angulumque $V C P$ Sectori $V C R$ proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C Vis centripeta Cubo distantiae locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V justa cum Velocitate secundum lineam rectæ $C V$ perpendiculari m : progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum P perpetuo tangit; adeoque si Conica sectio $C V R S$ Hyperbope sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascensula illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corDET quacunque cum Velocitate exeat de loco V , & perinde pusincoeperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique

De Motu primum urgetur in I , ut DR ad DF . Pergat autem corpus versus k ;
CORPORUM centroque C & intervallo Ck describatur circulus ke occurrens rec-
 tæ PD in e , & erigantur curvarum $ALMm$, $BFGg$, $abzv$, $dcxw$



ordinatim applicatæ cm , eg , ev , aw . Ex dato rectangulo $PD R Q$,
 dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitur, dantur cur-
 væ lineæ $BFGg$, $ALMm$, per constructionem Problematis xxvii,
 & ejus Corol. 1. Deinde ex dato angulo CIT datur proportio nas-
 centium IK , KN , & inde, per constructionem Prob. xxviii, dat-
 tur quantitas Q , una cum curvis lineis $abzv$, $dcxw$: adeoque
 completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo Ce vel
 Ck , tum area $Dcwe$, eique æqualis Sector XCY , angulusque ICk
 & locus k in quo corpus tunc versabatur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his Propositionibus Vim centripetam in
 recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque quam
 quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantis esse
 undequæ eandem. Atque hætenus Motum corporum in Orbibus
 immobilibus consideravimus. Superest ut de Motu eorum in Orbi-
 bus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

SECTIO

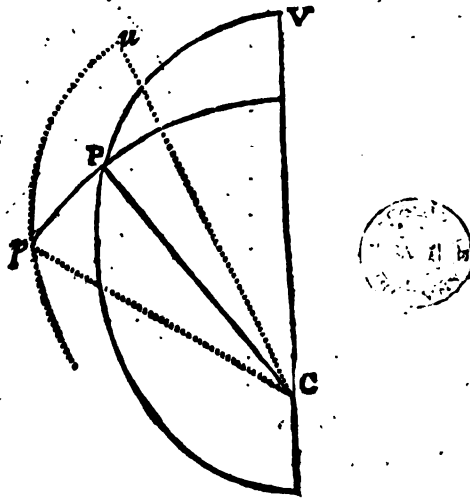
SECTIO IX.

De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quiescente.

In Orbe VPK positione dato revolvatur corpus P pergendo a V versus K . A centro C agatur semper Cp , quæ sit ipsi CP æqualis, angulumque VCP angulo VCP proportionalem constituat; & area quam linea Cp describit erit ad aream VCP quam linea CP simul describit, ut velocitas lineæ describentis Cp ad velocitatem lineæ describentis CP ; hoc est, ut angulus VCP ad angulum VCP , adeoque in data ratione, & propterea temporis proportionalis. Cum area temporis proportionalis sit quam linea Cp in plano immobili describit; manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis Vi centri-peta, revolvi possit una cum puncto p in Curva illa linea quam punctum idem p ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus VCu angulo PCp , & linea Cu lineæ CV , atque Figura uCP Figuræ VCP æqualis, & corpus in p semper existens movebitur in peri-



Q

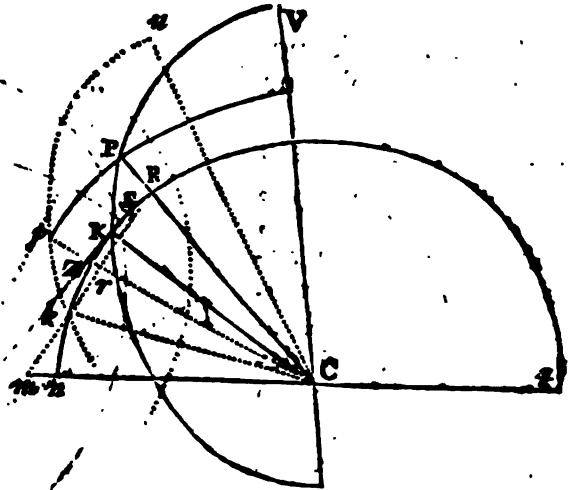
De Motu perimetro Figuræ revolventis CP , eodemque tempore describet
Contoctorum arcum ejus cp quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem
 VP in Figura quiescente VPK describere potest. Quærat igitur,
 per Corollarium quintum propositionis vi, Vis centripeta qua
 corpus revolvi possit in Curva illa linea quam punctum p describit
 in plano immobili, & solvetur Problema. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia Virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.

Partibus Orbis quiescentis VP , PK sunt similes & æquales. Orbis revolventis partes cp , pk ; & punctorum P , K distantia intelligatur esse quam minima. A puncto k in rectam pC demitte perpendicularum kr , idemque produc ad m , ut sit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP . Quoniam corporum altitudines PC & pC , KC & kC semper æquantur, manifestum est quod linearum PC & pC incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis P & p existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas PC , pC determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis PC , pC , perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P ; ut motus angularis lineæ pC , ad motum angularem lineæ PC , id est.

ut



ut angulus $V C p$ ad angulum $V C P$. Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K , corpus p æ. quasi in centrum motu æqualiter movebitur a p versus C , adeoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr , quæ per punctum k in lineam $p C$ perpendicularis est; & motu transverso acquireret distantiam a linea $p C$, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit a linea $P C$, ut est motus transversus corporis p ad motum transversum corporis alterius P . Quare cum $k r$ æqualis sit distantie quam corpus P acquirit a linea $P C$, sitque mr ad kr ut angulus $V C p$ ad angulum $V C P$, hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P , manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m . Hæc ita se habebunt ubi corpora p & P æqualiter secundum lineas $p C$ & $P C$ moventur, adeoque æqualibus Viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulum $p O n$ ad angulum $p C k$ ut est angulus $V C p$ ad angulum $V C P$, sitque $n C$ æqualis $k C$, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n ; adeoque Vi majore urgetur quam corpus P , si modo angulus $m C p$ angulo $k C p$ major est, id est si Orbis $u p k$ vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea $C P$ in consequentia fertur; & Vi minore si Orbis tardius movetur in antecedentia. Estque Virium differentia ut locorum intervallum $m n$, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C in intervallo $C n$ vel $C k$ describi intelligatur Circulus secans lineas $m r$, $m n$ productas in s & t , & erit rectangulum $m n \times m t$ æquale rectangulo $m k \times m s$, adeoque $m n$ æquale $\frac{m k \times m s}{m t}$. Cum autem triangula $p C k$, $p C n$ dentur magnitudine, sunt $k r$ & $m r$, earumque differentia $m k$ & summa $m s$ reciproce ut altitudo $p C$, adeoque rectangulum $m k \times m s$ est reciproce ut quadratum altitudinis $p C$. Est & $m t$ directæ ut $\frac{1}{2} m t$, id est, ut altitudo $p C$. Hæc sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{m k \times m s}{m t}$, id est lineola nascentis $m n$, eique proportionalis Virium differentia reciproce ut cubus altitudinis $p C$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p vel K & k , est ad vim qua corpus motu Circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in Orbe immobili describit arcum $P K$, ut lineola nascentis $m n$ ad sinum versum arcus nascentis $R K$, id est

DE MOTU
CORPORUM

ut $\frac{mk \times ms}{ms}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc est,

si capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp , ut $GG - FF$ ad FF . Et propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur Sector circularis æqualis areae toti VPC , quam corpus P tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus P in Orbe immobili & corpus p in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo descripta fit area VPC uniformiter describere potuisset, ut $GG - FF$ ad FF . Namque Sector ille & area pCk sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si Orbis VPK Ellipsis sit umbilicam habens C & Apfidem summam V ; eique similis & æqualis ponatur Ellipsis upk , ita ut sit semper pC æqualis PC , & angulus VCp sit ad angulum VCP in data ratione G ad F ; pro altitudine autem PC vel pC scribatur A , & pro Ellipseos latere recto ponatur $2R$: erit vis qua corpus in Ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A cub.}$ &

contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in V erit $\frac{FF}{CV quad.}$. Vis autem qua corpus in Circulo ad distantiam CV ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in Ellipsi revolvens habet in V , est ad vim qua corpus in Ellipsi revolvens urgetur in Apside V , ut dimidium lateris recti Ellipseos ad Circuli semidiametrum CV , adeoque valet $\frac{RFF}{CV cub.}$: & vis quæ sit ad hanc ut $GG - FF$ ad

FF , valet $\frac{RGG - RFF}{CV cub.}$: estque hæc vis (per hujus Corol. 1.)

differentia virium in V quibus corpus P in Ellipsi immota VPK , & corpus p in Ellipsi mobili upk revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A sit ad se-

ipsam in altitudine CV ut $\frac{1}{A cub.}$ ad $\frac{1}{CV cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$

qua corpus revolvi potest in Ellipsi immobili VPK , addatur excessus $\frac{RGG - RFF}{A cub.}$ & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A cub.}$

qua

qua corpus in Ellipsi mobili *u p k* iisdem temporibus revolvi possit.

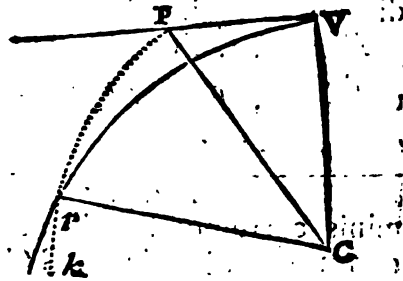
Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si Orbis immobilis *VPK* Ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eique similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis *u p k*; sitque *2 R* Ellipseos hujus latus rectum principale, & *2 T* latus transversum sive axis major, atque angulus *V C p* semper sit ad angulum *V C P* ut *G* ad *F*; vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T cub.}$ & $\frac{FFA}{T cub.}$

+ $\frac{RGG - RFF}{A cub.}$ respective.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur *T*, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id est radius Circuli æqualiter curvi, nominetur *R*, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunq[ue] immobili *VPK* revolvi potest, in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$ atque aliis in locis *P* indefinite dicatur *X*, altitudinē *CP* nominata *A*, & capiatur *G* ad *F* in data ratione anguli *V C p* ad angulum *V C P*: erit vis centripeta qua corpus idem eisdem motus in eadem Trajectoria *u p k* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG - VFFF}{A cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunq[ue] immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *V C p*, qui sit ad angulum *V C P* in data ratione; vis qua corpus gyriari potest in Curva illa *V p k* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertię, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam



DE MOTU
CORPORUM

curvam Vpk . Est autem hæc Curva Vpk eadem cum Curva illa VPQ in Corol. 3. Prop. xli inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiratur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides Orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbis autem eandem acquirant formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum P Apsis summa, & scribantur T pro altitudine maxima CV , A pro altitudine quavis alia CP vel Cp , & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum suum C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A cub.}$, id est

ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A cub.}$, substituendo $T - X$ pro A , erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A cub.}$ Reducenda similiter est vis alia

quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit $A cub.$, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoque ut $\frac{A cub.}{A cub.}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T cub. - 3 TTX + 3 TXX - X cub.}{A cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T cub.$ ut FFX ad $-3 TTX + 3 TXX - X cub.$ sive ut $-FF$ ad $-3 TT + 3 TX - XX$. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat [Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in

infinitum

nitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T cub. ut — FF ad —₃ TT seu GG ad TT ut FF ad ₃ TT & vicissim GG ad FF ut TT ad ₃ TT id est, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc est angulus VCP ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) gradum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum VCP gradum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id adeo ob simili-

tudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & Orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiores terminorum collationem similes redduntur hi Orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Ap-

sidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 gr. 55 m. 23 sec. ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A_{n-3} seu $\frac{A^n}{A_3}$: ubi $n - 3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irracionales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $T - X^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^{n-n}XT^{n-1} + \frac{n^n - n}{2}XXT^{n-2}$ &c.

Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius RGG — RFF + TFF — FFX, fit RGG — RFF + TFF ad T^n ; ut — FF ad $-nT^{n-1} + \frac{n^n - n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo ratio-

nes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut — FF ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} , ut FF ad nT^{n-1} , & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-2} id est ut 1 ad n ; adeoque G ad F, id est angulus VCP ad angulum VCP, ut

De Motu ut \sqrt{n} . Quare cum angulus $\angle VCP$, in descensu corporis **CORPORUM** ab Apfide summa ad Apfidem imam, in Ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus $\angle VCP$, in descensu corporis ab Apfide summa ad Apfidem imam, in Orbe propemodum Circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apfide ima ad Apfidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$ erit n æqualis 4 & \sqrt{n} æqualis 2; adeoque angulus inter Apfidem summam & Apfidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. seu 90. gr. Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apfidem imam, & completa alia quarta parte ad Apfidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ad eoque inter Apfidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$

seu 127 gr. 16 m. 45 sec. & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apfide summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{1}{4}}$, adeoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{1}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360 gr. & propterea corpus de Apfide summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apfidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revblutionem integram, redibit ad Apfidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA_m + cA^n}{A^{cub.}}$, id est, ut $\frac{b \ln T - X_m + c \ln T - X^n}{A^{cub.}}$ seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut $\frac{bT^m + cT^n - mbX T^{m-1} - ncX T^{n-1} + \frac{mm-1}{2} bXX T^{m-2} + \frac{nn-1}{2} cXX T^{n-2} \&c.}{A^{cub.}}$ &

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1}$ LIBER PRIMUS.

$$+ \frac{mm-m}{2} bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} cXT^{n-2} \&c. \text{ Et sumendo rationes ul-}$$

timas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciffim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV feu T Arithmetice per Unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, adeoque ut

I ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F , id est angulus VCP ad angulum

VCP , ut I ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum Angulus VCP inter

Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili fit 180 gr. erit angulus VCP inter easdem Apsides, in Orbe quem corpus vi

centripeta quantitati $\frac{bA^{m+c}A^n}{A^{cub.}}$ proportionali describit, æqua-

lis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento si vis cen-

tripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A^{cub.}}$, angulus inter Apsides invenietur gra-

duum $180 \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur Problema in casibus

difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in Series convergentes denominatorem habentes $A^{cub.}$ Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipsius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque Unitatem pro T , obtinebitur proportio G ad F .

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu Apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad Apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360 , ut numerus aliquis m ad numerum alium n , & altitudo nominetur A : erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus Index

DE MOTU **DEX** est $\frac{n^2}{m^2} - 3$. Id quod per **EXEMPLA** secunda manifestum est. **CORPORUM** Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in recessu a centro, decrefcere non posse: Corpus tali vi revolvens deque Apfide discedens, si caperit descendere nunquam perveniet ad Apfidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens Curvam illam lineam de qua egimus in Cor. 3. Prop. XLII. Sin caperit illud, de Apfide discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apfidem summam. Describet enim Curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in recessu a centro, decrefcit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apfide discedens, perinde ut caperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At si vis, in recessu a centro, vel decrefcit in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunq; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad Apfidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apfide ad Apfidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrefcet: & quo citius corpus de Apfide ad Apfidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apfide summa ad Apfidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{n^2}{m^2} - 3$ valeat $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$, id est, reciproce ut $A^3 - \frac{1}{4}$ vel $A^3 - \frac{1}{16}$ vel $A^3 - \frac{1}{4}$ vel $A^3 - \frac{4}{9}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad Apfidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, adeoque $A^{\frac{n^2}{m^2} - 3}$ æqualis A^{-3} seu $\frac{1}{A^3}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apfidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{1}{4}$ vel $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $A^{\frac{n^2}{m^2} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$ vel $A^{\frac{2}{3} - 3}$ vel $A^{2 - 3}$ vel $A^{16 - 3}$; & propterea vis aut reciproce ut $A^{\frac{16}{9}}$

$A^{\frac{11}{7}}$ vel $A^{\frac{1}{2}}$, aut directe ut A^6 vel A^{13} . Denique si corpus pergendo ab Apfide summa ad Apfidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apfisilla singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}} = 3$ erit æquale $A^{\frac{19523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $A^2 \frac{1}{143}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus 59½ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis; revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apfidum qui ex vi illa extranea oriatur: & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA , adeoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^4}{Acub}$; erit (in Exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, n æqualis 4, adeoque angulus revolutionis inter Apfides æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357½ partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1; & $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{35645}{35345}}$ seu 180,7623, id est, 180 *gr.* 45. *m.* 44. *f.* Igitur corpus de Apfide summa descendens, motu angulari 180 *gr.* 45. *m.* 44. *f.* perveniet ad Apfidem imam, & hoc motu duplicato ad Apfidem summam redibit: adeoque Apfis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31. *m.* 28 *sec.*

Haftenus de Motu corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium transeunt. Superest ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuscunque centra

DE MOTU
CORPORUM

tra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo describunt. Et eadem lege Motus corporum in superficiebus Curvis peractos subinde determinamus.

S E C T I O X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deque Funipendulorum Motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate, secundum rectam in Plano illo datam egressi.

Sit S centrum Virium, SC distantia minima centri hujus a Plano dato, P corpus de loco P secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & PQR Trajectoria illa, in Plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ , QS , & si in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum S , & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T : Vis SV resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires ST , TV ; quarum ST trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV , agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum C in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis ST tolleretur, & corpus vi sola TV revolveretur circa centrum C in spatio libero. Data autem vi

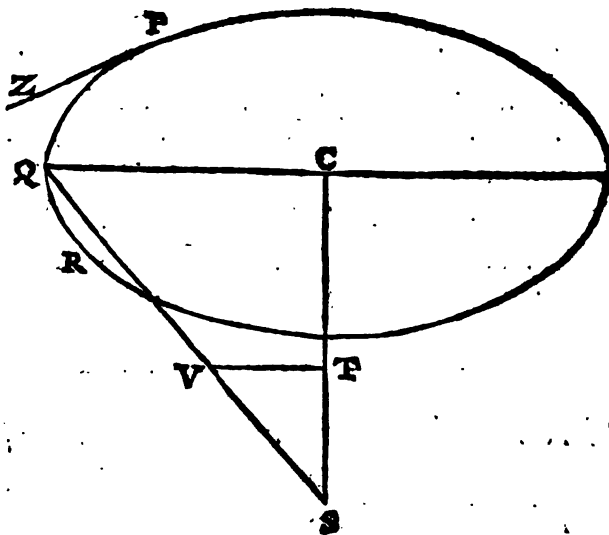
vi centripeta TV qua corpus Q in spatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur per Prop. XLII, tum Trajectoria PQR quam corpus describit, tum locus Q in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q ; & contra. $Q. E. I.$

LIBER
PRIMUS.

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Posito quod Vis centripeta proportionalis sit distantie corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent Ellipses, & revolutiones Temporibus equalibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, utro citroque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem Temporibus absolvent.

Nam, stantibus quæ in superiori Propositione, vis SV qua corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur versus centrum S est ut distantia SQ ; atque adeo ob proportionales SV & SQ , TV & CQ , vis TV qua corpus trahitur versus punctum C in Orbis plano datum, est ut distantia CQ . Vi- res igitur, quibus corpora in plano PQR versantia trahuntur versus punctum C , sunt



pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum S ; & propterea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem Figuris; in plano quovis PQR circa punctum C , atque in spatiis liberis circa centrum S ; adeoque (per Corol 2. Prop. x, & Corol 2. Prop. xxxviii) Temporibus semper æqua-

DE MOTU aequalibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum C ,
 CORPORUM vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum C
 in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipie lineas curvas in plano describi, dein circa axes quosvis datos per centrum Virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultro citroque peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

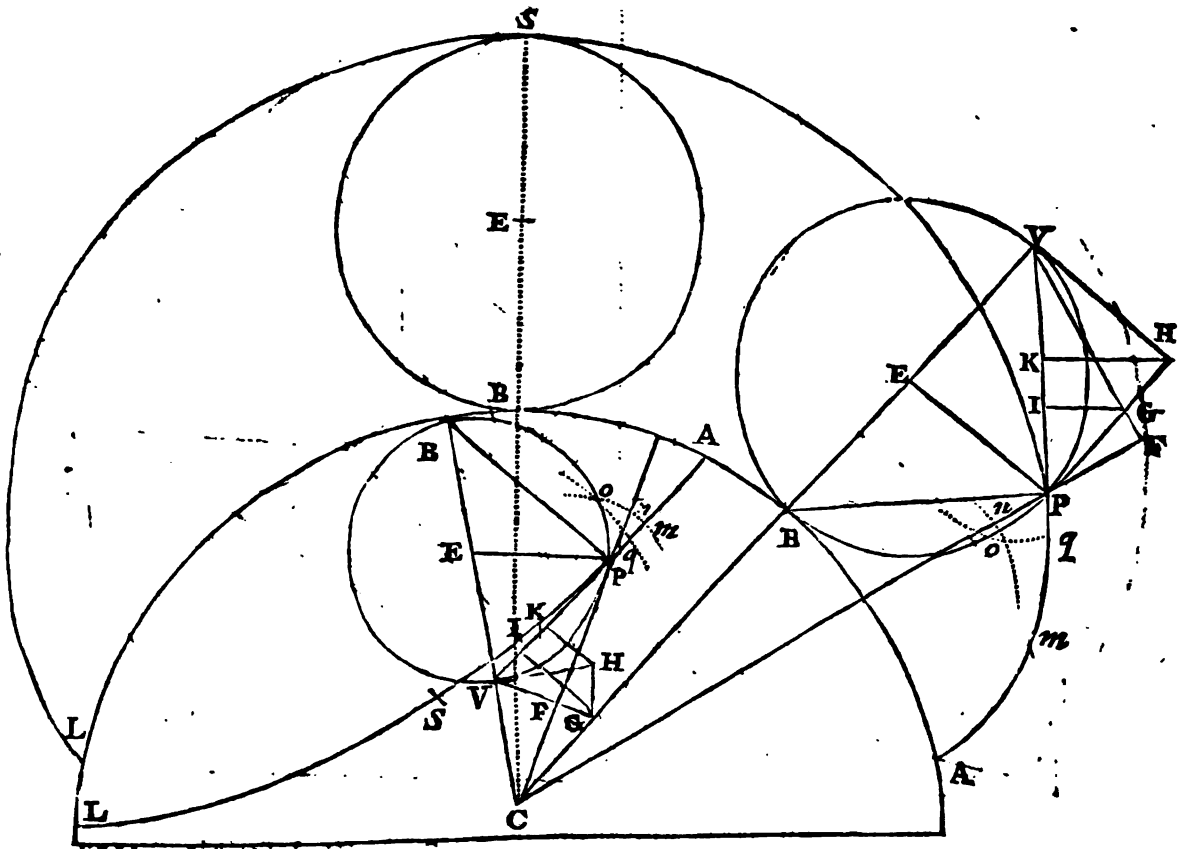
Si Rota Globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei, quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicyclaidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si Rota Globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

Sic

Sit ABL Globus, C centrum ejus, BPV Rota ei insitens, E centrum Rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro Rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B versus L , & inter eundem ita revolvi ut arcus AB , PB sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud P in perimetro Rotæ datum interea describere Viam curvilineam AP . Sit autem AP Via tota curvilinea descripta ex quo Rota Globum tetigit in A , & erit Viæ hujus longitudo AP ad duplum



sinum versum arcus $\frac{1}{2} PB$, ut $2 CE$ ad CB . Nam recta CE (si opus est producta) occurrat Rotæ in V , junganturque CP , BP , EP , VP , & in CP productam demittatur normalis VF . Tangant PH , VH Circulum in P & V concurrentes in H , secetque PH ipsam VF in G , & ad VP demittantur normales GI , HK .
Centro

id est ratio mutationum momentanearum curvæ AP , rectæ CP , arcus circularis BP , ac rectæ VP , eadem erit quæ linearum PV , PF , PG , PI , respective. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sunt, angulique HVG , VCF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos) angulo CEP æqualis est, similia erunt trian- gula VHG , CEP ; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV seu HP & ita KI ad KP , & compositæ vel divisim ut CB ad CE ita PI ad PK , & duplicatis consequentibus ut CB ad $2 CE$ ita PI ad PV , atque ita adeo Pq ad Pm . Est igitur decremen- tum lineæ VP ; id est, incrementum lineæ $BV - VP$ ad incre- mentum lineæ curvæ AP in data ratione CB ad $2 CE$, & prop- terea (per Corol. Lem. 17.) longitudines $BV - VP$ & AP , in- crementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente BV radio, est VP co-sinus anguli BVP seu $\frac{1}{2} BEP$, adeoque $BV - VP$ sinus versus ejusdem anguli; & propterea in hac Rota, cujus radius est $\frac{1}{2} BV$, erit $BV - VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2} BP$. Ergo AP est ad duplum sinum versus arcus $\frac{1}{2} BP$ ut $2 CE$ ad CB . Q. E. D.

Lineam autem AP in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinc- tionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra ASL & bisecetur ea in S , erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ du- plus est sinus anguli VBP , existente EB radio) ut $2 CE$ ad CB , atque adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis AS æquabitur li- neæ rectæ quæ est ad Rotæ diametrum BV , ut $2 CE$ ad CB .

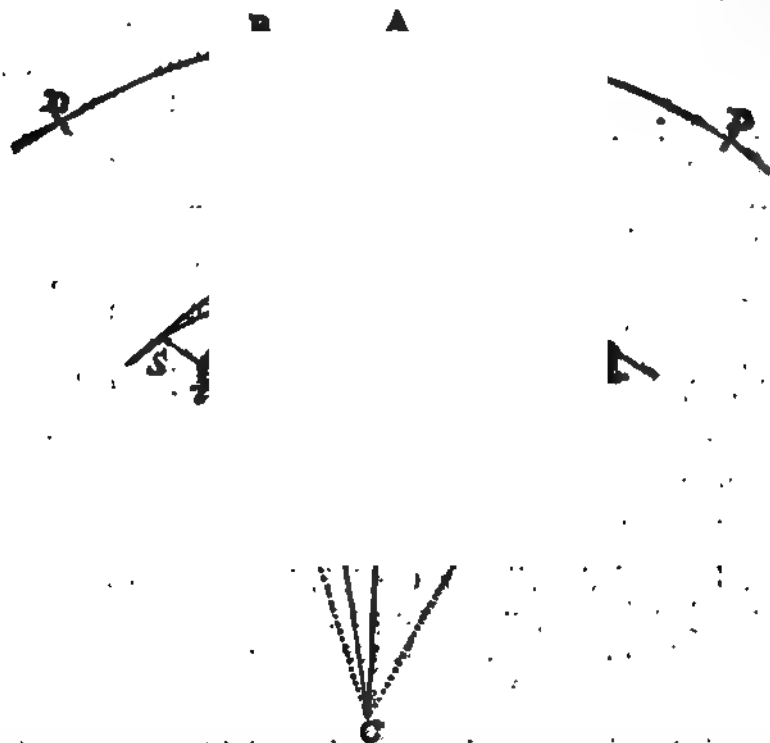
PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum QVS , centro C descriptum, detur Cyclois QRS bisecta in R & punctis suis extremis Q & S superficiæ Globi hinc inde occurrens. Agatur CR bisecans arcum QS in O , & produca- tur ea ad A , ut sit CA ad CO ut CO ad CR . Centro C in- tervallo

De Motu
CORPORUM

tervallo CA describatur Globus exterior ABD , & intra hunc Globum a Rota, cujus diameter sit AO , describantur duæ Semicycloides AQ , AS , quæ Globum interiorem tangant in Q & S & Globo exteriori occurrant in A . A puncto illo A , Filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T , & ita intra Semicycloides AQ , AS oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a



perpendiculo AR , Filum parte sui superiore AP applicetur ad Semicycloidem illam APS versus quam peragitur motus, & circum eam cum obstaculo flectatur, parteque reliqua PT cui Semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oscillabitur in Cycloide data QRS . QEF .

Occurrat enim Filum PT cum Cycloide QRS in T , tum circulo QOS in V , agaturque CV ; & ad Fili partem rectam PT , e punctis extremis P ac T , erigantur perpendiculi PB , TW , occurrentia rectæ CV in B & W . Pater, ex constructione & generi similium Figurarum AS , SR , perpendiculis illis PB , TW abscindere de CV longitudines VB , VW Rotarum diametris OA , OR æquales. Est igitur TP ad VP (duplum sinum anguli VBP existente $\frac{1}{2}$ BV radio)

dio) ut BW ad BV , seu $AO + OR$ ad AO , id est (cum sint CA ad CO , CO ad CR & divisim AO ad OR proportionales,) ut $CA + CO$ ad CA vel, si bifecetur BV in E , ut $2CE$ ad CB . Proinde, per Corol. 1. Prop. XLIX, longitudo partis rectæ Fili PT æquatur semper Cycloidis arcui PS , & Filum totum APT æquatur semper Cycloidis arcui dimidio APS , hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX) longitudini AR . Et propterea vicissim si Filum manet semper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide data QRS . Q. E. D.

Corol. Filum AR æquatur Semicycloidi AS , adeoque ad semidiametrum AC eandem habet rationem quam similis illi Semicyclois SR habet ad semidiametrum CO .

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad Globi centrum C sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola Vi agente corpus T oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis QRS: dico quod oscillationum utcumque inæqualium æqualia erunt Tempora.

Nam in Cycloidis tangentem TW infinite productam cadat perpendicularum CX & jungatur CT . Quoniam vis centripeta qua corpus T impellitur versus C est ut distantia CT , atque hæc (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes CX , TX ; quarum CX impellendo corpus directe a P distendit filum PT & per ejus resistantiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera TX , urgendo corpus transversim seu versus X , directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo TX , id est, (ob datas CV , WV iisque proportionales TX , TW ,) ut longitudo TW , hoc est (per Corol. 1 Prop. XLIX,) ut longitudo arcus Cycloidis TR . Pendulis igitur duobus APT , Apt de perpendicularo AR inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR , tR . Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ

DE MOTU
CORPORUM

dæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales. sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes atque adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partefque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendicularum AR . Cumque vicissim ascensus perpendicularorum de loco infimo R , per eosdem arcus Cycloïdalis motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloïdis partes duæ RS & RQ ad utrumque perpendiculari latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. *Q. E. D.*

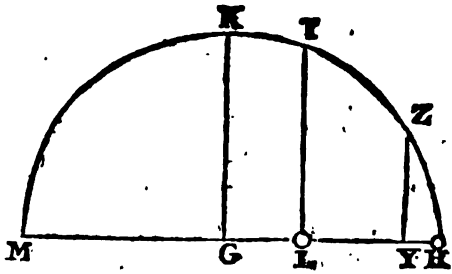
Corol. Vis qua corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in Cycloïde, est ad totum corporis ejusdem Pondus in loco altissimo S vel Q , ut Cycloïdis arcus TR ad ejusdem arcum SR vel QR .

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & Velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis G , intervallo GH Cycloïdis arcum RS æquante, describe semicirculum $HKMG$ semidiametro GK bisectum. Et si vis centripeta, distantis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum G , sitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro Globi QOS (*Vide Fig. Prop. I.*) ad ipsius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum T dimittitur e loco supremo S , cadat corpus aliquod L ab H ad G : quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis TR , LG semper proportionales, atque adeo, si æquantur TR & LG , æquales in locis T & L ; patet corpora illa describere spatia ST , HL æqualia sub initio, adeoque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare, per Prop. xxxviii, tempus quo corpus describit arcum ST est ad tempus oscil-

oscillationis unius, ut arcus HI (tempus quo corpus H perveniet ad L) ad semiperipheriam HKM (tempus quo corpus H perveniet ad M .) Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R , (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G , seu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG , arcus HI , HK æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK , sive ut $\sqrt{SRq. - TKq.}$ ad SR . Unde cum, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscillationibus universis. Quæ erant primo inveniendæ.



Oscillentur jam Funipendula corpora in Cycloidibus diversis intra Globos diversos, quorum diversæ sunt etiam Vires absolutæ, descriptis: & si Vis absoluta Globi cujusvis QOS dicatur V , Vis acceleratrix qua Pendulum urgetur in circumferentia hujus Globi, ubi incipit directe versus centrum ejus moveri, erit ut distantia Corporis

penduli a centro illo & Vis absoluta Globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times V$. Itaque lineola HT , quæ sit ut hæc Vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore; & si erigatur normalis TZ circumferentiæ occurrens in Z , arcus nascens HZ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens HZ in subduplicata ratione rectanguli GHT , adeoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde Tempus oscillationis integræ in Cycloide QRS (cum sit ut semiperipheria HKM , quæ oscillationem illam integram denotat, directe, utque arcus HZ , qui datum tempus similiter denotat, inverse) fiet ut GH directe & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverse, hoc est, ob æquales GH & SR , ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, sive (per Corol. Prop: L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Ita-

que Oscillationes in Globis & Cycloidibus omnibus, quibuscunque cum Viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione longitudinis Fili directe, & subduplicata ratione distantiae inter punctum suspensionis & centrum Globi

DE MOTU Globi inverse, & subduplicata ratione Vis absolutæ Globi etiam
CORPORUM inverse. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, Cadentium & Revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, quæ Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet Linea recta per centrum globi transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvens arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Cycloide quavis QRS ut τ ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam confectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si Globi diameter augetur in infinitum: mutabitur ejus superficies spherica in planum, Visque centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinu verso dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: Et Pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & Descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

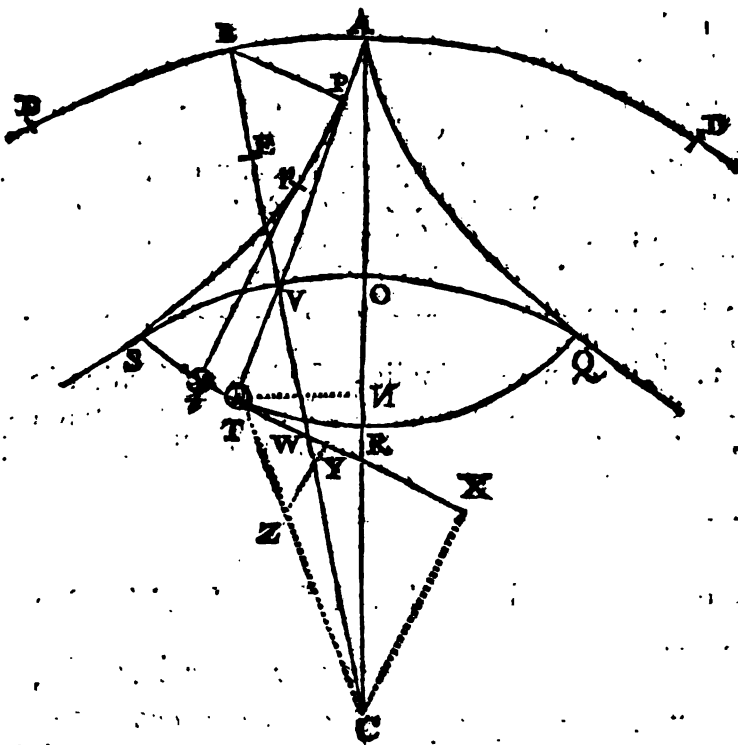
Aptantur autem Propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu Clavorum, perimetris suis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ suspensa, in Cycloidibus intra globos oscillari debent, ut Oscillationes omnes evadant Isochronæ. Nam Gravitatis (ut in Libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie Terræ, sursum quidem in duplicata ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

LIBER
PRINCIPES

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Vires quibus corpora in datis curvis lineis Oscillationes semper Isochronas peragent.

Oscilletur Corpus T in curva quavis linea $STRQ$, cujus axis sit OR transiens per virium centrum C . Agatur TX quæ curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hac tant-



gente TX capiatur TF æqualis arcui TR . Nam longitudo arcus illius ex Figurarum quadraturis (per Methodos vulgares) innotescit. De puncto T educatur recta TZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z , & erit Vis centripeta proportionalis rectæ TZ . Q.E.I.

Nam:

De Motu
CORPORUM Nam si vis, qua corpus trahitur de T versus C , exponatur per rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires TY , TZ , quarum TZ trahendo corpus secundum longitudinem Fili PT , motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat, vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda TR , accelerationes corporis vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus T Filo rectilineo AT a centro A pendens, describat arcum circulearem $STRQ$, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem Gravitatis, ut arcus TR ad ejus sinum TN : æqualia erunt Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas TZ , AR , similia erunt triangula ATN , ZTY ; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN ; hoc est, (si Gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT) vis TZ , qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim Gravitatis AT , ut arcus TR ipsi TY æqualis ad arcus illius sinum TN .

Corol. 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi Gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu TR & radio AR ad sinum TN , Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

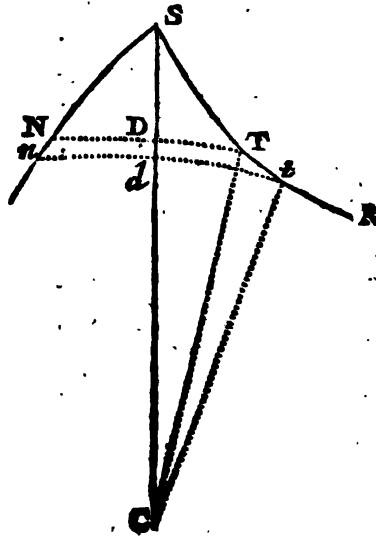
PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum Virium transeunte descriptis, descendunt & ascendunt.

Descendat corpus de loco quovis S per lineam quamvis curvam $STtR$, in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque D & partium

partium illarum aliqua. Centro C , intervallis CD , Cd describantur circuli DT , dt , lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in T & t . Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine CT , per Prop. xxxix. Tempus autem, quo corpus describit lineolam Tt , est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli tTC) directe, & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata DN ad rectam CS per punctum D perpendicularis, & ob datam Dd erit rectangulum $Dd \times DN$, hoc est area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Ergo si SNn sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, erit area SNd proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam ST ; proindeque ex inventa illa area dabitur Tempus. *Q. E. I.*

LIBER PRIMUS.



PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum Virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit $BSKL$ superficies curva, T corpus in ea revolvens, $STtR$ Trajectoria quam corpus in eadem describit, S initium Trajectoriæ, $OMNK$ axis superficiei curvæ, TN recta a corpore in axem perpendicularis, OP huic parallela & æqualis a puncto O quod in axe datur educta, AP vestigium Trajectoriæ a puncto P in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum, A vestigii initium puncto S respondens, TC recta a corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum C proportionalis; TM recta ad superficiem curvam perpendicularis, TI pars ejus vi pressionis, qua corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M

T

Stantibus quæ in superiore Propositione constructa sunt, exeat ^{LIBER} corpus de loco S in Trajectoriam inveniendam STR ; &, ex da- ^{PRIMUS} ta ejus velocitate in altitudine SC , dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine TC . Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectoriæ suæ particulam Tt , sitque Pp vestigium ejus in plano AOP descriptum. Jungatur Op , & Circelli centro T intervallo Tt in superficie curva descripti sit PpQ vestigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ descriptum. Et ob datum magnitudine & positione Circellum, dabitur Ellipsis illa PpQ . Cumque area POp sit tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dabitur Op positione, & inde dabitur communis ejus & Ellipseos intersectio p , una cum angulo OPp , in quo Trajectoriæ vestigium APp secat lineam OP . Inde autem inveniatur Trajectoriæ vestigium illud APp , eadem methodo qua curva linea $VIKk$, in Propositione **XLI**, ex similibus datis inventa fuit. Tum ex singulis vestigii punctis P erigendo ad planum AOP perpendiculara PT superficiæ curvæ occurrentia in T , dabuntur singula Trajectoriæ puncta T . *Q. E. I.*

S E C T I O XI.

De Motu Corporum Viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui Motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuae sunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per Legum Corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia se mutuo attrahant) hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo Motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando Vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In Mathematicis enim jam versamur, & propterea missis disputationibus Physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

DE MOTU
CORPORUM

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

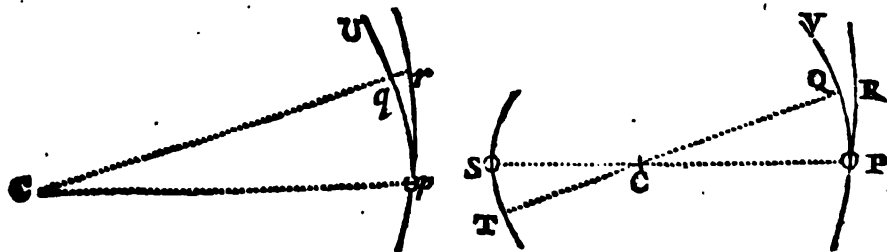
Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, Figuras similes.

Sunt enim distantiae a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque adeo in data ratione ad invicem, & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hae distantiae circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineae autem rectae, quae sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, Figuras circum eosdem terminos (in planis quae una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt Figurae quae his distantis circumactis describuntur. Q. E. D.

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahunt, & inter ea volvantur circa gravitatis centrum commune: dico quod Figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest Figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, Viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora S , P circa commune gravitatis centrum C , pergendo de S ad T deque P ad Q . A dato puncto s ipsis



SP , TQ æquales & parallelæ ducantur semper sp , sq , & Curva pqv quam punctum p , revolvendo circum punctum immotum s , describit,

describit, erit similis & æqualis Curvis quas corpora S , P describunt circum se mutuo: proindeque (per Theor. xx.) similis Curvis ST & PQV , quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C : id adeo quia proportiones linearum SC , CP & SP vel s p ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud Gravitatis centrum C , per Legum Corollarium quartum, vel quiescit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quiescit, inque s & p locentur corpora duo, immobile in s , mobile in p , corporibus S & P similia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr Curvas PQ & pq in P & p , & producantur CQ & sq ad R & r . Et, ob similitudinem Figurarum $CPRQ$, $sprq$, erit RQ ad rq ut CP ad sp , adeoque in data ratione. Proinde si vis qua corpus P versus corpus S , atque adeo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim qua corpus p versus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR , pr ad arcus PQ , pq , per intervalla ipsis proportionalia RQ , rq ; adeoque vis posterior efficeret ut corpus p gyraretur in Curva pqv , quæ similis esset Curvæ PQV , in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur, & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad sp , sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum S & s , P & p , & æqualitatem distantiarum SP , sp) sibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius p trahatur per intervallum majus rq , requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per Lemma decimum) spatia, ipso motus initio descripta, sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicata ratione distantie sp ad distantiam CP , eo ut temporibus quæ sint in eadem subduplicata ratione describantur arcus pq , PQ , qui sunt in ratione integra: Et corpora P , p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s Figuras similes PQV , pqv , quarum posterior pqv similis est & æqualis Figuræ quam corpus P circum corpus mobile S describit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unum cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium sextum, motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, adeoque corpora descri-

De Motu bent circum se mutuo Figuras easdem ac prius, & propterea Figu-
Corporum *re p q v* similes & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo Viribus distantiz suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. x,) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Ellipses concentricas: & vice versa, si tales Figuræ describuntur, sunt Vires distantiz proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo Viribus quadrato distantiz suæ reciproce proportionalibus describunt (per Prop. xi, xii, xiii.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Sectiones conicas umbilicum habentes in centro circum quod Figuræ describuntur. Et vice versa, si tales Figuræ describuntur, Vires centripetæ sunt quadrato distantiz reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII

Corporum duorum S & P circa commune gravitatis centrum C revolventium Tempus periodicum esse ad Tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyrantis & Figuris quæ corpora circum se mutuo describunt Figuram similem & æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius S, ad summam corporum S + P.

Namque, ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes *PQ* & *pq* describuntur, sunt in subduplicata ratione distantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc est, in subduplicata ratione corporis *S* ad summam corporum *S + P*. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes *PQ* & *pq* describuntur, hoc est, tempora tota quibus Figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicata ratione. *Q. E. D.*

PRO.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

LIBER
PRIMUS.

Si corpora duo S & P, Viribus quadrato distantie suae reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, Axis principalis erit ad Axem principalem Ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S.

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum S + P. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipseos autem axis principalis (per Prop. xv.) minuatur in ratione cujus hæc est sesquuplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad S + P est triplicata; adeoque erit ad axem principalem Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter S + P & S ad S + P. Et inverte, axis principalis Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut S + P ad primam duarum medie proportionalium inter S + P & S. Q. E. D.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo Viribus quibuscumque se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocumque moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto Viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantie corporum a centro illo communi atque respectu distantie totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium.

DE MOTU
CORPORUM

dium, adeoque eædem sunt ac si a corpore intermedio manarent.
Q. E. D.

Et quoniam data est ratio distantiae corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam corporis ejusdem a corpore altero, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia & quantitibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia & quantitibus totidem datis datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad communem gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiae hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitibus datis similiter derivata. Hoc est, Vis trahentis eadem erit Lex respectu distantiae utriusque. Q. E. D.

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare Motus.

Corpora (per Theorema novissimum) perinde movebuntur ac si a corpore tertio, in communi gravitatis centro constituto, traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per Hypothesin; & propterea (per Legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per Prob. xxv,) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. Q. E. I.

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum Velocitatibus exeunt, determinare Motus.

Ex

Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per Legum Corollarium quintum, & Theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato secundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per Problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus est uniformis ille Systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. Q. E. I.

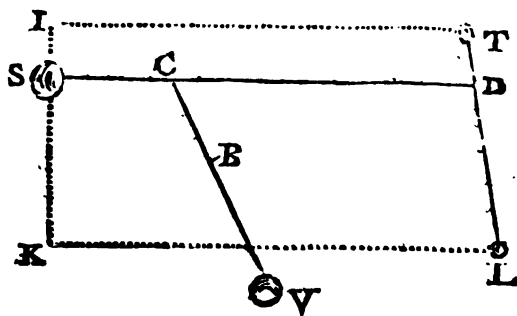
LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus Corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centrīs: requiruntur Motus plurium Corporum inter se.

Ponantur primo corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D . Describent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI) Ellipses centra habentes in D , quarum magnitudo ex Problemate v, innotescit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST , SL , & ab ipsis vicissim trahatur. Vis ST (per Legum Cor. 2.) resolvitur in vires SD , DT ; & vis SL in vires SD , DL . Vires autem DT , DL , quæ sunt ut ipsarum summa TL , atque adeo ut vires accelera-

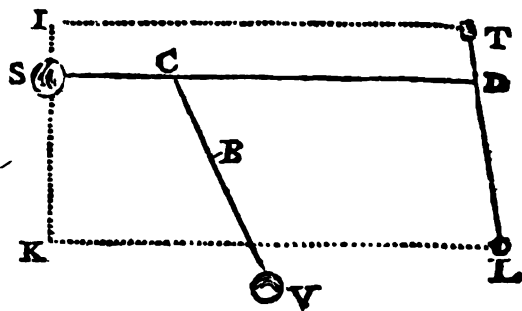


trices quibus corpora T & L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L , prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantis DT ac DL proportionales, ut prius, sed

V viribus

DE MOTU
CORPORUM

viribus prioribus majores; adeoque (per Corol. 1. Prop. x. & Corol. 1 & 8. Prop. iv) efficiunt ut corpora illa describant Ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD , actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI , LK , ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK ; quam ductam; concipe per medium corporis S , & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus faciendo ut Systema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C . Tali motu corpus S (eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantia CS proportionalium, tendit versus centrum C) describit Ellipsin circa idem C ; & punctum D , ob proportionales CS , CD , describet Ellipsin consimilem e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, posterius posteriore) æqualiter & secundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum est) attracta, pergunt (per Legum Corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile D Ellipses suas describere, ut prius.



Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum V , & simili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T , L & S circa centra D & C , sed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita se habent ubi corpora T & L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus tradunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt mutua omnia attractiones acceleratrices ad invicem ut distantia ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B , in plano immobili describunt. Q. E. I.

PRO.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum Vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum ab eorundem centrīs, moveri posse inter se in Ellipsis; & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsis accurate. Quo magis recedit Lex virium a Lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest ut corpora, secundum Legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in Ellipsis accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsis errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, absque errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipsis, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usque donec error iste & actiones mutuae sint datis quibusvis minores, atque adeo donec Orbes cum Ellipsis quadrent, & areae respondeant temporibus absque errore qui non sit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Cas. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum,

De Motu
CORPORUM

nulla prorsus oriatur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; &, augendo corporis maximum distantiam, donec rectorum ab hoc ad reliqua ductarum differentiarum respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint quam datæ quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absque erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsin fortiore,) & Radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, absque aliis erroribus, nisi quas partium distantiarum (per exiguam sane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutantur situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsis vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eadem

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per lineam SN ; & si attractiones acceleratrices SM , SN æquales essent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per Legum Corol. 6.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio SN minor esset attractione SM , tolleret ipsa attractionis SM partem SN , & maneret pars sola MN , qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio SN major esset attractione SM , oriretur ex differentia sola MN perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur semper attractio tertia superior SM ad attractionem MN , attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita PAB ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ versus corpus S , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio SN non est nulla, neque minor minima attractionum omnium SM , sed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neque multo minor attractione SK . *Q. E. D.*

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P , S circa maximum T in planis diversis; & vis LM , agendo secundum lineam PT in plano Orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera NM , agendo secundum lineam quæ ipsi ST parallela est, (atque adeo, quando corpus S versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ PAB ;) præter perturbationem motus in Longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in Latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P & T ad invicem situ, erit ut vis illa generans NM , adeoque minima evadet ubi MN est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio SN non est multo major, neque multo minor attractione SK . *Q. E. D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod, si corpora plura minora P, S, R , &c. revolvantur circa maximum T , motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitur atque cætera a se mutuo.

Corol.

ris periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis KL , adeoque tempus periodicum, si maneat Orbis radius TP , augeri, idque in subduplicata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione sesquuplicata, per Corol. 6. Prop. iv. Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minus semper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro T ; & contra, si vis illa augetur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S , qua vis illa diminuitur, augetur ac diminuatur per vices; augetur simul ac diminuatur Radius TP per vices, & tempus periodicum augetur ac diminuatur in ratione composita ex ratione sesquuplicata Radii & ratione subduplicata qua vis illa centripeta corporis centralis T , per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S , diminuitur vel augetur.

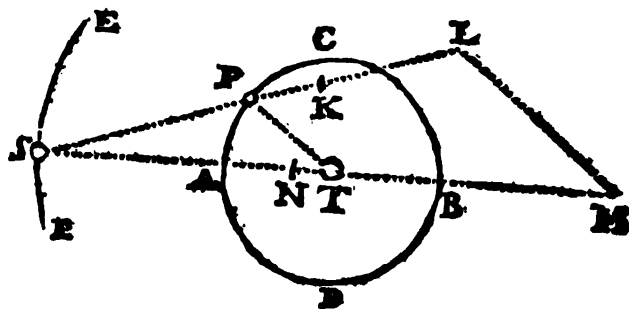
Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam quod Ellipseos a corpore P descriptæ Axis, seu Apsidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & in singulis corporis revolutionibus per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus T in Quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripeta qua corpus T trahit corpus P . Vis prior LM , si augetur distantia PT , augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, & vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, adeoque summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantia PT , & propterea (per Corol. 1. Prop. xlv.) efficit ut Aux, seu Apsis summa, regrediatur. In Conjunctione vero & Oppositione, vis qua corpus P urgetur in corpus T differentia est inter vim qua corpus T trahit corpus P & vim KL ; & differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione distantia PT , decrescit in majore quam duplicata ratione distantia PT , adeoque (per Corol. 1. Prop. xlv.) efficit ut Aux progrediatur. In locis inter Syzygias & Quadraturas pendet motus Augis ex causa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis KL in Syzygiis sit quasi duplo major quam vis LM in Quadraturis, excessus in tota revolutione erit penes vim KL , transferetque Augem singulis revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum T , P corporibus pluribus S , S , S , &c. in Orbe ESE consistentibus, undique cingi. Namque horum actionibus

DE MOTU
CORPORUM

bus actio ipsius T minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicata distantiae.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetae facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiae TP , in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atque adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablativam KL seu NM — LM , progredientur velocius, inque Quadraturis suis tardius recedent per vim additivam LM . Ob diurnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augetur in ratione plusquam duplicata distantiae diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsus semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiae diminutæ, adeoque Orbem describeret Orbe Elliptico



interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetae singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas; & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum T, P, S , ubi Apsides Orbis PAB sunt in Quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est.

&

& maxima fit ubi Apfides sunt in Syzygiis. Si Apfides constituantur in Quadraturis, ratio prope Apfides minor est & prope Syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velocissimus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Apfides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Apfide ima est ad vim in Apfide summa in minore quam duplicata ratione distantie Apfidis summæ ab umbilico Ellipseos ad distantiam Apfidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apfides constituantur in Syzygiis, vis in Apfide ima est ad vim in Apfide summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires LM in Quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in Syzygiis subductæ viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter Apfides, minima in Quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in transitu Apfidum a Quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetque Excentricitatem Ellipseos; inque transitu a Syzygiis ad Quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in Latitudinem, fingamus planum Orbis EST immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod, ex viribus NM , ML , quæ sunt causa illa tota, vis ML agendo semper secundum planum Orbis PAB , nunquam perturbat motus in Latitudinem; quodque vis NM , ubi Nodi sunt in Syzygiis, agendo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusque P de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a Quadraturis ad Syzygias, augetque vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad Quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi constituantur in Octantibus post Quadraturas, id est, inter C & A , D & B , intelligitur ex modo expositis quod, in transitu corporis P a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad Quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea de novo in transitu per alios 45 gradus, usque ad Nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in Nodo subsequente quam in præcedente.

DE MOTO
CORPORUM dente. Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi Nodi sunt in Octantibus alteris inter A & D , B & C . Inclinatio igitur ubi Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a Syzygiis ad Quadraturas, in singulis corporis ad Nodos appulsibus, diminuitur, fitque omnium minima ubi Nodi sunt in Quadraturis & corpus in Syzygiis: dein crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat, Nodisque ad Syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus P ubi Nodi sunt in Quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis sui, idque in partem versus S , in transitu suo a Nodo C per Conjunctionem A ad Nodum D ; & in contrariam partem in transitu a Nodo D per Oppositionem B ad Nodum C ; manifestum est quod in motu suo a Nodo C , corpus perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo CD , usque dum perventum est ad Nodum proximum; adeoque in hoc Nodo, longissime distans a plano illo primo CD , transit per planum Orbis EST non in plani illius Nodo altero D , sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S , quodque proinde novus est Nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergunt Nodi recedere in transitu corporis de hoc Nodo in Nodum proximum. Nodi igitur in Quadraturis constituti perpetuo recedunt; in Syzygiis (ubi motus in Latitudinem nil perturbatur) quiescunt; in locis intermediis, conditionis utriusque participes, recedunt tardius; adeoque, semper vel retrogradi vel stationarii, singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

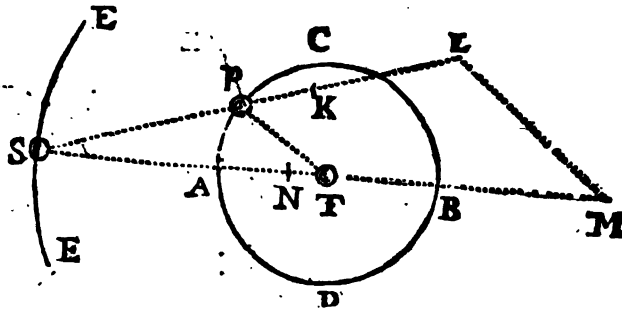
Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti Errores sunt paulo majores in Conjunctione corporum P , S quam in eorum Oppositione, idque ob majores vires generantes NM & ML .

Corol. 13. Cumque rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis S , obtinent præcedentia omnia, ubi corporis S tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur corporum duorum T & P Systema. Et ex aucto corpore S auctaque adeo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus distantiiis) majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus S circum Systema corporum P & T revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires NM , ML , ubi corpus S longinquum est, sint quamproxime ut vis SK & ratio PT ad ST conjunctim, hoc est, si detur tum distantia PT , tum corporis S vis absoluta, ut ST cub. reciproce; sint autem vires illæ NM , ML causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præcedentibus

dentibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, stante corporum T & P Systemate, & mutatis tantum distantia ST & vi absoluta corporis S , sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis S & ratione triplicata inversa distantiae ST . Unde si Systema corporum T & P revolvatur circa corpus longinquum S , vires illæ NM , ML & earum effectus erunt, (per Corol. 2. & 6. Prop. iv.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, si magnitudo corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ NM , ML & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S e corpore T spectati, & vice versa. Namque hæ rationes eadem sunt atque ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium ESE & PAB forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum S & T vel maneant vel mutantur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est, vis corporis T qua corpus P de recto tramite in Orbitam PAB deflectere, & vis corporis S qua corpus idem P de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.



Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutantur utcumque corporum magnitudines, vires & distantiae; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires NM , ML , cæteris stantibus, sunt ut Radius TP , & harum effectus periodici (per Cor. 2. Lem. x.) ut vires & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P ; & hinc errores angulares e centro T spectati (id est, tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in Longitudinem & Latitudinem errores apparentes) sunt, in qualibet revolutione corporis P , ut quadratum temporis

agendo, propius accedent ad corpus T , & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis S , quam in Quadraturis. Et Nodi Annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis S vel T , quiescent in Syzygiis, extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

LIBER
PRIMUS.

Corol. 19. Fingas jam Globum corporis T , ex materia non fluida constantem, ampliari & extendi usque ad hunc Annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Corollario) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo resluetque ad modum Maris. Aqua revolvens circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S nullum acquireret motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5.) ut & Globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, per Legum Corol. 6. Accedat autem corpus S , & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad Syzygias; & vis KL trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad Quadraturas.

Corol. 20. Si Annulus jam rigeat & minuat Globus, cessabit motus fluendi & refluendi; sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum Annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbiati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impressum usque dum Annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac
ratione

DE MOTU ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in Quadraturis
CORPORUM Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus poſt
 Quadraturas; dein maximus reclinacionis motus in Syzygiis, &
 maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Glo-
 bi Annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo
 quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet
 enim vicem Annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus.
 Et quanquam, aucta utcunq; Globi hujus vi centripeta, tendere
 ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium
 partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corol-
 larii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem
 redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo per hujus in-
 crementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminui-
 tur & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tol-
 latur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur
 vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſe-
 quentia.

Corol. 22. Et inde viciffim, ex motu Nodorum innotefcit con-
 ſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eorſdem conſtanter ſervat,
 & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat;
 ſi in conſequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte
 circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocun-
 que oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde
 concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Glo-
 bus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter
 ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum,
 quam in alium quemvis; perſpicuum eſt quod iſtæ axem ſuum axif-
 que inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam
 Globus oblique, in eadem illa ſuperficie parte qua prius, impulſu
 quocunq; novo; & cum citior vel ſerius impulſus effectum nil
 mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi
 eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt,
 eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroque (per Legum Corol. 2.)
 compoſita impulſus fuiſſet, atque adeo ſimplicem, circa axem in-
 clinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in lo-
 cum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus pri-
 mi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſe-
 cundus abſque primo generaret; atque adeo impulſuum amborum
 factorum in loca quæcunq; Generabunt hi eundem motum cir-
 cularem

cularem ac si simul & semel in locum interfectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratuſ semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea Globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Casu (per Corol. 21.) Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per Corol. 20.) Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæc nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

LIBER
PRIMUS.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorem P, T commune gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis S attractiones versus T & P componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum C, quam in corpus maximum T, quæque quadrato distantiae SC magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiae ST: ut rem perpendenti facile constabit.

Y

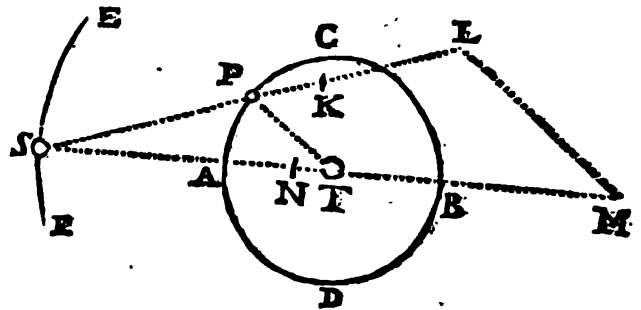
PRO-

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P & T commune gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.

Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus S conjunctis viribus

urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus S ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII collatum cum demonstratis in Proposit. LXIV & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium S attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio ubi commune trium centrum quiescit, hoc est, ubi corpus intimum & maximum T lege cæterorum attrahitur: fitque major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis T, moveri incipit & magis deinceps magis que agitur.



Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agitentque, & Orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus Orbitalium omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In Systemate corporum plurium A, B, C, D, &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt Absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B, C, D* versus *A*, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur ex Hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiiis; & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æqua-

DE MOTU
CORPORUM

les. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora *A, B, C, D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A, B, C, D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum Legem quamcunque communem ex distantiiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsis umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per *Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.*

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem Attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem; sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per Spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris, aut Aeris, Mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem Impulsus, non species virium &

& qualitates Physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. LIBER PRIMUS.
 In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positæ consequentur: deinde, ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus Physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

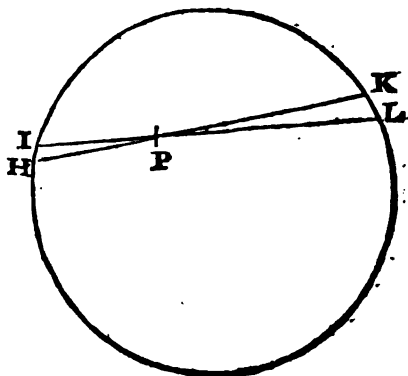
S E C T I O XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad Sphæricæ superficiæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit $HIKL$ superficies illa Sphærica, & P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK, IL , arcus quam minimos HI, KL intercipientes; & ob triângula HPI, LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantis HP, LP proportionales; & superficiæ Sphæricæ particulæ quævis ad HI & KL , rectis per punctum P tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata



illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directæ & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem

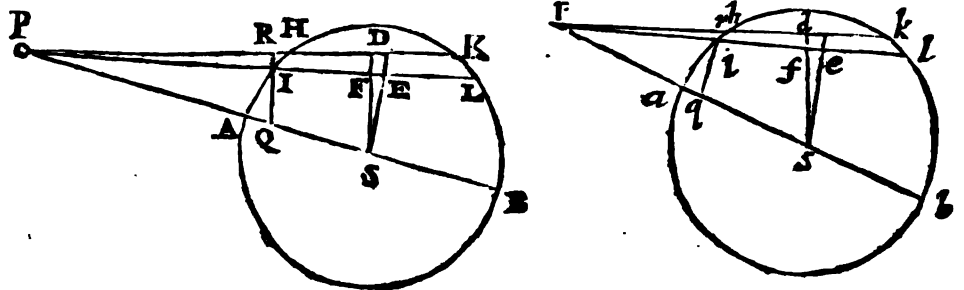
De Motu
CORPORUM

æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphære, vi reciproce proportionali quadrato distantie sue ab eodem centro.

Sint $AHKB$, $abkb$ æquales duæ superficies Sphæricæ, centris S, s , diametris AB, ab descriptæ, & P, p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ



PHK, PIL, pbk, pil , auferentes a circulis maximis AHB, abb , æquales arcus HK, bk & IL, il : Et ad eas demittantur perpendiculara $SD, sd; SE, se; IR, ir$, quorum SD, sd secent PL, pl in F & f : Demittantur etiam ad diametros perpendiculara IQ, iq . Evanescant anguli DPE, dpe : & (ob æquales DS, ds, ES & es ,) lineæ PE, PF & pe, pf & lineolæ DF, df pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, dpe simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit PI , ad PF , ut RI ad DF , & pf , ad pi , ut df , vel DF ad ri ; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI , ad ri , hoc est (per Corol. 3. Lem. vii,) ut arcus IH ad arcum ib . Rursus PI , ad PS ut IQ ad SE , & ps ad pi ut se vel SE ad iq ; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq . Et conjunctis rationibus. PI quad. $\times pf \times ps$ ad pi quad. $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ib \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam

arcus

arcus IH convolutione semicirculi AKB circa diametrum AB describet, ad superficiem circulem, quam arcus ib convolutione semicirculi akb circa diametrum ab describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P & p , sunt (per Hypothesin) ut ipsæ superficies applicatæ ad quadrata distantiarum suarum a corporibus, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas PS , ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ , & pi ad pq ; id est (ob similia triangula PIQ & PSF , piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf . Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s , ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad

$\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc est, ut ps quad. ad PS quad. Et simili argu-

mento vires, quibus superficies convolutione arcuum KL , kl descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut ps quad. ad PS quad.; inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies Sphærica, capiendo semper sd æqualem SD & se æqualem SE , distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad Sphærae cujuscvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, ac detur tum Sphærae densitas, tum ratio diametri Sphærae ad distantiam corpusculi a centro ejus; dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semidiametro Sphærae.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & distans eorum a Sphærarum centris proportionales esse diametris Sphærarum respective, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphærae unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphærae alterius, in ratione composita ex ratione particularum directæ & ratione duplicata distantiarum in-

verse

DE MOTU verſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt., in ratione triplica-
CORPORUM ta diametrõrum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior direc-
 te una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad dia-
 metrum *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpuscula in Circulis, circa Sphæræ ex mate-
 ria æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ
 a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora
 periodica erunt æqualia.

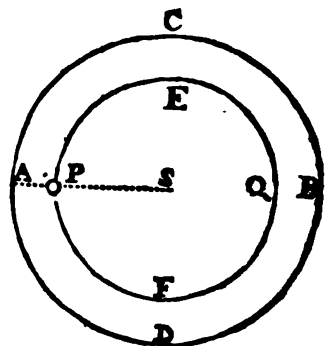
Corol. 2. Et vice verſa, ſi Tempora periodica ſunt æqualia; di-
 ſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Co-
 rol. 3. Prop. iv.

Corol. 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis ſimilium & æqua-
 liter denſorum puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ de-
 crescentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: vires quibus
 corpuscula, ad Solida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iisdem,
 erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

*Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales
 vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtan-
 tiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram
 conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab
 ipſius centro.*

In Sphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta,
 locetur corpusculum *P*; & centro eodem *S*,
 intervallo *SP*, concipe Sphæram interiorem
PEQF deſcribi. Maniſteſtum eſt, per Prop.
 LXX. quod Sphæricæ ſuperficiæ concentricæ
 ex quibus Sphærarum differentia *AEBF*
 componitur, attractionibus per attractiones
 contrarias deſtructis, nil agunt in corpus
P. Reſtat ſola attractio Sphære interioris
PEQF. Et per Prop. LXXII. hæc eſt ut di-
 ſtantiæ *PS*. *Q. E. D.*



Scholium.

Superficiæ ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure
 Mathematicæ, ſed Orbis adeo tenues ut eorum craſſitudo inſtar
 nihili

nihili sit; nimirum Orbis evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Isdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantie corpusculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in Sphæram totam, in eadem ratione.

Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphæræ. Nam per Prop. LXXII, si distantie sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione; &, distantis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est, in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantis quibusvis attractiones sunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra Sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantie a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad Sphæra datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia similis ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantie suæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV.) & prop-

DE MOTU
CORPORUM terea eadem est ac si vis tota attrahens maneret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato distantiae suæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

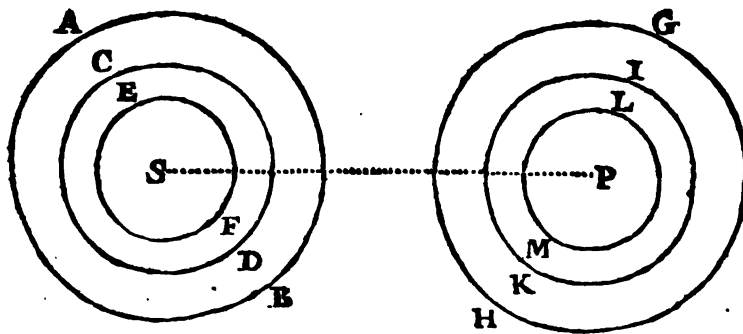
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcumque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similes, & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiae corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantiae centrorum.

Sunto Sphæræ quotcumque concentricæ similes *AB, CD, EF,* &c. quarum interiores additæ exterioribus component materiæ densiorem

denfioſorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuioſorem; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent Sphæras alias quotcunq; concentricas ſimilares GH , IK , LM , &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ SP . Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis quas Sphæra tota ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſita AB , trahit totam ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſitam GH , erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunq; creſcat vel decreſcat: &, addita materia



non attractiva, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphære acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphære complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut Sphære attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphære attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum intra centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut Sphære attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata diſtantiarum inter centra.

DE MOTU
CORPORUM

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintque distantiz inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiz erunt proportionales diametris.

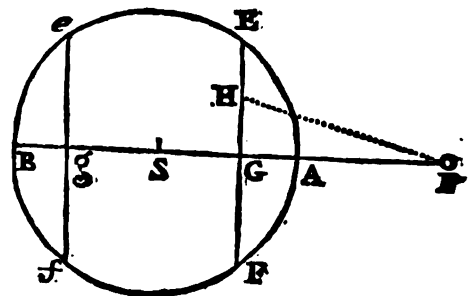
Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales distantiz punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæra due se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.

Cas. 1. Sit $AEBF$ Sphæra, S centrum ejus, P corpusculum attractum, $PASB$ axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, EF , ef plana duo quibus Sphæra fecatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; G , g intersectiones planorum & axis, & H punctum quodvis in plano EF . Puncti H vis centripeta in corpusculum P , secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH ; & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam PG , seu versus centrum S , ut longitudo PG . Igitur punctorum omnium in plano EF , hoc est plani totius vis, qua corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut numerus punctorum ductus in distantiam PG : id est, ut contentum sub plano ipso EF & distantia illa PG . Et similiter vis plani ef , qua corpusculum P



trahitur

trahitur versus centrum S , est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg , sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg ; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS , hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS , vel ut summa æqualium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphære distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS , hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui S a corpusculo P . *Q. E. D.*

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P Sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS . *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris P ; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphære primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphære; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphære primæ, & propterea proportionalis est distantie inter centra Sphærarum. *Q. E. D.*

Cas. 4. Trahant Sphære se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q. E. D.*

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra Sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia pg ; & vis contraria plani EF ut contentum sub plano illo & distantia pG ; erit vis ex utraque composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentie distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphære. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in Sphæra tota, hoc est, attractio Sphære totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphære. *Q. E. D.*

Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex Sphære unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum pS . *Q. E. D.*

DE MOTU
CORPORUM

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Si Sphære in progressu a centro ad circumferentiam sint ut-
cunque dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per
circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undi-
que similes; & vis attractiva puncti cujusque sit ut di-
stantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmo-
di Sphære duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distan-
tiæ inter centra Sphærarum.*

Demonstratur ex Propositione præcedente, eodem modo quo
Propositio LXXVI ex Propositione LXXV demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus x & LXIV de motu cor-
porum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt, valent
ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum conditionis
jam descriptæ, suntque corpora attracta Sphære conditionis ejus-
dem.

Scholium.

Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expositos; nimi-
rum ubi Vires centripetæ decrescunt in duplicata distantiarum ra-
tione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in
utroque Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & com-
ponentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege,
in recessu a centro, decrescunt vel crescunt cum seipsis: Quod
est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegan-
tes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos
methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

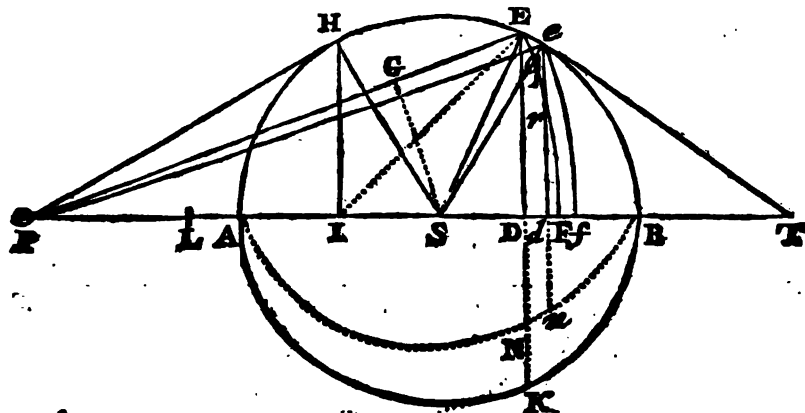
L E M M A XXIX.

*Si describantur centro S circulus quilibet AEB, & centro P
circuli duo EF, e f, secantes priorem in E, e, lineam-
que PS in F, f; & ad PS demittantur perpendiculara ED,
ed: dico quod, si distantia arcuum EF, ef in infinitum
minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis Dd ad
lineam evanescentem Ff ea sit, quæ lineæ PE ad lineam
PS.*

Nam

Nam si linea $P e$ fecerit arcum $E F$ in q ; & recta $E e$, quæ cum arcu evanescente $E e$ coincidit, producta occurrat rectæ $P S$ in T ; & ab S demittatur in $P E$ normalis $S G$: ob similia triangula $D T E$, $d T e$, $D E S$; erit $D d$ ad $E e$, ut $D T$ ad $T E$, seu $D E$ ad $E S$;

LIBER PRIMUS.



& ob triangula $E e q$, $E S G$ (per Lem. viii, & Corol. 3. Lem. vii.) similia, erit $E e$ ad $e q$ seu $F f$, ut $E S$ ad $S G$; & ex æquo, $D d$ ad $F f$ ut $D E$ ad $S G$; hoc est (ob similia triangula $P D E$, $P G S$) ut $P E$ ad $P S$. Q. E. D.

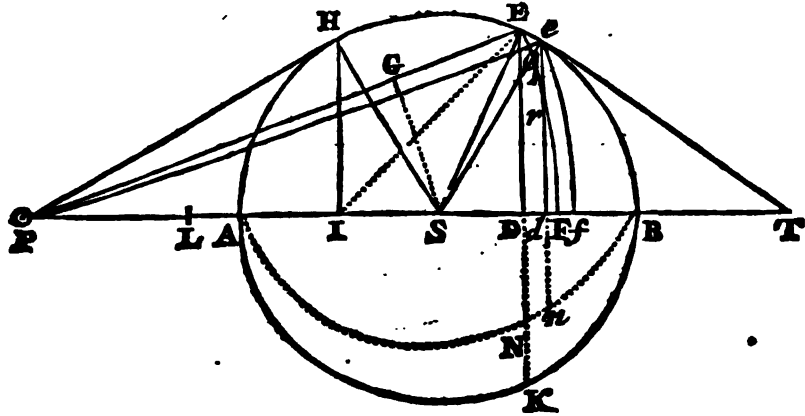
PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescentem $E F f e$, convolutione sui circa axem $P S$, describat solidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: diso quod V is, qua solidum illud trahit corpusculum situm in P , est in ratione composita ex ratione solidi $D E q \times F f$ & ratione vis qua particula data in loco $F f$ traheret idem corpusculum.

Nam si primo consideremus vim superficiæ Sphæricæ $F E$, quæ convolutione arcus $F E$ generatur, & a linea $d e$ ubivis secatur in r ; erit superficiæ pars annularis, convolutione arcus $r E$ genita, ut lineola $D d$, manente Sphære radio $P E$, (uti demonstravit Archimedes in Lib. de Sphæra & Cylindro.) Et hujus vis secundum lineas $P E$ vel $P r$ undique in superficie conica fitas exercita, ut hæc ipsa superficiæ pars annularis; hoc est, ut lineola $D d$ vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato Sphære radio $P E$ & lineola

DE MOTU
CORPORUM

lineola illa Dd : at secundum lineam PS ad centrum S tendentem minor, in ratione PD ad PE , adeoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur Dd ; & superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, adeoque ut DE quad. Ducatur



jam superficies FE in altitudinem Ff & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantia PF exercet in corpusculum P . At si vis illa non detur, fiet vis solidi $EFfe$ ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad Sphæræ alicujus ABE, centro S descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem AB, in quo corpusculum aliquod P locatur, erigantur de punctis singulis D perpendiculara DE, Sphæræ occurrentia in E, & in ipsis capiantur longitudines DN, quæ sint ut quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis quam

Sphæræ particula sita in axe ad distantiam PE exercet in corpusculum P conjunctim: dico quod Vis tota, qua corpusculum P trahitur versus Sphæræ, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ AB & linea curva ANB, quam punctum N perpetuo tangit.

Etenim

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd , & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$, & erigatur perpendiculum dn . Per Theorema superius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpusculum P est ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem per Lemma novissimum, Dd ad Ff ut PE ad PS , & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpusculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$: erit vis qua corpusculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantie corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$: erit vis qua corpusculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas V , fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpusculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

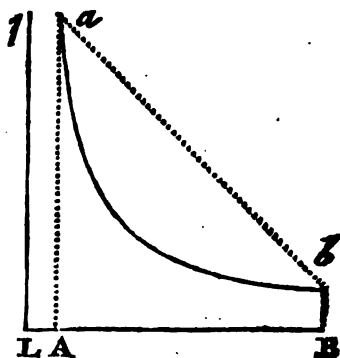
Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam PE ; dein $2PS \times LD$ pro PEq , & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2} LD - \frac{ALB}{2LD}$.

Pone DN æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD , describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ

subducta de area priorè $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$.

Pars autem tertiâ $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem norma-

liter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam, quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendiculara Ll, Aa, Bb , quorum Aa ipsi LB , & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB , per puncta a, b describatur Hyperbola ab . Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE cub.}{2ASq}$ pro V ,

dein $2PS \times LD$ pro PEq ; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS}$,

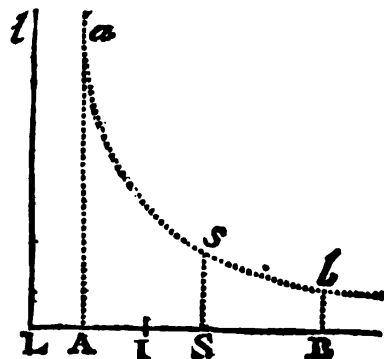
$\frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id est (ob continue proportionales PS, AS, SI)

ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2} SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in

longitudinem AB , prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperboli-

DE MOTU
CORPORUM cam; secunda $\frac{1}{2} SI$ aream $\frac{1}{2} AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ are-
am $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2} AB \times SI$. De prima sub-

ducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsitæ $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendiculara Ll, Aa, Ss, Bb , quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum s Asymptotis Ll, LB describatur Hyperbola asb occurrens perpendicularis Aa, Bb in a & b ; & rectangulum $2 ASI$ subductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphæræ particulas tendens, decrefcit in quadruplicata ratione distantiae a particulis; fcribe $\frac{PEqq}{2AScub.}$ pro V , dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE , & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDC}}$, $-\frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}}$, $-\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB , producant areas totidem, viz. $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$, $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LAcub.}} - \frac{1}{\sqrt{LBCub.}}$. Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq , & $SIq + \frac{2SIcub.}{3LI}$. Hæ vero subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SIcub.}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpusculum P in Sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SIcub.}{PI}$ id est, reciproce ut $PS cub. \times PI$. *Q. E. I.*

Eadem Methodo determinari potest Attractio corpusculi fiti intra Sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.

DE MOTU cem ut SP quad. ad SA quad: Si in quadruplicata, ut SP cub. ad
CORPORUM SA cub. Unde cum attractio in P , in hoc ultimo casu, inventa
 fuit reciproce ut PS cub. $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut
 SA cub. $\times PI$, id est (ob datum SA cub.) reciproce ut PI . Et
 similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstra-
 tur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco
 quovis P , ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$.
 Ergo si agatur IE , ordinata illa ad alium quemvis locum I , mu-
 tatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone virés centripetas, e
 Sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiiis
 IE , PE , ut PE^n ad IE^n , (ubi numerus n designet indicem
 potestatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ &
 $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad
 $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula SPE , SEI , fit
 IE ad PE ut IS ad SE vel SA ; pro ratione IE ad PE scribe
 rationem IS ad SA ; & ordinarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad
 $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum
 PS , SI ; & IE^n ad PE^n subduplicata est ratio virium in distan-
 tiis PS , IS . Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ de-
 scribunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione com-
 posita ex subduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

*Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad
 ejus Segmentum quodcunque attrahitur.*

Sit P corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ Segmentum ejus
 plano RDS & superficie Sphærica RBS contentum. Superficie
 Sphærica EFG centro P descripta secetur DB in F , ac distin-
 guatur Segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit
 autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, pro-
 funditatem habens quam minimam. Nominetur ista profundi-
 tas O ,

tas O , & erit hæc superficies (per demonstrata *Archimedis*) ut $P F \times D F \times O$.
 Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ esse reciproce ut distantiarum dignitas illa cujus Index est n ; & vis qua superficies $F E$ trahit corpus P erit ut $\frac{D F \times O}{P F^{n-1}}$. Huic proportionale sit perpendiculum $F N$ ductum in O ; & area curvilinea $B D L I B$, quam ordinatim applicata $F N$ in longitudinem $D B$ per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua Segmentum totum $R B S D$ trahit corpus P . *Q. E. I.*

RA



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim qua corpusculum, extra centrum Sphæræ in axe Segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem Segmento.

A Segmento $E B K$ trahatur corpus P (Vide Fig. Prop. LXXIX, LXXX, LXXXI.) in ejus axe $A D B$ locatum. Centro P intervallo $P E$ describatur superficies Sphærica $E F K$, qua distinguatur Segmentum in partes duas $E B K F$ & $E F K D$. Quærat^r vis partis prioris per Prop. LXXXI, & vis partis posterioris per Prop. LXXXIII; & summa virium erit vis Segmenti totius $E B K D$. *Q. E. I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad Leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus Philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SECTIO.

S E C T I O XIII.



De Corporum non Sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiae attracti corporis a centro Sphære, haud sensibilibiter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decreseat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusque Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus Figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis xli, in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema xli inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra Orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia equaliter attractiva constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia, & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis
B b
cujusvis

DE MOTU
CORPORUM

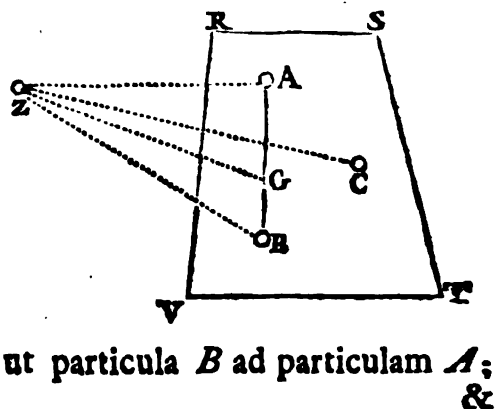
cujusvis distantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut $A \text{ cub.}$ & $B \text{ cub.}$ adeoque tum corporum latera cubica tum corpusculorum attractorum distantiz a corporibus, ut A & B : attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$ id est, ut corporum latera illa cubica A & B . Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$ id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ qq.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ qq.}}$ id est, reciproce ut latera cubica A & B . Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti: si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum equalium Corporis cujuscunque vires attractive sint ut distantie locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi Globi ex materia consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis $RSTV$ particulæ A , B trahant corpusculum aliquod Z viribus quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiz AZ , BZ ; sin particulæ stantur inæquales, sint ut hæ particulæ in distantias suas AZ , BZ respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB , & secetur ea in G ut sit AG ad BG ut particula B ad particulam A ;



& erit G commune centrum gravitatis particularum A & B . Vis $A \times AZ$ (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$ & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG , æquantur; adeoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G , & vim $\overline{A+B} \times GZ$ component; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G , Globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C , & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G ; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C ; & eadem erit ac si Globus & particula C consisterent in centro illo communi, Globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$ ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram Globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac si corpus attrahens $RSTV$ esset Sphericum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si Corpora sint plura ex particulis equalibus constantia, quarum vires sunt ut distantie locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in Globum formarentur.

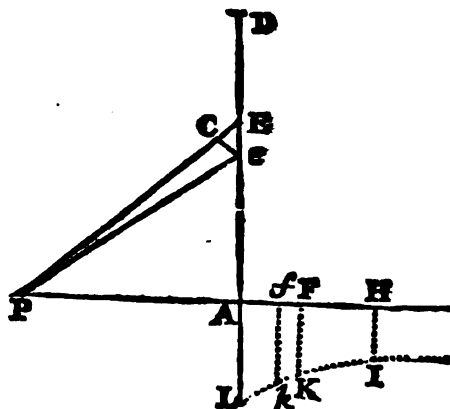
Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in Globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta: corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula Circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in quacunque diſtantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubivis poſitum in recta que plano Circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.

Centro A intervallo quovis AD , in plano cui recta AP perpendicularis est, describi intelligatur Circulus; & invenienda sit vis qua corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A Circuli puncto quovis E ad corpusculum attractum P agatur recta PE : In recta PA capiatur PF ipsi PE æqualis, & erigatur normalis FK , quæ sit ut vis qua punctum E trahit corpusculum P . Sitque IKL curva linea quam punctum K perpetuo tangit. Occurrat eadem Circuli plano in L . In PA capiatur PH æqualis PD , & erigatur perpendicularum HI curvæ prædictæ occurrens in I ; & erit corpusculi P attractio in Circulo ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP . Q. E. I.



Etenim in AE capiatur linea quam minima Ee . Jungatur Pe ; & in PE , PA capiuntur PC , Pf ipsi Pe æquales. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis E trahit ad se corpus P , ponitur esse ut FK , & inde vis qua punctum illud trahit corpus P versus A est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus P versus A ,

ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee , & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE , Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus P versus A , ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP . Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in Circulo, qui centro A & intervallo

tervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A , est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP . *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF \text{ quad.}}$, atque adeo area

$AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

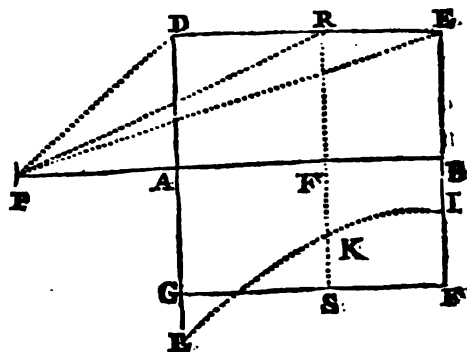
Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n , hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{1}{PH^{n-2}}$.

Corol. 3. Et si diameter Circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2} , propterea quod terminus alter $\frac{1}{PH^{n-2}}$ evanescet.

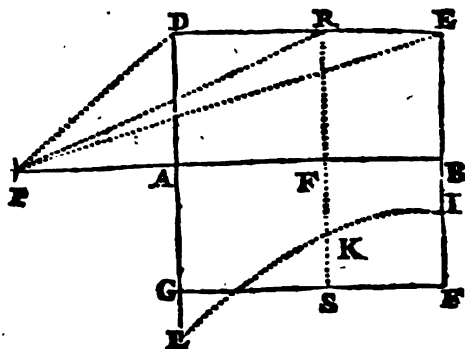
PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe Solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ: in quacunque distantiarum ratione decrescentes.

In Solidum $ADEFG$ trahatur corpusculum P , situm in ejus axe AB . Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc Solidum, & in ejus diametro FS , in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiat (per Prop. xc.) longitudo FK vi qua corpusculum P in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI , planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I ; & erit attractio corpusculi P in Solidum ut area $LABI$. *Q. E. I.*



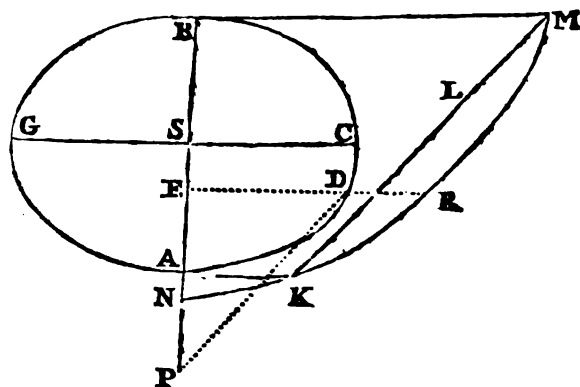
DE MOTU CORPORUM *Corol. 1.* Unde si Solidum Cylindrus sit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revolutus descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi P in hunc Cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK



(per *Corol. 1. Prop. xc.*) erit ut $\frac{PF}{PR}$. Hujus pars $\frac{1}{2}$ ducta in

longitudinem AB , describit aream $\frac{1}{2} \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB , describit aream $\frac{1}{2}$ in $PE - AD$ (id quod ex curvæ LIK quadratura facile ostendi potest:) & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream $\frac{1}{2}$ in $PD - AD$, ductaque in ipsarum PB, PA differentiam AB describit arearum differentiam $\frac{1}{2}$ in $PE - PD$. De contento primo $\frac{1}{2} \times AB$ auferatur contentum postremum $\frac{1}{2}$ in $PE - PD$, & restabit area $LABI$ æqualis $\frac{1}{2}$ in $AB - PE + PD$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$.

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit qua Sphæroidis $AGBCD$ attrahit corpus quodvis P , exterius in axe suo AB situm. Sit $NKRM$ Sectio Conica cujus ordinatim applicata ER , ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD , quæ ducitur ad punctum illud D , in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendiculara AK, BM ipsis AP, BP æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in K & M ; & jungatur KM auferens ab eadem segmentum $KMRK$. Sit autem Sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC : & vis

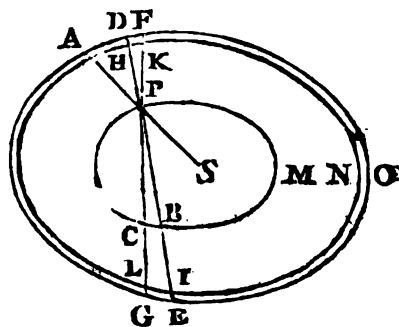


qua

qua Sphærois trahit corpus P erit ad vim qua Sphæra, diametro AB LIBER
 descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ PRIMUS.

ad $\frac{AS \text{ cub.}}{3PSquad}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem, in data quavis ejusdem diametro, collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, S centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA , tum rectæ duæ quævis DE, FG Sphæroidi hinc inde occurrentes in D & E, F & G : Sintque PCM, HLN superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus P & secet rectas DE & FG in B & C , posterior secet easdem rectas in H, I & K, L . Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt



rectarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, FP & CG, DH & IE, FK & LG sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ DE, PB & HI bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC & KL . Concipe jam DPF, EPG designare Conos oppositos, angulis verticalibus DPF, EPG infinite parvis descriptos, & lineas etiam DH, EI infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ $DHKF, GLIE$, ob æqualitatem linearum DH, EI , erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo P , & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia $DPF, EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires Coni DPF & segmenti Conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P a sola Sphæroide intima $PCBM$, & propterea (per *Corol. 3. Prop. LXXII.*) attractio ejus est ad vim, qua corpus A trahitur a Sphæroide tota $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS . Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLVI.

Dato Corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

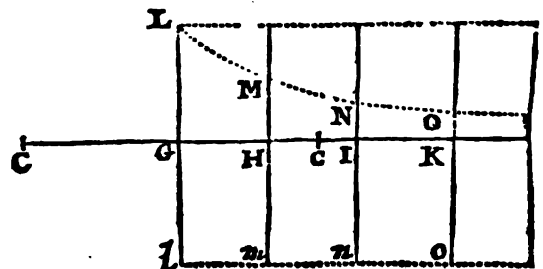
E Corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis. cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI, & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis equalibus equaliter attractivis, quarum vires in recessu a Solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod Solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit LG planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus versus L , inque plana innumera mHM , nIN , &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra Solidum.

Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum Solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sic numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. xc.)



vis qua planum quodvis mHM trahit punctum C est reciproce ut CH^{n-2} . In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM . Similiter in planis singulis IGL, nIN, oKO , &c. capiantur longitudines GL, IN, KO , &c. ipsis $CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}$, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis Solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciproce ut CG^{n-1} , & propterea vis Solidi totius est reciproce ut CG^{n-1} . *Q. E. D.*

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani IGL intra Solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiæ CG . Et Solidi pars $LGIOKO$, planis parallelis IGL, oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum C sola vi Solidi ultra planum OK siti trahitur. Hæc autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-1} , hoc est (ob æquales CG, CK) reciproce ut CG^{n-1} . *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si Solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva Solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NICO$, in infinitum versus KO productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decreset quam proxime in ratione potestatis CG^{n-1} .

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decreset quamproxime in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis citerioris.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quærat motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. xxxix.) motum corporis recta descendens ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas factæ. Et contra, si quærat Lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, solvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in Series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quærat vis qua corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curva linea quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem augeri parte

quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ resolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m(m-n)}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{m(m-n)}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est

igitur vis quæsitæ ut $\frac{m(m-n)}{2n} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut

$\frac{m(m-n)}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat,

existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2 B^0$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum Galileus demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2 A^{-1}$ seu $2 B^1$: adeoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de Motu, quas nondum attingi.

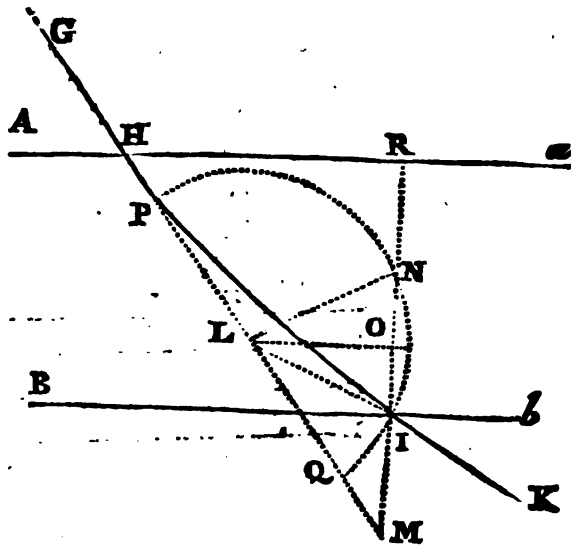
S E C T I O XIV.

De Motu corporum minimorum, quae Viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si Media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus Medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur: Sit autem attractio, in equalibus ab utroque plano distantis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiae in planum alterutrum erit ad sinum emergentiae ex plano altero in ratione data.

Cas. I. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa secundum lineam GH , ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus Medium incidentiae, eaque actione describat lineam curvam HI , & emergat secundum lineam IK . Ad planum emergentiae Bb erigatur perpendicularum IM , occurrens tum lineae incidentiae GH productae in M , tum plano incidentiae Aa in R ; & linea emergentiae KI producta occurrat HM in L . Centro L intervallo LI describatur Circulus,



secans
Cc 2

singulis separatim uniformis, ac in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad sinus emergentiæ ex plano secundo Bb , in data ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum Bb , erit ad sinus emergentiæ ex plano tertio Cc , in data ratione; & hic sinus ad sinus emergentiæ ex plano quarto Dd , in data ratione; & sic in infinitum: & ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinus emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinus emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

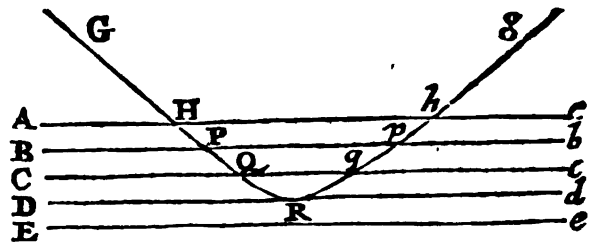
Esdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinus incidentiæ.

Capiantur AH, Id æquales, & erigantur perpendiculara AG, dK occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK , in G & K . In GH capiatur TH æqualis IK , & ad planum Aa demittatur normaliter Tv . Et (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum planis Aa, Bb, Cc , &c. perpendiculararem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam AG & punctum H , interque punctum I & lineam dK ; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas GH, IK . Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut GH ad IK vel TH , id est, ut AH vel Id ad vH , hoc est (respectu radii TH vel IK) ut sinus emergentiæ ad sinus incidentiæ. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana $Aa, Bb, Cc, &c.$ describere arcus Parabolicos, ut supra; sintque arcus illi $HP, PQ, QR, &c.$ Et sit ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum Aa , ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cuius est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano Dd , in spatium $DdeE$: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoque linea emergentiæ coincidit cum plano Dd . Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R ; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum Ee . Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ Rd , propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus Medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana Cc, Dd , describendo arcum Parabolæ QRq , cuius vertex principalis (juxta demonstrata Galilei) est in R ; secabit planum Cc in eodem angulo in q , ac prius in Q ; dein pergendo in arcubus parabolicis $qp, pb, &c.$ arcubus prioribus QP, PH similibus & æqualibus secabit reliqua plana in iisdem angulis in $p, b, &c.$ ac prius in $P, H, &c.$ emergentque tandem eadem obliquitate in b , qua incidit in H . Concipe jam planorum $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c.$ intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

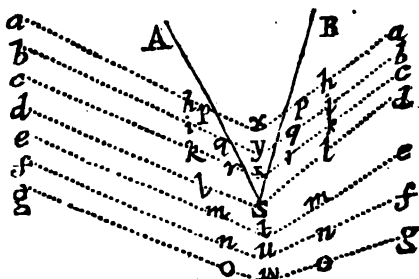


Scholium.

Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque Lucem successive propagari & spatio quasi septem vel octo minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosam cubiculum admissa, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cuforum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem: & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi.

In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *qowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsl d*, sunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in



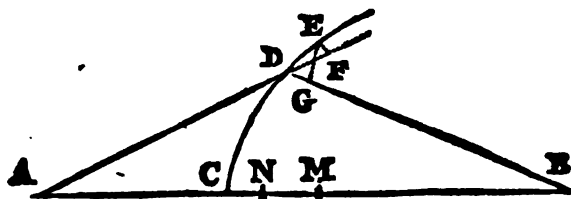
aere extra cultrum, debent etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refraction, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxba* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *b* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus Opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed Trajectorias corporum Trajectoriis radiorum perfimiles solummodo determinans.

PROPO.

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad finem emergentiæ in data ratione, quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus a quo corpuscula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta describat superficiem quæsitam; D, E curvæ illius puncta duo quævis; & EF, EG perpendicula in corporis vias AD, DB demissa. Accedat punctum D ad punctum E ; & lineæ DF qua AD augetur, ad lineam DG qua DB diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad finem emergentiæ. Datur ergo ratio in-

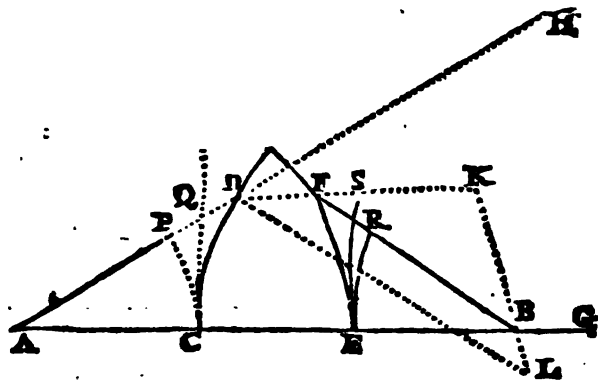


crementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB ; & propterea si in axe AB sumatur ubivis punctum C , per quod curva CDE transire debet, & capiatur ipsius AC incrementum CM , ad ipsius BC decrementum CN in data illa ratione; centrisque A, B , & intervallis AM, BN describantur circuli duo se mutuo secantes in D : punctum illud D tanget curvam quæsitam CDE , eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C , habebuntur Figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in *Optica* & *Geometria* ad *Refractiones* exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hac propositione exponere.

Corol.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis CD , secundum lineam rectam AD lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam DK , & a puncto C duci intelligantur Lineæ curvæ CP , CQ ipsis AD DK semper perpendiculares: erunt incrementa linearum PD , QD , atque adeo lineæ ipsæ PD , QD , incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB descripta superficie quacunq; attractiva CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta AB secet superficiem primam in C & secundam in E ; puncto D utcumque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficiem secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N ; produc tum AB ad G ut sit BG ad CE ut MN ad N , tum AD ad H ut sit AH æqualis AG , tum etiam DF ad K ut sit DK ad DH ut N ad M . Junge KB , & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB , productæ in L , ipsique DL parallelam age BF : & punctum F tanget lineam EF , quæ circa axem AB revoluta describet superficiem quæsitam. *Q. E. F.*

Nam concipe Lineas CP , CQ ipsis AD , DF respective, & Lineas ER , ES ipsis FB , FD ubique perpendiculares esse, adeoque QS ipsi CE semper æqualem; & erit (per *Corol. 2. Prop. xcviij.*) PD ad QD ut $MadN$, adeoque ut DL ad DK vel FB ad FK ;

MOTU CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

SECTION I.

*De Motu Corporum quibus resistitur in ratione
Velocitatis.*

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resis-
tencia amissus est ut spatium movendo confectum.*

NAm cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc est, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si corpus, gravitate omni destitutum, in spatiis liberis sola vi insita moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

LEMMA I.

*Quantitates differentiis suis proportionales, sunt continue
proportionales.*

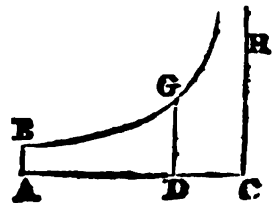
Sit A ad A-B ut B ad B-C & C ad C-D, &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

Si Corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem sola vi insita per Medium simile moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressionem Geometricam, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulso unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. 1. Lib. 11.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quolibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressionem continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressionem Geometricam. Minuantur jam æquales illæ temporum particule, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam casu continue proportionales. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. 1. Lib. 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si Asymptotis rectangulis ADC , CH describatur Hyperbola BG , sintque AB , DG ad Asymptoton AC perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam AC , elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam DC : exponi potest tempus per aream $ABGD$, & spatium eo tempore descriptum per lineam AD . Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum tempo-



ris, decreſcet recta DC in ratione Geometrica ad modum veloci- LIBER
tatis, & partes rectæ AC æqualibus temporibus deſcriptæ decreſ- SECUNDUS
cent in eadem ratione.

PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

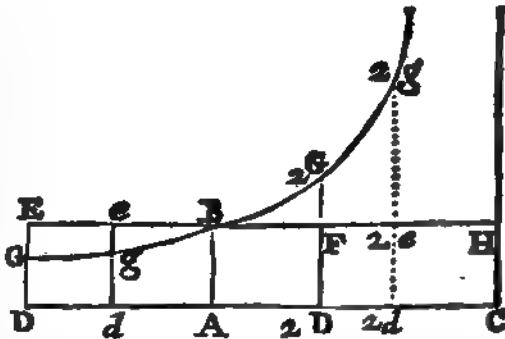
Corporis, cui dum in Medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, deſignare motum.

Corpore aſcendente, expo-
natur gravitas per datum quod-
vis rectangulum BC , & reſi-
ſtencia Medii initio aſcensus per
rectangulum BD ſumptum ad
contrarias partes. Aſymptotis
rectangulis AC, CH , per punc-
tum B deſcribatur Hyperbola
ſecans perpendiculara DE, de in
 G, g ; & corpus aſcendendo,
tempore $D G g d$, deſcribet ſpatium $EG g e$, tempore $D G B A$
ſpatium aſcensus totius $E G B$; tempore $A B 2 G 2 D$ ſpatium de-
ſcensus $B F 2 G$, atque tempore $2 D 2 G 2 g 2 d$ ſpatium deſcensus
 $2 G F 2 e 2 g$; & velocitates corporis (reſiſtencia Medii proportio-
nales) in horum temporum periodis erunt $A B E D, A B e d$, nulla,
 $A B F 2 D, A B 2 e 2 d$ reſpective; atque maxima velocitas, quam
corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit $B C$.

Reſolvatur enim rectan-
gulum AH in rectangula
innumera Ak, Kl, Lm, Mn ,
&c. quæ ſint ut incrementa
velocitatum æqualibus tot-
idem temporibus facta; &
erunt nihil, Ak, Al, Am, An ,
&c. ut velocitates totæ, at-
que adeo (per Hypotheſin)
ut reſiſtencia Medii princi-
pio ſingulorum temporum
æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gra-
vitatæ ad reſiſtencia in principio temporis ſecundæ, deque vi gravi-
tatis

Dd 3

tatis



De Motu
CORPORUM

tatis subducantur resistentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $NnHC$, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque adeo (per motus Legem 11) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak , Kl , Lm , Mn , &c; & propterea (per Lem. 1. Lib. 11.) in progressionem Geometricam. Quare si rectæ Kk , Ll , Mm , Nn , &c. productæ occurrant Hyperbolæ in q , r , s , t , &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$, &c. æquales, adeoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area $ABqK$ (per Corol. 3. Lem. VII & Lem. VIII. Lib. 1.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ seu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ $qKlr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. sunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales $BAKq$, $qKlr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ Bkq , $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per Hypothesin) velocitatibus, atque adeo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt areæ Bkq , Blr , Bms , Bnt , &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis $ABrL$, describit spatium Blr , & tempore $LrtN$ spatium $rlnt$. *Q. E. D.* Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad vim resistentiæ qua in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressionem Arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu (atque etiam earundem differentia in descensu) decrescit in progressionem Geometricam.

Corol. 3. Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressionem Geometricam.

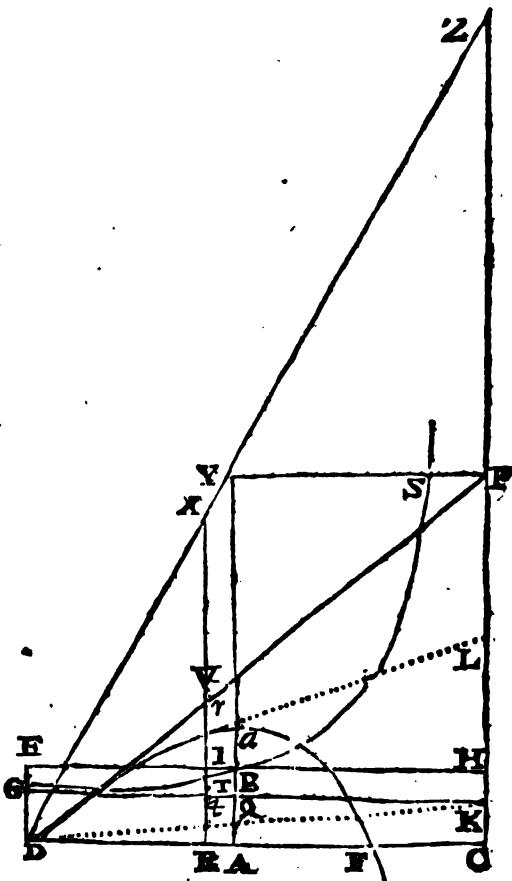
Corol.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis in eodem, resistantiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis *D* egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam Horizontalem *DC* demittatur perpendicularum *PC*, & secetur *DC* in *A* ut sit *DA* ad *AC* ut resistantia Medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistantia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC*, *CP*, describatur Hyperbola quævis *GTBS* secans perpendiculara *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* secet *AB* in *Q*. Capiatur linea *N* in ratione ad *QB* qua *DC* sit ad *CP*, & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendicularulo *RT*, quod Hyperbolæ in *T*, & rectis *EH*, *GK*, *DP*



in *I*, & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde

DE MOTU
CORPORUM

inde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & Projectile tempore \mathcal{DRTG}

perveniet ad punctum r , describens curvam lineam \mathcal{DraF} , quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendicularo AB , & postea semper appropinquans ad Asymptoton PLC . Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL . *Q. E. I.*

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV , adeoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$)

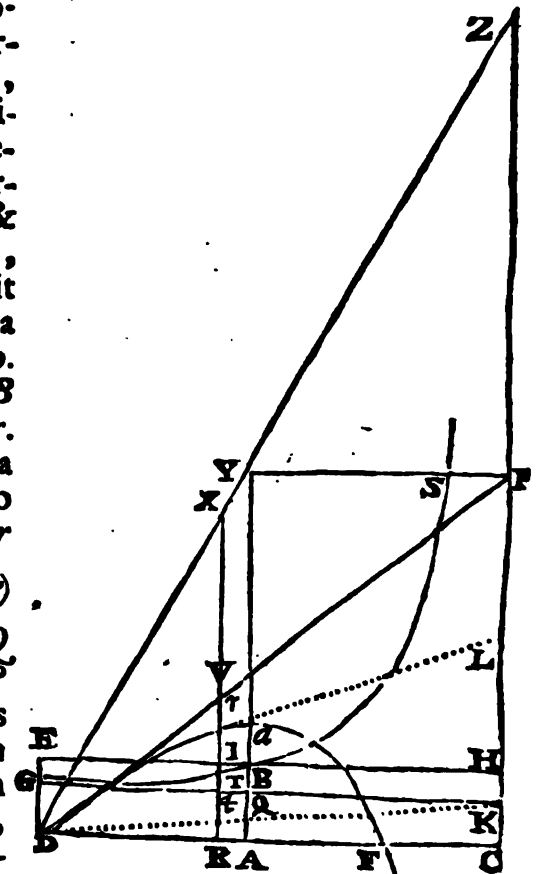
æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream

$RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistantia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per Prop. 11. hujus) ut linea DR , altitudo vero (per Prop. 111. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea Rr . Ipso autem motus initio area $RDGT$ æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$)

tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N , id est, ut CP ad DC ; atque adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut

altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea \mathcal{DraF} , quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*

Corol.



Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$, ideo
que si producat RT ad X ut sit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$, (id est,
si compleatur parallelogrammum $ACPT$, jungatur DT secans CP
in Z , & producat RT donec occurrat DT in X ;) erit Xr æ-
qualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea temporibus proportionalis.

Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR vel, quod perinde est,
innumeræ ZX , in progressionibus Geometricis; erunt totidem Xr in
progressionibus Arithmeticis. Et hinc Curva $DraF$ per tabulam Lo-
garithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D , diametro DE deorsum producta, & La-
tere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota, ipso motus initio,
ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas quacum corpus
exire debet de loco D secundum rectam DP , ut in Medio uni-
formi resistente describat Curvam $DraF$, ea ipsa erit quacum
exire debet de eodem loco D , secundum eandem rectam DP ,
ut in spatio non resistente describat Parabolam. Nam Latus rec-
tum Parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV \text{ quad.}}{Vr}$ & Vr est

$\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, Hyper-
bolam GTB tangeret in G , parallela est ipsi DK , ideoque
 Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$ & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est

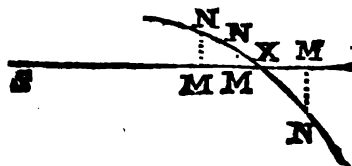
$\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id est, (ob proportionales DR & DC , DV ,
& DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & Latus rectum $\frac{DV \text{ quad.}}{Vr}$ prodit
 $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id est (ob proportionales QB & CK , DA & AC)
 $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, adeoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$;

hoc est, ut resistentia ad gravitatem. $Q. E. D.$

Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D , data cum velocita-
te, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; &
resistentia Medii ipso motus initio detur: inveniri potest Curva
 $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate
datur

tionem qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM . Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta DP , inveniantur longitudines DF , Df , ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per

calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendicularum MN . Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistantiæ ad gravitatem rationem SM , & colligendo novam differentiam



MN . Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM , & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN secans rectam SM in X , & erit SX vera ratio resistantiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo DF per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem DP , ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modo inventam, erit vera longitudo DP . Qua inventa, habetur tum Curva linea $DraF$ quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistantia in locis singulis.

Scholium.

Cæterum resistantiam corporum esse in ratione velocitatis, Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant resistantiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; adeoque tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistantia (per motus Legem II & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales orientur motus ex hac lege Resistentiæ.

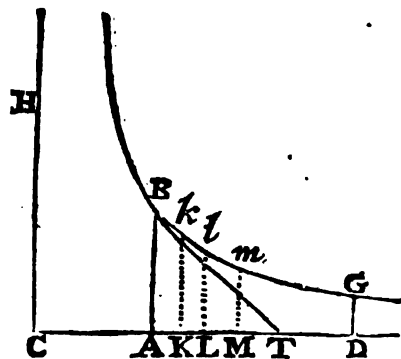
S E C T I O II.

*De motu Corporum quibus resistitur in duplicata ratione
Velocitatum.*

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

*Si Corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & idem
sola vi insita per Medium simile movetur; tempora ve-
ro sumantur in progressione Geometrica a minoribus ter-
minis ad majores pergente: dico quod velocitates initio sin-
gularum temporum sunt in eadem progressione Geometrica
inverse, & quod spatia sunt equalia quae singulis tempo-
ribus describuntur.*

Nam quoniam quadrato velocita-
tis proportionalis est resistentia Me-
dii, & resistentiæ proportionale est
decrementum velocitatis; si tempus
in particulas innumeras æquales di-
vidatur, quadrata velocitatum sin-
gulis temporum initiis erunt velo-
citatum earundem differentiis pro-
portionalia. Sunt temporis particu-
læ illæ AK, KL, LM &c. in recta
 CD sumptæ, & erigantur perpen-
dicula AB, Kk, Ll, Mm , &c. Hy-
perbolæ $BklmG$, centro C asymptotis rectangulis CD, CH descrip-
tæ, occurrentia in B, k, l, m , &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA , &
divisim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA , & vicissim $AB - Kk$ ad
 AK ut Kk ad CA , adeoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde,
cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo,
ubi coeunt AB & Kk ut ABq . Et simili argumento erunt $Kk - Ll$,
 $Ll - Mm$, &c. ut Kkq, Llq , &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm
qua-



quadrata sunt ut earundem differentiarum; & idcirco cum quadrata
 velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiarum, similis erit am-
 barum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut
 areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis
 quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi
 temporis AK exponatur per lineam AB , & velocitas initio se-
 cundi KL per lineam Kk , & longitudo primo tempore descripta
 per aream $AKkB$; velocitates omnes subsequentes exponentur
 per lineas subsequentes Ll, Mm , &c. & longitudes descriptæ per
 areas Kl, Lm , &c. Et composite, si tempus totum exponatur per
 summam partium suarum AM , longitudo tota descripta expone-
 tur per summam partium suarum $AMmB$. Concipe jam tempus
 AM ita dividi in partes AK, KL, LM , &c. ut sint $CA, CK,$
 CL, CM , &c. in progressione Geometrica; & erunt partes illæ
 in eadem progressione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm , &c.
 in progressione eadem inversa, atque spatia descripta $Ak, Kl,$
 Lm , &c. æqualia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per Asymptoti
 partem quamvis AD , & velocitas in principio temporis per ordi-
 natam applicatam AB ; velocitas in fine temporis exponetur per ordi-
 natam DG , & spatium totum descriptum per aream Hyperboli-
 cam adjacentem $ABGD$; necnon spatium quod corpus aliquod
 eodem tempore AD , velocitate prima AB , in Medio non resi-
 stente describere posset, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in Medio resistente descriptum,
 capiendum illud ad spatium quod velocitate uniformi AB in medio
 non resistente simul describi posset, ut est area Hyperbolica
 $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam resistentia Medii, statuendo eam ipso mo-
 tus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente
 corpore, tempore AC , in Medio non resistente, generare posset
 velocitatem AB . Nam si ducatur BT quæ tangat Hyperbolam
 in B , & occurrat Asymptoto in T ; recta AT æqualis erit ipsi AC ,
 & tempus exponet quo resistentia prima uniformiter continuata tol-
 lere posset velocitatem totam AB .

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad
 vim gravitatis aliamve quamvis datam vim centripetam.

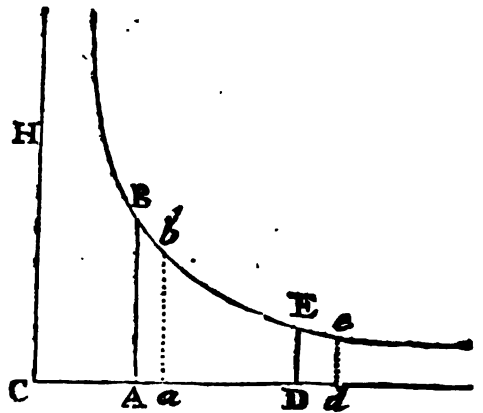
Corol. 5. Et viceversa, si datur proportio resistentiæ ad datam
 quamvis vim centripetam, datur tempus AC , quo vis centripeta
 resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis AB ; & in-

De Motu de datur punctum B per quod Hyperbola, Asymptotis CH , CD ,
CORPORUM describi debet; ut & spatium $ABGD$, quod corpus incipiendo
 motum suum cum velocitate illa AB , tempore quovis AD , in
 Medio similari resistente describere potest.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

*Corpora Spherica homogenea & equalia, resistentiis in du-
 plicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus in-
 sitis incitata, temporibus quæ sunt reciproce ut velocita-
 tes sub initio, describunt semper equalia spatia, & a-
 mittunt partes velocitatum proportionales totis.*

Asymptotis rectangulis CD ,
 CH descripta Hyperbola qua-
 vis $BbEe$ secante perpendicu-
 la AB, ab, DE, de , in $B, b, E,$
 e , exponantur velocitates initia-
 les per perpendicula AB, DE ,
 & tempora per lineas Aa, Dd .
 Est ergo ut Aa ad Dd ita (per
 Hypothesin) DE ad AB , &
 ita (ex natura Hyperbolæ)
 Ca ad Cd ; & componendo,
 ita Ca ad Cd . Ergo areæ AB
 $ba, DEed$, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & ve-
 locitates primæ AB, DE sunt ultimis ab, de , & propterea (divi-
 dendo) partibus etiam suis amissis $AB-ab, DE-de$ proportio-
 nales. Q. E. D.



PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

*Corpora Spherica quibus resistitur in duplicata ratione ve-
 locitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe &
 resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum pro-
 portionales totis, & spatia describent temporibus istis in
 velocitates primas ductis proportionalia.*

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora
 con-

conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debet resistētia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & resistētia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, adeoque retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim.
Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicata ratione diametrorum: Globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujusque erit ut ejus velocitas & Massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistētia (per Hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propositionem) est in ratione priore directe & ratione posteriore inverse, id est, ut diameter directe & velocitas inverse; adeoque spatium (tempori & velocitati proportionale) est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquialtera ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus Globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunt diametri D & E : & si resistētiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n & E^n : spatia quibus Globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis; erunt ut D^{3-n} & E^{3-n} . Igitur describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si Globi non sint homogenei, spatium a Globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc propositionem) augetur in ratione motus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol.

DE MOTU *Corol. 5.* Et si Globi moveantur in Mediis diversis; spatium in
CORPORUM Medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in
 ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, & spatium in ratione temporis.

L E M M A II.

Momentum Genitæ æquatur Momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque, in Arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalem, absque additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt Facti, Quoti, Radices, Rectangula, Quadrata, Cubi, Latera quadrata, Latera cubica, & similes. Has quantitates ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrecentes, hic considero; & earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine Momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujusque generantis Coefficientens est quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hoc latus.

Igitur sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrecentium $A, B, C, \&c.$ momenta, vel mutationum velocitates dicantur $a, b, c, \&c.$ momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti consenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum digni-

dignitatum $A^2, A^1, A^0, A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{1}{3}}, A^{\frac{1}{4}}, A^{\frac{1}{5}}, A^{-1}, A^{-2}, & A^{-\frac{1}{2}}$ momenta

$2aA, 3aA^2, 4aA^3, \frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}aA^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}aA^{-\frac{1}{4}}, \frac{1}{5}aA^{-\frac{1}{5}}, -aA^{-2}, -2aA^{-1}, & -\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, respective. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque A^m momentum fuerit $\frac{n}{m}a A^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & Genitæ $A^1B^1C^1$ momentum $3aA^1B^1C^1 + 4bA^1B^1C^1 + 2cA^1B^1C^1$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ five A^3B^{-2} momentum $3aA^3B^{-2} - 2bA^3B^{-1}$; & sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB , ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, seu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ seu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G , & contenti ABC seu GC momentum (per *Cas. 1.*) erit $gC + cG$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2 , id est rectanguli AB , momentum $aB + bA$ erit $2aA$, ipsius autem A^3 , id est contenti ABC , momentum $aBC + bAC + cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1} . *Q. E. D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1 , momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A , una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1 , id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $-\frac{a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1 , momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n

DE MOTU CORPORUM una cum $\frac{1}{A^n}$ in $n a A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{n a}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A , momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $a A^{\frac{1}{2}}$ erit a , per *Cas. 3*: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2} a A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B , erit A^n æquale B^n , ideoque $m a A^{n-1}$ æquale $n b B^{n-1}$, & $m a A^{-1}$ æquale $n b B^{-1}$ seu $n b A^{-\frac{n}{m}}$, adeoque $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{m}}$ æquale b , id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n , una cum momento ipsius B^n ducto in A^m , id est $m a A^{m-1} B^n + n b B^{n-1} A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunt A, B, C, D, E, F , continue proportionales; & si detur terminus C , momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2 A, -B, D, 2 E, 3 F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eadem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis furdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus

tibus [*Data Aequatione quocunque. Fluentes quantitates involven-* LITER
SECUNDUS.
te, Fluxiones invenire, & vice versa] eandem celatam: rescripsit
Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & meth-
odum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in
verborum & notarum formulis, & Idea generationis quantitatum.
Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

*Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente,
recta ascendat vel descendat, & spatium totum descrip-
tum distinguatur in partes æquales, inque principiis sin-
gularum partium (addendo resistantiam Medii ad vim
gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam
quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico
quod vires illæ absolutæ sunt in progressionem Geome-
trica.*

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC ; resisten-
tia per lineam indefinitam AK ; vis absoluta in descensu corporis
per differentiam KC ; velocitas corporis per lineam AP (quæ sit
media proportionalis inter AK & AC , ideoque in subduplicata
ratione resistantiæ;) incrementum resistantiæ data temporis parti-
cula factum per lineolam KL , & contemporaneum velocitatis in-
crementum per lineolam PQ ; & centro C Asymptotis rectangulis
 CA, CH describatur Hyperbola quævis BNS , erectis perpendicularis
 AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S . Quoniam
 AK est ut APq , erit hujus momentum KL ut illius momen-
tum $2APQ$, id est, ut AP in KC . Nam velocitatis incrementum
 PQ , (per motus Leg. 11.) proportionale est vi generanti KC .
Componatur ratio ipsius KL , cum ratione ipsius KN , & fiet rec-
tangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc est, ob datum rec-
tangulum $KC \times KN$, ut AP . Atqui areæ Hyperbolicæ $KNOL$
ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L ,
est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut AP ,
Componitur igitur area tota Hyperbolica $ABOL$ ex particulis
 $KNOL$ velocitati AP semper proportionalibus, & propterea
spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam
area illa in partes æquales $ABMI, IMNK, KNOL$, &c. & vi-

ratem illam datam in subduplicata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii resistentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

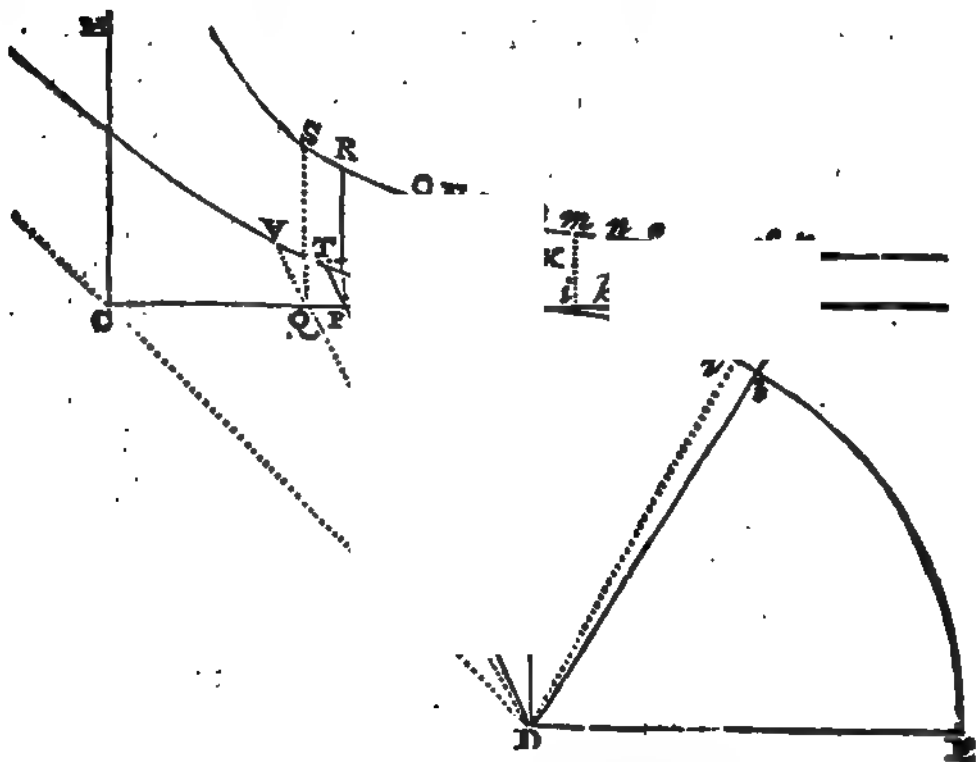
Possis jam demonstratis, dico quod si Tangentes angulorum sectoris Circularis & sectoris Hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascensus futuri ut sector Circuli, & tempus omne descensus præteriti ut sector Hyperbolæ.

Rectæ AC , qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD . Centro D semidiametro AD describatur tum Circuli quadrans AtE , tum Hyperbola rectangula AVZ axem habens AX , verticem principalem A & Asymptoton DC . Jungantur Dp, DP , & erit sector Circularis AtD ut tempus ascensus omnis futuri; & sector Hyperbolicus ATD ut tempus descensus omnis præteriti. Si modo sectorum Tangentes Ap, AP sint ut velocitates.

Cas. I. Agatur enim Dvq abscindens sectoris ADt & trianguli ADp momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas tDv & pDq . Cum particule illæ, ob angulum communem D , sunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{tDp}{pDquad}$. Sed $pDquad$ est $ADquad. + Apquad.$ id est, $ADquad. + AD \times Ak$ seu $AD \times Ck$; & qDp est $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo sectoris particula tDv est ut $\frac{pq}{Ck}$, id est, ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inverse, atque adeo ut particula temporis decremento respondens. Et componendo fit summa particularum omnium tDv in factore ADt , ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis Ap particulis amissis pq respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus ADt est ut ascensus totius futuri tempus. Q. E. D.

DE MOTU
CORPORUM

Caf. 2. Agatur DQV abscindens tum sectoris DAV , tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ ; & erunt hæ particule ad invicem ut $DTq.$ ad $DPq.$ id est (fi TX & AP parallele sint) ut $DXq.$ ad $DAq.$ vel $TXq.$ ad $APq.$ & divisim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq.$ Sed ex natura Hyperbolæ $DXq - TXq$ est ADq , & per Hypothesin APq est $AD \times AK.$ Ergo particule sunt ad invicem ut ADq ad



$ADq - AD \times AK$; id est, ut AD ad $AD - AK$ seu AC ad CK :
ideoque sectoris particula TDV est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, atque adeo ob

datas AC & AD , ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directe utque vis generans incrementum inverse, atque adeo ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particule

PQ

PQ generantur, ut summa particularum sectoris ATD , id est, LIBER
tempus totum ut sector totus. Q. E. D. SECUNDUS

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC , spatium quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium quod corpus velocitate maxima AC , eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABNK$, qua spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream ATD qua tempus exponitur. Nam cum sit AC ad AP ut AP ad AK , erit (per *Corol. 1. Lem. 11. hujus*) LK ad PQ ut $2 AK$ ad AP , hoc est, ut $2 AP$ ad AC , & inde LK ad $\frac{1}{2} PQ$ ut AP ad ($\frac{1}{4} AC$ vel) AB ; est & KN ad (AC vel) AD ut AB ad CK ; itaque ex æquo LKN ad DPQ ut AP ad CK . Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC . Ergo rursus ex æquo LKN est ad DTV ut AP ad AC ; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta LKN & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ $ABNK$ & ATD ut spatia tota ab initio descensus descripra.

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore descriptum, ut est area $ABnk$ ad sectorem ADt .

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum APD ad sectorem Hyperbolicum ATD . Nam velocitas in Medio non resistente foret ut tempus ATD , & in Medio resistente est ut AP , id est, ut triangulum APD . Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ ATD, APD .

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum ApD ad sectorem Circularem AtD ; sive ut recta Ap ad arcum At .

Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in Medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam AC in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut sector ADT ad triangulum ADC : & tempus, quo velocitatem Ap in Medio

DE MOTU
CORPORUM

Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus At ad ejus tangentem Ap .

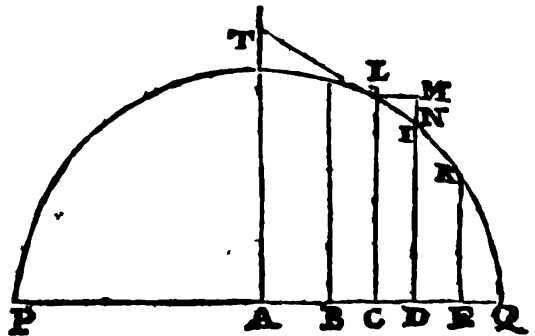
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendens datur velocitas maxima, per *Corol. 2, & 3, Theor. vi, Lib. II*; indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem ADT vel ADt ad triangulum ADC in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas AP vel Ap , tum area $ABNK$ vel $ABnk$, quæ est ad sectorem ADT vel ADt ut spatium quaesitum ad spatium quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter describi potest.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio $ABnk$ vel $ABNK$, dabitur tempus ADt vel ADT .

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitque resistentia ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas & Medii resistentia in locis singulis.

Sit PQ planum illud plano Schæmatis perpendiculari; $PFHQ$ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q ; G, H, I, K loca quatuor corporis in hac curva ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E insistentes; & sint BC, CD, DE distantie Ordinarum inter se æquales. A punctis G & H ducantur rectæ GL, HN curvam tangentibus in G & H , & Ordinatis CH, DI sursum productis occurrentes in L & N , & compleatur parallelogrammum $HCDM$.
Et



Et tempora quibus corpus describit arcus GH , HI , erunt in subduplicata ratione altitudinum LH , NI quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines descriptæ GH , HI directe & tempora inverse. Exponentur tempora per T & t , & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$: & decrementum velocitatis tempore t factum ex-

ponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitatis in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem qua duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset (ut *Galileus* demonstravit) id est, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI describente, auget arcum illum sola longitudine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque generat tantum veloci-

tatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentia sola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} + \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; Resistentia erit ad Gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis CB , CD , CE scribantur $0, 0, 20$. Pro Ordinata CH scribatur P , & pro MI scribatur series quælibet $Q0 + R00 + S0^3 + \&c.$ Et seriei termini omnes post primum, nempe $R00 + S0^3 + \&c.$ erunt NI , & Ordinatæ DI , EK , & BG erunt $P - Q0 - R00 - S0^3 - \&c.$, $P - 2Q0 - 4R00 - 8S0^3 - \&c.$, & $P + Q0 - R00 + S0^3 - \&c.$ respective. Et quadrando differentias Ordinarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata proceduntia addendo quadrata ipsarum BC , CD , habebuntur arcuum GH , HI quadrata $00 + QQ00 - 2QR0^3 + \&c.$; & $00 + QQ00 + 2QR0^3 + \&c.$ Quorum radices $0\sqrt{1+QQ} - \frac{QR00}{\sqrt{1+QQ}}$, &

DE MOTU
CORPORUM

$\sqrt{1+QQ} + \frac{QR_{00}}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH & HI . Præterea si ab Ordinata CH subducatur semisumma Ordinarum BG ac DI , & ab Ordinata DI subducatur semisumma Ordinarum CH & EK , manebunt arcuum GI & HK sagittæ R_{00} & $R_{00} + 3S_{01}$. Et hæ sunt lineolis LH & NI proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t , & inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3S_0}{R}}$ seu $\frac{R+\frac{1}{2}S_0}{R}$: & $\frac{t \times GH}{T} = HI + \frac{2 MI \times NI}{HI}$; substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, GH , HI , MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3S_{00}}{2R} \sqrt{1+QQ}$. Et cum $2NI$ sit $2R_{00}$, Resistencia jam erit ad Gravitationem ut $\frac{3S_{00}}{2R} \sqrt{1+QQ}$ ad $2R_{00}$,

id est, ut $3S \sqrt{1+QQ}$ ad RR .

Velocitas autem ea est quacum corpus de loco quovis H , secundum tangentem HN egrediens, in Parabola diametrum HC & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistencia est ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii densitas est ut resistencia directe & quadratum velocitatis inverse, id est, ut $\frac{3S \sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverse, hoc est, ut $\frac{S}{R \sqrt{1+QQ}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Si tangens HN producat utrinque donec occurrat Ordinatæ cuilibet AF in T : erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, adeoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Qua ratione Resistencia erit ad Gravitationem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, Velocitas erit ut $\frac{HT}{AC \sqrt{R}}$, & Medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, si curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam AC & ordinatim applicatam CH ,

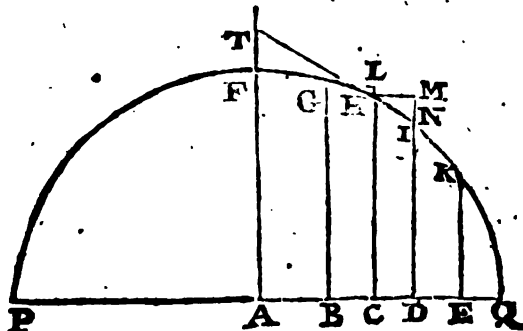
CH, (ut moris est) & valor ordinatim applicatæ resolvatur in serie convergentem: Problema per primos seriei terminos expedite solvetur, ut in exemplis sequentibus: LIBER SECUNDUS.

Exempl. 1. Sit Linea *PFHQ* Semicirculus super diametro *PQ* descriptus, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Bisecetur diameter *PQ* in *A*, dico *AQ* n , *AC* a , *CH* e , & *CD* o : & erit *DI* q seu *AQ* $q - AD$ $q = nn - aa - 2ao - oo$, seu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum nostram extracta, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{a^2oo}{2e^3} - \frac{4o^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^3} - \&c.$ Hic scribatur

nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annoo^3}{2e^3} - \&c.$

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; secundum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium est, & sic in infinitum. Et primus terminus qui hic est e , denotabit semper longitudinem Ordinatæ *CH* insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o ; secundus terminus qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam *P*



inter *CH* & *DN*, id est, lineolam *MN* quæ abscinditur complendo parallelogrammum *HCDM*, atque adeo positionem tangentis *HN* semper determinat; ut in hoc casu capiendo *MN* ad *HM* ut est $\frac{ao}{e}$, ad o , seu a ad e . Terminus tertius qui hic est

$\frac{nnoo}{2e^3}$ designabit lineolam *IN* quæ jacet inter tangentem & curvam, adeoque determinat angulum contactus *IHN* seu curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si lineola illa *IN* finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum,

DE MOTU
CORPORUM

termini subsequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negli-
gi possunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ,
quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet
usus non contemnendus harum Serierum in Solutione Problema-
tum quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam series $e - \frac{a^0}{e} - \frac{nn00}{2e^2} - \frac{nnn0^3}{2e^3} - \&c.$ cum serie
 $P - Q_0 - R_00 - S_0^3 - \&c.$ & perinde pro P, Q, R & S scribatur
 $e, \frac{a}{e}, \frac{nn}{2e^2}$ & $\frac{nnn}{2e^3}$, & pro $\sqrt{1+Q}$ scribatur $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ seu $\frac{n}{e}$, &
prodibit Medii densitas ut $\frac{a}{ne}$ hoc est, (ob datam n), ut $\frac{a}{e}$, seu

$\frac{AC}{CH}$, id est, ut tangentis longitudo illa HT quæ ad semidiametrum
 AF ipsi PQ normaliter insistentem terminatur: & resistentia erit
ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id est, ut $3AC$ ad Circuli diametrum
 PQ : velocitas autem erit ut \sqrt{CH} . Quare si corpus iusta cum
velocitate secundum lineam ipsi PQ parallelam exeat de loco F , &
Medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis HT , &
resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad
 PQ , corpus illud describet Circuli quadrantem FHQ .
Q. E. I.

At si corpus idem de loco P , secundum lineam ipsi PQ per-
pendiculararem egrederetur, & in arcu semicirculi PFQ moveri
inciperet, sumenda esset AC seu a ad contrarias partes centri A ,
& propterea signum ejus mutandum esset & scribendum $-a$ pro
 $+a$. Quo pacto prodiret Medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam
autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, Na-
tura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut
corpus ascendendo a P describat Circuli quadrantem PF . Ad
hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non
a resistente impedi.

Exempl. 2. Sit linea $PFHQ$ Parabola, axem habens AF hori-
zonti PQ perpendicularem, & requiratur Medii densitas quæ fa-
ciat ut Projectile in ipsa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum PDQ æquale est rectan-
gulo sub ordinata DI & recta aliqua data, hoc est, si dicantur
recta

recta illa b , $P C a$, $P Q c$, $C H e$ & $C D o$; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $a c - a a - 2 a o + c o - o o$ æquale est rectangulo

b in $D I$, adeoque $D I$ æquale $\frac{a c - a a}{b} + \frac{c - 2 a}{b} o - \frac{o o}{b}$. Jam

scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c - 2 a}{b} o$ pro $Q o$,

tertius item terminus $\frac{o o}{b}$ pro $R o o$. Cum vero plures non sint ter-

mini, debet quarti coefficientis S evanescere, & propterea quanti-

tas $\frac{S}{R \sqrt{1+Q Q}}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit.

$$R \sqrt{1+Q Q}$$

Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galileus*. Q. E. I.

Exempl. 3. Sit linea $A G K$ Hyperbola, Asymptoton habens $N X$ plano horizontali $A K$ perpendicularem; & quærat Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit $M X$ Asymptotos altera, ordinatim applicatæ $D G$ productæ occurrens in V , & ex natura Hyperbolæ, rectangulum $X V$ in $V G$ dabitur. Datur autem ratio $D N$ ad $V X$, & propterea datur etiam rectangulum $D N$ in $V G$. Sit illud $b b$; & completo parallelogrammo $D N X Z$, dicatur $B N a$, $B D o$, $N X c$, & ratio data $V Z$ ad $Z X$ vel $D N$ ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit $D N$ æqualis $a-o$, $V G$ æqualis

$\frac{b b}{a-o}$, $V Z$ æqualis $\frac{m}{n} \frac{b b}{a-o}$, & $G D$ seu $N X - V Z - V G$ æ-

qualis $c - \frac{m}{n} a + \frac{m}{n} o - \frac{b b}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{b b}{a-o}$ in seriem

convergentem $\frac{b b}{a} + \frac{b b}{a a} o + \frac{b b}{a^2} o o + \frac{b b}{a^3} o^3$ &c. & fiet $G D$ æqua-

lis $c - \frac{m}{n} a - \frac{b b}{a} + \frac{m}{n} o - \frac{b b}{a a} o - \frac{b b}{a^2} o^2 + \frac{b b}{a^3} o^3$ &c. Hujus seriei

terminus secundus $\frac{m}{n} o - \frac{b b}{a a} o$ usurpandus est pro $Q o$, tertius cum

signo mutato $\frac{b b}{a^2} o^2$ pro $R o^2$, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{b b}{a^3} o^3$

pro $S o^3$, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{b b}{a a}$, $\frac{b b}{a^2}$ & $\frac{b b}{a^3}$ scribendæ sunt

in Regula superiore pro Q , R & S . Quo facto prodit medii densitas

Asymptoton ejus in V , fuerit VG reciproce ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n , cujus index est numerus n : & quærat Medii densitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX scribantur A, O, C respective, sitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e , & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqua-

lis $A - O, VG = \frac{bb}{A - O}, VZ = \frac{d}{e} \frac{bb}{A - O}$, & GD seu $NX - VZ$

$- VG$ æqualis $C - \frac{d}{e} A + \frac{d}{e} O - \frac{bb}{A - O}$. Resolvatur terminus ille

$\frac{bb}{A - O}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nb b}{A^{n+1}} O + \frac{n n + n}{2 A^{n+2}} bb O^2 +$

$\frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} bb O^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C - \frac{d}{e} A - \frac{bb}{A^n} +$

$\frac{d}{e} O - \frac{nb b}{A^{n+1}} O - \frac{n n + n}{2 A^{n+2}} bb O^2 - \frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} bb O^3$ &c. Ha-

jus seriei terminus secundus $\frac{d}{e} O - \frac{nb b}{A^{n+1}} O$ usurpandus est pro QO ,

tertius $\frac{n n + n}{2 A^{n+2}} bb O^2$ pro RO^2 , quartus $\frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} bb O^3$ pro

SO^3 . Et inde Medii densitas $\frac{S}{R \sqrt{Y + QQ}}$, in loco quovis G , fit

$\frac{n + 2}{3 \sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee} A^2 - \frac{2 d n b b}{e A^n} A + \frac{n n b^2}{A^{2n}}}}$, adeoque si in VZ capiatur VT

æqualis $n \times VG$, densitas illa est reciproce ut XT . Sunt enim A^2 &

$\frac{dd}{ee} A^2 - \frac{2 d n b b}{e A^n} A + \frac{n n b^2}{A^{2n}}$ ipsarum XZ & ZT quadrata. Resisten-

tia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3 \sin \frac{XT}{A}$ ad $4RR$,

id est, XT ad $\frac{2 n n + 2 n}{n + 2} VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est qua-

cum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G , diametrum GD & latus rectum $\frac{1 + QQ}{R}$ seu $\frac{2 XY quad.}{n n + n \text{ in } VG}$ habente. $Q. E. I.$

Scholium

De Motu
Curvarum

Scholium.

Eadem ratione qua prodiit densitas Medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Co-
municio primo, si resistantia ponatur ut velocitatis V dignitas qua-
libet V^n prodiit densitas Medii ut $\frac{S}{R^{n+1}} \times \frac{AC}{HT}$.

Proinde si Curva inveniri potest ea lege ut data fuerit ratio
resistantiæ ad $\frac{HT}{AC}$, vel $\frac{S^2}{R^{n+1}}$ ad $1 + QQ$; corpus movebi-

lurum in hâ Curva in uniformi Medio cum resistantia quæ sit ut ve-
locitatis V^n . Sed redeamus ad Curvas simpliciores.

Quoniam motus non fit in Parabola nisi in Medio non resistente,
Hyperbolis vero hic descriptis fit per resistantiam perpetuam;
notandum est quod Linea, quam projectile in Medio uniformiter
resistente describit, propius accedit ad Hyperbolas hæc quam ad
Parabolam. Est utique linea illa Hyperbolici generis, sed quæ cir-
ca verticem magis distat ab Asymptotis; in partibus a vertice re-
motioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione Hyperbola-
rum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam dif-
ferentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incom-
mode adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam Hyper-
bola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum
sic deducuntur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & recta GT tanget
Hyperbolam in G , ideoque densitas Medii in G est reciproce ut
tangens GT , & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistantia autem ad
vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2} GV$.

Proinde si corpus de loco A secundum rectam AH projectum
describat Hyperbolam AGK , & AH producta occurrat Asympto-
to MX in H , actaque AI eidem parallela occurrat alteri Asymp-
toto MX in I ; erit Medii densitas in A reciproce ut AH , & cor-
poris velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistantia ibidem ad gravitatem ut

AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI . Unde prodeunt sequentes Regulæ.

Reg. 1.

DE MOTU
CORPORUM

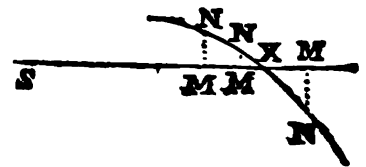
Reg. 4. Quoniam densitas Medii prope verticem Hyperbolæ major est quam in loco A , ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & densitas in A augeri in ratione paulo majore quam semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT .

Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI , & describenda sit Figura AGK : produc HN ad X , ut sit HX æqualis facto sub $n+1$ & AI ; centroque X & Asymptotis MX, NX per punctum A describatur Hyperbola, ea lege, ut sit AI ad quamvis VG ut XV ad XI .

Reg. 6. Quò major est numerus n , eo magis accuratæ sunt hæ Hyperbolæ in ascensu corporis ab A , & minus accuratæ in ejus descensu ad K ; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si Hyperbola sit hujus generis, & punctum K , ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A transeuntem, quærat: occurrat producta AN Asymptotis MX, NX in M & N , & sumatur NK ipsi AM æqualis.

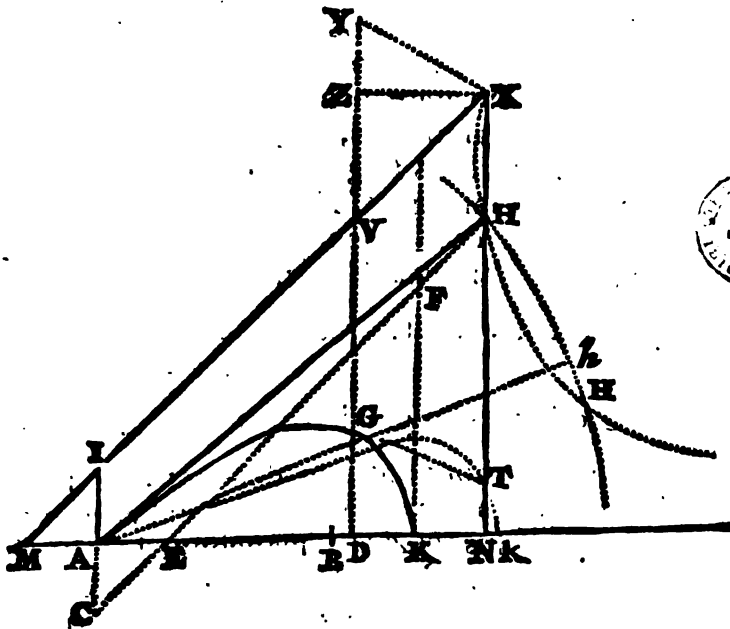
Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diversis HAK, bAk , incidantque in planum Horizontis in K & k ; & notetur proportio AK ad Ak . Sit ea d ad e . Tum erecto cujusvis longitudinis perpendicularo AI , assume utcumque longitudinem AH vel Ab , & inde collige graphice longitudines AK, Ak , per *Reg. 6.* Si ratio AK ad Ak sit eadem cum ratione d ad e , longitudo AH recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita SM longitudinem SM æqualem assumptæ AH , & erige perpendicularum MN æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simi-

li methodo ex assumptis pluribus longitudinibus AH inveniendæ sunt plura puncta N , & per omnia agenda Curva lineæ regularis $NNXN$, secans rectam SM in X . Assumatur demum AH æqualis abscissæ SX & inde de novo inveniatur longitudo AK ; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem AI & hanc ultimam AH ut longitudo AK per experimentum cognita ad ultimam inventam longitudinem AK , erunt veræ illæ longitudines AI & AH , quas invenire oportuit. Hisce vero datis dabitur & resistentia Medii in loco A , quippe quæ sit ad vim gravitatis ut AH ad $2AI$. Augenda est autem densitas Medii per *Reg. 4.* & resistentia modo inventa, si in eadem ratione augetur, sicut accuriatur.



Reg.

Reg. 8. Inventis longitudinibus AH , HX ; si jam desideretur positio rectæ AH , secundum quam Projectile, data illa cum velocitate emissum, incidit in punctum quodvis K : ad puncta A & K erigantur rectæ AC , KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorsum tendat, & æquetur ipsi AI seu $\frac{1}{2}HX$. Asymptotis AK , KF describatur Hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum C , centroque A & intervallo AH describatur Circulus secans Hyperbolam illam in puncto H , & Projectile secundum rectam AH emissum incidet in punctum K . Q. E. I. Nam punctum H , ob datam longitudinem AH , locatur alicubi in Circulo descripto. Agatur CH occurrens ipsis AK & KF , illi in E , huic in F ; & ob



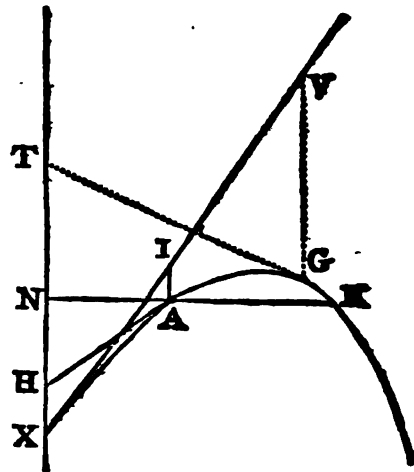
parallelas CH , MX & æquales AC , EI , erit AE æqualis AM , & propterea etiam æqualis KN . Sed CE est ad AE ut FH ad KN , & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in Hyperbolam Asymptotis AK , KF descriptam, cujus conjugata transit per punctum C atque adeo reperitur in communi intersectione Hyperbolæ hujus & Circuli descripti. Q. E. D. Notandum est autem quod hæc operatio perinde se habet, siue recta AKN horizonti parallela sit, siue ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus intersectionibus H , H duo procedunt anguli NAH , NAH ; & quod in Praxi mechanica sufficit

Hh 2

Cir-

De Motu Circulum femel describere, deinde regulam interminatam CH ita
Corporum applicare ad punctum C , ut ejus pars FH , Circulo & rectæ FK
interjecta, æqualis sit ejus parti CE inter punctum C & rectam
 AK sitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si $XAGK$ Parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X , sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n ; agantur XT, GT, AH , quarum XT parallela sit VG , & GT, AH Parabolam tangent in G & A : & corpus de loco quovis A , secundum rectam AH productam, justa cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam, si modo densitas Medii, in locis singulis G , sit reciproce ut tangens GT .



Velocitas autem in G ea erit quacum Projectile pergeret, in spatio non resistente, in Parabola Conica verticem G , diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\frac{2GTq.}{nn - n \times VG}$ habente.

Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn - 2n}{n - 2} VG$.
Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medii in A , tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcumque angulus NAH ; manebunt longitudines AH, AI, HX , & inde datur Parabolæ vertex X ; & positio rectæ XI , & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n , dantur omnia Parabolæ puncta G , per quæ Projectile transibit.

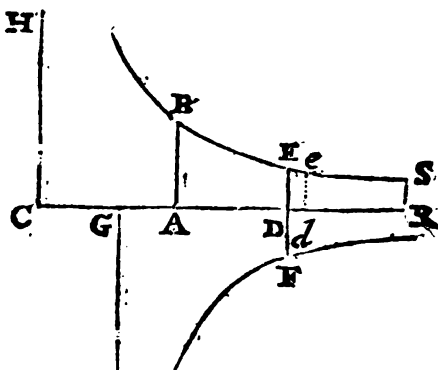
S E C T I O III.

*De Motu Corporum quibus resistitur partim in ratione
velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.*

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

*Si Corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in
velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita in
Medio simili movetur, sumantur autem tempora in
progressione Arithmetica: quantitates velocitatibus reci-
proce proportionales, datâ quadam quantitate auctâ,
erunt in progressione Geometrica.*

Centro C , Asymptotis rectan-
gulis $CADd$ & CH , describatur
Hyperbola $BEeS$, & Asympto-
to CH parallelæ sint AB , DE ,
 de . In Asymptoto CD dentur
puncta A , G : Et si tempus ex-
ponatur per aream Hyperbolicam
 $ABED$ uniformiter crescentem;
dico quod velocitas exponi potest
per longitudinem DF , cujus reci-
proca $G'D$ unâ cum datâ CG com-
ponat longitudinem CD in progressione Geometrica crescentem.



Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam
minimum, & erit Dd reciproce ut DE , adeoque directe ut

CD . Ipsius autem $\frac{I}{G'D}$ decrementum, quod (per hujus Lem. 11.)

est $\frac{Dd}{G'Dq}$ erit ut $\frac{CD}{G'Dq}$ seu $\frac{CG+GD}{G'Dq}$, id est, ut $\frac{I}{G'D} + \frac{CG}{G'Dq}$.

Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$
uniformiter crescente, decrefcit $\frac{I}{G'D}$ in eadem ratione cum veloci-

tate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per
Hypothesin) ut summa duarum quantitaturn, quarum una est ut

De Motu
CORPORUM

velocitas, altera ut quadratum velocitatis: & ipsius $\frac{I}{GD}$ decrementum est ut summa quantitarum $\frac{I}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{I}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{I}{GDq}$. Proinde $\frac{I}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD ipsi $\frac{I}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data CG augeatur; summa CD , tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressione Geometrica. Q. E. D.

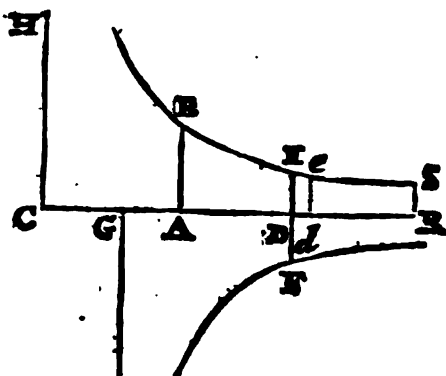
Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G , exponatur tempus per aream Hyperbolicam $ABED$; exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{I}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis $ABED$, inveniatur punctum G . Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione Geometrica.

In Asymptoto CD detur punctum R , & erecto perpendicularo RS , quod occurrat Hyperbolæ in S , exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD , quæ cum data CG componit longitudinem CD , in progressione Geometrica decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in Arithmetica.



Etenim ob datum spatii incrementum $EDde$, lineola Dd , quæ decre-

decrementum est ipsius $G D$, erit reciproce ut $E D$, adeoque directe ut $C D$, hoc est, ut summa ejusdem $G D$ & longitudinis datæ CG . Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula $D de E$ describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est, directe ut summa duarum quantitarum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa duarum quantitarum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ $G D$, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analogâ decremента, analogæ semper erunt quantitates decrescentes: nimirum velocitas & linea $G D$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem $G D$, spatium descriptum erit ut area Hyperbolica $D E S R$.

Corol. 2. Et si utcumque assumatur punctum R , inveniatur punctum G , capiendo GR ad $G D$, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis $R S E D$ descriptum. Invento autem puncto G , datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. xi, detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

PROPOSITIO XIII THEOREMA X.

Posito quod Corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit, & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata: dico quod si Circuli & Hyperbolæ diametris parallele rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quedam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis DB describatur Circuli quadrans $B E T F$, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita $B A P$, semidiametro $D F$ parallela. In ea detur punctum A , & capiatur segmentum $A P$ velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit
ut

DE MOTU **pori atque adeo sectori huic proportionalis est; in Medio resistent-**
CORPORUM te est ut triangulum; & in Medio utroque, ubi quam minima est,
 accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Isdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu de-
scriptum, est ut differentia areae per quam tempus expo-
nitur, & areae cujusdam alterius quæ augetur vel dimi-
nuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia
& gravitate compositæ sumantur in progressione Geome-
trica.

Capiatur AC (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & AK re-
 sistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes
 puncti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab
 quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & area $AbNK$ augetur
 vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires CK in
 progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia
 corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areae $AbNK$
 supra aream DET .

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$;
 assumatur data quævis quantitas Z , & ponatur AK æqualis
 $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma 11.) erit ipsius AK mo-
 mentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times P Q}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, &
 areae $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu
 $\frac{BPQ \times BD \text{ cub.}}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq + BDq$
 existente BET Circulo, (in Fig. *Cas. 1. Prop. XIII.*) linea AC ,
 quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & DPq seu
 $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu
 $CK \times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel
 DBq ad $CK \times Z$.

Cas.

Caf. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas fit ut $ABq - BDq$ linea AC (Fig. *Caf. 2.* Prop. XIII) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & DTq erit

ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caf. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas fit ut $BDq - ABq$, & linea AC (Fig. *Caf. 3.* Prop. præced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areae illæ semper sint in hac ratione; si pro area DTV , qua momentum temporis sibi met ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ , id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq . Atque inde fit $PQ \times BD$ cub. æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & area $AbNK$ momentum $KLON$ superius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur area DET mo-

mentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur

differentia momentorum, id est, momentum differentiae arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$)

ut velocitas AP , id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud, proportionalibus momentis crescentia vel decrescencia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si longitudo aliqua V sumatur in ea ratione ad duplum longitudinis M , quæ oritur applicando aream DET ad BD , quam habet linea DA ad lineam DE , spatium quod corpus ascensu vel descensu toto in Medio resistente describit, erit ad spatium quod in Medio non resistente eodem tempore describere posset, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tem-

pore datur. Nam spatium in Medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2 , & ob datas BD & AB , ut

DE MOTU $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ CORPORUM . Momentum hujus areae five huic æqualis $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$ est ad momentum differentiae arearum DET & $AbNK$, ut $\frac{DAq \times BD \times M \times m}{DEq \times AB}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, hoc est, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, five ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP ; adeoque ubi areae DET & DAP quam minimae sunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur est area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiae quam minimae arearum DET & $AbNK$. Unde cum spatia in Medio utroque, in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc sunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia; ob eorum analogæ incrementa necesse est, ut in æqualibus quibuscunque temporibus sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia. Q. E. D.

duplicata ratione ipsius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicata ratione SQ ad SP , sive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ , SQR & æquales areas PSQ , QSR , est arcus PQ ad arcum QR ut SQ ad SP . Sumantur proportionalium consequentium differentie, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}VQ$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ fit æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ , ex resistentia oriundum, sive hujus duplum Rr , est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQ \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr

ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQ \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive

ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SP}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob similia triangu-
 gula PVQ , PSO , fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est

igitur $\frac{OS}{OP \times SP}$ ut resistentia, id est, in ratione densitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{I}{SP}$, & manebit Medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP , densitas Medii in P erit ut $\frac{I}{SP}$. In Medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP , corpus gyri potest in hac Spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyri potest in Circulo, ad eandem a centro distantiam SP .

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP , est ut $\frac{OS}{OP}$, si distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P , est ad vim centripetam

DE MOTU
CORPORUM

tam in eodem loco ut $\frac{1}{2} OS$ ad OP . Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2} Rr$ & TQ sive ut $\frac{\frac{1}{2} VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2} PQ^2}{SP}$, hoc est, ut $\frac{1}{2} VQ$ & PQ , seu $\frac{1}{2} OS$ & OP . Data igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & viceversa ex data illa proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyron nequit in hac Spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS , inque hac recta corpus descendet ad centrum, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem qua probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. x, Lib. 1,) descensum in Medio non resistente fieri, in subduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora descensus hic erunt reciproce ut velocitates, atque adeo dantur.

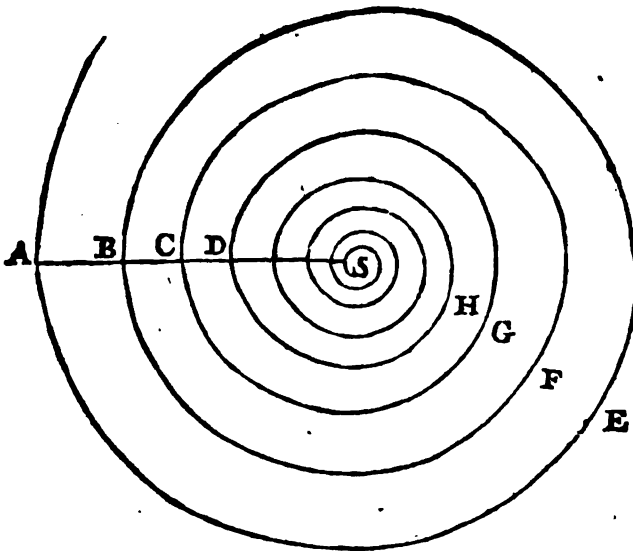
Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in Spirali PQR atque in recta SP , & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS est in data ratione, nempe in ratione OP ad OS ; tempus descensus in Spirali erit ad tempus descensus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo Circuli; & manentibus hisce Circulis, mutetur utcunque angulus quem Spiralis continet cum radio PS : numerus revolutionum quas corpus intra Circulorum circumferentias, pergendo in Spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere potest, est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut Tangens anguli illius quem Spiralis continet cum

radio PS ; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est, ut Secans anguli ejusdem, vel etiam reciproce ut Medii densitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo secuerit in B quo prius in A , idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciproce in subduplicata ratione distantiarum a centro (id est, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones BFC , CGD &c. facere, & intersectionibus

tionibus distinguet Radium AS in partes $AS, BS, CS, DS, \&c.$ LIBER
 continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut SECUNDUS.



perimetri Orbitalium $AEB, BFC, CGD, \&c.$ directe, & velocitates in principiis $A, B, C,$ inverse; id est, ut $AS^{\frac{1}{2}}, BS^{\frac{1}{2}}, CS^{\frac{1}{2}}.$ Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{1}{2}}, BS^{\frac{1}{2}}, CS^{\frac{1}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{1}{2}};$ id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{1}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{1}{2}} - BS^{\frac{1}{2}},$ sive ut $\frac{2}{3} AS$ ad AB quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro $S,$ intervallis continue proportionalibus $SA, SB, SC, \&c.$ describe Circulos quocunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his Circulis, in Medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos Circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse Secantem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium $AS,$ ad Secantem anguli quo

DE MOTU
CORPORUM

quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum Tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter Circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter Circulos binos, continuabitur motus per Circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spirilibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiraliū illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spirilibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas qualibet ejusdem distantie: dico quod corpus gyrari potest in Spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantie SP dignitas qualibet SP^{n+1} , cujus index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}}$, & resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQ \times SP^n}$, sive ut $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ adeoque ut $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1} . Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}}$, densitas in P erit reciproce ut SP .

Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam, ut $1 - \frac{1}{2}n \times OS$ ad OP .

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut SP^3 , erit $1 - \frac{1}{2}n = 0$; adeoque resistentia & densitas Medii nulla erit, ut in Propositione nona Libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scho-

Scholium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire vim centripetam & Medii resistentiam qua corpus in data Spirali, data velocitatis Lege, revolvi potest.

Sit Spiralis illa PQR . Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ , quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR , differentia RSr , dabitur corporis retardatio, & ex retardatione inveniatur resistentia ac densitas Medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data Lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis, qua corpus datam Spiralem describet.

Ex vi centripeta invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii densitas: ut in Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decima, & Lemmate secundo; & Lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

S E C T I O V.

*De Densitate & Compressione Fluidorum, deque
Hydrostatica.*

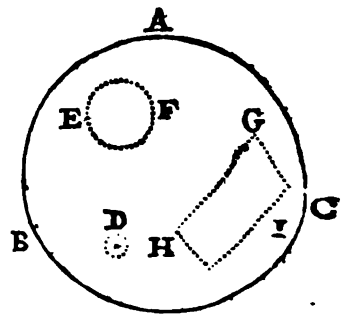
Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cujus partes cedunt vi cuicumque illata, & cedendo facile moventur inter se.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) equaliter premuntur undique, & absque omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase Sphærico *ABC* clauditur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra Hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars



pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.*

LIBER
SECUNDUS.

Cas. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes sphaericae aequaliter premuntur undique: sit enim EF pars sphaerica fluidi, & si haec undique non premitur aequaliter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur aequaliter; & partes ejus, per Casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per Casum eundem primum, & additione pressionis novae movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quae duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphaera EF non undique premebatur aequaliter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico praeterea quod diversarum partium sphaericarum aequalis sit pressio. Nam partes sphaericae contiguae se mutuo premunt aequaliter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed &, per Casum secundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duae quaevis sphaericae non contiguae, quia pars sphaerica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur aequaliter. Nam partes duae quaevis tangi possunt a partibus Sphaericis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas Sphaericas aequaliter premunt, per Casum 3. & vicissim ab illis aequaliter premuntur, per Motus Legem tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quaelibet GHI in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur aequaliter, partes autem ejus se mutuo aequaliter premant & quiescant inter se; manifestum est quod Fluidi cujuscunque GHI , quod undique premitur aequaliter, partes omnes se mutuo premunt aequaliter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si Fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur aequaliter, cedet idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido Fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad aequalitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistantiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad aequalitatem, in momento temporis, absque motu locali: & subinde partes fluidi, per Casum quintum, se mutuo prement aequaliter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

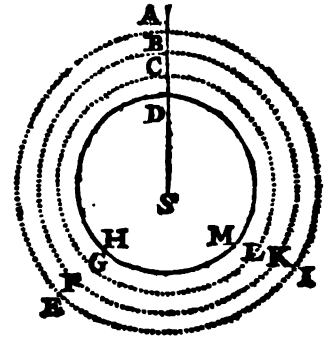
Corol.

DE MOTU *Corol.* Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem
CORPORUM fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt, nisi
 quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi
 partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius
 labuntur inter se.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

*Si Fluidi Spherici, & in equalibus a centro distantis ho-
 mogenei, fundo Spherico concentrico incumbentis partes
 singule versus centrum totius gravitent; sustinet fundum
 pondus Cylindri, cujus basis equalis est superficiei fundi,
 & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.*

Sit DHM superficies fundi, & AEI superficies superior fluidi. Superficiebus sphericis innumeris BFK , CGL distinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema AE vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes & superficies secunda BFK (per Prop. xix.) pro mensura sua æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda BFK vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione, pro mensura sua, & insuper vi propriæ gravitatis, id est pressione tripla, urgetur superficies tertia CGL . Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta, & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus Orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum (si modo Orbium augetur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus Cylindri præfi-



presenti. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet Propositio, LIBER
SECUNDUS
ubi gravitas decrefcit in ratione quavis assignata distantiae a centro, ut & ubi Fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantis eadem semper est pressiois quantitas, sive superficies pressa sit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive fluidum, a superficie pressa sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad Casus singulos Fluidorum.

Corol. 3. Eadem Demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se, si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquirat motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphericum est manebit sphericum, non obitante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido libere innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet internam rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liqueceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogere: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui, per Cas. 5. Prop. XIX, jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quam Fluidum sibi contiguum subsidebit, & quod specificè levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, alias in
æquili-

DE MOTU æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur, & comparari
CORPORUM potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est Gravitas: altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota qua corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis Gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impediencia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in Aere sunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt, non vere, quia descendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum Casuum Demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutant eorum Figuras externas, patet insuper, per Corollarium Prop.

Prop. XIX, quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si Animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum Systematis fluido comprimente circumdati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

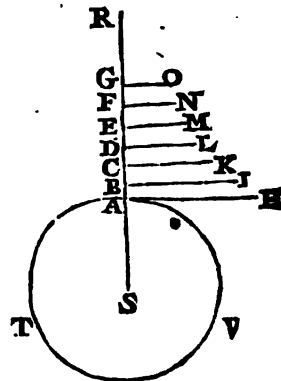
PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantis suis a centro reciproce proportionali deorsum trabantur: dico quod, si distantie illæ sumantur continue proportionales, densitates Fluidi in iisdem distantis erunt etiam continue proportionales.

Designet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE , &c. distantias continue proportionales. Erigantur perpendiculara AH, BI, CK, DL, EM , &c. quæ sint ut densitates Medii in locis A, B, C, D, E ; & specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod

perinde est, ut $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$, &c. Finge

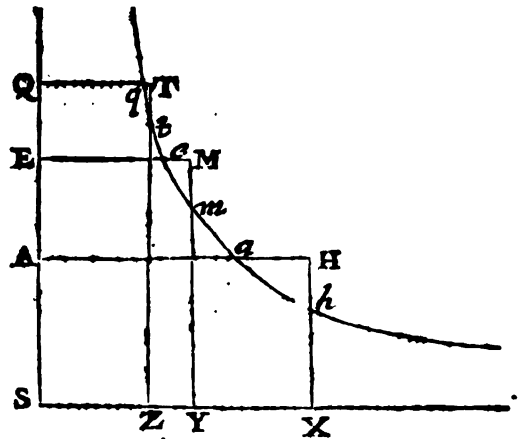
primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B , a B ad C , a C ad D , &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D , &c. Et hæc gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD , &c. conficiant pressiones AH, BI, CK , quibus fundum ATV (juxta Theorema xv.) urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones omnes AH, BI, CK, DL , pergendo in infinitum; & particula B pressiones omnes præter primam AH ; & particula C omnes præter duas primas AH, BI ; & sic deinceps: adeoque particulae primæ A densitas AH est ad particulae secundæ B densitatem



DE MOTU
CORPORUM

tatem BI ut summa omnium $AH + BI + CK + DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI + CK + DL$, &c. Et BI densitas secundæ B , est ad CK densitatem tertiæ C , ut summa omnium $BI + CK + DL$, &c. ad summam omnium $CK + DL$, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis AH, BI, CK , &c. proportionales, atque adeo continue proportionales, per hujus Lem. 1. proindeque differentiæ AH, BI, CK , &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis A, B, C , &c. sint ut AH, BI, CK , &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per saltum, & (ex æquo) in distantiiis SA, SC, SE continue proportionalibus, erunt densitates AH, CK, EM continue proportionales. Et eodem argumento, in distantiiis quibuscumque continue proportionalibus SA, SD, SG , densitates AH, DL, GO erunt continue proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, D, E , &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo A ad summitatem Fluidi continua reddatur, & in distantiiis quibuscumque continue proportionalibus SA, SD, SG , densitates AH, DL, GO , semper existentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta A & E , colligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q . Centro S , Asymptotis rectangulis SQ, SX , describatur Hyperbola fecans perpendiculara AH, EM, QT in a, e, q , ut & perpendiculara HX, MY, TZ , ad Asymptoton SX demissa, in b, m & t . Fiat area $ZTmtZ$ ad aream datam $TmbX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EcaA$; & linea Zt producta abscindet lineam Qe densitati proportionalem. Namque si lineæ SA, SE, SQ sunt continue proportionales, erunt areæ $EeqQ, EcaA$ æquales, & inde areæ his proportionales $TmtZ, XbmY$ etiam æquales, & lineæ SX, ST, SZ , id est AH, EM, QT continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in serie continue proportionalium, lineæ AH, EM, QT , ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum continue proportionalium.

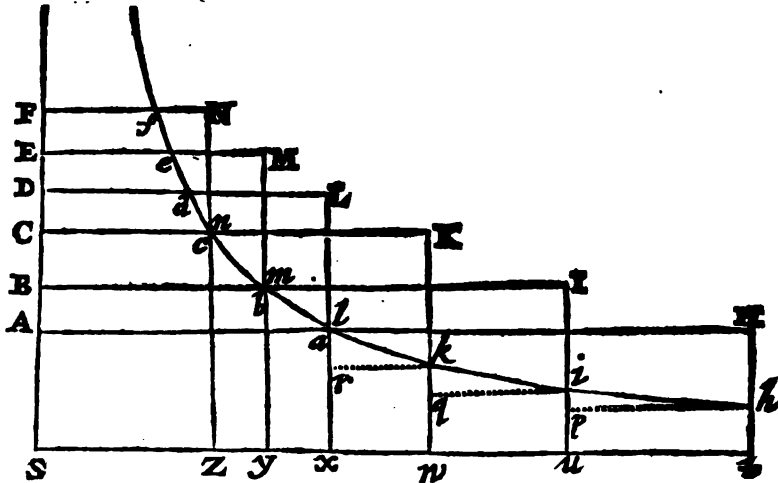


PROPO.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantie sumantur in progressionem Geometricam, densitates Fluidi in his distantis erunt in progressionem Geometricam.

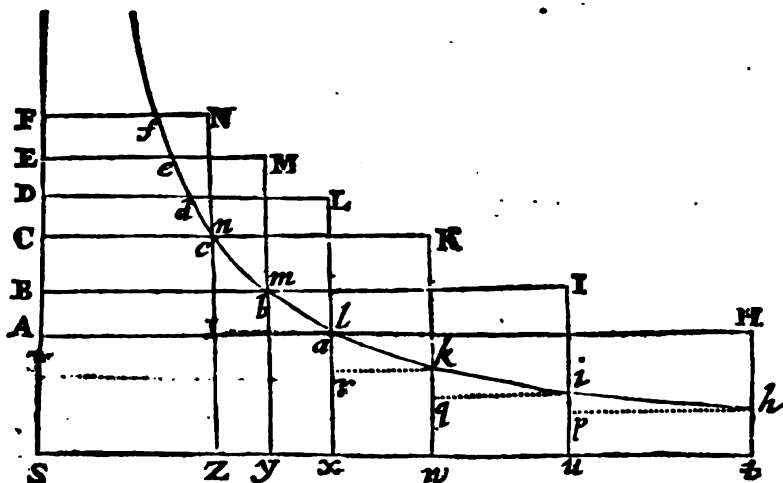
Designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in progressionem Geometricam. Erigantur perpendiculara $AH, BI, CK, \&c.$ quæ sint ut Fluidi densitates in locis $A, B, C, D, E, \&c.$ & ipsius



gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}, \frac{BI}{SBq}, \frac{CK}{SCq}, \&c.$

Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B , secundam a B ad C , tertiam a C ad D , &c. Et hæ ductæ in altitudines $AB, BC, CD, DE, \&c.$ vel, quod perinde est, in distantias $SA, SB, SC, \&c.$ altitudinibus illis proportionales, conficiant exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}, \&c.$ Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI, BI - CK, \&c.$ erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}, \&c.$

DE MOTU **CORPORUM** Centro S , Asymptotis SA, Sx , describatur Hyperbola quævis, quæ fecerit perpendiculara $AH, BI, CK, \&c.$ in $a, b, c, \&c.$ ut & perpendiculara ad Asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in $b, i, k;$ & densitatum differentiarum $tu, uw, \&c.$ erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \&c.$ Et rectangula $tu \times tb, uw \times ui, \&c.$ seu $tp, uq, \&c.$ ut $\frac{AH \times tb}{SA}, \frac{BI \times ui}{SB}, \&c.$ id est, ut $Aa, Bb, \&c.$ Est enim, ex natura Hyperbolæ, SA ad AH vel Sx , ut tb ad Aa , adeoque $\frac{AH \times tb}{SA}$ æquale Aa .



Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb , &c. Sunt autem $Aa, Bb, Cc, \&c.$ continue proportionales, & propterea differentiarum suis $Aa - Bb, Bb - Cc, \&c.$ proportionales; ideoque differentiarum hinc proportionalia sunt rectangula $tp, uq, \&c.$ ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunt ejusmodi termini quam plurimi; & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $xtbn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantie punctorum $A, B, C, \&c.$ in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $xtbn$, adeoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Suman-

tus

tur jam distantiae quaelibet; puta SA, SD, SF in progressionē Musica, & differentiae $Aa-Dd, Dd-Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $t b l x, x l n z$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz , id est, AH, DL, FN , continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quavis, puta AH & CK , dabitur area $t b k w$ harum differentiae $t w$ respondens; & inde inveniatur densitas FN in altitudine quacunque SF , sumendo aream $t b n z$ ad aream illam datam $t b k w$ ut est differentia $Aa-Ff$ ad differentiam $Aa-Cc$.

Scholium.

Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro; & quadratorum distantiarum SA, SB, SC , &c. reciproca (nempe $\frac{SA cub.}{SAq}, \frac{SB cub.}{SBq}, \frac{SC cub.}{SCq}$) sumantur in progressionē Arithmetica; densitates AH, BI, CK , &c. erunt in progressionē Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA cub.}, \frac{SAqq}{SB cub.}$)

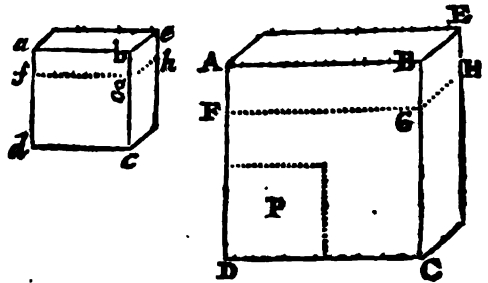
$\frac{SAqq}{SC cub.}$, &c.) sumantur in progressionē Arithmetica; densitates AH, BI, CK , &c. erunt in progressionē Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantis eadem sit, & distantiae sint in progressionē Arithmetica, densitates erunt in progressionē Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressionē Arithmetica, densitates erunt in progressionē Geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis Leges, ut quod cubus vis comprimantis sit ut quadrato-quadratum densitatis, sed triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiae a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiae. Fingatur quod cubus vis comprimantis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiae, densitas erit reciproce in sesquuplicata ra-

De Motu tione distantiae. Fingatur quod vis comprimens fit in duplicata ra-
Corporum tione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiae,
 & densitas erit reciproce ut distantia Casus omnes percurrere
 longum esset.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugae particularum sunt reciproce proportionales distantis centrorum suorum. Et vice versa, particulae viribus quae sunt reciproce proportionales distantis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico ACE , dein compressione redigi in spatium cubicum minus ace ; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantiae erunt ut cuborum latera AB, ab ; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia $AB\ cub.$ & $ab\ cub.$ In latere cubi majoris $ABCD$ capiatur quadratum DP æquale lateri cubi minoris db ; & ex Hypo-



thesi, pressio qua quadratum DP urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum db urget Fluidum inclusum ut Medii densitates ad invicem, hoc est, ut $ab\ cub.$ ad $AB\ cub.$ Sed pressio qua quadratum DB urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum DP urget idem Fluidum, ut quadratum DB , ad quadratum DP , hoc est, ut $AB, quad.$ ad $ab\ quad.$ Ergo, ex æquo, pressio qua latus DB urget Fluidum, est ad pressionem qua latus db urget Fluidum, ut ab ad AB . Planis FGH, fgb , per media cuborum ductis, distinguatur Fluidum in duas partes, & hæc se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis AC, ac , hoc est, in proportione ab ad AB : adeoque vires centrifugæ, quibus hæc pressiones sustententur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulae omnes secundum plana FGH, fgb exercent in omnes,

nes; sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum $F G H$ in cubo majore, sunt ad vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum $f g b$ in cubo minore ut ab ad AB , hoc est, reciproce ut distantia particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa; si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantia, id est, reciproce ut cuborum latera AB, ab ; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum DB, db ut summæ virium; & pressio quadrati DP ad pressionem lateris DB ut ab quad. ad AB quad. Et, ex æquo, pressio quadrati DP ad pressionem lateris db ut ab cub. ad AB cub. id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt, ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantia, & E pro densitate Fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantia dignitas qualibet D^n , cujus index est numerus n ; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2} , cujus index est numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulae fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exercent, ex hujusmodi particulis componentur Fluida de quibus actum est in hac Propositione. Quod si particulae cujusque virtus in infinitum propageetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. An vero Fluida Elastica ex particulis se mutuo fugantibus consent, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematicè demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus Quæstionem illam tractandi.

S E C T I O VI.

De Motu & Resistentia Corporum Funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. Jam vero si Pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

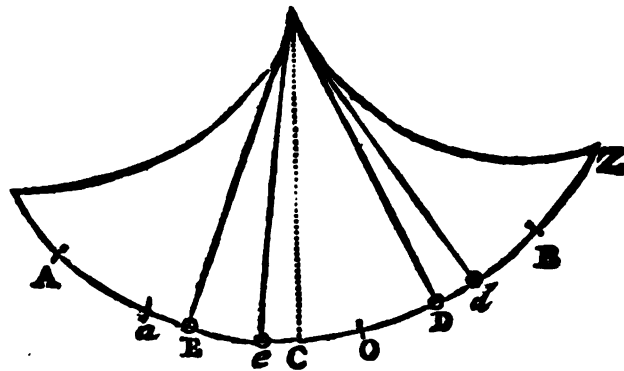
Corol. 6. Sed & in Medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut supra explicui; adeoque idem præstat in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora Funependula quibus, in Medio quovis resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora Funependula que in ejusdem gravitatis Specificæ Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in Medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C , ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut longitudo arcus



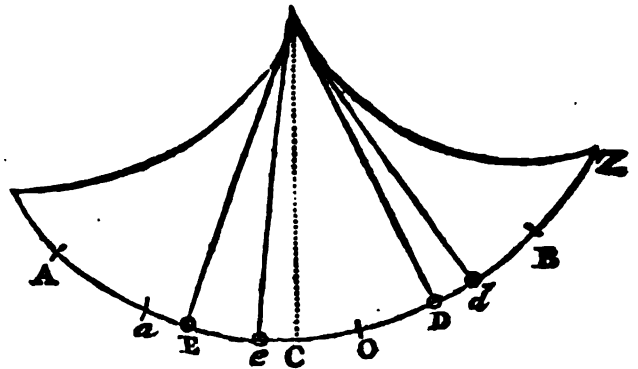
CD vel Cd vel CE . Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur

Mm

tur

DE MOTU
CORPORUM

tur eadem per datam arcus Cycloidis partem CO , & sumatur arcus Od in ratione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB : & vis qua corpus in d urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis Cd supra resistantiam CO , exponetur per arcum Od , adeoque erit ad vim qua corpus D urgetur in Medio non resistente, in loco D , ut arcus Od ad arcum CD ; & propterea etiam in loco B ut arcus OB ad arcum CB . Proinde si corpora duo, D , d exeant de loco B , & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus CB & OB , erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sunt arcus illi BD & Bd , & arcus reliqui CD , Od erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipsis CD , Od proportionales, manebunt in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD , Od semper erunt ut arcus toti CB , OB , & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo D , d simul pervenient ad loca C & O , alterum quidem in Medio non resistente ad locum C ,



& alterum in Medio resistente ad locum O . Cum autem velocitates in C & O sint ut arcus CB , OB ; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo simul describunt, in eadem ratione. Sunt illi CE & Oe . Vis qua corpus D in Medio non resistente retardatur in E est ut CE , & vis qua corpus d in Medio resistente retardatur in e est ut summa vis Ce & resistantiæ CO , id est ut Oe ; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus CE , Oe proportionales arcus CB , OB ; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum CB & OB ; & propterea si sumantur arcus toti AB , aB in eadem ratione, corpora D , d simul describent hos arcus, & in locis A & a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus totis BA , Ba proportionales sunt arcuum partes quælibet BD , Bd vel BE , Be quæ simul describuntur. *Q. E. D.*

Corol

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum *C*, sed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus descriptus a *B* bifecatur. Et corpus subinde pergendo ad *a*, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum Funependulorum quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochronæ.

Nam si corpora duo, a centrīs suspensionum æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti: resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si Corporibus Funependulis resistitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio resistente describantur arcus inæquales *A*, *B*; & resistentia corporis in arcu *A*, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus *B*, in duplicata ratione velocitatum, id est; ut *AA* ad *BB*, quam proxime. Si resistentia

DE MOTU stentia in arcu B esset ad resistantiam in arcu A ut AB ad AA, **CORPORUM** tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propositionem superiorem. Ideoque resistantia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in Medio non resistente: & resistantia BB efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id est, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistantia in descensu corporis qua tempus producitur, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistantia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardescensibus paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitur; in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si Corpori Funependulo in Cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistantia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet BC arcum descensu descriptum, Ca arcum ascensu descriptum, & Aa differentiam arcuum: & stantibus quæ in Propositione

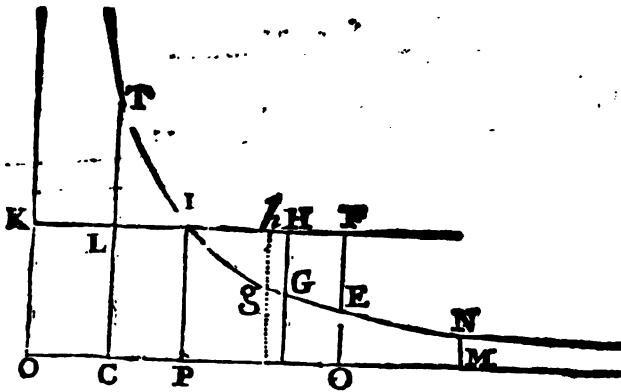
sitione

fitione xxv. constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus **LIBER**
 oscillans urgetur in loco quovis D , ad vim resistentiæ ut arcus **SECUNDUS.**
 CD ad arcum CO , qui semissis est differentiæ illius Aa . Ideoque
 vis qua corpus oscillans urgetur in Cycloidis principio seu puncto
 altissimo, id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus Cy-
 cloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum C ad
 arcum CO ; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus,
 seu dupla penduli longitudo, ad arcum Aa . *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI

*Posito quod Corpori in Cycloide oscillanti resistitur in du-
 plicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis
 singulis.*

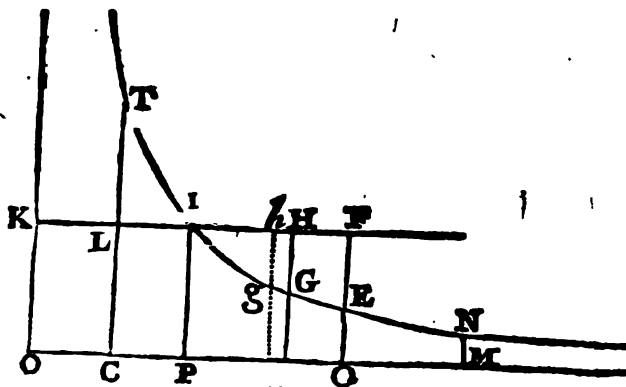
Sit Ba (Fig. Prop. xxv.) arcus oscillatione integra descriptus,
 sitque C infimum Cycloidis punctum, & CZ semissis arcus Cycloi-
 dis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæzatur resistentia cor-



poris in loco quovis D . Secetur recta infinita OQ in punctis O ,
 C, P, Q , ea lege ut (si erigantur perpendiculara OK, CT, PI, QE ,
 centroque O & Asymptoto OK, OQ describatur Hyperbola $TIGE$
 secans perpendiculara CT, PI, QE in T, I & E , & per punctum I
 agatur KF parallela Asymptoto OQ occurrens Asymptoto OK in
 K , & perpendicularis CT & QE in L & F) fuerit area Hyperbolica
 $PIEQ$ ad aream Hyperbolicam $PITC$ ut arcus BC descensu cor-
 poris descriptus ad arcum Ca ascensu descriptum, & area IEF ad

DE MOTU aream ILT ut OQ ad OC . Dein perpendiculo MN abscindatur
 CORPORUM area Hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream Hyperbolicam $PIEQ$
 ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendi-
 culo RG abscindatur area Hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream
 $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto de-
 scriptum: erit resistantia in loco D ad vim gravitatis, ut area
 $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ ad aream $PIENM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D ,
 æ urgetur, sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca , & arcus illi sint ut areæ
 $PINM, PIEQ, PIGR, PITC$; exponantur tum arcus tum
 vires per has areas respective. Sic insuper Dd spatium quam mini-
 mum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream
 quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehensam; & pro-



ducatur rg ad b , ut sint $GHbg$, & $RGgr$ contemporanea arearum
 $IGH, PIGR$ decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incremen-
 tum $GHbg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$, erit ad areæ
 $PIGR$ decrementum $RGgr$ seu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$
 ad RG ; adeoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OR \times GR$ seu
 $OP \times PI$, hoc est (ob æqualia $OR \times HG, OR \times HR - OR \times GR,$
 $ORHK - OPIK, PIHR$ & $PIGR + IGH$) ut $PIGR +$
 $IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$
 dicatur

dicatur Y , atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, erit incrementum areæ Y ut $PIGR - Y$.

LIBER
SECUNDUS.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo CD proportionalem, qua corpus urgetur in D : & R pro resistentia ponatur: erit $V - R$ vis tota qua corpus urgetur in D . Est itaque incrementum velocitatis ut $V - R$ & particula illa temporis in qua factum est conjunctim: Sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directe & particula eadem temporis inverse. Unde, cum resistentia (per Hypothesin) sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per Lem. 11.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & $V - R$ conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut $V - R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z , ut $PIGR - Z$.

Igitur area $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR - Y$, & area Z in ratione $PIGR - Z$. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescent, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo Ca , qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum C , resistentia ejus evanescet quam area Y . Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus CD , CT arcubus CB & Ca æquantur, adeoque ubi recta RG incidit in rectas QE & CT .

Et area Y seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit desinitque ubi nulla est,

adeoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta RG incidit in rectas QE & CT . Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescent, & propterea semper sunt æquales.

Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis est areæ Z , per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. $Q. E. D.$

Corol.

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ad aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ . Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide absque omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere, quæ & generalior sit & ad usus Philosophicos abunde satis accurata.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta a B æqualis sit Cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta D erigantur perpendiculara DK, quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum, & arcum ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit area BK a B a perpendicularis omnibus DK occupata.

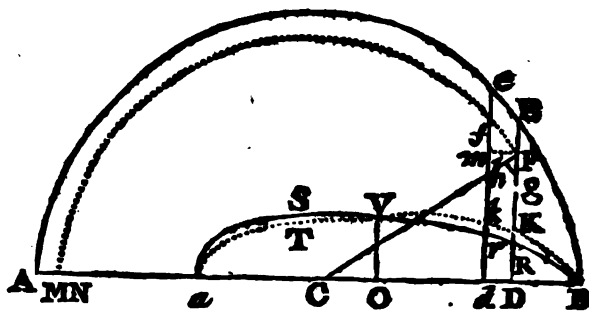
Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem $a B$, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem AB . Bisecetur AB in C , & punctum C repræsentabit infimum Cycloidis punctum, & erit CD ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in D secundum tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD , & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in $D E$ capiatur DK in ea ratione ad longitudinem penduli

DE MOTU
CORPORUM

Nam si uniformis sit resistentia DK , Figura $aBKkT$ rectangulum erit sub Ba & DK ; & inde rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa erit æquale rectangulo sub Ba & DK , & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum DK sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Prop. xxviii demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura $aBKkT$ Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem BA , velocitas in loco quovis D foret ut Circuli diametro AB descripti ordinatim applicata DE . Proinde cum Ba in Medio resistente, & BA in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates in singulis ipsius

Ba punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis BA , ut est Ba ad BA ; erit velocitas DK in Medio resistente ut Circuli vel Ellipseos super diametro Ba descripti



ordinatim applicata; adeoque Figura $BKVTa$ Ellipsis, quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit OV exponens resistentiæ in puncto Medio O ; & Ellipsis $aBRVS$, centro O , femiaxibus OB , OV descripta, Figuram $aBKVT$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est, Aa ad OV ut area semicirculi ad quadratum radii, five ut π ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{2}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia DK sit in duplicata ratione velocitatis, Figura $BKVTa$ Parabola erit verticem habens V & axem OV , ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{1}{2}Ba$ & OV quam proxime. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æquale rectangulo sub $\frac{1}{2}Ba$ & OV , adeoque OV æqualis $\frac{1}{2}Aa$: & propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola $BRV Sa$ congruat cum

cum Figura $BKVT$ in puncto medio V , hæc si ad partem alterutram BRV vel VS excedit Figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proximæ.

LIBER
SECUNDUS

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si Corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2} AB$ & arcuum illorum CB , Ca differentia Aa , æqualis erat areæ BKT . Et area illa, si maneat longitudo aB , augeatur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK ; hoc est, in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2} aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel aliqua quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Ex his Propositionibus, per oscillationes Pendulorum in Mediis quibuscunque, invenire licet resistantiam Mediorum. Aeris vero resistantiam investigavi per Experimenta sequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{2}{11}$, diametro digitorum *Londinensium* $6\frac{2}{3}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum $10\frac{2}{3}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro suspensionis distans; & e regione puncti illius collocaui Regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus Globus octavam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculari ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totaque oscillatione prima, ex descensu & ascensu subsequente composita, arcum digitorum fere quatuor; idem oscillationibus 164 amisit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 121, ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum $3\frac{1}{4}$. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respective. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. Dividantur hæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione una medioeri, quæ arcus digitorum $3\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{342}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione: & propterea (per Corol. 2. Prop. xxxi Libri hujus) resistantia Globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Designet



Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $AV + BV^{\frac{1}{2}} + CV^2$. Cum velocitates maximæ sint in Cycloide ut semisses arcuum oscillando descriptorum, in Circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcibus majores sint in Cycloide quam in Circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo sint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim) easdem fore, quamproxime, in utraque Curva: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, una cum resistentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eadem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in Circulo observatæ, velocitates vero maximæ ponendæ sunt arcibus dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16$ analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto & sexto numeros $1, 4$ & 16 pro V , & prodibit arcuum differentia

$$\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C \text{ in casu secundo; } \frac{2}{35^{\frac{1}{2}}} = 4A + 8B + 16C \text{ in ca-}$$

$$\text{su quarto; \& } \frac{8}{9^{\frac{2}{3}}} = 16A + 64B + 256C \text{ in casu sexto. Et ex his}$$

æquationibus, per debitam collationem & reductionem Analyticam, fit $A = 0,0000916$, $B = 0,0010847$, & $C = 0,0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0000916V + 0,0010847V^{\frac{1}{2}} + 0,0029558V^2$; & propterea cum (per Corollarium Propositionis xxx) resistentia Globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V , sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{1}{2}BV^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}CV^2$ ad longitudinem Penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0000583V + 0,0007546V^{\frac{1}{2}} + 0,0022169V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1 , in quarto 4 , in sexto 16 : erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut $0,0030298$ ad 121, in quarto ut $0,0417402$ ad 121, in sexto ut $0,61675$ ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit,

$$\text{erat } 120 - \frac{8}{9^{\frac{2}{3}}} \text{ seu } 119^{\frac{2}{3}} \text{ digitorum. Et propterea cum radius esset}$$

121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum suspensionis

DE MOTU
CORPORUM & centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat $124\frac{1}{11}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistantiam Aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{1}{2}$, idque in Cycloide, ad quam motum Penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{1}{2}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate Globus resistantiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,61675 ad 121, vel (si resistantiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistantia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus, ut 0,56752 ad 213,4 id est, ut 1 ad $376\frac{1}{10}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem digitorum 30,556 velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset, manifestum est quod vis resistantiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{10}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{10}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{1}{2}$, describere posset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus Pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsit tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculam tentet qui volet.

Descen-

<i>Descensus primus</i>	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Numerus Oscillat.</i>	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{2}$	$41\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$

LIBER
SECUNDUS.

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum Romanarum $26\frac{1}{2}$, fuspendi filo eodem, sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequen-
tium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

<i>Descensus primus</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
<i>Numerus Oscillat.</i>	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30
<i>Descensus primus</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Numerus Oscillat.</i>	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore seligendæ ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertia

$$\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C, \text{ in quinta } \frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C, \text{ in septima}$$

$$\frac{3}{30} = 16A + 64B + 256C. \text{ Hæc vero æquationes reductæ dant}$$

$$A = 0,001414, B = 0,000297, C = 0,000879. \text{ Et inde prodit resistẽtia}$$

$$\text{Globi cum velocitate } V \text{ moti, in ea ratione ad pondus suum}$$

$$\text{unciarum } 26\frac{1}{2}, \text{ quam habet } 0,0009V + 0,000207V\frac{1}{2} + 0,000659V^2$$

$$\text{ad penduli longitudinem } 121 \text{ digitorum. Et si spectemus eam so-}$$

$$\text{lummodo resistẽtiæ partem quæ est in duplicata ratione velocitatis,}$$

$$\text{hæc erit ad pondus Globi ut } 0,000659V^2 \text{ ad } 121 \text{ digitos. Erat au-}$$

$$\text{tem hæc pars resistẽtiæ in experimento primo ad pondus Globi}$$

$$\text{lignei unciarum } 57\frac{2}{3}, \text{ ut } 0,002217V^2 \text{ ad } 121: \text{ \& inde fit resistẽtia}$$

$$\text{Globi lignei ad resistẽtiam Globi plumbei (paribus eorum velocita-}$$

$$\text{tibus) ut } 57\frac{2}{3}, \text{ in } 0,002217 \text{ ad } 26\frac{1}{2} \text{ in } 0,000659, \text{ id est, ut } 7\frac{1}{2} \text{ ad } 1.$$

$$\text{Diametri Globorum duorum erant } 6\frac{3}{4} \text{ \& } 2 \text{ digitorum, \& harum}$$

$$\text{quadrata sunt ad invicem ut } 47\frac{1}{4} \text{ \& } 4, \text{ seu } 11\frac{1}{8} \text{ \& } 1 \text{ quamproxime.}$$

$$\text{Ergo resistẽtiæ Globorum æquivalentium erant in minore ratione}$$

$$\text{quam duplicata diametrorum. At nondum consideravimus resi-}$$

stẽtiam

DE MOTU
CORPORUM stentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inven-
ta resistentia subduci debet. Hanc accurate definire non potui,
sed majorem tamen inveni quam partem tertiam resistentiæ to-
tius minoris penduli; & inde didici quod resistentiæ Globorum,
dempta fili resistentia, sunt quam proxime in duplicata ratione dia-
metrorum. Nam ratio $7\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ ad $1 - \frac{1}{2}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe
abest a diametrorum ratione duplicata $11\frac{1}{2}$ ad 1.

Cum resistentia fili in Globis majoribus minoris sit momenti,
tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{1}{2}$ di-
gitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & cen-
trum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$ inter punctum suspensionis
& nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli descensu a no-
do descriptus, 32 dig. Arcus ascensu ultimo post oscillationes quin-
que ab eodem nodo descriptus, 28. dig. Summa arcuum seu ar-
cus totus oscillatione mediocri descriptus, 60 dig. Differentia ar-
cum 4 dig. Ejus pars decima seu differentia inter descensum &
ascensum in oscillatione mediocri $\frac{2}{3}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium
 $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a nodo descrip-
tus, ad arcum totum $67\frac{1}{2}$ dig. oscillatione mediocri a centro Glo-
bi descriptum: & ita differentia $\frac{2}{3}$ ad differentiam novam 0,4475.
Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, auge-
retur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augetur & ve-
locitas penduli diminueretur in ratione illa subduplicata, maneret
vero arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum diffe-
rentia 0,4475. Deinde si arcus descriptus augetur in ratione
 $124\frac{1}{2}$ ad $67\frac{1}{2}$, differentia ista 0,4475 augetur in duplicata illa ra-
tione, adeoque evaderet 1,5295. Hæc ita se haberent, ex hy-
pothesi quod resistentia Penduli esset in duplicata illa ratione ve-
locitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{1}{2}$ digito-
rum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum
oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu &
subsequente ascensu descriptorum foret 1,5295 digitorum. Et
hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat un-
ciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius
ex Globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod a puncto
suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{1}{2}$
digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptum fuit
 $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{1}{2}}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{1}{2}$,
producit 49, 396. Duxi autem differentias hæc in pondera Glo-
borum ut invenirem eorum resistentias. Nam differentia ori-
untur

untur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directe & pondera inverse. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem resistentiæ Globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam, ut 0,56752 ad 0,61675, id est, ut 45,453 ad 49,396; & pars resistentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; adeoque partes illæ sunt ut 318, 136 & 45,453 quamproxime, id est, ut 7 & 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{1}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{49}{64}$ sunt ut 7, 438 & 1, id est, ut Globorum resistentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major est quam quæ ex fili resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; sunt etiam, paribus velocitatibus; ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque (cum demonstratio Vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi sumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressionem experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum Fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere 166½ unciarum, diametro $3\frac{3}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum 134½ digitorum.

<i>Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum</i>	}	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
<i>Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum</i>		48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$
<i>Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum</i>		16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
<i>Numerus Oscillationum in aqua</i>			$\frac{29}{16}$	$1\frac{1}{2}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{3}{4}$	$13\frac{1}{2}$	
<i>Numerus Oscillationum in aere</i>		$85\frac{1}{2}$	287	535						
		00								In

DE MOTU
CORPORUM

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{7}$ in aqua amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{7}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob resistantiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $1\frac{1}{7}$ amissi sunt; ideoque resistantia penduli in aqua est ad ejus resistantiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{7}$. Hæc est proportio resistantiarum rotarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum a Globo, in Aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima, in casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8, & differentia illa arcuum, in casu columnæ quartæ, ad differentiam in casu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{1}{2}$ & $A = 21\frac{1}{2}$: atque adeo resistantia, cum sit ut $\frac{2}{11} AV + \frac{1}{2} CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11} V + 48\frac{2}{11} V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistantia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{2}{11}$ seu $61\frac{10}{11}$ ad $48\frac{2}{11}$; & ideirco resistantia penduli in aqua est ad resistantiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $61\frac{10}{11}$ ad $48\frac{2}{11}$ & 535 ad $1\frac{1}{7}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum rotum fuisset immersum, resistantia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistantia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistantiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate, in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistantiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistantia in aqua augebatur in ratione velocitatis plus-

pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc inci- LIBER -
 quod Arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & SECUNDUS.
 motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impedi-
 bat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur;
 reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime.
 Id tentabam conſtruendo pendulum ex Globis duobus, quorum
 inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime
 ſupra aquam filo affixus eſſet, & in Aere oſcillando, adjuvaret mo-
 tum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta au-
 tem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabula ſequenti de-
 ſcribitur.

<i>Arcus deſcenſu primo deſcriptus</i>	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
<i>Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus</i>	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$
<i>Arcuum diff. motui amiſſo proport.</i>	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
<i>Numerus Oſcillationum</i>	$3\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	34	53	$62\frac{1}{2}$

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut pen-
 dula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo filii ferrei erat
 pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertiã pars di-
 giti. Ad ſalum autem proxime ſupra Mercurium affixus erat Glo-
 bus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius conti-
 nuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti
 vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut
 pendulo in Fluido utroque ſucceſſive oſcillante, invenirem propor-
 tionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſten-
 tiam aquæ, ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti
 vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem
 adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes di-
 giti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam
 aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experi-
 mento priori magis ſidendum eſt, propterea quod in his ultimis
 Vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Am-
 pliatio Globo, deberet etiam Vas ampliari. Conſtitueram quidem
 huiusmodi experimente in vaſis majoribus & in liquoribus tum
 Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigi-
 dis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis
 ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati Flui-
 dorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proxime.

Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora, pari denſitate, procul-
 dubio

DE MOTU dubio magis resistunt quam liquidiora, ut Oleum frigidum quam
CORPORUM calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus Vini. Verum in liquoribus qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in Aere, in Aqua seu dulci seu salsa, in Spiritibus Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fœcibus per distillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Denique cum receptissima Philosophorum ætatis hujus opinio sit, Medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiognam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus unicum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuum, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter unicum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget.) Huic ponderi addebam pondus Aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxididis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis me-

tallorum

tallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retrac-
to ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque adeo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit $78 B$ resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ resistentia tota $A + B$ erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam $A + 78 B$ ut 77 ad 78, & divisim $A + B$ ad 77 B , ut 77 ad 1, indeque $A + B$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic vero disputamus ex Hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua causa latente oriatur, sed ab actione sola Fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

S E C T I O VII.

De Motu Fluidorum & Resistentia Projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum Systemata duo similia ex equali particularum numero constent, & particule correspondentes similes sint & proportionales, singulae in uno Systemate singulis in altero, & similiter sitae inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (eae inter se quae in uno sunt Systemate & eae inter se quae sunt in altero) & si non tangant se mutuo quae in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugant se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quae sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particule illae pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri.

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulae unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales Figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particulae correspondentes, ob similitudinem incæptorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant; & vires illae sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totae quibus particulae correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium secun-

secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si cœtra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentēs, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt per Corol. 1, & 8. Prop. IV. Lib. 1. si motus cœtra illa quiescant. Similiter moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter Systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occusūs suos primos, & propterea similes occusūs, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad Systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum Systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ Systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque Systemate respondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæc similes in reliquis Systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque adeo spacia diametris suis proportionalia describere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Isdem positis, dico quod Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.

Nam resistentiæ oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ Systematum se mutuo agitant, partim ex occusibus & reflexionibus particularum & partium majorum.

Prioris

DE MOTU
CORPORUM Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantia particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantia particularum Systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in Systemate prioris ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter earum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si Systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcumque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ Fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox resistentiam patitur quæ est in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, auferentur in duplicata ratione velocitatis, resistentia foret in eadem ratione duplicata accurate: ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunt igitur Media tria *A, B, C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispo-

Suppositis constantia. Partes Mediorum A & B fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut T & V , illæ Medii C ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D , E , F , G in his Mediis moveantur, priora duo D & E in prioribus duobus A & B , & altera duo F & G in tertio C ; sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E , & velocitas corporis F ad velocitatem corporis G , in subduplicata ratione virium T ad vires V : resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis E , & resistentia corporis F ad resistentiam corporis G , in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis F ut resistentia corporis E ad resistentiam corporis G . Sunt corpora D & F æquivelocia ut & corpora E & G ; & augendo velocitates corporum D & F in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii B in eadem ratione duplicata, accedet Medium B ad formam & conditionem Medii C pro lubitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium E & G in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum D & F sint ad invicem ut resistentiæ corporum E & G , accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F , ubi velocissime moventur, resistentiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis F sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis D in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elastico velocissime moti eadem fere est resistentia ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo Fluidi vis Elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum in Medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerissime motorum corporum resistentiæ in Fluido Elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

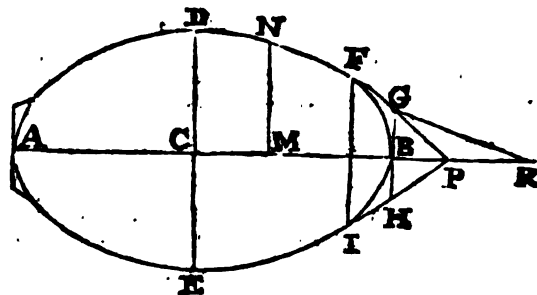
Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejusdem densitatis, quorum particule se mutuo non fugiunt, sive particule illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vi-

DE MOTU
CORPORUM

axis sui versus D progredientium frustorum minime resistatur: biseca altitudinem OD in Q & produc OQ ad S ut sit QS æqualis QC , & erit S vertex Coni cujus frustum quæritur.

Unde obiter, cum angulus CSB semper sit acutus, consequens est, quod si solidum $ADBE$ convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis $ADBE$ circa axem AB facta generetur, & tangatur figuræ generans a rectis tribus FG , GH , HI in punctis F , B & I , ea lege ut GH sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B , & FG , HI cum eadem GH contineant angulos FGB , BHI graduum 135 : solidum, quod convolutione figuræ $ADFGHIE$ circa axem eundem CB generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui AB progrediat, & utriusque terminus B præcedat. Quam quidem propositionem in construendis Navibus non inutilem futuram esse censeo.

Quod si Figura $DNFG$ ejusmodi sit curva ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendicularum NM , & a puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N , & axem productum secet in R ; fuerit MN ad GR ut GR cub. ad $4 BR \times GBq$:



Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB facta describitur, in Medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum Solidum circulare.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si Medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus equalibus & ad æquales ab invicem distancias libere dispositis constet: invenire resistensiam Globi in hoc Medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eadem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem Medio. Et ponamus quod particule Medii in quas Glo-

Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximam resiliat. Et cum resistentia Globi (per Propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia Cylindri, & Globus sit ad Cylindrum ut duo ad tria, & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ipsasque quam maxime reflectendo, duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: Cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui describit communicabit motum particulis qui sit ad totum Cylindri motum ut densitas Medii ad densitatem Cylindri; & Globus quo tempore totam longitudinem diametri suæ describit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit communicabit motum particulis qui sit ad totum Globi motum ut densitas Medii ad densitatem Globi; Et propterea Globus resistentiam patitur quæ sit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Cas. 2. Ponamus quod particulae Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quam in priore casu, & resistentia Globi erit etiam duplo minor quam prius.

Cas. 3. Ponamus quod particulae Medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, sed mediocri aliqua resiliant a Globo; & resistentia Globi erit in eadem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu & resistentiam in secundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si Globus & particulae sint infinite dura, & vi omni elastica & propterea etiam vi omni reflexionis destituta; resistentia Globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore Globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Corol. 2. Resistentia Globi, cæteris paribus, est in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 3. Resistentia Globi, cæteris paribus, est in duplicata ratione diametri.

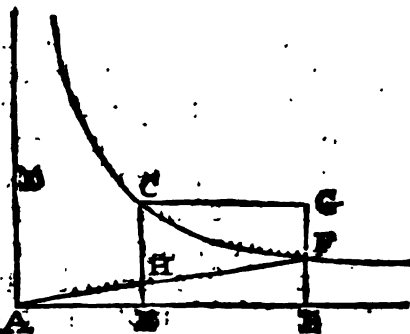
Corol. 4. Resistentia Globi, cæteris paribus, est ut densitas Medii.

Corol. 5. Resistentia Globi est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione densitatis Medii.

De Motu
CORPORUM

Corol. 6. Et motus Globi cum ejus resistantia sic exponi potest:

Sit AB tempus quo Globus per resistantiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad AB erigantur perpendiculara AD , BC . Sitque BC motus ille totus, & per punctum C Asymptotis AD AB describatur Hyperbola CF . Producat AB ad punctum quodvis E . Erigatur perpendicularum EF Hyperbolæ occurrens in F . Compleatur parallelogrammum $CBEG$, & agatur AF ipsi BC occurrens in H . Et si Globus tempore quovis BE , motu suo primo BC uniformiter continuato, in Medio non resistente describat spatium $CBEG$ per aream parallelogrammi expositum, idem in Medio resistente describet spatium $CBEF$ per aream Hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per Hyperbolæ ordinatam EF , amissa motus ejus parte FG . Et resistantia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem BH , amissa resistantiæ parte CH . Patent hæc omnia per *Corol. 1. Prop. v. Lib. II.*



Corol. 7. Hinc si Globus tempore T per resistantiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M : idem Globus tempore t in Medio resistente, per resistantiam R in duplicata velocitatis ratione decrefcentem, amittet motus sui M partem $\frac{tM}{T+t}$

amittente parte $\frac{T}{T+t}$, & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descriptum, ut Logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$. Nam area Hyperbolica $BCFE$ est ad rectangulum $BCGE$ in hac proportione.

Scholium.

In hac Propositione exposui resistantiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis, & ostendi quod hæc resistantia sit ad vim qua totus Globi motus vel tolli possit vel generari

DE MOTU
CORPORUM

ciei occurrens in K & L . Et velocitas aquæ effluentis per foramen EF ea erit quam aqua cadendo ab I & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest. Ideoque per Theoremata *Galilei* erit IG ad IH in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB , hoc est, in duplicata ratione circuli AB ad circulum EF ; nam hi circuli sunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipsos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate transeunt. De velocitate aquæ horizontem versus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæsiōem suam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicum tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: sed motum horizonti parallelum, a cohæsiōe illa oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis $ABNFEM$, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantum non tangat vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrime & sine omni resistantia labatur; hæc defluet per foramen EF eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ $ABNFEM$ impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

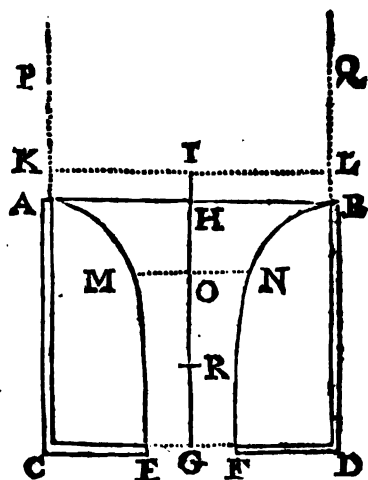
Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter: sed a lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quam in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6 , vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, si modo

modo diametros recte dimensus sum. Parabam utique laminam LIBRA planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis fo- SECUNDA ramini diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exiliensis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi sic, ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Deinde ubi vas aquæ plenum esset, aperui foramen ut aqua efflueret, & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quam accuratissime mensurata, prodiit partim viginti & unius quadragesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ quæ per foramen circulare in fundo vasis factum effluit, ea est quæ, pro diametro venæ, cum velocitate prædicta effluere debet.

In sequentibus igitur, plano foraminis parallelum duci intelligatur planum aliud superius ad distantiam diametro foraminis æqualem vel paulo majorem & foramine majore pertusum, per quod utique vena cadat quæ adæquate impleat foramen inferius *EF*, atque adeo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproxime. Spatium vero quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit & magis Mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vase per foramen *EF* egrediebatur, motum suum perpetuo servet & glacies quietem suam etiamsi in aquam fluidam resolvatur.

Cas. 2. Si foramen *EF* non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, si modo eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem



Qq

dem

mergatur, & altitudo aquæ stagnantis supra fundum vasis sit GR : velocitas quacum aqua quæ in vase est, effluet per foramen EF in aquam stagnantem, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IR acquirere potest. Nam pondus aquæ omnis in vase quæ inferior est superficie aquæ stagnantis, sustinebitur in æquilibrio per pondus aquæ stagnantis, ideoque motum aquæ descendentis in vase minime accelerabit. Patebit etiam & hic Casus per Experimenta, mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc si aquæ altitudo CA producat ad K , ut sit AK ad CK in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli AB : velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem KC acquirere potest.

Corol. 2. Et vis qua totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi Cylindricæ columnæ aquæ cujus basis est foramen EF , & altitudo $2GI$ vel $2CK$. Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere suo ab altitudine GI cadendo, velocitatem suam qua exilit, acquirere potest.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vase $ABDC$, est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum AB & EF , ad duplum circulum EF . Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG ; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I describere posset altitudinem IG , æqualis erit Cylindro cujus basis est circulus EF , & altitudo est $2IG$, id est, Cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo est $2IO$, nam circulus EF est ad circulum AB in subduplicata ratione altitudinis IH ad altitudinem IG , hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG : & quo tempore gutta cadendo ab I describere potest altitudinem IH , aqua egrediens æqualis erit Cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo est $2IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G describit altitudinum differentiam HG , aqua egrediens, id est, aqua tota in solido $ABNFEM$ æqualis erit differentix Cylindrorum, id est, Cylindro cujus basis est AB & altitudo $2HO$. Et propterea aqua tota in vase $ABDC$ est ad aquam totam cadentem in solido $ABNFEM$ ut HG ad $2HO$, id est, ut $HO + OG$ ad $2HO$, seu $IH + IO$ ad $2IH$. Sed pondus aquæ totius in solido $ABNFEM$ in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus

DE MOTU
CORPORUM

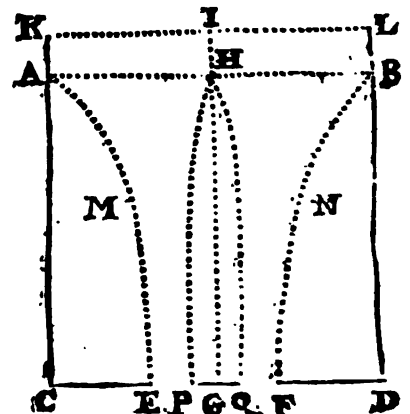
us aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2IH$, atque adeo ut summa circularum EF & AB ad duplum circulum EF .

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase $ABDC$, est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circularum AB & EF , ad differentiam eorundem circularum.

Corol. 5. Et ponderis pars quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circularum AB & EF , ad duplum circulum minorem EF , sive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summam circularum AB & EF , sive ut circulus AB ad excessum dupli circuli AB supra fundum. Nam ponderis pars qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circularum AB & EF , ad summam eorundem circularum, per Cor. 4; & pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circularum AB & EF . Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summam circularum AB & EF vel excessum dupli circuli AB supra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur Circellus PQ centro G descriptus & horisonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH . Sit enim $ABNFEM$ cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut supra, & congelari intelligatur aqua omnis in vase, tam in circuito cataractæ quam supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum



& celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit PHQ columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens H & altitudinem GH . Et quædam medum aqua in circuito cataractæ congelata $AMEC$, $BNFD$ convexa est in superficie interna AME , BNF versus cataractam cadentem, sic etiam hæc columna PHQ

CON-

convexa erit versus cataractam, & propterea major Cono cujus basis est circellus ille PQ & altitudo GH ; id est, major tertia parte Cylindri eadem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere Coni seu tertiæ partis Cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, minor est pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est HG . Nam stantibus jam positus, describi intelligatur dimidium Sphæroidis cujus basis est circellus ille & semiaxis sive altitudo est HG . Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ PHQ cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maxime directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi PQ in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem vero sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem Sphæroidis sit infinite velocior quam ejus motus horizontem versus. Et quo minor est circellus PQ eo acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, seu duabus tertiis partibus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo GH . Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, æquale est pondere Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce est medium Arithmeticum inter pondera Coni & Hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen EF : hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminenti, id est, pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH .

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproxime.

L E M M A IV.

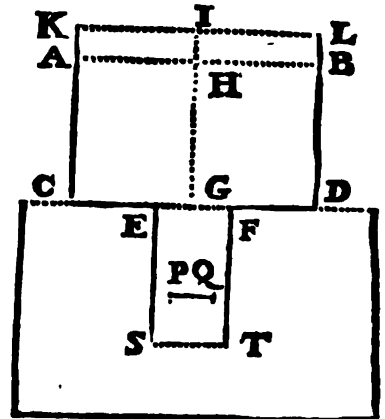
Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia Circuli eadem diametro descripti & eadem velocitate secundum lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minime opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in Circulum vertitur.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, est ad vim qua totus ejus motus interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproxime.

Nam si vas $ABDC$ fundo suo CD superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem Cylindricum $EFTS$ horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem Circellus PQ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producat CA ad K , ut sit AK ad CK in duplicata ratione quam habet excessus orificii canalis EF supra circellum PQ ad circulum AB : manifestum est (per Caf. 5, Caf. 6, & Cor. 1. Prop. xxxvi.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem KC vel IG acquirere potest.



Et

Et (per Cor. 10. Prop. xxxvi.) si vasis latitudo sit infinita, ut lineola HI evanescat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quacunque canalibus parte locatum.

Claudantur jam canalibus orificia EF, ST , & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalibus: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ , & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis qua præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF , sive ut $EFq - PQq$ ad EFq . Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati qua supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius, per Legum Cor. 5. id est, Resistentia circelli ascendentis erit ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$ ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirat, ut $EFq - PQq$ ad EFq .

Augeatur amplitudo canalibus in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq , interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea Velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest, Resistentia vero ejus æqualis evadet ponderi Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis IG , a qua Cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; & hac velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem Cylindri, hac velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentia circelli per Lemma IV; ideoque æqualis est Vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, generari potest quamproxime.

DE MOTU
CORPORUM

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus quo quadruplum longitudinis suæ describit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; adeoque vis illa qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli possit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis est resistentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si densitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & Vis qua resistit eodem tempore generari vel tolli potest, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Resistentiæ itaque Cylindri cujuscunque sit ad Vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproxime. Q. E. D.

Fluidum autem compressum debet ut sit continuum, continuum vero esse & non elasticum ut pressio omnis quæ ab ejus compressione oritur propagetur in instanti &, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, resistentiæ non mutet. Pressio utique quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & Resistentiæ creat. Pressio autem quæ oritur a compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiæ nec auget nec minuit. Certe Actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quam in ejus partes anticæ, ideoque resistentiæ in hac Propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticæ quam in posticas, si modo propagatio ejus infinite velocior sit quam motus corporis pressi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum & non elasticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis Mediorum.

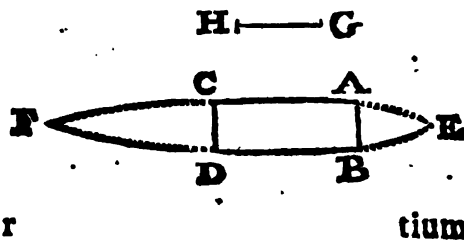
Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed Cylindrus in Medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axè canalis coincidat: Resistentiæ ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2} P Q q$ semel

semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione densitatis Medii ad densitatem Cylindri.

Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - PQq$ ad EFq semel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: resistentia Cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri.

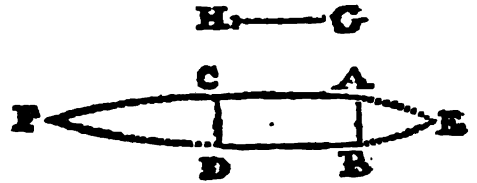
Scholium.

In hac Propositione resistentiam investigavimus quæ oritur a sola magnitudine transversæ sectionis Cylindri, neglecta resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo Propositionis xxxvi. obliquitas motuum quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen EF , impedivit effluxum aquæ illius per foramen; sic in hac Propositione, obliquitas motuum quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes Cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vase diminuit, id est, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia transirent per foramen EF , ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hac Propositione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum Cylindro, & sola maneat resistentia quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum Cylindri, concipiendum est quod partes fluidi quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. Sit $ABCD$ rectangulum, & sint AE & BE arcus duo Parabolici axe AB descripti, latere autem recto quod sit ad spa-



De Motu
Corporum

tium HG , describendum a Cylindro cadente, dum velocitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2} AB$. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto quod sit prioris lateris recti quadrum



plum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim qua totus Cylindri motus, interea dum longitudo $4 AC$ motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas Fluidi habet ad densitatem Cylindri quamproxime. Et hac vi Resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. xxxvi.

LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis Cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impediunt.

Nam spatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

LEMMA VI.

Isdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per Lemma v & Motus Legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & corpora in partes contrarias equali velocitate per canalem ferantur: aequales erant eorum resistentia inter se.

Constat ex Lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scholium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axè canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his Lemmatis corpora esse politissima supponimus, & Medii tenacitatem & frictionem esse nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus suis obliquis & superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, & corporibus ad ipsorum partes anticæ & posticæ adhæreant, perinde ut in Scholio Propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante & post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propositionibus non agimus de fluidis elasticis, sed de non elasticis; non de insidentibus fluido, sed de alte immerfis. Et ubi resistentia corporum in fluidis non elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantum tam in fluidis elasticis, qualis est Aer, quam in superficiebus fluidorum stagnantium, qualia sunt maria & paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in Fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit, vel generari, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi quamproxime.

Nam Globus est ad Cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea Vis illa, quæ tollere possit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet interea dum Globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem Cylindri est ad hanc Vim quamproxime ut densitas Fluidi ad densitatem Cylindri vel Globi, per Prop. xxxvii.; & Resistentia Globi æqualis est Resistentiæ Cylindri, per Lem. v, vi, vii. *Q. E. D.*

Corol. 1. Globorum, in Mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & duplicata ratione densitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quacum Globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest Globus idem, eodem pondere, absque resistentia cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas Globi ad densitatem Fluidi. Nam Globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisita, describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas Globi ad densitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit quo tempore Globus octo tertias diametri suæ eadem velocitate describit, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi: ideoque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi Resistentiæ, & propterea Globum accelerare non potest.

Corol. 3. Data & densitate Globi & velocitate ejus sub initio motus, ut & densitate fluidi compressi quiescentis in qua Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. xxxv.

Corol.

Corol. 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descriperit, per idem *Corol. 7.* LIBER
SECUNDUS.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per Fluidum in canali Cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suae describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quae componitur ex ratione orificii canalisi ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicata orificii canalisi ad excessum hujus orificii supra circulum maximum Globi, & ratione densitatis Fluidi ad densitatem Globi quamproxime.

Patet per *Corol. 2. Prop. xxxvii*; procedit vero demonstratio quemadmodum in Propositione praecedente.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi in Medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per Phenomena.

Sit *A* pondus Globi in vacuo, *B* pondus ejus in Medio resistente, *D* diameter Globi, *F* spatium quod fit ad $\frac{1}{2}$ *D* ut densitas Globi ad densitatem Medii, id est, ut *A* ad *A* - *B*, *G* tempus quo Globus pondere *B* absque resistentia cadendo describit spatium *F*, & *H* velocitas quam Globus hocce casu suo acquirit. Et erit *H* velocitas maxima quacum Globus, pondere suo *B*, in Medio resistente potest descendere, per *Corol. 2. Prop. xxxviii*; & resistentia quam Globus ea cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi *B*: resistentia vero quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus *B* in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam *H*, per *Corol. 1. Prop. xxxviii*.

De Motu
CORPORUM

Hæc est resistentia quæ oritur ab inertia materiæ Fluidi. Ea vero quæ oritur ab elasticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, sic investigabitur.

Demittatur Globus ut pondere suo B in Fluido descendat; & sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit Logarithmo $0,4342944819 \frac{2P}{G}$ sitque L Logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1} H$, altitudo

autem descripta erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 F + 4,605170186 L F$.

Si Fluidum satis profundum sit, negligi potest terminus $4,605170186 L F$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 F$ altitudo descripta quampro-

xime. Patent hæc per Libri secundi Propositionem nonam & ejus Corollaria, ex Hypothesi quod Globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliâ insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione annotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in Fluido cadentis velocitas & descensus facilius innotescant, composui Tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus; secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maxima 10000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta, existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima describit, & quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maxima descripta.

Numeri in quarta columna sunt $\frac{2P}{G}$, & subducendo numerum

$1,3862944 - 4,6051702 L$, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus a corpore, vi ponderis sui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora

<i>Tempora P</i>	<i>Velocitates cadentis in fluido</i>	<i>Spatia caden- do descripta in fluido</i>	<i>Spatia motu maximo de- scripta.</i>	<i>Spatia caden- do descripta in vacuo.</i>
0,001G	99999 ²⁹ / ₃₀	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,02F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	99999999 ¹ / ₂	18,6137056F	20F	100F

Scholium.

Ut resistentias Fluidorum investigarem per Experimenta, paravi
 vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digito-
 rum novem pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum
 femisse, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plum-
 bo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente
 descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus
Londinensis continet 76 libras *Romanas* aquae pluvialis, & pedis
 hujus digitus solidus continet $\frac{2}{3}$ uncias librae hujus seu grana 253 $\frac{1}{2}$;
 & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana
 132,645

DE MOTU $132,645$ in Medio aeris, vel grana $132,8$ in vacuo; & globus qui-
CORPORUM libet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus
in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{2}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

Pondus globi in vacuo est $156\frac{1}{2}$ gran., & excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est $79\frac{3}{8}$ gran. Unde prodit globi diameter $0,84224$ partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in vacuo, ita densitas aquæ ad densitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* $2,24597$ dig.) ad spatium $2 F$, quod proinde erit $4,4256$ dig. Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{3}{8}$, cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{2}$; & pondere granorum 77 , eodem tempore, absque resistentia cadendo in aqua describet digitos $95,219$; & tempore G , quod sit ad minutum unum secundum in subduplicata ratione spatii F seu $2,2128$ dig. ad $95,219$ dig. describet $2,2128$ dig. & velocitatem maximam H acquireret quacum potest in aqua descendere. Est igitur tempus G $0,15244$. Et hoc tempore G , cum velocitate illa maxima H , globus describet spatium $2 F$ digitorum $4,4256$; ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum $116,1245$. Subducatur spatium $1,3862944 F$ seu $3,0676$ dig. & manebit spatium $113,0569$ digitorum quod globus cadendo in aqua, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semicirculum maximum globi & ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circulum maximum globi, id est, in ratione 1 ad $0,9914$. Quo factò, habebitur spatium $112,08$ digitorum, quod Globus cadendo in aqua in hoc vase ligneo tempore minutorum quatuor secundorum per Theoriam describere debuit quamproxime. Descripsit vero digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres Globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{2}$ granorum in aere & $5\frac{1}{2}$ granorum in aqua, successivè demittebantur; & unusquisque cecidit in aqua tempore minutorum secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112 .

Com-

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{1}{2}$ gran., LIBER
 excessus hujus ponderis supra pondus in aqua $71\frac{1}{2}$ gran., diameter SECUNDUS.
 globi 0, 81296 dig., octo tertiæ partes hujus diametri 2, 16789 dig.,
 spatium 2 F 2, 3217 dig., spatium quod globus pondere $5\frac{1}{2}$ gran., tem-
 pore 1", absque resistantia cadendo describat 12, 808 dig., & tem-
 pus G 0", 301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest
 in aqua vi ponderis $5\frac{1}{2}$ gran. descendere, tempore 0", 301056 de-
 scribet spatium 2, 3217 dig. & tempore 15" spatium 115, 678 dig. Sub-
 ducatur spatium 1, 2862944 F seu 1, 609 dig. & manebit spatium
 114, 069 dig. quod proinde globus eodem tempore in vase latissi-
 mo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri de-
 trahi debet spatium 0, 895 dig. circiter. Et sic manebit spatium
 113, 174 dig. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15" de-
 scribere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero digi-
 tos 112 per Experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121
 gran. in aere & 1 gran. in aqua, successive demittebantur; & ca-
 debant in aqua temporibus 46", 47", & 50", describentes altitudi-
 nem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40" circiter.
 Quod tardius ceciderunt, vel bullulis nonnullis globo adhærenti-
 bus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus
 globum demittentis, vel erroribus insensibilibus in ponderandis
 globis in aqua, vel denique minori proportioni resistantiæ quæ a
 vi inertæ in tardis motibus oritur ad resistantiam quæ oritur ab
 aliis causis, tribuendum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua
 debet esse plurimum granorum ut experimentum certum & fide dig-
 num reddatur.

Exper. 4. Experimenta hætenus descripta cæpi ut investigarem
 resistantias fluidorum antequam Theoria, in propositionibus pro-
 xime præcedentibus exposita, mihi innotesceret. Postea, ut Theo-
 riam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna
 digitorum $8\frac{1}{2}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde
 ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pon-
 dere 139 $\frac{1}{2}$ granorum in aere & 7 $\frac{1}{2}$ granorum in aqua. Et hos de-
 misi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta
 secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea
 cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant, quia ca-
 lor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi
 in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

DE MOTU frigitis reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in
CORPORUM aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissime, ne impulsus aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successive temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpius capto, Globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cedere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{1}{2}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua $132\frac{10}{100}$ gran. Diameter globi 0,99868 dig. Octo tertiæ partes diametri 2,66315 dig. Spatium 2 F 2,8066 dig. Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi absque resistantia cadendo describit 9,88164 dig. Et tempus G 0",376843. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0",376843 describit spatium 2,8066 digitorum, & tempore 1" spatium 7,44766 digitorum, & tempore 25" seu oscillationum 50 spatium 186,1915 dig. Subducatur spatium 1,386294 F, seu 1,9454 dig. & manebit spatium 184,2461 dig. quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; & habebitur spatium 181,86 digitorum; quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{1}{8}$ gran. in aere & $21\frac{1}{2}$ gran. in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproxime.

Exper.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{1}{2}$ gran. in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitofum duorum.

LIBER
SECUNDUS.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{1}{2}$ gran. in aere & $35\frac{1}{2}$ gran. in aqua sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproxime.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi, quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset, primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas, globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo descendere deberet, & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, & in majoribus aquam magis agit. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus, & globum ita demissi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurimum quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 51 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor pondere granorum $273\frac{1}{2}$ in aere & $140\frac{1}{2}$ in aqua, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum

De Motu non patiorum quam 12, non plurium quam 13, describentes alti-
CORPORUM tudinem digitorum 182.

Per Theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{2}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{1}{2}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsus eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam vero cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{1}{2}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{2}{3}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{1}{2}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{1}{3}$ in aqua, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc Experimenta manifestum est quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per Theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, resistentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum; & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aqua ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velocius sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes, & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquent, nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per Prop. xxxii & xxxiii) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut resistentia sit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velocius paulo minus premuntur a tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Con-

Congruit igitur Theoria cum phænomenis corporum cadentium. LIBER. SECUNDUS.
 in Aqua, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Ecclesiæ S^{ti} Pauli, in urbe Londini, globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum Londinensium 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic Tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum, ut Tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum ferreum a pessulo ad imam Ecclesiæ partem tendens, demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in Tabula sequente.

<i>Globorum mercurio plenorum.</i>			<i>Globorum aere plenorum.</i>		
<i>Pondera</i>	<i>Diametri</i>	<i>Tempora cadendi.</i>	<i>Pondera</i>	<i>Diametri</i>	<i>Tempora cadendi.</i>
908 gran.	0, 8 digit.	4"	510 gran.	5, 1 digit.	8 ¹ / ₂ "
983	0, 8	4—	642	5, 2	8
866	0, 8	4—	599	5, 1	8
747	0, 75	4+	515	5, 0	8 ¹ / ₄ "
808	0, 75	4	483	5, 0	8 ¹ / ₂ "
784	0, 75	4+	641	5, 2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam Galilei) minutis quatuor secundis describent pedes Londinenses 257, & pedes 220 minutis tantum 3" 42". Tabula lignea utiq̃e, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda sua devolutione impediēbat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbēbant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodēcim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui Tabulæ devolventi paulo diutius incumbēbant propter magnitudinem diametrorum. Quo factō, tempora quibus globi sex majores cecidere, evadent 8" 12", 7" 42", 7" 42", 7" 57", 8" 12", & 7" 42".

DE MOTU CORPORUM Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus cecidit, tempore 8" 12"', describendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis, est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ gran. seu $19\frac{1}{10}$ gran; ideoque pondus globi in vacuo est $502\frac{1}{10}$ gran. & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{1}{10}$ ad $19\frac{1}{10}$, & ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{2}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 ped. 11 dig. Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{1}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 gran. describit digitos 185, 905, & eodem pondere 483 gran. etiam in vacuo describit spatium F seu 14 ped. $5\frac{1}{2}$ dig. tempore 57" 58"', & velocitatem maximam acquirit quacum possit in aere descendere. Hac velocitate globus, tempore 8" 12"', describet spatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{2}$. Aufer 1,3863 F seu 20 ped. $0\frac{1}{2}$ dig. & manebunt 225 ped. 5 dig. Hoc spatium igitur globus, tempore 8" 12"', cadendo describere debuit per Theoriam. Descripsit vero spatium 220 pedum per experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci Tabulam sequentem.

Globorum pondera	Diametri	Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.	Spatia describenda per Theoriam.	Excessus.
510 gran.	5, 1 dig.	8" 12"	226 ped. 11 dig.	6 ped. 11 dig.
642 . . .	5, 2	7 42	230 9	10 9
599	5, 1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5, 2	7 42	230 7	10 7

Globorum igitur tam in Aere quam in Aqua motorum resistentia prope omnis per Theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus proportionalis est.

In Scholio quod Sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in Aere, Aqua, & Argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. Idem hic ostendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in Aere & Aqua. Nam pendula singulis oscillationibus motum eient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia sibi quo pendulum suspendebatur, totam Penduli resistentiam majorem reddiderunt quam resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in Scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum Aqua, describendo longitudinem semidiametri suæ in Aere, amittere deberet motus sui partem $\frac{1}{1342}$. At per Theoriam in hac septima Sectione expositam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, amittere deberet motus sui partem tantum $\frac{1}{4186}$, posito quod densitas Aquæ sit ad densitatem Aeris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in Aere, Aqua, & Argento vivo oscillantium resistentiæ a causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his Mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, satis recte exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motus sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus sub initio motus, & T tempus quo globus velocitate V in vacuo describet spatium quod sit ad spatium $\frac{3}{2}D$ ut densitas globi ad densitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & describet spatium quod sit ad spatium uniformi velocitate V eodem tempore descriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$

multiplicatus per numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, per

Corol.

DE MOTU Corol. 7. Prop. xxxv. In motibus tardis resistentia potest esse paulo
CORPORUM minor, propterea quod figura Globi paulo aptior sit ad motum quam
 figura Cylindri eadem diametro descripti. In motibus velocibus resistentia potest esse paulo major, propterea quod elasticitas & compressio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujusmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis Aer, Aqua, Argentum vivum & similia fluida, per divisionem partium in infinitum, subtilisarentur & fierent Media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam resistentia, de qua agitur in Propositionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus essentialis est & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium, diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertię cui resistentia, de qua hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia Cœlestia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in omnes partes liberrime & absque omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse potest in Mediis infinite fluidis quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate sua, non tantum motum cient in fluido, sed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea resistentia in omni fluido, est ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor esse potest in Æthere subtilissimo pro densitate Ætheris, quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

S E C T I O VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particule Fluidi in directum jacent.

Si jaceant particule a, b, c, d, e in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab a ad e ; at particula e urget particulas oblique positas f & g oblique, & particule illæ f & g non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis anterioribus b & k ; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulciantes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab anterioribus l & m easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas posteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit.

Q. E. D.

Corol. Si pressionis, a dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto A propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas & obstaculo $NBCK$ perforato in BC , intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem APQ , quæ per foramen circulare BC transit. Planis transversis de, fg, hi distinguatur conus APQ in frusta; & interea dum conus ABC , pressionem propagando, urget frustum

T t

stum

De Motu frustum conicum ulterius $defg$ in superficie de , & hoc frustum
CORPORUM urget frustum proximum $fgib$ in superficie fg , & frustum illud
 urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum
 est (per motus Legem tertiam) quod frustum primum $defg$,
 reactione frusti secundi $fgbi$, tantum urgebitur & premetur in
 superficie fg , quantum urget & premit frustum illud secundum.
 • Frustum igitur $degf$ inter conum Ado & frustum $fbig$ com-
 primitur utrisque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figu-
 ram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatur undique.

Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus de , fg , con-
 bitur cedere ad latera df , eg ; ibique (cum rigidum non sit, sed
 omnimodo Fluidum) excurreret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens
 adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi,
 premet tam Fluidum ambiens ad latera df , eg quam frustum $fgbi$
 eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur a la-
 teribus df , eg in spacia NO , KL hinc inde, quam propagatur a
 superficie fg versus PQ , QE , VD .

P R O

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramine in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto A per foramen BC pergatque (si fieri potest) in spatio conico $BCQP$ secundum lineas rectas divergentes a puncto C . Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque $de, fg, hi, kl, \&c.$ undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in Fluidi partibus immotis LK, NO , defluet eadem de jugorum terminis $e, g, i, l, \&c. d, f, h, k, \&c.$ hinc inde, versus KL & NO : & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in Fluidi partibus immotis LK, NO ; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus KL & NO . Et quoniam motus undarum ab A versus PQ fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ, hinc inde, versus KL & NO eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum, hinc inde, versus KL & NO , eadem velocitate qua undæ ipsæ ab A versus PQ rectis progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde, versus KL & NO , ab undis dilatatis $rfg, shis, tkl, umnu, \&c.$ occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod de, fg, hi, kl, mn , designent pulsus a puncto A , per Medium Elasticum, successive propagatos. Pulsus propagari concipere per successivas condensationes & rarefactiones Medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphericam occupet superficiem circa centrum A descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedent intervalla. Designent autem lineæ $de, fg, hi, kl, \&c.$ densissimas pulsuum partes, per foramen BC propagatas. Et quoniam Medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus KL & NO , dilatabit sese tam versus spatia illa KL, NO utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla;

DE MOTU
CORPORUM

eoque pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pulsus eadem fere celeritate sese in Medii partes quiescentes KL , NO hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem fere celeritate sese dilatant undique in spatia immota KL , NO , qua propagantur directe a centro A ; adeoque spatium totum $KLON$ occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interposito audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admitti sese in omnes cubiuli partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppositis, quam a fenestra directe propagati, quantum ex sensu judicare licet.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen BC : & quoniam propagatio ista non fit, nisi quatenus partes Medii centro A propiores urgent commoventque partes posteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent

cedent eadem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales LIBER
SECUNDUS.
 KL & NO , quam anteriores PQ , eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen BC transiit, dilatari incipiet & abinde, tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari.
 $Q. E. D.$

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsum undique in directum; in Medio vero non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo comprimunt easdem & condensabunt, dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hæc Medii partes, hæc similibus tremoribus agitatae agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatae agitabunt posteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensantur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando; non rareficerent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt, idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatae, ob motum suum progressivum quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphericas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus

DE MOTU in Undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent
CORPORUM hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulo-
 rorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propa-
 gabuntur. Nam gravitas Undarum supplet locum vis Elasticæ.

Cas. 2. Quod si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt.
Q. E. D.

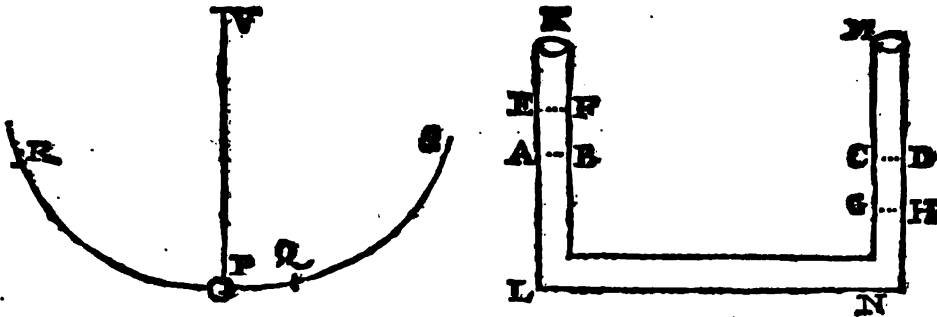
Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad pressionem, per Medium ambiens, secundum lines rectas propagandam conducere. Debeat ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium Flammæ, sed a totius dilatatione derivari.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in Canalis cruribus erectis K L, M N vicibus alternis ascendat & descendat; construaturn autem Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in Canalis: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus Pendulum oscillatur.

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando, & resistantiam aquæ quæ oritur

oritur ab attritu canalıs, hic non confidero. Designent igitur AB , CD mediocrem altitudinem aquę in crure utroque; & ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF , descenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH . Sit autem P corpus pendulum, VP filum, V punctum suspensionis, $SPQR$ Cycloıs quam Pendulum describat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, qua motus aquę alternis vicibus acceleratur



& retardatur, est excessus ponderis aquę in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure KL ascendit ad EF , & in crure altero descendit ad GH , vis illa est pondus duplicatum aquę $EABF$, & propterea est ad pondus aquę totius ut AE seu PQ ad VP seu PR . Vis etiam, qua pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in Cycloide, (per Corol. Prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia PQ a loco infimo P , ad Cycloidis longitudinem PR . Quare aquę & penduli, æqualia spatia AE , PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illę movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficiantque ut motu reciproco simul eant & redeant. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur aquę ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt Isochronę.

Corol. 2. Si longitudo aquę totius in canali sit pedum *Parissen-* *sium* $6\frac{1}{2}$: aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{2}$ longitudinis, tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol.

DE MOTU CORPORAUM *Corol. 3.* Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicata.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicata ratione latitudinum.

Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficiet.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel valibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem; sintque *A, C, E*, &c. undarum culmina, & *B, D, F*, &c. vallis intermediæ. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A, C, E*, &c. quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eisdemque temporis leges observabit: & propterea (per Prop. XLIV) si distantia inter undarum loca altissima *A, C, E* & infima *B, D, F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altissimæ *A, C, E*, tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum Undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, Unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur, sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, adeoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. *Q. E. I.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{8}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficiet; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $118\frac{1}{2}$, & horæ spatium pedes 11000 quamproxime.

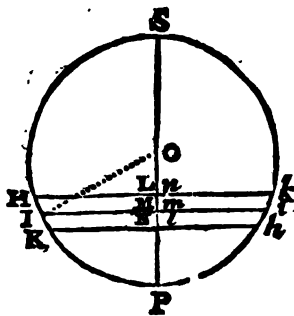
Corol. 2.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum LIBER
SECUNDUS. velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod partes aquæ recta ascendunt vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per Fluidum propagatis, singule Fluidi particule, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis Penduli.



Designent $AB, BC, CD,$ &c. pulsum successivorum æquales distantias; ABC plagam motus pulsum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria Physica Medii quiescentis, in recta AC ad æquales ab invicem distantias sita; $Ee, Ff, Gg,$ spatia æqualia perbrevia per

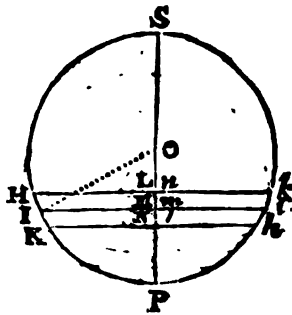
quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt; α, ϕ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG lineolas Physicas seu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca $\alpha\phi, \phi\gamma$ & $e\phi, \phi g.$ Rectæ Ee æqualis ducatur recta $PS.$ Bifecetur eadem in $O,$ centroque O & intervallo OP describatur circulus $SIPi.$ Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh,$ si demittatur ad PS perpendiculum HL vel $bl,$ & capiatur E æqualis PL vel $Pl,$ punctum Physicum E reperietur

DE MOTU
CORPORUM

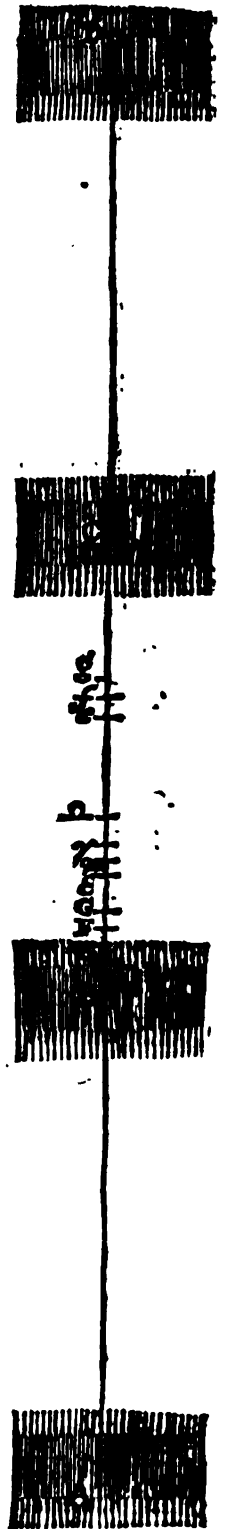
in ϵ . Hac lege punctum quodvis E , eundo ab E per ϵ ad e , & inde redeundo per ϵ ad E , iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia $PHSb$ capiantur æquales arcus HI, IK vel bi, ik , eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsum intervallum totum BC . Et demissis perpendicularis IM, KN vel im, kn ; quoniam puncta E, F, G motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C ;

si PH vel $PHSb$ sit tempus ab initio motus puncti E , erit PI vel PHS tempus ab initio motus puncti F , & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti G ; & propterea $E\epsilon, F\phi, G\gamma$ erunt ipsis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipsis $Pl,$



Pm, Pn in punctorum reditu, æquales respective. Unde $\epsilon\gamma$ seu $EG + G\gamma - E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + Ln$. Sed $\epsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis Medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG - LN$ ad EG ; in reditu autem ut $EG + Ln$ seu $EG + LN$ ad EG . Quare cum sit LN ad KH ut IM ad radium OP , & KH ad EG ut circumferentia $PHSbP$ ad BC , id est (si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsum BC) ut OP ad V ; & ex æquo LN ad EG , ut IM ad V ; erit expansio partis EG punctive Physici F in loco $\epsilon\gamma$, ad expansionem



panfionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo EG , ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco γ , est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG , ut $\frac{I}{V-IM}$ ad $\frac{I}{V}$ in itu, in reditu vero ut

$\frac{I}{V+im}$ ad $\frac{I}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum

Physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{I}{V-HL}$ & $\frac{I}{V-KN}$ ad

$\frac{I}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elasticam mediocrem, ut

$\frac{HL-KN}{VV-V \times HL-V \times KN+HL \times KN}$ ad $\frac{I}{V}$. Hoc est, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{I}{V}$, sive ut $HL-KN$ ad V , si modo (ob angustos

limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V . Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $HL-KN$, hoc est (ob proportionales $HL-KN$ ad HK , & OM ad OI vel OP , datasque HK & OP) ut OM , id est, si Ff bisecetur in α , ut $\alpha\phi$. Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum Physicorum ϵ & γ , in reditu lineolæ Physicæ $\epsilon\gamma$ est ut $\alpha\phi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ϵ supra vim elasticam puncti γ ,) est vis qua interjecta Medii lineola Physica $\epsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Physicæ $\epsilon\gamma$, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco α . Proinde tempus (per Prop. xxxviii. Lib. i.) recte exponitur per arcum PI ; & Medii pars linearis $\epsilon\gamma$ lege præscripta movetur, id est, lege oscillantis Penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q. E. D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem fit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola Physica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates, sunt in ratione composita ex subduplicata ratione vis Elasticæ directe & subduplicata ratione densitatis inverse; si modo Fluidi vis Elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantiae in his Mediis æquentur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verum tamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibilibiter, ideoque pro Physice accurata haberi potest. Sunt autem vires Elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes, itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiae seu longitudines sint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, est ut pulsuum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione subduplicata materiæ & ratione subduplicata spatii, atque adeo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurreunt; & propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In Mediis igitur densitate & vi Elasticæ paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si Medii vel densitas vel vis Elasticæ intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elasticæ. & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus quo motus

tus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicata ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicata ratione vis Elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione subduplicata densitatis Medii inverſe & ratione subduplicata vis Elasticæ directe. *Q. E. D.*

Hæc Propoſitio ulterius patebit ex constructione ſequentis.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis Medii denſitate & vi Elatiica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri comprimi; ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore Pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione XLVII conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica *EF*, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, a vi Elatiica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimenter tota longitudini *PS* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in ſubduplicata ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2} PS$ ſeu *PO* ad longitudinem A. Sed vis Elatiica qua lineola Phyſica *EG*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis XLVII.) ad ejus vim totam Elatiicam ut *HL—KN* ad *V*, hoc eſt (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut *HK* ad *V*: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *EG* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem *EG*; adeoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut *HK* \times A ad *V* \times *EG*, ſive ut *PO* \times A ad *V* *V*, nam *HK* erat ad *EG* ut *PO* ad *V*. Quare cum tem-

DE MOTU
CORPORUM

pora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elastica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in subduplicata ratione VV ad $PO \times A$, atque adeo ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est A , in subduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & subduplicata ratione PO ad A conjunctim; id est, in ratione integra V ad A . Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC . Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium BC , est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut V ad A , id est, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius est A . Tempus autem, quo pulsus percurreret spatium BC , est ad tempus quo percurreret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurreret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulsuum ea est quam acquirunt Gravia, æqualiter accelerato motu cadendo, & casu suo describendo dimidium altitudinis A . Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisita, pulsus percurreret spatium quod erit æquale toti altitudini A , adeoque tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, percurreret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: est enim tempus casus ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut Fluidi vis Elastica directe & densitas ejusdem inverse; velocitas pulsuum erit in ratione composita ex subduplicata ratione densitatis inverse & subduplicata ratione vis Elastice directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola
(per

(per Prop. xli. & xlii.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriuntur, nihil aliud sunt quam aeris pulsus propagati, per Prop. xliii. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad 13 $\frac{2}{3}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere possit, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cum Pendulum digitos 39 $\frac{1}{2}$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29725, seu digitos 356700 longum, oscillationem consimilem tempore minorum secundorum 190 $\frac{1}{2}$ absolvere debet. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 186768, adeoque tempore minuti unius secunda pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aeris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aeris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & factes sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aeris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aeris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aeris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979 quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{11}{10}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aeris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aere latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aeris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus

DE MOTU
CORPORUM

tus ille celerius propagabitur per solum aerem verum; idque in subduplicata ratione minoris materiz. Ut si Atmosphæra constet ex decem partibus aeris veri & una parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aeris veri: ideoque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno & autumnali, ubi aer per calorem temperatum rarefcit & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aer per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicata ratione densitatis; & vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo; conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* vero 1070.

Cognita sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. Invenit utique *D. Sauveur* (factis a se experimentis) quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; adeoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi 10 $\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissime distamus a corporibus sonoris, quam cum proxime absumus, patet ex Corollario Propositionis *xvii* Libri hujus. Sed & cur soni in Tubis stenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocos singulis recursibus a causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impredientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo singulis recursibus impresso, magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIONIO

S E C T I O IX.

De Motu Circulari Fluidorum.

HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes Fluidi separantur ab invicem.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si Cylindrus solidus infinite longus in Fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem, perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium Fluidi sunt ut ipsarum distantiarum ab axe Cylindri.

Sit *AFL* Cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM, CHN, DIO, EKP*, &c. distinguatur Fluidum in Orbes Cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte

DE MOTU parte convexa ; prævalebit impressio fortior , & motum Orbis vel
CORPORUM accelerabit vel retardabit , prout in eandem regionem cum ipsius
 motu vel in contrariam dirigitur . Proinde ut Orbis unusquisque
 in motu suo uniformiter perseveret , debent impressiones ex parte
 utraque sibi invicem æquari , & fieri in regiones contrarias . Unde
 cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translatio-
 nes ab invicem , erunt translationes inverse ut superficies , hoc
 est , inverse ut superficierum distantia ab axe . Sunt autem dif-
 ferentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes ap-
 plicatæ ad distantias , sive ut translationes directe & distantia in-
 verse ; hoc est (conjunctis rationibus) ut quadrata distantiarum
 inverse . Quare si ad infinitæ rectæ *S A B C D E Q* partes singu-
 las erigantur perpendiculara
Aa, Bb, Cc, Dd, Ee,
 &c. ipsarum *SA, SB, SC,*
SD, SE, &c. quadratis re-
 ciproce proportionalia , &
 per terminos perpendicula-
 rium duci intelligatur linea
 curva Hyperbolica ; erunt
 summæ differentiarum , hoc
 est , motus toti angulares ,
 ut respondentes summæ li-
 nearum *Aa, Bb, Cc, Dd,*
Ee : id est , si ad constituen-
 dum Medium uniformiter fluidum , Orbium numerus augeatur
 & latitudo minuatur in infinitum , ut areæ Hyperbolicae his sum-
 mis analogæ *AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ,* &c. Et tem-
 pora motibus angularibus reciproce proportionalia , erunt etiam
 his areis reciproce proportionalia . Est igitur tempus periodicum
 particulæ cujusvis *D* reciproce ut area *DdQ* , hoc est , (per
 notas Curvarum quadraturas) directe ut distantia *SD* . *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reci-
 proce ut ipsarum distantia ab axe cylindri , & velocitates absolu-
 tæ sunt æquales .

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ con-
 tineatur , & cylindrum alium interiore contineat , revolvatur au-
 tem cylindrus uterque circa axem communem , sintque revolu-
 tionum

tionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo; erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiae ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutantur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriori quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecus impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in Aqua profunda stagnante experiri licet.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si Sphæra solida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem; perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphære.

Cas. 1. Sit *AFL* Sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c.

X x 2

distin-

DE MOTU
CORPORUM

distinguantur Fluidum in Orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem Orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneous est Fluidum; impressiones contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt: Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut quadrata distantiarum superficialium a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directæ & distantie inverse; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ $S A B C D E Q$ partes singulas erigantur perpendiculara $A a, B b, C c, D d, E e$, &c. ipsarum $S A, S B, S C, S D, S E$, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondententes summæ linearum $A a, B b, C c, D d, E e$: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut area Hyperbolicæ his summis analogæ $A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q$, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum Orbis cujusvis $D I O$ reciproce ut area $D d Q$, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut quadratum distantie $S D$. Id quod volui primo demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes, & his rectis circa axem revolutis concipere Orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facti, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a
Globo

Globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus est; neque adeo motum, quo minus hac lege fiat, impedit. Si annuli, qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro Globi. Quod volui secundo demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolute & uniformiter fluidam, & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem Fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportionem manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam quam ad Polos; debet causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia quæ ad Eclipticam est, recedat semper a centro & per exteriora Vorticis migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro globi, & velocitates absolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente simili & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actio-

DE MOTU
CORPORUM

ne perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui plane invariata; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiae absorbetur. Materia inter sphaericas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem a materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat, quam imprimat in materiam Vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motus raperetur fluidum in Vorticem: & primo revolveretur hic Vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressae, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permetterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. assignatam) & Vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquaque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde Vortices non desinientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones Vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in Corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem

positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet & in Vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum simile claudatur in vase sphaerico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in Vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quam sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro Vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum inclusum & globus servant hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si Systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quam sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in Corollariis 8. 9. & 10. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde vero si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus

DE MOTU
CORPORUM

motibus revolvebantur, permittatur Systema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter se, & Systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materia quoad densitatem & fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes & æquales, ad æquales semper a se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circulem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitatem partium vel lentorem aliave aliqua conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est magis cohærebit & segnior erit, adeoque motum tardius recipiet, & longius propagabit quam pro ratione superius assignata. Si figura vasis non sit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum a centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius a centro, sed isto recessu tardescent, & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur; & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio Vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem siqua ratione Phænomena cœlestia per
Vorti-

Vortices explicari possint. Nam Phænomenon est, quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquuplicata distantiarum a centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utrisque quam accuratissime, quatenus observationes Astronomicæ hæcenus prodidere. Ideoque si Planetæ illi a Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debent etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum a centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquuplicatam reduci, nisi vel materia Vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ (nisi graves sint in centrum) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi Demonstrationum gratia Hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo concessio, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si Vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquuplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaque Philosophi quo pacto Phænomenon illud rationis sesquuplicatæ per Vortices explicari possit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsius partibus (quoad velocitatem & cursus determinationem) moventur.

Nam si Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: &

Y y

contra,

contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo Vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum sit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere a centro Vorticis quam prius; adeoque Vorticis vim illam, qua prius in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro & revolvens describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi a centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relative quiescit in fluido cui innatat.

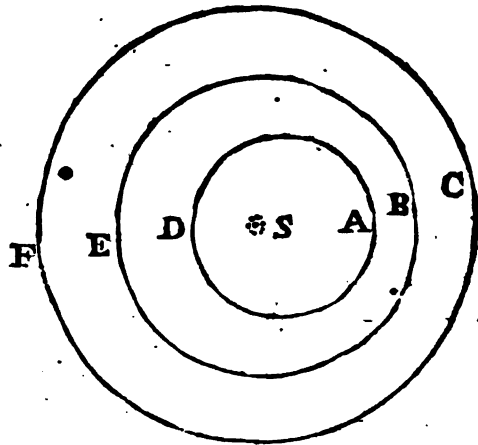
Corol. 2. Et si Vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro Vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet Planetas a Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ secundum Hypothesin *Capernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipsis umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD, BE, CF*, Orbes tres circa Solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint *A, B* & Perihelia *D, E*. Ergo corpus quod revolvitur in Orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, secundum leges Astronomicas; cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velocius

velocius moveri debeat quam in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter

se. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbis Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio Signi Piscium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbis illos in principio Piscium debet esse velocior quam in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum



velocitate transire debet. Igitur si Terra in hac Materia coelesti relative quiescens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialtera. Unde Solis motus diurnus apprens in principio Virginis major esset quam minorum primorum septuaginta, & in principio Piscium minor quam minorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teste) apprens iste Solis motus major sit in principio Piscium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quam in Principio Piscium. Itaque Hypothesis Vorticum cum Phenomenis Astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus coelestes conducit. Quomodo vero motus isti in spatiis liberis absque Vorticibus peraguntur intelligi potest ex Libro primo, & in Mundi Systemate plenius docebitur.

D E

M U N D I

S Y S T E M A T E

L I B E R T E R T I U S .

IN Libris præcedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maxime spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholiis quibusdam Philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maxime fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus Principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent quibus a multis retro annis insueverunt; & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in Propositiones, more Mathematico, ut ab iis solis legantur qui Principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicæ doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit si quis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulo legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

R E G U L Æ

R E G U L Æ P H I L O S O P H A N D I.

R E G U L A I.

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum Phænomenis explicandis sufficiant.

Dicunt utique Philosophi : Natura nihil agit frustra , & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

R E G U L A II.

Ideoque Effectuum naturalium ejusdem generis eadem sunt Cause.

Uti respirationis in Homine & in Bestia; descensus lapidum in Europa & in America; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis Lucis in Terra & in Planetis.

R E G U L A III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta institui licet, pro qualitatibus corporum universonum habende sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter, quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem somnia temere confingenda non sunt, nec a Naturæ analogia recedendum est, cum

DE MUNDI
SYSTEMATE

ea simplex esse soleat, & sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur, Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse non ratione sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universorum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus quibusdam (quas vires inertiae vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiae totius, oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiae partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras esse & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiae præditas. Et hoc est fundamentum Philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas & sibi mutuo contiguas ab invicem separari posse, ex Phænomenis novimus, & partes indivisas in partes minores ratione distingui posse ex Mathematica certum est. Utrum vero partes illæ distinctæ & nondum divisæ per vires Naturæ dividi & ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum & solidum, divisionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quod non solum partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu Terræ gravia esse in Terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, & Lunam gravem esse in Terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare nostrum grave esse in Lunam, & Planetas omnes graves esse in se mutuo, & Cometarum similem esse gravitatem, per experimenta & observationes Astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc Regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de gravitate universali, quam de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus Cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus.

PHÆNO.

P H Æ N O M E N A.

LIBER
TERTIUS

P H Æ N O M E N O N I.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquuplicata distantiarum ab ipsius centro.

Constat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in sesquuplicata ratione semidiametrorum Orbium consentiunt Astronomi; & idem ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum Jovialium tempora periodica.

1^d. 18^h. 27'. 34". 3^d. 13^h. 13'. 42". 7^d. 3^h. 42'. 36". 16^d. 16^h. 32'. 9".

Distancia Satellitam a centro Jovis.

<i>Ex observationibus</i>	1	2	3	4	} Semidiam. Jovis
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	
Townlei per Microm.	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini per Telescop.	5	8	13	23	
Cassini per Eclips. Satell.	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{2}{3}$	$25\frac{1}{10}$	
<i>Ex temporibus periodicis.</i>	5,667	9,017	14,384	25,299	

P H Æ N O M E N O N II.

Planetas Circum Saturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica esse in ratione sesquuplicata distantiarum ab ipsius centro.

Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum a centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satelli-

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

1^d. 21^h. 19'. 2^d. 17^h. 41'. 4^d. 13^h. 47'. 15^d. 22^h. 41'. 79^d. 22^h. 4.

Distantiæ Satellitum a centro Saturni in semidiametris Annuli.

<i>Ex observationibus</i>	1 $\frac{19}{20}$.	2 $\frac{1}{2}$.	3 $\frac{1}{2}$.	8	24.
<i>Ex temporibus periodicis</i>	1,95.	2,5.	3,52,	8,09.	23,71.

P H Æ N O M E N O N III.

Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plena facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiata e regione Solis, falcata cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

P H Æ N O M E N O N IV. I

Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquuplicata mediocrium distantiarum à Sole.

Hæc a *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eademque orbium dimensiones, sive Sol circa Terram, sive Terra circa Solem revolvatur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter *Astronomos* universos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Balliadius* omnium diligentissime ex Observationibus determinaverunt: & distantie mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibilibiter a distantis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediae; uti in Tabula sequente videre licet.

Planetarum ac Telluris distantia mediocres à Sole.

	♃	♄	♅	♆	♇	♁
Secundum Keplerum	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum Bullialdum	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De distantiiis Mercurii & Veneris a Sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De distantiiis etiam superiorum Planetarum à Sole tollitur omnis disputatio per Eclipses Satellitum Jovis. Etenim per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter se collatis determinatur distantia Jovis.

P H Æ N O M E N O N V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu Terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprime demonstratur per Eclipses Satellitum, quibus Eclipsibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudes & distantias à Sole determinari diximus.

P H Æ N O M E N O N VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce Phænomenis negligo.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus Planeta Circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in Orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, & esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propositionis per Phænomenon primum, & Propositionem secundam vel tertiam Libri primi: & pars posterior per Phænomenon primum, & Corollarium sextum Propositionis quartæ ejusdem Libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus Planeta primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior Propositionis per Phænomenon quintum, & Propositionem secundam Libri primi: & pars posterior per Phænomenon quartum, & Propositionem quartam ejusdem Libri. Accuratissime autem demonstratur hæc pars Propositionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

LIBER
TERTIUS

Vim qua Luna retinetur in Orbe suo respicere Terram, & esse reciproce ut quadratum distantiae locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per Phænomenon sextum, & Propositionem secundam vel tertiam Libri primi: & pars posterior per motum tardissimum Lunaris Apogæi. Nam motus illè, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod si distantia Lunæ a centro Terræ sit ad semidiametrum Terræ ut D ad 1 ; vis a qua motus talis oriatur sit reciproce ut $D \frac{4}{17}$, id est, reciproce ut ea ipsius D dignitas cujus index est $\frac{4}{17}$, hoc est, in ratione distantiae paulo majore quam duplicata inverse, sed quæ partibus $59\frac{1}{2}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione Solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Actio Solis quatenus Lunam distrahit a Terra, est ut distantia Lunæ a Terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) est ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad $357,45$ circiter, seu 1 ad $178\frac{1}{2}$. Et neglecta Solis vi tantilla, vis reliqua quæ Luna retinetur in Orbe erit reciproce ut D^2 . Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propositione sequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua Luna retinetur in Orbe, augeatur primo in ratione $177\frac{1}{2}$ ad $178\frac{1}{2}$, deinde etiam in ratione duplicata semidiametri Terræ ad mediocrem distantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad superficiem Terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem Terræ, perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.



Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, & in Orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris a Terra in Syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum plerosque Astronomorum 59 , secundum *Vendelinum* 60 , secundum *Copernicum* $60\frac{1}{2}$, & secundum *Ty-*

DE MONDI SYSTEMATE. *Chonem* 56½. Ast *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam Fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ scrupulistoridem, hoc est, quasi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi 60½ semidiametrorum terrestrium, fere ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum; & Lunarem periodum respectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti a *Gallis* mensurantibus definitum est: Et si Luna motu omni privari fingatur ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe suo retinetur, descendat in Terram; hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses 15½. Colligitur hoc ex calculo vel per Propositionem xxxvi. Libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Nam arcus illius quem Luna tempore minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium 15½ circiter. Unde cum vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicata distantie ratione inversa, adeoque ad superficiem Terræ major sit partibus 60 × 60 quam ad Lunam; corpus vi illa in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses 60 × 60 × 15½, & spatio minuti unius secundi pedes 15½. Atqui corpora in regionibus nostris vi gravitatis cadendo, describunt tempore minuti unius secundi pedes Parisienses 15½, uti *Hugenius* factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonstravit: & propterea (per Reg. 1. & 11.) vis qua Luna in orbe suo retinetur, illa ipsa est quam nos Gravitationem dicere solemus. Nam si Gravitas ab ea diversa est, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo, duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describent pedes Parisienses 30½: omnino contra Experientiam.

Calculus hic fundatur in hypothese quod Terra quiescit. Nam si Terra & Luna circum Solem moveantur, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit 60½ semidiametrorum terrestrium; uti computationem (per Prop. 1x. Lib. I.) ineunti patebit.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

LIBER
TERTIUS.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumsaturnios in Saturnum, & Circumsolares in Solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in Orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumsaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumsolarium circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Reg. 11. à causis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Saturno & Sole decrescant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decrescit in recessu à Terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas universos. Nam Venerem, Mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis (per motus Legem tertiam) mutua sit, Jupiter in Satellites suos omnes, Saturnus in suos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque respicit, esse reciproce ut quadratum distantix locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt Planetæ omnes in se mutuo per Corol. 1. & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibilibus perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares, Sol & Luna perturbant Mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in Planetas singulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantis à centro Planetæ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.

Descensus gravium omnium in Terram (dempta saltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua resistentia oritur) æqualibus

Z. 2. 3.

tempo-

DE MONDI
SYSTEMATE.

temporibus fieri, jamdudum observarunt alii, & accuratissime quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arena, Sale communi, Ligno, Aqua, Triticis. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus suspendebam (quam potui exacte) in alterius centro oscillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, constituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & aeris resistantiam omnino paria: Et paribus oscillationibus, juxta positæ, ibant una & redibant ditissime. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib II.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis actio in totum Aurum ad ejusdem actionem in totum Lignum; hoc est, ut pondus ad pondus. Et sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quam pars millesima materiæ totius, his experimentis manifesto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in Planetas eandem esse atque in Terram, non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terrestria ad usque Orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant; & per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describerent æqualia spatia cum Luna, adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquuplicata distantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata distantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus a Jove distantis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, describerent æqualia spatia; perinde ut fit in gravibus, in hac Terra nostra. Et eodem argumento Planetæ circumsolares ab æqualibus à Sole distantis demissi, descensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ suæ, quam cæteri: motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole distantis) Satelles aliquis gravior esset in Solem pro quantitate

titate

titate materiæ suæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quacunque data, puta d ad e : distantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis, major semper foret quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione subduplicata quam proxime; uti calculis quibusdam initis inveni. Et si Satelles minus gravis esset in Solem in ratione illa d ad e , distantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quam distantia centri Jovis à Sole in ratione illa subduplicata. Igitur si in æqualibus à Sole distantis, gravitas acceleratrix Satellitis cujusvis in Solem major esset vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum millesima gravitatis totius; foret distantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam distantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantis totius, id est, parte quinta distantis Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis eccentricitas foret valde sensibilis. Sed Orbes Satellitum sunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole distantis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accurate proportionalia. Aliqua autem sunt per Corol. 1. & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium singularum Planetæ cujusque in alium quemcunque, sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maxime abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora Terrestria, quæ apud nos sunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra Experimentiam.

Corol.

DE MONDI
SYSTEMATE.

Corol. 2. Corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, & propterea per Reg. III. de universis affirmanda est. Si Æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur, vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Aristotelis*, *Cartesii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmulari in corpus ejusdem conditionis cum iis quæ, pro quantitate materiæ, quam maxime gravitant, & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi, & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specificè graviora sint, minime descendunt. Quod si quantitas materiæ in spatio dato per rarefactionem quamcunque diminui possit, quidni diminui possit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ solidæ sint ejusdem densitatis, neque absque poris rarefieri possint, Vacuum datur. Ejusdem densitatis esse dico, quarum vires inertix sunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diversi est generis à vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in recessu à Magnete decrescit in ratione distantix non duplicata; sed fere triplicata, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

P R O-

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitatis materiæ in singulis.

Planetæ omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatam esse reciproce ut quadratum distantiarum locorum à centro Planetæ. Et inde consequens est, (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum Planetæ cujuscvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quæmvis *B*, & gravitas partis cujuscque sit ad gravitatem totius, ut materiæ partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debet. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare debent in se mutuo, cum tamen ejusmodi gravitas nequaquam sentiatur: Respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æqualis est reciproce ut quadratum distantiarum locorum à particulis. Patet per *Corol. 3.* Prop. LXXIV. Lib. I.

PROPOSITIO. VIII. THEOREMA. VIII.

Si Globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undique, in regionibus quæ a centrīs equaliter distant, homogenea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum distantie inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciproce proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus composita, an vero quam proxime. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantis satis accurate obtineret, prope superficiem Planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per Prop. LXXV. & LXXVI. Libri primi & ipsarum Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverse, & pondera ad superficies Planetarum, aliasve quasvis à centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inversa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum 16½, Satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum 16½, Satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum 22½, & Lunæ circum Terram dierum 27, hor. 7. min. 43, collatis cum distantia mediocri Veneris a Sole & cum elongationibus maximis heliocentricis Satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8'. 21½", Satellitis Hugeniani a centro Saturni 3'. 20", & Lunæ a Terra 10', computum inveni quod corpus æqualium & a Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$ & $\frac{1}{2711}$ respective. Est enim parallaxis Solis ex observationibus novissimis quasi 10", & *Hab-*
Lunæ,

Lunæ, determinavit quod elongatio maxima heliocentrica Satellitis extremi Jovialis a centro Jovis in mediocri Jovis a Sole distantia sit, & 21½", & diameter Jovis 41". Ex duratione Eclipsion Satellitum in umbram Jovis incidentium prodit hæc diameter quasi 40", atque adeo semidiameter 20". Mensuravit autem *Hugenius* elongationem maximam heliocentricam Satellitis a se detecti 3. 20" a centro Saturni, & hujus elongationis pars quarta, nempe 50", est diameter annuli Saturni e Sole visi, & diameter Saturni est ad diametrum annuli ut 4 ad 9, ideoque semidiameter Saturni e Sole visi est 11". Subducatur lux erratica quæ haud minor esse solet quam 2". vel 3": Et manebit semidiameter Saturni quasi 9". Ex hæc autem & Solis semidiametro mediocri 16. 6" computum incundo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1077, 889 & 104. Unde, cum pondera æqualium corporum a centrīs Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram, ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective, & auctis vel diminutis distantis pondera dimittantur vel augeantur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantis 10000, 1077, 889, & 104 ab eorum centrīs, atque adeo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 835, 525, & 410 respective. Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicemus in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantis ab eorum centrīs, id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terra sunt ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective. Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quam 10", debeat quantitas materiæ in Terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in Sphæras homogeneas sunt in superficiebus Sphærarum ut Sphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera illa applicata ad Sphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 1077, 889, & 104, & pondera in eosdem ut 10000, 835, 525, & 410, & propterea densitates sunt ut 100, 78, 59, & 396. Densitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & prop-

De Planetis
SYSTEMATIS.

terea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quam Jupiter, & Jupiter quam Saturnus, & Terra quadruplo densior quam Sol. Nam per ingentem suum calorem Sol rarefcit. Luna vero densior est quam Terra, ut in sequentibus patebit.

Corol. 4. Densiores igitur sunt Planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt Planetæ, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jovè. In diversis utrique distantis a Sole collocandi erant Planetæ ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigeret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quam apud nos: & Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium vero non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hæc nostra, cum materia omnis densior ad operationes Naturales abundas majorem calorem requirat.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quam proxime.

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accurate: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus Planetarum in Cælis diutissime conservari posse.

In Scholio Propositionis XI. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, libere movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentiâ Aeris amitteret motus sui partem $\frac{1}{4376}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcumque magnis & velocibus. Jam vero Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quam aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & super natarent.

rem. *Eaque de Causa Globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione opposita. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus.* Eodem argumento maculæ Solares leviores sunt quam materia lucida Solaris cui supernant. Et in formatione qualicumque Planetarum, materia omnis gravior, quò tempore massa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferioris in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quam si tota ex aqua constaret; præsertim cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quam Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Jupiter paulo densior sit quam aqua, hic spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistantia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ partibus 13 $\frac{1}{2}$ levior est quam argentum vivum, minus resistat in eadem ratione, & aer, qui partibus 850 levior est quam aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in cælos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistantia prope cessabit.

LIBER
TERTIUS

HYPOTHESIS I.

Centrum Systematis Mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro Systematis quiescere contendunt. Videamus quid inde sequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper

progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypothesin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum (per Corol. 2. Prop. VIII) materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1033 ad 1, & distantia Jovis a Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo supra superficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 2411 ad 1, & distantia Saturni a Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo minore; incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem Solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo si Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro a centro Solis distaret. Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, Sol pro vario Planetarum situ in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuo, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motus perpetuo agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeant. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum Solis quam minime discedit; & a quo idem adhuc minus discederet, si modo Sol densior esset & major; ut minus moveretur.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

LIBER
TERTIUS.

Planetae moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitum motuum principia, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro Solis, si Sol quiesceret & Planetae reliqui non agerent in se mutuo, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areas describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. I. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in se mutuo perexiguae sunt (ut possint contemni) & motus Planetarum in Ellipsis circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quam si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantis) ut 1 ad 1033, adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni a Jove est ad distantiam Saturni a Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1033 seu 1 ad 204 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in singulis Planetarum hujus cum Jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem Astronomi hæreant. Pro vario situ Planetarum in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, Aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere potest constituendo umbilicum inferiorem Orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2418}{25}$ seu 124986, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis

ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus Astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra paulo altior esset sub æquatore quam ad polos, Maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III

Invenire proportionem axis Planeta ad diametros eidem perpendiculares.

Picartus mensurando arcum gradus unius & 22. 45" inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. Unde ambitus Terræ est pedum Parisiensium 123249600, ut supra. Sed cum error quadragesimæ partis digiti, tam in fabrica instrumentorum quam in applicatione eorum ad observationes capiendas, sit insensibilis, & in Sectore decempedali quo *Galli* observarunt Latitudines locorum respondeat minutis quatuor secundis, & in singulis observationibus incidere possit tam ad centrum Sectoris quam ad ejus circumferentiam, & errores in minoribus arcibus sint majoris momenti: * ideo *Cassinus* jussu Regis mensuram Terræ per majora locorum intervalla aggressus est, & subinde per distantiam inter Observatorium Regium *Parisense* & villam *Colioure* in *Roussillon* & Latitudinum differentiam 6^o. 18', supponendo quod figura Terræ sit Sphærica, invenit gradum unum esse hexapedarum 57292, prope ut *Norwoodus* noster antea invenerat. Hic enim circa annum 1634, mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & observando differentiam Latitudinum 2^o. 28', collegit mensuram gradus unius esse pedum Londinensium 367196, id est, hexapedarum Parisiensium 57300. Ob magnitudinem intervalli a *Cassino* mensurati, pro mensura gradus unius in medio intervalli illius, id est, inter Latitudines 45^o. & 46^o. usurpabo hexapedas 57292. Unde, si Terra sit Sphærica, semidiameter ejus erit pedum Parisiensium 19695539.

* Vide Historiam Academicæ Regiæ Scientiarum anno 1760.

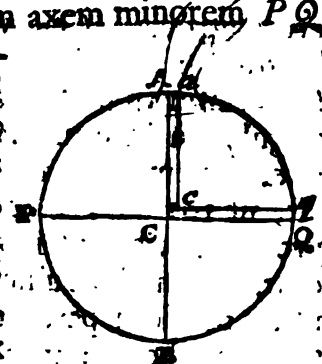
Penduli in Latitudine *Latitiae Parisiorum* ad minuta secunda oscillantis longitudo est pedum trium Parisiensium & linearum 84. Et longitudo quod grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus, in duplicata ratione circumferentiae circuli ad diametrum ejus (ut indicavit *Hugenius*) ideoque est pedum Parisiensium 15, dig. 1, lin. 2 $\frac{1}{11}$, seu linearum 2174 $\frac{1}{11}$.

LIBER
TERTIUS.

Corpus in circulo, ad distantiam pedum 19695539 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56'. 4" uniformiter revolvens, tempore minuti unius secundi describit arcum pedum 1436,223, cujus sinus versus est pedum 0,05236558, seu linearum 7,54064. Ideoque vis qua gravia descendunt in Latitudine *Latitiae*, est ad vim centrifugam corporum in *Aequatore*, a Terrae motu diurno oriundam, ut 2174 $\frac{1}{11}$ ad 7,54064.

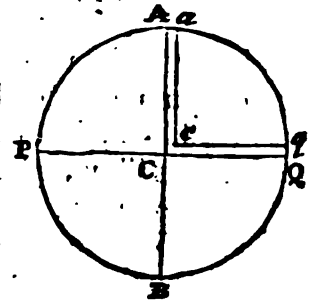
Vis centrifuga corporum in *Aequatore*, est ad vim centrifugam qua corpora directe tendunt a Terra in Latitudine *Latitiae*, graduum 48. 50', in duplicata ratione Radii ad sinum complementi Latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 2,267. Addatur haec vis ad vim qua gravia descendunt in Latitudine *Latitiae*, & corpus in Latitudine *Latitiae* vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describeret lineas 2177,13, seu pedes Parisienses 15, dig. 1, & lin. 5,32. Et vis tota gravitatis in Latitudine illa, erit ad vim centrifugam corporum in *Aequatore* Terrae, ut 2177,32 ad 7,54064, seu 289 ad 1.

Unde si *A P B Q* figuram Terrae designet jam non amplius Sphaericam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem *P Q* generata, sitque *A C Q* cunabula aquae plena, a polo *Q* ad contrarium *C*, & inde ad *Aequatorem* *A* pervens: debet pondus aquae in cunabula cruce *A C C A*, esse ad pondus aquae in cruce altero *Q C C Q* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu octa parte tantum e pondera pendens 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero cruce sustinebit reliquis. Porro (ex Propositionis XI Corollario secundo, Lib. I.) computationem incedo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motusque omni privaretur, & esset ejus axis *P Q*



DE MUNDI
SYSTEMATE

ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in Sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126. Est autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram: propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB , PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in A , in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad 125½, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101. Coniungantur jam hæc tres rationes, 126 ad 125, 126 ad 125½, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in Terram, ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.



Jam cum (per Corol. 3. Prop. xci. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum a centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 389, hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars ¼, est tantum pars ⅓. Et

Et propterea dico, secundum Regulam auream, quod si vis centrifuga $\frac{1}{707}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* superet altitudinem aquæ in crure *QcCq* parte centesima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut excessus altitudinis in crure *ACca* sit altitudinis in crure altero *QcCq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ semidiameter mediocris, juxta mensuram *Cassini*, sit pedum Parisiensium 19695539, seu miliarium 3939 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000) Terra altior erit ad Æquatorem quam ad Polos excessu pedum 85820, seu miliarium $17\frac{1}{2}$.

Si Planeta major sit vel minor quam Terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et si densitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56', Jupiter autem horis 9. 56', sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & densitates ut 5 ad 1: differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{5}{1} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad 8 quamproxime. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 9 ad 8 quamproxime, & propterea diameter inter polos est $35\frac{1}{2}$ ". Hæc ita se habent ex hypothesi quod uniformis sit Planetarum materia. Nam si materia densior sit ad centrum quam ad circumferentiam; diameter quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Jovis vero diametrum quæ polis ejus interjacet minorem esse diametro altera *Cassinus* dudum observavit, & Terræ diametrum inter polos minorem esse diametro altera patebit per ea quæ dicentur in Propositione sequente.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

*Invenitur & inter se comparare Pondera corporum in Terra ha-
bita regionibus diversis.*

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ ACQqca
æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium
& similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum,
adeoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in
cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reci-
proce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqua-
lium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitarum corporum.
Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut di-
stantiæ corporum a centro Terræ. Proinde si corpora in supre-
mis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant; erunt
pondera eorum ad invicem reciproce ut distantiæ eorum a centro.
Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam
Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantiæ locorum
a centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit,
dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis per-
gendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proxime ut sinus versus
Latitudinis duplicatæ, vel, quod perinde est, ut quadratum sinus
recti Latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus
graduum Latitudinis in Meridiano. Ideoque cum Latitudo *Lu-
tetie Parisiorum* sit 48[°] 50', ea locorum sub Æquatore 00[°] 00',
& ea locorum ad Polos 90[°] & duplorum sinus versi sint 11334,
00000 & 20000, existente Radio 10000, & gravitas ad Polum sit
ad gravitatem sub Æquatore ut 230 ad 229, & excessus gravi-
tatis ad Polum ad gravitatem sub Æquatore ut 1 ad 229; erit ex-
cessus gravitatis in Latitudine *Luætiæ* ad gravitatem sub Æquatore,
ut $1 \times \frac{11334}{10000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates
totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare
cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium
sint ut gravitates, & in Latitudine *Luætiæ Parisiorum* longitudo
penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Pa-
risiensium & linearum 87; longitudo penduli sub Æquatore fa-
perabitur a longitudo synchroni penduli *Parisienfis*, excessu li-
neæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo
confit Tabula sequens.

Latitudo

<i>Latitudo Loci</i>	<i>Longitudo Penduli</i>		<i>Mensura Gradus unius in Meridiano</i>
	<i>Gr.</i>	<i>Ped. Lin.</i>	<i>Hexaped.</i>
0	3 .	7,468	56909
5	3 .	7,482	56914
10	3 .	7,526	56931
15	3 .	7,596	56959
20	3 .	7,692	56996
25	3 .	7,811	57042
30	3 .	7,948	57096
35	3 .	8,099	57155
40	3 .	8,261	57218
1	3 .	8,294	57231
2	3 .	8,327	57244
3	3 .	8,361	57257
4	3 .	8,394	57270
45	3 .	8,428	57283
6	3 .	8,461	57296
7	3 .	8,494	57309
8	3 .	8,528	57322
9	3 .	8,561	57335
50	3 .	8,594	57348
55	3 .	8,756	57411
60	3 .	8,907	57470
65	3 .	9,044	57524
70	3 .	9,162	57570
75	3 .	9,258	57607
80	3 .	9,329	57635
85	3 .	9,372	57652
90	3 .	9,387	57657

Constat autem per hanc Tabulam, quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus Geographicis figura Terræ pro Sphærica haberi possit, quodque inæqualitas diametrorum Terræ facilius & certius per experimenta pendulorum deprehendi possit vel etiam per Eclipses Lunæ, quam per arcus Geographicè mensuratos in Meridiano.

Hæc

Hæc ita se habent ex hypothesi quod Terra ex uniformi materia constat. Nam si materia ad centrum paulo densior sit quam ad superficiem, differentiæ pendulorum & graduum Meridiani paulo majores erunt quam pro Tabula præcedente, propterea quod si materia ad centrum redundans qua densitas ibi major redditur, subducatur & seorsim spectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter densam, erit reciproce ut distantia ponderis a centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum distantiae a materia illa quamproxime. Gravitatis igitur sub æquatore minor est in materiam illam redundantem quam pro computo superiore: & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius ascendet, & excessus longitudinum Pendulorum & graduum ad polos paulo majores erunt quam in præcedentibus definitum est.

Jam vero Astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes Astronomicas faciendas missi, invenerunt quod horologia oscillatoria tardius moverentur prope Æquatorem quam in regionibus nostris. Et primo quidem *D. Richer* hoc observavit anno 1672 in insula *Cayennæ*. Nam dum observaret transitum Fixarum per meridianum mense *Augusto*, reperit horologium suum tardius moveri quam pro medio motu Solis, existente differentia 2'. 28" singulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum simplex ad minuta singula secunda per horologium optimum mensurata oscillaret, notavit longitudinem Penduli simplicis; & hoc fecit sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli *Parisiensis* (quæ erat trium pedum *Parisiensium*, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorē esse, existente differentia lineæ unius cum quadrante. At ex tarditate horologii oscillatorii in *Cayenna*, differentia Pendulorum colligitur esse lineæ unius cum semisse.

Postea *Halleius* noster circa annum 1677 ad insulam *S^{ta} Helene* navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, sed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit plusquam octava parte digiti, seu linea una cum semisse. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non sufficeret, anulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682 *D. Varin* & *D. Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli singulis minutis secundis oscillantis in Observatorio

vatorio Regio *Parisiensi* esse ped. 3. lin. 8 $\frac{1}{2}$. Et in insula *Gorea* eadem methodo longitudinem Penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$, existente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$.

Posthac *D. Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum Solis medium in Observatorio Regio *Parisiensi* sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, existente differentia 2' 13" in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardius ire quam *Parisiis*, existente differentia 4'. 12" in horis 24. Et affirmat Pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis 2 $\frac{1}{2}$ & *Paraibae* lineis 3 $\frac{1}{2}$ quam *Parisiis*. Rectius posuisset differentias esse 1 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{2}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2'. 13", & 4'. 12" respondent. Crassioribus hujus Observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) *D. Des Hayes* ad *Americanam* denuo navigans, determinavit quod in insulis *Cayenne* & *Granada* longitudo Penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuilleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem Penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium *Parisiensi* & linearum tantum 5 $\frac{7}{12}$, id est tribus fere lineis breviorum quam *Lutetiae Parisiorum*, sed errante Observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli isochroni esse pedum tantum trium *Parisiensi* & linearum 5 $\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibae* est 6 $^{\circ}$. 38' ad austrum, & ea *Porto-beli* 9 $^{\circ}$. 33' ad boream, & Latitudines insularum *Cayenne*, *Gorea*, *Guadaloupe*, *Martinica*, *Granada*, *S^u. Christophori*, *Sⁱ. Dominici* sunt respective 4 $^{\circ}$. 55', 14 $^{\circ}$. 40', 14 $^{\circ}$. 00', 14 $^{\circ}$. 44', 12 $^{\circ}$. 6', 17 $^{\circ}$. 19', & 19 $^{\circ}$. 48' ad boream. Et excessus longitudinis Penduli *Parisiensi* supra longitudes Pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas, sunt paulo majores quam pro *Tabula* longitudinum Penduli superius computata. Et propterea *Terra* aliquanto altior est sub *Aequatore* quam pro superiore calculo;

DE MENTE: CULO, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem, SYSTEMATE nisi forte calores in Zona torrida longitudinem Pendulorum aliquantum auxerint.

Observavit utique *D. Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde *D. de la Hire* observavit quod virga ferrea quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi Soli æstivo exponebatur evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quam in posteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad Solem æstivum valde incalescunt. At virga penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori Solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æstivo quam hyberno, sed excessu quartam partem lineæ unius vix superante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diversis regionibus isochrona sunt, diverso calori attribui non potest. Sed neque erroribus Astronomorum è *Gallia* missorum tribuenda est hæc differentia. Nam quamvis eorum observationes non perfecte congruant inter se, tamen errores sunt adeo parvi ut contemni possint. Et in hoc concordant omnes, quod isochrona pendula sunt breviora sub Æquatore quam in Observatorio Regio *Parisiensi*, existente differentia duarum circiter linearum seu sextæ partis digiti. Per observationes *D. Richer* in *Cayenna* factas, differentia fuit lineæ unius cum semisse. Error semissis lineæ facile committitur. Et *D. des Hayes* postea per observationes suas in eadem insula factas errorem correxit, inventa differentia linearum $2\frac{1}{8}$. Sed & per observationes in insulis *Gorea*, *Guadaloupa*, *Martinica*, *Granada*, *S. Christophori*, & *S. Dominici* factas & ad Æquatorem reductas, differentia illa prodiit haud minor quam $1\frac{1}{2}$ lineæ, haud major quam $2\frac{1}{2}$ linearum. Et inter hos limites quantitas mediocris est $2\frac{2}{3}$ linearum. Propter calores locorum in Zona torrida negligamus $\frac{2}{3}$ partes lineæ, & manebit differentia duarum linearum.

Quare cum differentia illa per Tabulam præcedentem, ex hypothese quod Terra ex materia uniformiter densa constat, sit tantum $1\frac{8}{1000}$ lineæ: excessus altitudinis Terræ ad æquatorem supra altitudinem ejus ad polos, qui erat miliarium $17\frac{1}{2}$, jam auctus in ratione

ratione differentiarum, fiet milliarium $31\frac{7}{12}$. Nam tarditas Penduli sub Æquatore defectum gravitatis arguit; & quo levior est materia eo major esse debet altitudo ejus, ut pondere suo materiam sub Polis in æquilibrio sustineat.

LIBER
TERTIUS.

Hinc figura umbræ Terræ per Eclipses Lunæ determinanda, non erit omnino circularis, sed diameter ejus ab oriente in occidentem ducta major erit quam diameter ejus ab austro in boream ducta, excessu 55" circiter. Et parallaxis maxima Lunæ in Longitudinem paulo major erit quam ejus parallaxis maxima in Latitudinem. Ac Terræ semidiameter maxima erit pedum Parisiensium 19767630, minima pedum 19609820 & mediocris pedum 19688725 quamproxime.

Cum gradus unus mensurante *Picarto* sit hexapedarum 57060, mensurante vero *Cassino* sit hexapedarum 57292: suspicantur aliqui gradum unumquemque, pergendo per *Gallias* austrum versus majorem esse gradu præcedente hexapedis plus minus 72, seu parte octingentesima gradus unius; existente Terra Sphæroide oblonga cujus partes ad polos sunt altissima. Quoposito; corpora omnia ad Polos Terræ leviora forent quam ad Æquatorem, & altitudo Terræ ad polos superaret altitudinem ejus ad æquatorem milliariibus fere 95, & pendula isochrona longiora forent ad Æquatorem quam in Observatorio Regio *Parisiensi* excessu semissis digiti circiter; ut conferenti proportionibus hic positas cum proportionibus in Tabula præcedente positis, facile constabit. Sed & diameter umbræ Terræ quæ ab austro in boream ducitur, major foret quam diameter ejus quæ ab oriente in occidentem ducitur, excessu 2'. 46", seu parte duodecima diametri Lunæ. Quibus omnibus *Experientia* contrariatur. Certe *Cassinus*, definiendo gradum unum esse hexapedarum 57292, medium inter mensuras suas omnes, ex hypothesi de æqualitate graduum assumpsit. Et quamvis *Picartus* in *Gallia* limite boreali invenit gradum paulo minorem esse, tamen *Norwoodus* noster in Regionibus magis borealibus, mensurando majus intervallum, invenit gradum paulo majorem esse quam *Cassinus* invenerat. Et *Cassinus* ipse mensuram *Picarti*, ob parvitatem intervalli mensurati, non satis certam & exactam esse judicavit ubi mensuram gradus unius per intervallum longe majus definire aggressus est. Differentiæ vero inter mensuras *Cassini*, *Picarti*, & *Norwoodi* sunt prope insensibiles, & ab insensibilibus observationum erroribus facile oriri potuere, ut Nutationem axis Terræ præteream.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta Equinoctialia regredi, & axem Terra singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

*Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex al-
latis Principiis consequi.*

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipticis, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbata motus multimode, usque adficientur inæqualitati-
bus quæ in Luna notantur. Hæc utique (per Corol. 2,
et 3. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram
magis obliqua recta pro tempore majorem, Orbemque habet
magis eccentricum, ac magis propius accedit ad Terram, in Syzygiis
magis in Quadrantibus, magis tamen impedit motus Eccentricitatis.
Inæqualitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi
Luna in Syzygiis veritatur, & minima ubi idem in Qua-
drantibus, & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis
propius, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quam
in Quadrantibus. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur
Nodi Luna inæqualiter. Et Apogæum quidem (per Corol. 7.
et 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius
regreditur in Quadrantibus, & excessu progressus supra regressum
annuum totum in consequentia. Nodi autem (per Corol. 2. 1.
Prop. LXVI.) quædam in Syzygiis suis, & velocissime regrediuntur
in Quadrantibus. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in
ipius Quadrantibus, (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quam in Syzy-
giis: & motus medius tardior in Perihæio Terræ (per Corol. 6.

Prop.

Prop. LXVI.) quam in ipsius Aphelio. Atque hæc sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ.

LIBER
TERTIUS.

Sunt etiam aliæ quædam nondum observatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nulla hæctenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter Eccentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per Corol. 1. & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico, ad Prosthaphæresin Lunæ referri solet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi Lunarum seu Satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis, est ad motum medium Nodorum Lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste $8^{\circ} 24'$ in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujusque in consequentia, est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum, (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis sic inventus in ratione 4 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ respective, ut motus Nodorum & Augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum prio-

DE MONDI SYSTEMATE rum; ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ; ut sunt ad invicem toti motus Nodorum temporibus quibus Satelles & Luna ad Solem revolvuntur, per idem Corollarium; adeoque in Satellite extremo non superat 5". 12".

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsus Luminarium ad Meridianum loci, minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Ethiopicæ* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimat, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam

tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in Mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad *implem* venient.

LIBER
TERTIUS.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantiiis a Terra. In minoribus enim distantiiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensione & remissione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in Syzygiis Solstitialibus quam in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solstitialibus majores ciebunt æstus quam in Quadraturis Æquinoctialibus; eo quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzygiis & minimi in Quadraturis Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzygiis comitatur semper minimus in Quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam Solis a Terra, tempore hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium verum quam sequantur, & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Designet *ApEP* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P, p* polos; *AE* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter subjectum;

pore æstivo matutinos, ad *Phymathum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* vero altitudine quindecim digitorum: observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocatationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proxime post Syzygias majores reddit, eosque proxime post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Phymathum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portibus, non sint primi a Syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti a Syzygiis.

Porro fieri potest ut æstus propagesur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quam per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eisdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquille stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam, & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* sub latitudine

DE MONDI
SYSTEMATE

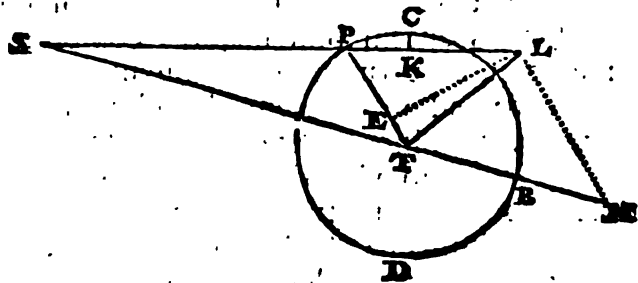
Boreali 208^t. 50'. *Halleius* ex Nautarum Observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per Æquatorem sequente stagnat, dein Luna ad Boream declinante incipit fluere & refluxere, non bis, ut in aliis portibus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies in eisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; & Luna declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinensi* inter Continentem & Insulam *Lucóniam*, alter a Mari *Indico* inter Continentem & Insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim a Mari *Indico*, & spatio horarum sex a Mari *Sinensi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia Marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Haftenus causas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Designet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *P A D B* orbem Lunæ. In *S P* capiatur *S K* æqualis *ST*; sitque *S L* ad *S K*



in duplicata ratione *SK* ad *SP*, & ipsi *PT* agatur parallela *LM*; & si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam *ST* vel *SK*, erit *SL* gravitas acceleratrix Lunæ in Solem.

Solem. Ea componitur ex partibus SM , LM , quarum LM & ipsius SM pars TM perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollaris expositum est. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas TM & ML designare. Vis ML (in mediocri sua quantitate) est ad vim centripetam, qua Luna in Orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam PT revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est, in duplicata ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000. ad 178725, seu 1 ad 178 $\frac{25}{100}$. Invenimus autem in Propositione quarta quod, si Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit 60 $\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium Terræ quamproxime. Et vis qua Luna in Orbe circa Terram quiescentem, ad distantiam PT semidiametrorum terrestrium 60 $\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut 60 $\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 \times 60 quamproxime. Ideoque vis mediocris ML est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut 1 \times 60 $\frac{1}{2}$ ad 60 \times 60 \times 60 \times 178 $\frac{25}{100}$, seu 1 ad 638092, 6. Unde ex proportione linearum TM , ML , datur etiam vis TM : & hæc sunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q. E. I.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in Orbe circulari describit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero Solis distantiam, ponamus etiam lineas SP , ST sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis LM reducetur semper ad

summa genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP , seu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quiescentem ad distantiam TP , tempore suo periodico $CADBC$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in Orbe suo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. 1v. Lib. I. Cum autem perpendicularum Kd in TP demissum sit ipsius EL pars tertia, & ipsius TP seu ML in Octantibus pars dimidia, vis EL in Octantibus, ubi maxima est, superabit vim ML in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem revolvi posset, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ seu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT seu TP . Exponatur vis maxima EL in Octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA , velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CA$ & triangulum TCG , sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP . Ideoque (per Prop. 1x. Lib. V. Elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analogæ est, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius, & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915 + 50, seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia A , ac differentia 11915 - 50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentum differentiam 100 ut Trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG (vel quod perinde est, ut quadratum Sinus PK ad quadratum Radii TP , id est, ut Pd ad TP) & summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P .

Hæc omnia ita se habent, ex Hypothesi quod Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris vere sit die-

DE MUNDI RUM 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa SYSTEMATE in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11914}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut 11023—50 ad 11023 + 50, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad $10973 + Pd$, existente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 219,46 & sinus versi duplicatæ distantiae Lunæ a Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille versus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiae Lunæ a Terra conjunctim; & propterea distantia Lunæ a Terra est in ratione composita ex subduplicata ratione Areæ directæ & subduplicata ratione motus horarii inverse. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a Terra. Tentent Astronomi quam probe hæc Regula cum Phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunarum accuratius ex Phænomenis quam antehac definiri potest.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros Orbis in quo Luna, absque eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendicularum trahatur, describit, est ut attractio directæ & quadratum velocitatis inverse. Curvaturas linearum pono esse inter

ter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem 2 *PK* (Vide *Figur. pag. 394.*) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris *KT*, qua Luna in Terram trahitur. Et hæc attractiones, si $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur *N*, sunt ut $\frac{178725}{ATq}$ & $\frac{2000}{CT \times N}$

$\frac{178725}{CTq} \times \frac{1000}{AT \times N}$ quam proxime; seu ut $178725 N \times CTq$

— $2000 ATq \times CT$ & $178725 N \times ATq + 1000 CTq \times AT$. Nam si gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum

178725, vis mediocris *ML*, quæ in Quadraturis est *PT* vel *TK*

& Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris

TM in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris *ML*

subducatur, manebit vis 2000

qua Luna in Syzygiis distrahitur à Terra, quamque jam

ante nominavi 2 *PK*. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis

A & *B* est ad ipsius velocitatem in Quadraturis *C* & *D*,

ut *CT* ad *AT* & momentum areæ quam Luna radio ad

Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem

areæ in Quadraturis conjunctim; id est, ut 11073 *CT* ad

10973 *AT*. Sumatur hæc ratio bis inverse & ratio prior

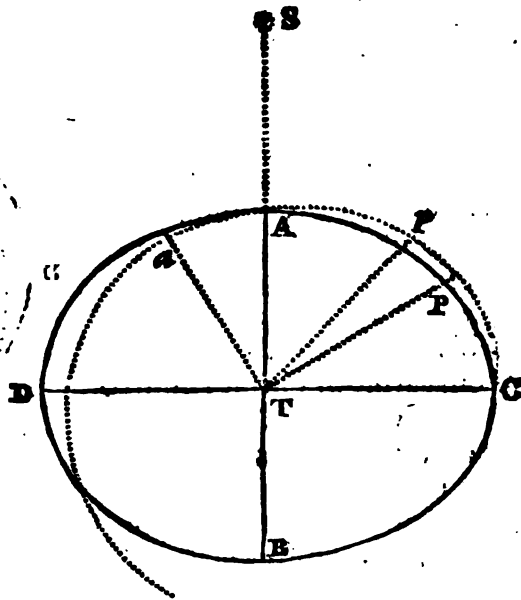
semel directe, & fiet curvatura Orbis Lunarum in Syzygiis ad eju-

dem curvaturam in Quadraturis ut $120406729 \times 178725 ATq \times$

$CTq \times N - 120406729 \times 2000 ATqq \times CT$ ad 122611329×178725

$ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000 CTqq \times AT$, i.e. ut 2151969

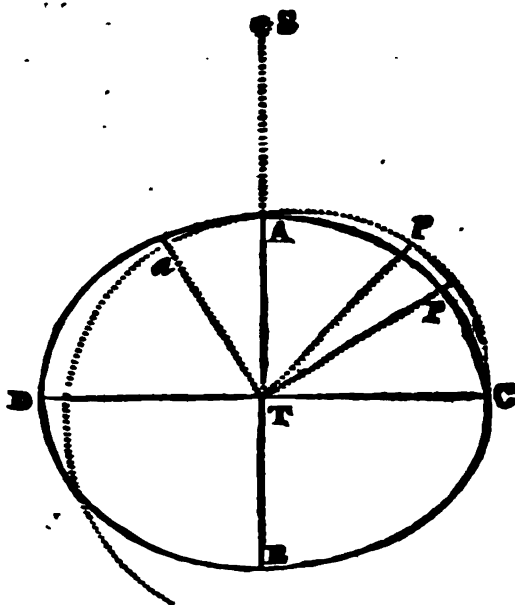
$AT \times CT \times N - 24081 AT cub.$ ad $2191371 AT \times CT \times N + 12262$



Quoniam

DE MIBORI
SOLARITATE

Quoniam Figura Orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin $DBCA$, in cujus centro T Terra collocetur, & cujus axis major DC Quadraturis, minor AB Syzygiis interjacent. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria cujus curvaturam consideramus, describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit Figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvens describit in hoc plano, hoc est Figura Cpa , cujus puncta p inveniuntur capiendò punctum quodvis P in Ellipsi, quod locum Lunæ representet, & ducendo Tp æqualem TP , ea lege ut angulus PTp æqualis sit motui apparenti Solis a tempore Quadraturæ C confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus CTp sit ad angulum CTP ut tempus revolutionis Synodicae Lunaris ad tempus revolutionis Periodicae seu $30^{\text{d}} 13^{\text{h}} 44'$, ad $27^{\text{d}} 7^{\text{h}} 43'$. Capiatur igitur angulus CTa in eadem ratione ad angulum rectum CTA , & sit longitudo Ta æqualis longitudini TA ; & erit a Apis ima & C Apis summa Orbis hujus Cpa . Rationes autem incendo invenio quod differentia inter curvaturam Orbis Cpa in vertice a , & curvaturam Circuli centro T intervallo TA descripti, sit ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli CTP ad angulum CTp ; & quod curvatura Ellipseos in A sit ad curvaturam Circuli illius, in duplicata ratione TA ad TC ; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro T intervallo TC descripti, ut TC ad TA ; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in C , in duplicata ratione TA ad TC ; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice C & curvaturam Circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam Figuræ Tpa in vertice C & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli



anguli CTP ad angulum CTP . Quæ quidem rationes ex sinibus
angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur.
His autem inter se collatis, prodit curvatura Figuræ Cpa in a ad
ipsius curvaturam in C , ut $AT cub + \frac{16824}{100000} CT q \times AT$ ad CT
 $cub + \frac{16824}{100000} AT q \times CT$. ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam
quadratorum angulorum CTP & $CT p$ applicatam ad quadratum
anguli minoris CTP seu (quod perinde est) differentiam quadra-
torum temporum $27^d 7^h 43'$, & $29^d 12^h 44'$ applicatam ad quadra-
tum temporis $27^d 7^h 43'$.

Igitur cum a designet Syzygiam Lunæ, & C ipsius Quadratu-
ram, proportio jam inventa eadem esse debet, cum proportione
curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Qua-
draturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur propor-
tio CT ad AT , duco extrema & media in se invicem. Et ter-
mini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062, 79 CT q q$
 $- 2151969 N \times CT cub + 368676 N \times AT \times CT q + 36342 AT q$
 $\times CT q - 362047 N \times AT q \times CT + 2191371 N \times AT cub. \times$
 $4051,4 AT q q = 0$. Hic pro terminorum AT & CT semisum-
ma N scribo 1 , & pro eorundem semidifferentia ponendo x , fit
 $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione scriptis, &
æquatione prodeunte resoluta, obtinetur x æqualis $0,00719$, &
inde semidiameter CT fit $1,00719$, & semidiameter AT $0,99281$,
qui numeri sunt ut $70\frac{1}{4}$ & $69\frac{1}{4}$ quam proxime. Est igitur distantia
Lunæ a Terra in Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (se-
posita scilicet Eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{4}$ ad $70\frac{1}{4}$, vel
numeris rotundis ut 69 ad 70 .

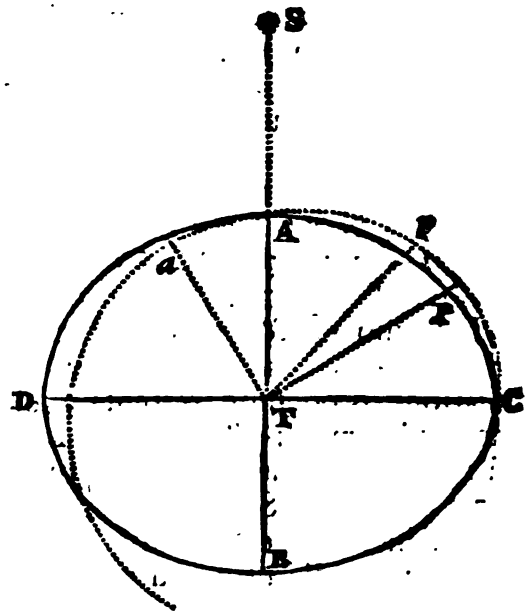
PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire Variationem Lune.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris,
partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad
Terram ducto describit. Si Luna P in Ellipsi $D.B.C.A$ circa
Terram in centro Ellipseos quiescentem movèretur, & radio TP
ad Terram ducto describeret aream CTP temporì proportiona-
lem; esset autem Ellipseos semidiameter maxima CT ad semi-
diametrum minimam TA ut 70 ad 69 : foret tangens anguli
 CTP ad tangentem anguli motus medii a Quadratura C compu-
tati, ut Ellipseos semidiameter PA ad ejusdem semidiametrum
Ecc
TC

DE MUNTI
SYSTEMATE

TC seu 69 ad 70. Debet autem descriptio areæ CTP , in progressu Lunæ a Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in Quadratura sit ut quadratum sinus anguli CTP . Id quod satis accurate fiet, si tangens anguli CTP diminuat in subduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli CTP jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus CTP in Octantibus, ubi motus medius est 45° invenietur $44^{\circ} 27' 28''$. qui subductus de angulo motus medii 45° relinquit Variationem maximam $32' 32''$. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo a Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum CTA graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum CTa angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis Lunaris Synodicæ ad tempus revolutionis Periodicæ, id est, in ratione $29^{\text{d}} 12^{\text{h}} 44'$ ad $27^{\text{d}} 7^{\text{h}} 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eadem ratione, & Variatio maxima quæ secus esset $32' 32''$, jam aucta in eadem ratione fit $35' 10''$.



Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantia Solis a Terra, neglectis differentiis quæ a curvatura Orbis magni majorique Solis actione in Lunam factam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In aliis distantis Solis a Terra, Variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis Synodicæ Lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione distantia Solis a Terra inverse. Ideoque in Apogæo

Designet jam PM arcum, quem Luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata 3 IT , eodem tempore describere posset. Jungantur PL , MP , & producantur eæ ad m & l , ubi fecent planum Eclipticæ; inque Tm demittatur perpendicularum PH . Et quoniam recta ML parallela est plano Eclipticæ, ideoque cum recta ml quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula LMP , Lmp . Jam cum MPm sit in plano Orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N , n ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, si tota simul & semel in loco P impressa esset, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda esset LP , atque adeo transferret Lunam de plano $MPmT$ in planum $LPIT$; motus angularis Nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo mTl . Est autem ml ad mP ut ML ad MP , adeoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est, ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl , si modo angulus Tml rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$ & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id est, (ob proportionales Tm & mP , TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam TP , ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml , seu STN obliquus sit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione sinus anguli STN ad Radium. Est igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, sive ut contentum sub sinus trium angulorum TPI , PTN & STN .

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM , quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit ut 1 ad 59, 575. Nam angulus mPl æqualis est angulo MPM , id est, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem sola vis præfata Solaris 3 IT si tum cessaret Lunæ gravitas dato illo tempore generare posset; & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe suo retinetur, si tum cessaret vis Solaris 3 IT eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus,

$PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ qu. id est, ut area $PDdM$ & AZ qu. conjunctim. Q. E. D.

LIBER
PERTIUS.

Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque est ad $16'' . 35''' . 16'' . 36'$ ut quadratum sinus distantiae Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut AZ qu. ad AT qu. Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq , summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergat a Q ad M , erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n , summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit, dein Luna pergente ab n ad q , linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de area priorè, & cum æqualis sit area QEN , relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio MT ; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde Nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in Syzygiis Lunaribus, spatium duplo majus describerent quam revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit $33'' . 10''' . 33'' . 12'$, motus mediocris horarius in hoc casu erit $16'' . 35''' . 16'' . 36'$. Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut AZ qu. & area $PDdM$ conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut AZ qu. & area $PDdM$ conjunctim, id est (ob datam aream $PDdM$ in Syzygiis descriptam) ut AZ qu. erit etiam motus mediocris ut AZ qu. atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad $16'' . 35''' . 16'' . 36'$ ut AZ qu. ad AT qu. Q. E. D.

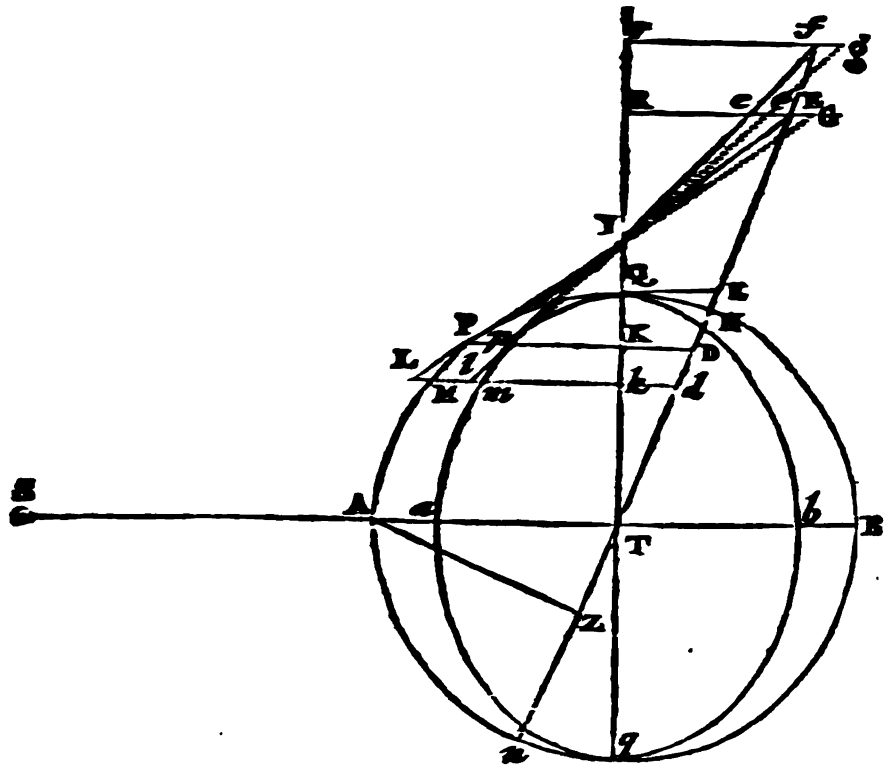
PRO.

DE MOTU
SYDNERI

PROPOSITIO XXXI PROBLEMA XII

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Designet Qq Ellipsin, axe majore Qq , minore ab descriptam, QI Circulum circumscriptum, T Terram in utriusque centro communi, S Solem, p Lunam in Ellipsi motam, & $p m$ arcum quem data temporis particula quam minima describit, N & s Nodos lineæ Ns junctos, pK & $m k$ perpendicularia in axem Qq demissa & hinc inde producta, donec occurrant Circulo in P & M ,



& lineæ Nodorum in D & d . Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat temporis proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area $pDdm$.

Nam si Pf tangat Circulum in P , & producta occurrat TN in F , & pf tangat Ellipsin in p & producta occurrat eidem TN in

in f , conveniant autem hæc tangentes in axe TQ ad T ; & si ML designet spatium quod Luna in Circulo revolvens, intercedum describit arcum PM , urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu transverso describere posset, & ml designet spatium quod Luna in Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, describere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano Eclipticæ in G & g ; & jungantur FG & fg , quarum FG producta secet pf , pg & TQ in c , e & R respective, & fg producta secet TQ in r : Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in Circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in Ellipsi, ut PK ad pK , seu AT ad aT ; erit spatium ML vi prioris genitum, ad spatium ml vi posterioris genitum, ut PK ad pK , id est, ob similes figuras PKp & $FTrc$, ut FR ad cR . Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM , PGF) ut PL ad PG , hoc est (ob parallelas Lk , PK , GR) ut pl ad pe , id est, (ob similia triangula plm , cpe) ut lm ad ce ; & inverse ut LM est ad lm , seu FR ad cR , ita est FG ad ce . Et propterea si fg esset ad ce ut fT ad cY , id est, ut fr ad cR (hoc est, ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id est, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT , foret fg ad FG ut fT ad FT ; atque adeo anguli, quos FG & fg subtenderent ad Terram T , æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus Nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum PM , in Ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fT ad cT , id est, si gf æqualis esset $\frac{ce \times fT}{cT}$. Verum ob similia triangula fgp , cep , est fg

ad ce ut fp ad cp ; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea

angulus, quem fg revera subtendit, est ad angulum priorem, quem FG subtendit, hoc est, motus Nodorum in Ellipsi ad motum

Nodorum in Circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu

$\frac{ce \times fT}{cY}$, id est, ut $fp \times cT$ ad $fT \times cp$, seu fp ad fT & cT ad cp ;

hoc est, si ipsi TN parallela occurrat FP in b , ut Fb ad FB & fT ad FP , hoc est, ut Fb ad FB seu Dp ad DP , adeoque

ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum area posterior

DE MONDI SYSTEMATE
 prior proportionalis fit motui Nodorum in Circulo, erit area
 prior proportionalis motui Nodorum in Ellipfi. Q. E. D.

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum $p D d m$, quo tempore Luna pergit a Quadratura ad locum quemvis m , fit area $m p Q E d$, quæ ad Ellipseos tangentem $Q E$ terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, fit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipfi erit ad motum mediocrem Nodorum in Circulo, ut Ellipsis ad Circulum; id est, ut $T a$ ad $T A$, seu 69 ad 70. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in Circulo sit ad $16'' . 35''' . 16'' . 36'$. ut $A Z qu.$ ad $A T qu.$ si capiatur angulus $16'' . 21''' . 3'' . 30'$. ad angulum $16'' . 35''' . 16'' . 36'$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipfi ad $16'' . 21''' . 3'' . 30'$. ut $A Z q$ ad $A T q$; hoc est, ut quadratum sinus distantiae Nodi a Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quam in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciproce ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadraturis, ac defectum in Syzygiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a Quadraturis ad Syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in Quadraturis, sit ut quadratum sinus distantiae Lunæ a Quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocumque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum sinus distantiae Lunæ a Quadraturis & quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias, est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna

per-

percurrit PM , (cæteris paribus) ut ML , & ML est in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073, quam proxime. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, est quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiae Lunæ a Quadratura & semissem quadrati Radii ad semissem quadrati Radii, conjunctim. Unde si Nodi in Quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde distantia, & alia duo a Syzygia & Quadratura iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzygiam & Octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facile constabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur) erat $32'' . 42''' . 7^{iv}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse, ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud est $17'' . 43^{iv} . 11^v$, cujus pars quarta $4''' . 25^{iv} . 48^v$, motui horario mediocri superius invento $16'' . 21''' . 3^{iv} . 30^v$ subducta, relinquit $16'' . 16''' . 37^{iv} . 42^v$. motum medicrem horarium correctum.

Si Nodi versantur extra Quadraturas, & spectentur loca bina a Syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum Nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis & Nodi in Quadraturis versantur, ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Et decremента motuum, a causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ & motus mediocres: ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum situ, ad $16'' . 16''' . 37^{iv} . 42^v$. ut $AZqu.$ ad $ATqu.$; id est, ut quadratum sinus distantiae Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii.

tus medius Nodorum circulo toti respondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab N ad A , est ad $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$ ut area NAZ ad circulum totum.

Hæc ita se habent, ex Hypothesi quod Nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol annu toto completo ad Nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum Sol annu toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{\circ} 38' 7'' 50'''$, seu $39,6355$ gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis N fit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut AZq ad ATq : erit motus Solis ad motum Nodi in N , ut $360 ATq$ ad $39,6355 AZq$; id est, ut $9,0827646 ATq$ ad AZq . Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa , tempus quo Sol percurrat particulam Aa , si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum T revolvatur, reciproce ut $9,0827646 ATq$ ad $9,0827646 ATq + ZAg$. Nam tempus est reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum NA , exponatur per Sectorem NTA , & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum Aa , exponatur per Sectoris particulam ATa ; & (perpendicularo aT in Nn demisso) si in AZ capiatur dZ , ejus longitudinis ut sit rectangulum dZ in ZT ad Sectoris particulam ATa ut AZq ad $9,0827646 ATq + AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2} AZ$ ut ATq ad $9,0827646 ATq + AZq$; rectangulum dZ in ZT designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit Curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus Sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debet etiam area $AaTZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ , quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad $9,0827646 ATq + AZq$. Sic enim rectangulum eZ in ZT erit ad aream $AZTa$ ut decrementum temporis quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum e tangat

DE MONDI
SYSTEMATE

Curvam $NeFn$, area tota NeZ , quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NA respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus quo tempore arcus totus NA , per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam vero area semicirculi est ad aream Figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæsitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui respondet Circulo toti erat $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$; & propterea motus qui Figuræ $NeFnT$ duplicatæ respondet; est $1^{\circ} 29' 58'' 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{\circ} 19' 5'' 53'''$ motum totum Nodi inter sui ipsius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{\circ} 40' 54'' 7'''$ motum Solis inter easdem Conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annum 360^o ut Nodi motus jam inventus $18^{\circ} 19' 5'' 53'''$ ad ipsius motum annum, qui propterea erit $19^{\circ} 18' 1'' 23'''$. Hic est motus medius Nodorum in anno Sidereo. Idem per Tabulas Astronomicas est $19^{\circ} 21' 21'' 50'''$. Differentia minor est parte trecentesima motus totius, & ab Orbis Lunaris Eccentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Eccentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

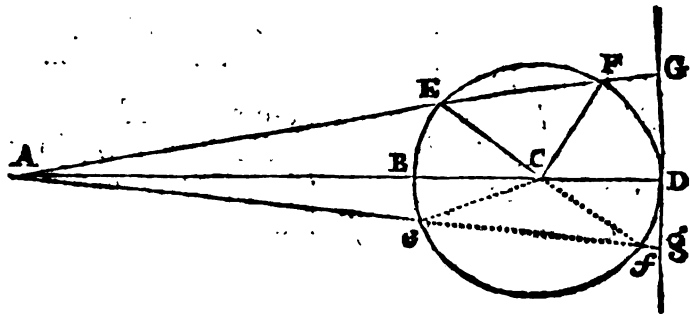
Invenire motum verum Nodorum Lune.

In tempore quod est ut area $NTA - NdZ$, (in Fig. præced.) motus iste est ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C , intervallo quovis CD , describatur circulus $BEFD$. Producat DC ad A , ut sit AB ad AC ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt in Quadraturis, (id est, ut $19^{\circ} 18' 1'' 23'''$ ad $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$; atque adeo BC ad AC ut motuum differentia $0^{\circ} 31' 2'' 32'''$, ad motum posteriorem $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$. (hoc est, ut 1 ad $38\frac{1}{2}$ dein per punctum D ducatur infinita Gg , quæ tangat circulum in D ; & si capiatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ distantie Solis a loco Nodi, per motum medium invento;

&

& agatur AE vel AF fecans perpendicularum DG in G ; & capiatur angulus qui fit ad motum totum Nodi inter ipsius Syzygias (id est, ad $9^{\text{h}} 11' 3''$.) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus DAG usurpari potest) ad motum medium Nodorum addatur ubi Nodi

LIBER
TERTIUS.



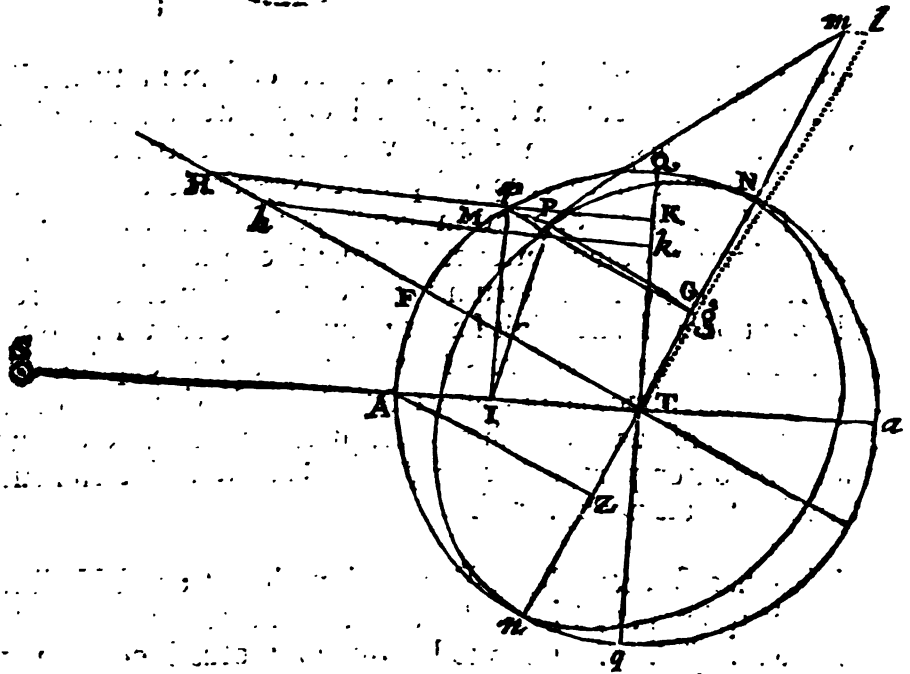
transeunt a Quadraturis ad Syzygias, & ab eodem motu medio subducatur ubi transeunt a Syzygiis ad Quadraturas, habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendiculari & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minime necessaria est. Nam cum Variatio Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario $16'' 19''' 26''$. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit $1^{\text{h}} 30'$. Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probe quadrant.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire Variationem horariam Inclinationis Orbis Lunarum ad planum Eclipticæ.

Designent A & a Syzygias; Q & q Quadraturas; N & n Nodos; P locum Lunæ in Orbe suo; p vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & mTl motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam Tm demittatur perpendicularum PG , jungatur pG , & producatur ea donec occurrat Tl in g , & jungatur etiam Pg : erit angulus PGp Inclinationis orbis Lunarum ad planum Eclipticæ,



ubi Luna versatur in P ; & angulus PGp Inclinationis ejusdem post momentum temporis completum; adeoque angulus GPg Variatio momentanea Inclinationis. Est autem hic angulus GPg ad angulum GTg , ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus GTg (per Proposit. xxx.) sit ad angulum $33^{\circ}. 10''$, 33^{iv} . ut

$IT \times PG \times AZ$ ad AT cub., erit angulus GPg (sive Inclinationis horaria Variatio) ad angulum $33^\circ 10' 33''$, ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT cub. Q. E. I.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe Circulari uniformiter gyatur. Quod si Orbis ille Ellipticus sit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Inclinationis Variatio.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendicularum TF , sitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendiculara pK , Mk in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H & b : erit IT ad AT ut Kk ad Mp , & TG ad Hp ut TZ ad AT , ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc est, æquale areæ

$HpMb$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$; & propterea Inclinationis Variatio horaria ad $33^\circ 10' 33''$, ut $HpMb$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$

ad AT cub.

Corol. 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius foret ad $33^\circ 10' 33''$, ut aggregatum omnium arearum $HpMb$, in revolutione puncti p genitarum, & sub signis propriis + & - conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. id

est, ut circulus totus $QAgg$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times$

AT cub. hoc est, ut circumferentia $QAgg$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$

ad $2Mp \times AT$ quad.

Corol. 3. Præinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex qua per mensem uniformiter continuata Variatio illa menstrua generari posset, est ad $33^\circ 10' 33''$, ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{4AT}$ ad $PG \times 4AT$, id

Ggg

est

DE MONDI
SYSTEMATE

est (cum Pp sit ad PG ut sinus Inclinacionis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2} AT}$ sit ad $4 AT$ ut sinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut Inclinacionis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiae Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam Inclinacionis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per hanc Propositionem) ad angulum $33''. 10'''. 33''''$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT cub. id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2 AT$, hoc est, ut sinus duplicatæ distantiae Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est, spatio horarum 177 $\frac{1}{2}$;) erit ad summam totidem angulorum $33''. 10'''. 33''''$, seu $5878''$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiae Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam: id est, si Inclinatio sit $5^{\circ} 1'$. ut $7 \times \frac{571}{1000}$, ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est $163''$, seu $2'. 43''$.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

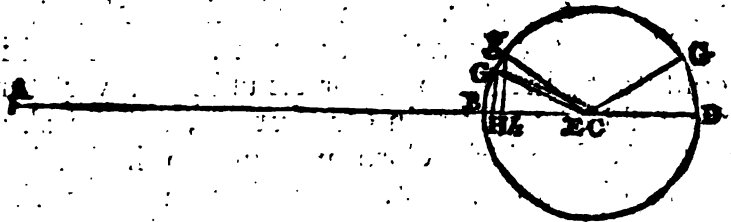
Dato tempore invenire Inclinacionem Orbis Lunarum ad planum Eclipticæ.

Sit AD sinus Inclinacionis maximæ, & AB sinus Inclinacionis minimæ. Bisecetur BD in C , & centro C , intervallo BC , describatur Circulus BGD . In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam EB habet ad $2 BA$; Et si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiae Nodorum à

Qua-

Quadraturis, & ad AD demittatur perpendicularum GH ; erit AH sinus Inclinationis quaesitæ. LIBER
TERTIUS.

Nam GEq æquale est $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2.BH \times BE = REq + 2.EC \times BH = 2.EC \times AB + 2.EC \times BH = 2.EC \times AH$. Ideoque cum $2.EC$ detur, est GEq ut AH . Designet jam Aeg duplicatam distantiam Nodorum à Quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg , ob datum



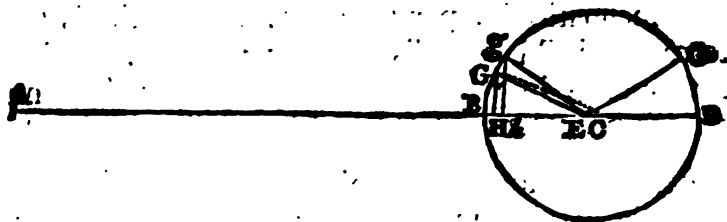
angulum GEG , erit ut distantia GE . Est autem Hh ad Gg ut GH ad GC , & propterea Hh est ut contentum $GH \times Gg$ seu $GH \times GE$; id est, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ seu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id est, ut AH & sinus anguli AEG conjunctim. Igitur si AH in casu aliquo sit sinus Inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu Inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D hanc sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hac demonstratione supposui angulum BEG , qui est duplicata distantia Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, & in hoc casu Gg esse augmentum horarium duplæ distantiae Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis Variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad $33'' . 10''' . 33''''$. ut contentum sub Inclinationis sinu AH & sinu anguli recti BEG , qui est duplicata distantia Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris Inclinationis sinus AH ad radium quadruplicatum; hoc est (cum Inclinatio illa mediocris sit quasi $5^{\circ} 8\frac{1}{2}'$) ut ejus sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 724 ad 10000. Est autem Variatio tota, sinuum differentiae BD respondens, ad Variationem illam horariam ut diameter BD ad Ggg 2 arcum

DE MONDI
SYSTEMATE

arcum Gg ; id est, ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctum; hoc est, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes jungantur, fiet Variatio tota BD ad $33''$. $10'''$. 33^{iv} ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, & inde Variatio illa BD prodibit $16'$. $23''\frac{1}{2}$.

Hæc est Inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam Inclination, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, Inclination minor est ubi Luna versatur in Syzygiis, quam ubi ea versatur in Quadraturis, excessu $2'$. $43''$; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio $1'$. $21''\frac{1}{2}$. Variatio tota mediocris BD in Quadraturis Lunaribus diminuta fit $15''$. $2''$, in ipsius autem Syzygiis aucta fit $17'$. $45''$. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit $17'$. $45''$: adeoque si Inclination, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit 4° . $17'$. $20''$; eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 4° . $59'$. $35''$. Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus.



Si jam desideretur Orbis Inclination illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat AB ad AD ut sinus graduum 4° . $59'$. $35''$ ad sinum graduum 5° . $17'$. $20''$, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiae Nodorum à Quadraturis; & erit AH sinus Inclinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclination, ubi Luna distat 90° à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas mensura, quam inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem mensuram motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

La Caille, Astronomie, p. 100. & p. 101. & p. 102. & p. 103. & p. 104. & p. 105. & p. 106. & p. 107. & p. 108. & p. 109. & p. 110. & p. 111. & p. 112. & p. 113. & p. 114. & p. 115. & p. 116. & p. 117. & p. 118. & p. 119. & p. 120.

Scbo

Scholium:

Hicce motuum Lunarum computationibus ostendere volui quod motus Lunares, per Theoriam Gravitatis, a causis suis computari possint. Per eandem Theoriam inveni præterea quod Æquatio Annua medii motus Lunæ oriatur a varia dilatatione Orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. lxxvi. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major est, & Orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor est, & Orbem illum contrahi permittit. In Orbe dilatato Luna tardius revolvitur, in contracto citius; & Æquatio Annua per quam hæc inæqualitas compensatur, in Apogæo & Perigæo Solis nullâ est, in mediocri Solis a Terra distantia ad $11'. 50''$ circiter ascendit, in aliis locis Æquationi centri Solis proportionalis est; & additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab Aphelio suo ad Perihelium, & in opposita Orbis parte subducitur. Assumendo radium Orbis magni 1000 & Eccentricitatem Terræ 16, hæc Æquatio ubi maxima est, per Theoriam Gravitatis prodit $11'. 49''$. Sed Eccentricitas Terræ paulo major esse videtur, & aucta Eccentricitate hæc Æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit Eccentricitas 16, & Æquatio maxima erit $11'. 52''$.

Inveni etiam quod in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi Lunæ velocius moventur quam in Aphelio ejus, idque in triplicata ratione distantie Terræ a Sole inverse. Et inde oriuntur Æquationes Annuæ horum motuum Æquationi centri Solis proportionales. Motus autem Solis est in duplicata ratione distantie Terræ a Sole inverse, & maxima centri Æquatio quam hæc inæqualitas generat, est $18'. 56'. 26''$ prædictæ Solis Eccentricitati 16 congruens. Quod si motus Solis esset in triplicata ratione distantie inverse, hæc inæqualitas generaret Æquationem maximam $28'. 56'. 9''$. Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, sunt ad $28'. 56'. 9''$, ut motus medius diurnus Apogæi & motus medius diurnus Nodorum Lunæ sunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit Æquatio maxima medii motus Apogæi $19'. 52''$; & Æquatio maxima medii motus Nodorum $9'. 27''$. Additur vero Æquatio prior & subducitur posterior, ubi Terra pergit a Perihelio suo ad Aphelium: & contrarium fit in opposita Orbis parte.

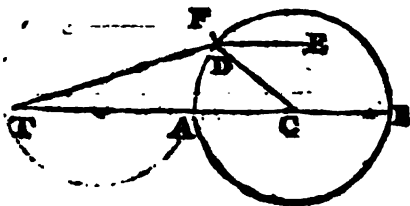
DE MONDI
SYSTEMATE

Per Theoriam Gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit ubi transversa diameter Orbis Lunaris transit per Solem, quam ubi eadem ad rectos est angulos cum linea Terram & Solem jungente: & propterea Orbis Lunaris paulo major est in priore casu quam in posteriore. Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris, pendens a situ Apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima est cum Apogæum Lunæ versatur in Octante cum Sole; & nulla cum illud ad Quadraturas vel Syzygias pervenit: & motui medio additur in transitu Apogæi Lunæ a Solis Quadratura ad Syzygiam, & subducitur in transitu Apogæi a Syzygia ad Quadraturam. Hæc Æquatio quam Semestrem vocabo, in Octantibus Apogæi quando maxima est, ascendit ad 3'. 45" circiter, quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia a Terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione distantiae Solis inverse, adeoque in maxima Solis distantia est 3'. 34", & in minima 3'. 56" quamproxime: ubi vero Apogæum Lunæ situm est extra Octantes, evadit minor; estque ad Æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiae Apogæi Lunæ a proxima Syzygia vel Quadratura ad radium.

Per eandem Gravitatis Theoriam actio Solis in Lunam paulo major est ubi linea recta per Nodos Lunæ ducta transit per Solem, quam ubi linea ad rectos est angulos cum recta Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motus Lunaris Æquatio, quam Semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi Nodi in Solis Octantibus versantur, & evanescit ubi sunt in Syzygiis vel Quadraturis, & in aliis Nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiae Nodi alterutrius a proxima Syzygia aut Quadratura: additur vero medio motui Lunæ dum Nodi transeunt a Solis Quadraturis ad proximas Syzygias, & subducitur in eorum transitu a Syzygiis ad Quadraturas; & in Octantibus ubi maxima est, ascendit ad 47" in mediocri Solis distantia a Terra, uti ex Theoria Gravitatis colligo. In aliis Solis distantis hæc Æquatio, in Octantibus Nodorum, est reciproce ut cubus distantiae Solis a Terra, ideoque in Perigæo Solis ad 45" in Apogæo ejus ad 49" circiter ascendit.

Per eandem Gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum Sole Quadraturam facit. Et Eccentricitas fit maxima in priore casu & minima in posteriore, per Corol:

7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & Æquationem principalem Apogæi generant, quam Semestrem vocabo. Et Æquatio maxima Semestris est $12^{\text{st}}. 18'$ circiter, quantum ex Observationibus colligere potui. *Horroxius* noster Lunam in Ellipsi circum Terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. *Halleius* centrum Ellipseos in Epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revoluitur circum Terram. Et ex motu in Epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu & regressu Apogæi & quantitate Eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris Lunæ a Terra in partes 100000; & referat T Terram & TC Eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 4505. Producat TC ad B , ut sit CB sinus Æquationis maximæ Semestris $12^{\text{st}}. 18'$ ad radium TC , & circulus BDA centro C intervallo CB descriptus, erit Epicyclus ille in quo centrum Orbis Lunaris locatur & secundum ordinem literarum BDA revoluitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ semel æquato, & erit CTD Æquatio



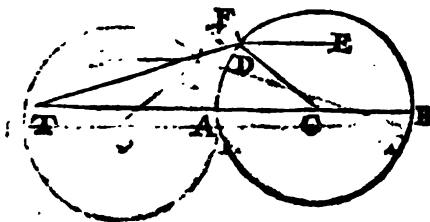
Semestris Apogæi Lunæ & TD Eccentricitas Orbis ejus in Apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & Eccentricitate, ut & Orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in Orbe & distantia ejus a Terra, idque per Methodos notissimas.

In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum Orbis Lunæ velocius movetur circum centrum C quam in Aphelio, idque in triplicata ratione distantiæ Terræ a Sole inverse. Ob Æquationem centri Solis in Argumento annuo comprehensam, centrum Orbis Lunæ velocius movetur in Epicyclo BDA in duplicata ratione distantiæ Terræ a Sole inverse. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione simplici distantiæ inverse; ab Orbis centro D agatur recta DE versus Apogæum Lunæ, seu rectæ TC parallela, & capiatur angulus EDF æqualis excessui Argumenti

DE MONDI
SYSTEMATE

menti anni prædicti supra distantiam Apogei Lunæ a Perigæo Solis in consequentia; vel quod perinde est, capiatur angulus CDF æqualis complemento Anomalie veræ Solis ad gradus 360. Et fit DF ad DC ut dupla Eccentricitas Orbis magni ad distantiam mediocrem Solis a Terra, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id est, ut 331 ad 1000 & 52' 27" 26" ad 59' 8" 10" conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et concepe centrum Orbis Lunæ locari in puncto F , & in Epicyclo, cujus centrum est D & radius DF interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentia circuli $DABD$. Hac enim ratione velocitas qua centrum Orbis Lunæ in linea quadam curva circum centrum C descripta movebitur, erit reciproce ut cubus distantie Solis a Terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem frequentem. Si distantia mediocris Lunæ a Terra fit partium 100000, & Eccentricitas TC sit partium 5505 ut supra: recta CB vel CD invenietur partium 11724, & recta DF



partium 357. Et hæc recta ad distantiam TC subtendit angulum ad Terram quem translatio centri Orbis a loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in situ parallelo ad distantiam superioris umbilicij Orbis Lunæ a Terra, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici, & ad distantiam Lunæ a Terra subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ, quique propterea Æquatio centri Secunda dici potest. Et hæc Æquatio in mediocri Lunæ distantia a Terra, est ut sinus anguli quem recta illa DF cum recta a puncto F ad Lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima est evadit 2' 25". Angulus autem quem recta DF & recta a puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum EDF ab Anomalia media Lunæ, vel addendo distantiam Lunæ a Sole ad distantiam Apogei Lunæ ab Apogæo Solis

Solis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita $2'. 25''$ sunt ad *Æquationem* Centri Secundam, addendam si summa illa sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus Longitudo in ipsis Luminarium Syzygiis.

Si computatio accuratior desideretur, corrigendus est locus Lunæ in Orbe ut supra inventus per Variationem duplicem. De Variatione Prima & principali diximus supra, hæc maxima est in Octantibus Lunæ. Variatio altera maxima est in Quadrantibus, & oritur a varia Solis actione in Orbem Lunæ pro varia positione Apogæi Lunæ ad Solem, computatur vero in hunc modum. Ut radius ad sinum versus distantie Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in consequentia, ita angulus quidam P ad quartum proportionalem. Et ut radius ad sinum distantie Lunæ a Sole, ita summa hujus quarti proportionalis & anguli cujusdam alterius Q ad Variationem Secundam, subducendam si Lunæ lumen augetur, addendam si diminuitur. Sic habebitur locus verus Lunæ in Orbe, & per Reductionem loci hujus ad Eclipticam habebitur Longitudo Lunæ. Anguli vero P & Q ex Observationibus determinandi sunt. Et interea si pro angulo P usurpentur $2'$. & pro angulo Q $1'$, non multum errabitur.

Cum Atmosphæra Terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, & refringendo spargat eandem in Umbram Terræ, & spargendo lucem in confinio Umbræ dilatat Umbram: ad diametrum Umbræ quæ per Parallaxim prodit, addo minutum unum primum in Eclipsibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

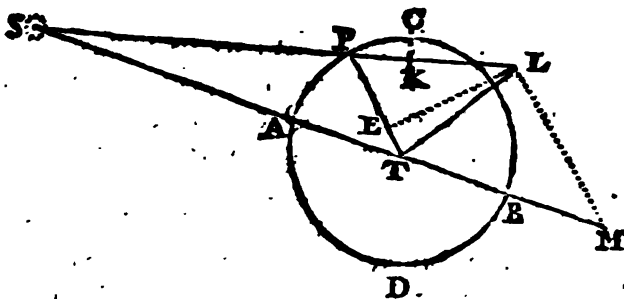
Theoria vero Lunæ primo in Syzygiis, deinde in Quadraturis, & ultimo in Octantibus per Phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Observatorio Regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommode sequentes adhibebit: nempe motum medium Solis $20^{\circ} 43'. 40''$, & Apogæi ejus $7^{\circ} 44'. 30''$, & motum medium Lunæ $15^{\circ} 20'. 00''$, & Apogæi ejus $8^{\circ} 20'. 00''$, & Nodi ascendentis Ω $17^{\circ} 24'. 20''$; & differentiam meridianorum Observatorii hujus & observatorii Regii *Parisiensis* $0^{\text{hor.}} 9^{\text{min.}} 20^{\text{sec.}}$.

Dr. MANN
SYSTEMA

PROPOSITIO XXXVI THEOREMA XVII

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML seu PT , in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis TM — LM seu PK in Syzygiis Lunaribus, est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro Terræ, id est, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in superficie Terræ, est ad vim gravitatis, ut 1 ad 38604600. Hæc vi Mare deprimitur in locis quæ 90 gradibus distant



a Sole. Vi altera quæ duplo major est, Mare elevatur & sub Sole & in regione Soli opposita. Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant à Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole & Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac si tota in regionibus sub Sole & Soli oppositis Mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a Sole nil ageret.

Hæc est vis Solis ad Mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci versatur quam in mediocri sua distantia a Terra. In aliis Solis positionibus vis ad Mare attollendum, est ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem loci directe & cubus distantie Solis a Terra inverse.

Corol. Cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo

Altitudo Aquæ sub Æquatore superius ejus altitudinem sub Polaris mensura pedum Parisiensium 34820, vis Solaris de qua egimus hinc sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, itaque ad vim centrifugam ut 189 ad 12868200 seu 1 ad 44527, efficit ut altitudo Aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis, superet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus distant a Sole, mensura tantum pedum unius Parisiensis & digitorum undecim octava parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 34820 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda est ex ejus proportionem ad vim Solis, & hæc proportio colligenda est ex proportionem motuum Maris, quæ ab his viribus oriuntur. Ante ortum fluvii *Aponæ* ad lapidem tertium infra *Bristoliam*, tempore verno & autumnali totus Aquæ ascensus in Conjunctione & Oppositione Luminarium (observante *Samuele Sturmio*) est pedum plus minus 45, in Quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore versantium & medioeriter a Terra distantium sunt vires S & L, & erit $L + S$ ad $L - S$ ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* Æstus maris (ex observatione *Samuelis Colepreffi*) ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo Æstus in Syzygiis superare potest altitudinem ejus, in Quadraturis, pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit $L + S$ ad $L - S$ ut 20½ ad 11½ seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum prior. Ob magnitudinem Æstus in portu *Bristolie*, observationibus *Sturmi* magis fidendum esse videtur, ideoque donec aliquid certius consiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, Æstus maximi non incidunt in ipsas Luminarium Syzygias, sed sunt tertii a Syzygiis ut dictum fuit, seu proximè sequuntur tertium Lunæ post Syzygias appulsam ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, seu post horam

DE MONDI
SYSTEMATE

ram a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, adeoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragessimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ideoque proxime sequuntur appulsu Lunæ ad meridianum, ubi Luna distat a Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novendecim in consequentia. Æstas & Hyems maxime vigent, non in ipsis Solstitiis, sed ubi Sol distat a Solstitiis decima circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus Æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna distat a Sole decima circiter parte motus totius ab Æstu ad Æstum. Sit distantia illa graduum plus minus 18½. Et vis Solis in hac distantia Lunæ a Syzygiis & Quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quam in ipsis Syzygiis & Quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiae hujus duplicatae seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 1000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S. scribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis Lunæ in Quadraturis, ob declinationem Lunæ ab Æquatore, diminui debet. Nam Luna in Quadraturis, vel potius in gradu 18½ post Quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13' versatur. Et Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad Mare movendum diminuitur in duplicata ratione sinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis Lunæ in his Quadraturis est tantum 0,8570327 L. Est igitur L + 0,7986355 S ad 0,8570327 L - 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea diametri Orbis in quo Luna absque Eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia Lunæ a Terra in Syzygiis est ad distantiam ejus in Quadraturis, ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiae ejus in gradu 18½ a Syzygiis ubi Æstus maximus generatur, & in gradu 18½ a Quadraturis ubi Æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam, ut 69,098747 & 69,897345 ad 69½. Vires autem Lunæ ad Mare movendum sunt in triplicata ratione distantiarum inverse, ideoque vires in maxima & minima harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia, ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L - 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871209.

Corol. 1. Cum Aqua vi Solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum octava parte digiti, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum & digitorum octo, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum semisse, & ubi Luna est in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum semisse & ultra, præsertim ubi Æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes Maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in Mari *Pacífico*, & Maris *Atlantici* & *Ethiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem *Pacífico*, quod profundius est & latius patet, Æstus dicuntur esse majores quam in *Atlantico* & *Ethiopico*. Etenim ut plenus sit Æstus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor esse debet quam graduum nonaginta. In Mari *Ethiopico*, ascensus aquæ intra Tropicos minor est quam in Zonis temperatis, propter angustiam Maris inter *Africam* & Australem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in Insulis, quæ à littoribus longissime absunt, perexiguus esse solet. In Portibus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent esse solito majores, uti ad *Plymouthum* & pontem *Chepstowe* in *Anglia*; ad montes *S. Michaels* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Avranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadisorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circumdatur. Æstus in hujusmodi portibus & fretis, per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora vero quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo Æstus respondet viribus Solis & Lunæ.

PHILOSOPHIAE NATURALIS

Corol. 2. Luna ad Mare movendum, fit ad vim gravi-
peripicuum est quod vis illa fit longe
experimentis Pendulorum, vel in Staticis
quibusconque flecti possit. In Aëre solo ma-
edit effectum.

Corol. 3. Luna ad Mare movendum, est ad Solis
ut 4,4815 ad 1, & vires illae (per Corol. 14.
Lib. I.) sunt ut densitates corporum Lunae & Solis
diametrorum apparentium conjunctim; densitas Lunae erit
densitatem Solis, ut 4,4815 ad 1 directe & cubus diametri
ad cubum diametri Solis inverse: id est (cum diametri me-
diocres apparentes Lunae & Solis sint 31'. 16 1/2" & 32'. 12") ut
ad 1000. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terrae,
ut 100 ad 396; & propterea densitas Lunae est ad densitatem
Terrae, ut 4891 ad 3960 seu 21 ad 17. Est igitur corpus Lunae
densius & magis terrestre quam Terra nostra.

Corol. 4. Et cum vera diameter Lunae (ex Observationibus
Astronomicis) fit ad veram diametrum Terrae, ut 100 ad 365;
erit massa Lunae ad massam Terrae, ut 1 ad 39371.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in superficie Lunae, erit quass
triplo minor quam gravitas acceleratrix in superficie Terrae.

Corol. 6. Et distantia centri Lunae a centro Terrae, erit ad di-
stantiam centri Lunae a communi gravitatis centro Terrae & Lunae,
ut 40,371 ad 39,371.

Corol. 7. Et mediocris distantia centri Lunae a centro Terrae, erit
semidiametrorum maximarum Terrae 604 quamproxime. Nam
semidiameter maxima Terrae fuit pedum Parisiensium 19767630,
& mediocris distantia centrorum Terrae & Lunae ex hujusmodi
semidiametris 604 constans, aequalis est pedibus 1190999707. Et
haec distantia (per Corollarium superius) est ad distantiam centri
Lunae a communi gravitatis centro Terrae & Lunae; ut 40,371 ad
39,371, quae proinde est pedum 1161498340. Et cum Luna re-
volvatur respectu Fixarum, diebus 27, horis 7 & minutis primis 43 1/2,
sinus versus anguli quem Luna, tempore minuti unius primi motu
suo medio, circa commune gravitatis centrum Terrae & Lunae de-
scribit, est 1275237, existente radio 100, 000000, 000000. Et ut
radius est ad hunc sinum versum, ita sunt pedes 1161498340 ad
pedes 14,811833. Luna igitur vi illa qua retinetur in Orbe, ca-
dendo in Terram, tempore minuti unius primi describet pedes
14,811833. Et si haec vis augeatur in ratione 177 1/2 ad 178 1/2, ha-
bebitur

habitur vis tota gravitatis in Orbe Lunæ, per Corol. Prop. 111. Et hac vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi describere deberet pedes 14,89517. Et ad sexagesimam partem hujus distantia, id est, ad distantiam pedum 1984999 a centro Terræ, corpus grave cadendo, tempore minuti unius secundi describere deberet etiam pedes 14,89517. Diminuat hęc distantia in subduplicata ratione pedum 14,89517 ad pedes 15,12028, & habebitur distantia pedum 19701678 a qua grave cadendo, eodem tempore minuti unius secundi describet pedes 15,12028, id est, pedes 15, dig. 1, lin. 5,32. Et hac vi gravia cadunt in superficie Terræ, in Latitudine urbis *Luætiæ Parisiorum*, ut supra ostensum est. Est autem distantia pedum 19701678 paulo minor quam semidiameter globi huic Terræ æqualis, & paulo major quam Terræ hujus semidiameter mediocri, ut oportet. Sed differentia sunt insensibiles. Et propterea vis qua Luna retinetur in Orbe suo, ad distantiam maximarum Terræ semidiametrorum $60\frac{1}{2}$, ea est quam vis Gravitatis in superficie Terræ requirit.

Corol. 8. Distantia mediocri centrorum Terræ & Lunæ, est mediocrium Terræ semidiametrorum $60\frac{1}{2}$ quamproxime. Nam semidiameter mediocri, quæ erat pedum 19688725, est ad semidiametrum maximam pedum 19767630, ut $60\frac{1}{2}$ ad $60\frac{1}{2}$ quamproxime.

In his computationibus Attractionem magneticam Terræ non consideramus, cujus utique quantitas perparva est & ignotatur. Siquando vero hæc attractio investigari poterit, & mensuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum Maris, & parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis & Lunæ ex Phenomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum esset ad instar Maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, esset ad vim Lunæ, quæ Mare nostrum in partibus & sub Luna & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diame-

diametrum Terræ conjunctim, id est, ut 39,371 ad 1 & 105 ad 365 conjunctim, seu 1079 ad 100. Unde cum Mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes 8½, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93½. Eaque de causa Figura Lunæ Sphærois effret, cujus maxima diameter producta transfret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculâres excessu pedum 187. Talem igitur Figuram Lunæ affectat, eamque sub initio induere debuit.

Q. E. I.

Corol. Inde vero fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longè tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem in Prop. xviii. allatam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

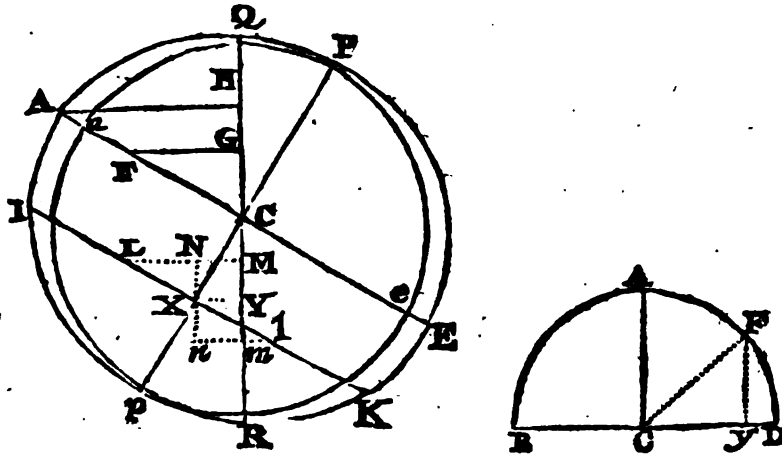
L E M M A I.

Si A P E p Terram designet uniformiter densam, centroque C & Polis P, p & Equatore A E delineatam; & si centro C radio CP describi intelligatur Sphæra P a p e; sit autem QR planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terra totius exterioris P a p A P e p E, quæ Sphæra modo descripta altior est, particula singule conentur recedere hinc inde a plano QR, sitque conatus particula cujusque ut ejusdem distantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium, in Equatoris circulo A E, extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in Equatoris puncto A, quod a plano QR maxime distat, consistentium vim & efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione Equatoris & plani QR jacentem, peragetur.

Nam centro C diametro BD describatur semicirculus B A F D C. Dividi intelligatur semicircumferentia B A D in partes

partes innumeras æquales, & a partibus singulis F ad diametrum BD demittantur sinus FT . Et summa quadratorum ex sinibus omnibus FT æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus omnibus CT , & summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semidiametris CF ; adeoque summa quadratorum ex omnibus FY , erit duplo minor quam summa quadratorum ex totidem semidiametris CF .

Lissa
Tartorius.



Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendicularum FG , ut & a puncto A perpendicularum AH . Et vis qua particula F recedit a plano QR , erit ut perpendicularum illud FG per hypothesin, & hæc vis ducta in distantiam CG , erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Adeoque efficacia particulæ in loco F , erit ad efficaciam particulæ in loco A , ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc est, ut FCq ad ACq ; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F , erit ad efficaciam particularum totidem in loco A , ut summa omnium FCq ad summam totidem ACq , hoc est, (per jam demonstrata) ut unum ad duo. *Q.E.D.*

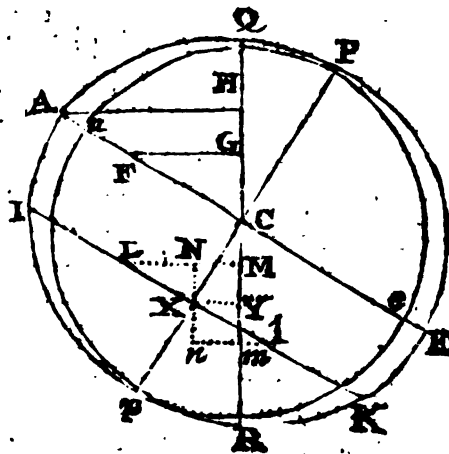
Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano QR , idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eadem convertent circumferentiam circuli *Equatoris*, eique inhaerentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano *Equatoris* jacentem.

LEM.

LEMMA II.

Isdem positis: Dico secundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in Æquatoris circulo AE , uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.

Sit enim IK circulus quilibet minor Æquatori AE parallelus, sintque L, l particulae duae quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* sitæ. Et si in planum QR , quod radio in Solem ducto perpendicularare est, demittantur perpendiculara LM, lm : vires totæ quibus particulae illæ fugiunt planum QR , proportionales erunt perpendicularis illis LM, lm . Sit autem recta Ll plano *Pape* parallela & bifecetur eadem in X , & per punctum X agatur Nn , quæ parallela sit plano QR & perpendi-



culis LM, lm occurrat in N ac n , & in planum QR demittatur perpendicularum Xl . Et particularum L & l vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM$

Lemma.
TERRAE.

— $NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times MC + mC$, est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiae pars affirmativa $LN \times Mm$ seu $2 LN \times NX$, est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2 AH \times HC$, ut LXq ad ACq . Et pars negativa $NM \times MC + mC$ seu $2 XT \times CT$, ad particularum earundem in A consistentium vim $2 AH \times HC$, ut CXq ad ACq . Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L & l simul sumptarum vis ad Terram rotandam, est ad vim particularum duarum iisdem æqualium & in loco A consistentium, ad Terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq . Sed si circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L , erunt omnes LXq ad totidem LXq ut 1 ad 2, (per Lem. I.) atque ad totidem ACq , ut LXq ad $2 ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2 CXq$ ad $2 ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK , sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A , ut $LXq - 2 CXq$ ad $2 ACq$: & propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE , ut $LXq - 2 CXq$ ad ACq .

Jam vero si Sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK ; materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut LXq : ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut LXq in $LXq - 2 CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut LXq in ACq . Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli **maximi** AE consistentis, ut omnia LXq in $LXq - 2 CXq$ ad totidem LXq in ACq , hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3 CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq , id est, ut omnia $ACqq - 4 ACq \times CXq + 3 CXqq$ ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens cujus fluxio est $ACqq - 4 ACq \times CXq + 3 CXqq$, ad totam quantitatem fluentem cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac proinde per Methodum Fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{1}{2} ACq \times CX cub. + \frac{1}{3} CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{2} ACq \times CX cub.$, id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC , ut $\frac{1}{2} ACqc$ ad $\frac{1}{2} ACqc$, hoc est, ut duo ad quinque. Q. E. D.

L E M M A III.

Iisdem positis: Dico tertio quod motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione qua componitur ex ratione materiæ in Terra ad materiæ in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadranti circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiæ & numeri 925275 ad numerum 1000000.

Est enim motus Cylindri circum axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

H Y P O T H E S I S II.

Si annulus prædictus Terra omni reliqua sublata, solus in Orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Equinoctialium siue annulus iste fluidus esset, siue is ex materia rigida & firma constaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire Præcessionem Equinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi sunt in Quadraturis, erat $16'' . 35''' . 16''$, $36''$. & hujus dimidium $8'' . 17'' . 38'''$, $18''$. (Ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto sidereo $20^{\text{h}} . 11' . 46''$. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim $20^{\text{h}} . 11' . 46''$ in antecédentia; & si plures essent Lunæ motus Nodorum cujusque, per Corollar. 16. Prop: LXVI. Lib. I. forent ut tempora periodica; si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad $20^{\text{h}} . 11' . 46''$. ut dies sidereus horarum $23 . 56'$. ad tempus periodicum Lunæ dierum $27 . 7 \text{ hor. } 43'$; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquecant & in anulum continuum formentur, sive denique anulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod anulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit Terræ omni *Pap APeE* quæ globo *Pape* superior est; (*Vid. Fig. pag 434.*) & quoniam globus iste ad Terram illam superiorem ut *aCqu.* ad *ACqu.* — *aCqu.* id est (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* sit ad diametrum majorem *AC* ut 229 ad 230,) ut 52441 ad 459; si anulus iste Terram secundum Æquatorem cingeret & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur; motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si anulus globo adhæreat, & motum suum quo ipsius Nodi seu puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum Æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum Æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi, ad motum

DE MUNDI SYSTEMATE 20^s. 11'. 46", ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeo quibus puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 IT, in Fig. pag. 403 & 404.) sunt in singulis particulis ut distantie particularum à plano QR, & his viribus particule illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ P p A P p E, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta Æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annus Æquinoctiorum regressus jam esset ad 20^s. 11'. 46", ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9". 56". 50".

Cæterum hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum 23½) ad Radium 100000, Quæ ratione motus iste jam fiet 9". 7". 29". Hæc est annua Præcessio Æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad Mare movendum erat ad vim Solis, ut 4, 4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda, est ad vim Solis in eadem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præcessio a vi Lunæ oriunda 40". 52". 52"; ac tota Præcessio annua a vi utraque oriunda 50". 00". 12". Et hic motus cum Phænomenis congruit. Nam Præcessio Æquinoctiorum ex Observationibus Astronomicis est minorum secundorum plus minus quinquaginta.

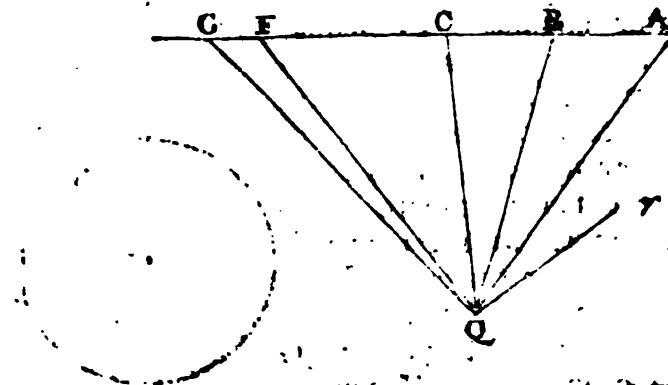
Si altitudo Terræ ad Æquatorem superet altitudinem ejus ad Poles, milliaribus pluribus quam 17½, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & Præcessio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Descripsimus jam Systema Solis, Terræ, Lunæ, & Planctarum: superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA IV.

Cometas esse Luna superiores & in regione Planetarum versari.

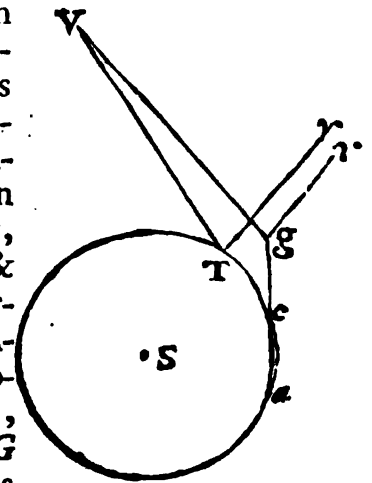
Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublimates, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at iusto celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et e contra qui pergunt contra ordinem signorum sunt iusto celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & iusto tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem tanto celerius fertur; ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa e Terra spectatus, ob motum suum tardiozem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ,



(detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunt rQA , rQB , rQC observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque rQF longitudo ultimo observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur

DE MONDI
SYSTEMATE

Agatur recta ABC , cujus partes AB , BC rectis QA & QB , QB & QC interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producat AC ad G , ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur QG . Et si Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, procederetur; foret angulus $\angle QG$ longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur $\angle FQG$, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $\angle QG$, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiolem reddit, vel forte retrogradum, uti modo exposui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a Cometæ motu inæquabili in Orbe proprio oriri possit. Distantia vero Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet S Solem, a & T Orbem magnum, a locum Terræ in observatione prima, c locum Terræ in observatione tertia, T locum Terræ in observatione ultima, & Tv lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus $\angle TV$ æqualis angulo $\angle QF$, hoc est, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in T . Jungatur ac , & producat ac ad g , ut sit ag ad ac ut AG ad AC , & erit g locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur gv ipsi Tv parallela, & capiatur angulus $\angle gv$ angulo $\angle QG$ æqualis, erit hic angulus $\angle gv$ æqualis longitudini Cometæ e loco g spectati; & angulus $\angle Tv$ parallaxis erit, quæ oritur a translatione Terræ de loco g in locum T ; ac proinde V locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus V Orbe Jovis inferior esse solet.



Idem

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit dispartes Cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in Perigæis & Peribeliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbem Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis coelestis a Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiae: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione subduplicata lucis ad lucem inverse. Sic minima capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum a *Flemstedio* observata & Micrometro mensurata, æquabat 2'. 0". Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11" vel 12". Luce vero & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21", adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30": erit distantia Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad 44 inverse; & 12" ad 30" directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursum Cometa anni 1665 mense *Aprilis*, ut auctor est *Hevelius*, claritate sua pene Fixas omnes superabat, quin etiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6', at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore interme-

die Saturni, tunc ipsi aequalis iudicatur. Porro: cum diamèter capillitii Cometarum raro superet: 8' vel 12', diamèter vero nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hæcæ ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux circumcisa luce Saturni non raro confecti possit, eamque aliquando superet, manifestum est quod Cometa omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: quæ certe ratione non magis illustrari deberent a Sole nostro, quam Planetæ, qui hic sunt, illustrantur a Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maxime copiosum & crassum, quo caput circumdatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longe infra spheram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæc vel ex reflexione fumi sparsi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita sub Sole desitescant, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trahium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem densione colligitur ex luce caputum crescente in recessu Cometarum a Terra Solem versus, ac decrecente in eorum recessu a Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1667 (observante Hevelio,) ex parte conspici coepit, remittebat semper

de motu suo appareat, adeoque præterierat Perigæum: Splendor vero capitis nihilominus in dies crescebat, usque dum Cometa radiis Solaribus obiectus desit apparere. Cometa Anni 1682, observante eodem *Hevelio*, in fine Mensis *Julii* ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 47 circiter singulis diebus in Orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur usque ad *Sept. 4.* quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis Micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug. 6.* esse tantum 6'. 5" inclusa coma, at *Sept. 2.* esse 9'. 7". Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Promde toto hoc tempore, ob recessum ipsius a Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Mensis *Decembris*, & iste Anni 1680 circa finem ejusdem Mensis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb. 1.* majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb. 16.* (jam in Perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan. 7.* *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & a *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum a Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb. 15* & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decemb. 26.* velocissime motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan. 3.* apparebat ut Stella quartæ, *Jan. 9.* ut Stella quintæ, *Jan. 13.* ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan. 25.* vix æquabat Stellam magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia a Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales a Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maxime splenduerunt, ex altera Perigæi parte evanuerunt. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum

regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis a se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum, deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniore qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est a latere Terræ quod Solem respicit, inque parte illa majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniore, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod Cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum, diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphære inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata est, quæ situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficiliter cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

LIBER
TERTIUS.

Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radius ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per Corol. 1. Propof. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt: Orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquuplicata. Ideoque Cometæ maxima ex parte supra Planetas veriantes, & eo nomine Orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis Orbis Cometæ sit quadruplo major axe Orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ, absque erroribus sensibilibus, adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis, erit semper ad velocitatem Planetæ cujuscvis circa Solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiæ Planetæ a centro Solis, ad distantiam Cometæ a centro Solis quamproxime. Ponamus radium Orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum maximam, esse partium 10000000: & Terra motu suo diurno medioeri describet partes 1720212, & motu horario partes 71675½. Ideoque Cometa in eadem Telluris a Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes 101364½. In majoribus autem vel minoribus distantis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde si Latus rectum Parabolæ quadruplo majus sit radio Orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 10000000: area quam Cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium 1216373½, & singulis horis area illa erit partium 50682½. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione subduplicata.

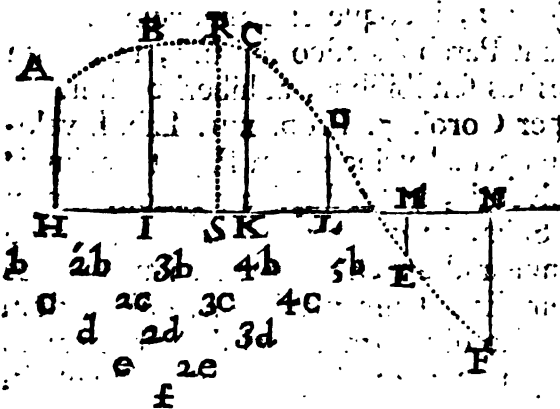
D. MONST
SYSTEMATE

DE LINEA PARABOLICA

Invenire lineam curvam generis Parabolici, que per data quocumque puncta transibat.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F , &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam HN demitte perpendiculara quocumque AH, BI, CK, DL, EM, FN .

Cas. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N equalia sint intervalla HI, IK, KL , &c. collige perpendicularorum AH, BI, CK , &c. differentias primas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c. secundas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias $d, 2d, 3d$, &c. id est, ita ut fit $AI - BI = b, BI - CK = 2b, CK - DL = 3b, DL + EM = 4b, EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$, &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam que hic est f . Deinde erecta quacunque perpendiculari RS , que fuerit ordinatum applicata ad curvam quaesitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM , &c. unitates esse, & dic $AH = a, HS = p, p$ in $- IS = q, q$ in $+ SK = r, r$ in $+ SL = s, s$ in $+ SM = t$; pergero videlicet ad usque penultimum perpendicularum ME , & praeposendo signa negativa terminis HS, IS , &c. qui jacent ad partes puncti S versus A , & signa affirmativa terminis SK, SL , &c. qui jacent ad alteras partes puncti S . Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.



& sic pergatur ad differentiam ultimam que hic est f . Deinde erecta quacunque perpendiculari RS , que fuerit ordinatum applicata ad curvam quaesitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM , &c. unitates esse, & dic $AH = a, HS = p, p$ in $- IS = q, q$ in $+ SK = r, r$ in $+ SL = s, s$ in $+ SM = t$; pergero videlicet ad usque penultimum perpendicularum ME , & praeposendo signa negativa terminis HS, IS , &c. qui jacent ad partes puncti S versus A , & signa affirmativa terminis SK, SL , &c. qui jacent ad alteras partes puncti S . Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

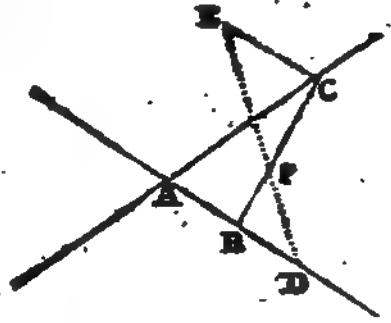
+ $SK = r, r$ in $+ SL = s, s$ in $+ SM = t$; pergero videlicet ad usque penultimum perpendicularum ME , & praeposendo signa negativa terminis HS, IS , &c. qui jacent ad partes puncti S versus A , & signa affirmativa terminis SK, SL , &c. qui jacent ad alteras partes puncti S . Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Cas. 2. Quod si punctorum H, I, K, L &c. inaequalia sint intervalla HI, IK , &c. collige perpendicularorum AH, BI, CK , &c. differentias primas per intervalla perpendicularorum divisas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$; secundas per intervalla bina divisas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas $d, 2d, 3d$, &c. quartas per inter-

L E M M A VII.

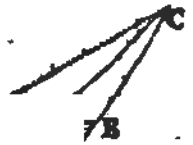
Per datum punctum P ducere rectam lineam BC , cujus partes PB , PC , rectis duabus positione datis AB , AC abscissa, datam habeant rationem ad invicem.

A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD , & producat eadem versus rectam alteram AC usque ad E , ut sit PE ad PD in data illa ratione. Ipsi AD parallela sit EC ; & si agatur CPB , erit PC ad PB ut PE ad PD . Q.E.F.



L E M M A VIII.

Sit ABC Parabola umbilicum habens S . Chorda AC bisecta in I abscindatur segmentum $ABCI$, cujus diameter sit $I\alpha$ & vertex ρ . In $I\rho$ producta capiatur ρO æqualis dimidio ipsius



$I\rho$. Fungatur OS , & producat eam ad ξ , ut sit $S\xi$ æqualis $2SO$. Et si Cometa B moveatur in arcu CBA , & agatur ξB secans AC in E : dico quod punctum E abscindet de chorda AC segmentum AE tempori proportionale quamproxime.

Junga-

Jungatur enim EO secans arcum Parabolicum ABC in T , & agatur μX quæ tangat eundem arcum in vertice μ & actæ EO occurrat in X ; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACT\mu A$ ut AE ad AC . Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCT\mu A$ ut AE ad AC . Cum autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX , erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde si ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB , & de summa auferatur triangulum SEB , manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque adeo ad aream $ASCY\mu A$ ut AE ad AC . Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis est area $ASBY\mu A$, quamproxime, & hæc area $ASBY\mu A$ est ad aream $ASCT\mu A$, ut tempus descripti arcus AB , ad tempus descripti arcus totius AC . Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Ubi punctum B incidit in Parabolæ verticem μ , est AE ad AC in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ , & in ea capiatur ξ^n quæ sit ad μB ut 27 MI ad 16 $M\mu$: acta B^n secabit chordam AC in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ , si punctum B magis distat a vertice principali Parabolæ quam punctum μ ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

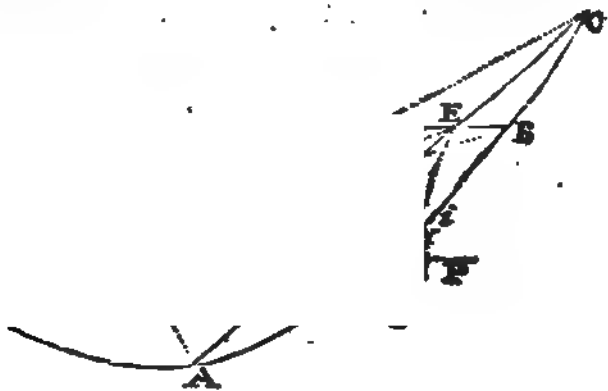
Rectæ $I\mu$ & μM & longitudo $\frac{AIC}{4S\mu}$ æquantur inter se.

Nam $4S\mu$ est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem μ

LEMMA X.

Si producat^r $S\mu$ ad N & P , ut N sit pars tertia ipsius μI , & SP sit ad SN ut SN ad $S\mu$. Cometa, quo tempore describit arcum $A\mu C$, si progredieretur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi SP equali, describeret longitudinem æqualem chordæ AC .

Nam si Cometa velocitate quam habet in μ , eodem tempore progredieretur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ ; area quam radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ Parabolicæ $ASC\mu$. Ideoque contentum sub longitudine in tangente descripta & longitudine $S\mu$, esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM , ut area $ASC\mu$ ad triangulum $ASC\mu$, id est, ut SN ad SM . Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN . Cum autem velocitas



Cometæ in altitudine SP sit (per Corol. 6 Prop xvr. Lib. I) ad velocitatem in altitudine $S\mu$; in subduplicata ratione SP ad $S\mu$ inverse, id est, in ratione $S\mu$ ad SN ; longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN . Igitur AC & longitudo hac nova velocitate descripta, cum sint ad longitudinem in tangente descriptam in eadem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$, eodem tempore describeret chordam AC quamproxime.

LEMMA

LEMMA XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN seu $S\mu + I\mu$ demitteretur, ut caderet in Solem, & ea semper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem, qua urgetur sub initio; idem semisse temporis quo in Orbe suo describat arcum AC , descensu suo describeret spatium longitudini $I\mu$ aequale.

Nam Cometa quo tempore describat arcum Parabolicum AC , eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine SP (per Lemma novissimum) describet chordam AC , adeoque (per Corol. 7. Prop. xvi. Lib. I.) eodem tempore in Circulo cujus semidiameter esset SP , vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam AC , in subduplicata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine SP , cadendo de altitudine illa in Solem, describeret semisse temporis illius (per Corol. 9. Prop. iv. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP , id est, spatium $\frac{Alq}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine SN , sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine SP , ut SP ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium $\frac{Alq}{4S\mu}$, id est, spatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometa in Parabola moti Trajectoriam ex datis tribus Observationibus determinare.

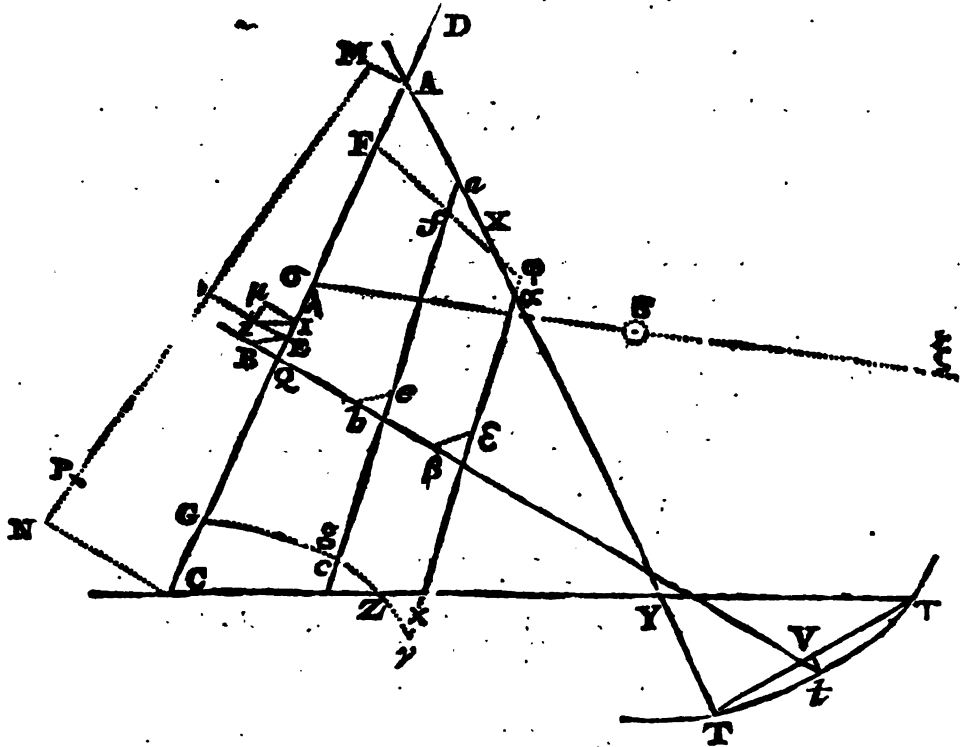
Problema hocce longe difficillimum multimode aggressus, composui Problemata quædam in Libro Primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet

Si ducatur

... ad summam temporum, ut summa tem-
porum minus sexcentos; vel ut punctum E incidat in
... & inde aberret versus l potius quam
... & inde aberret versus l potius quam
... observationes non præsto sint, inveniendus est
... per Lemma sextum.

Designent S Solem, T, t, r tria loca Terræ in Orbe magno,
 T, t, r observatas tres longitudes Cometæ, V tempus in-
ter observationem primam & secundam, W tempus inter secun-
dam ac tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore,
cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distan-
tia, describere posset, quæque per Corol. 3. Prop. xl. Lib. III.
invenienda est, & tV perpendicularum in chordam Tt . In longi-



tudine media tB sumatur utcumque punctum B pro loco Co-
metæ in plano Eclipticæ, & inde versus Solem S ducatur linea
 BE , quæ sit ad sagittam tV , ut contentum sub SB & S t quad.
ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt SB &
tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium tB .
Et

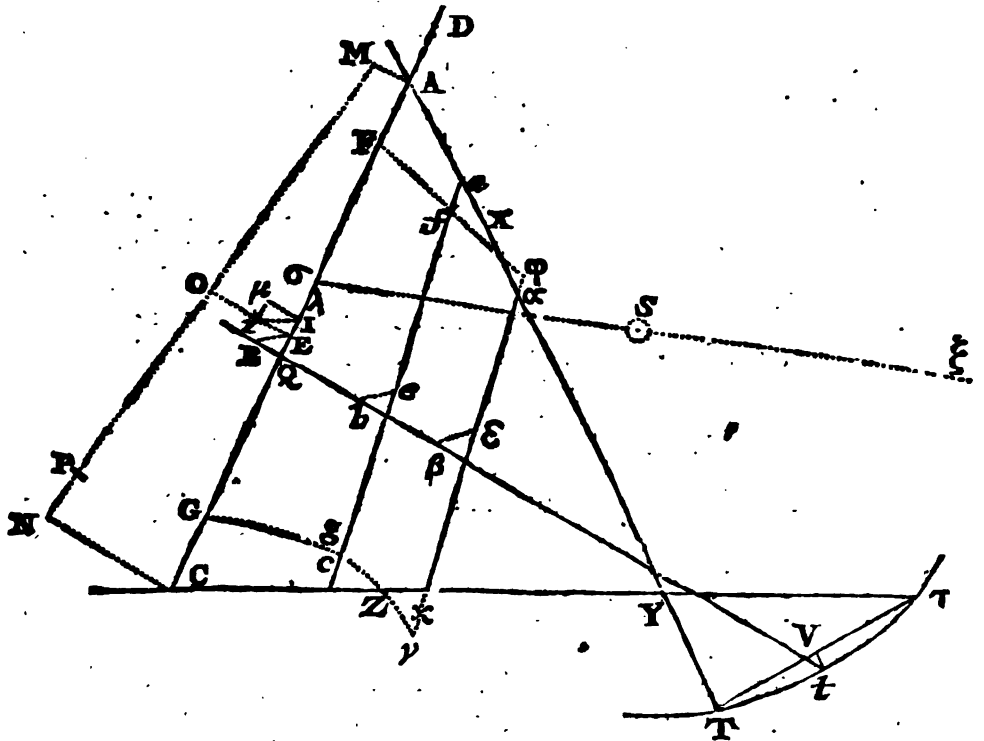
Et per punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta AEC , cujus partes AE , EC ad rectas TA & τC terminatae, sint ad invicem ut tempora V & W : & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in observatione prima ac tertia quamproxime, si modo B sit locus ejus recte assumptus in observatione secunda.

Ad AC bisectam in I erige perpendiculum Ii . Per punctum B age occultam Bi ipsi AC parallelam. Junge occultam Si secantem AC in λ , & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape Io æqualem $3I\lambda$, & per Solem S age occultam $o\xi$ æqualem $3So + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A , E , C , I , a puncto B versus punctum ξ duc occultam novam BE , quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiae BS ad quantitatem $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem, ut tempora inter observationes V & W . Et erunt A & C loca Cometæ magis accurate.

Ad AC bisectam in I erigantur perpendiculara AM , CN , IO , quarum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios TA & τC . Jungatur MN secans IO in O . Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$, & agatur occulta OD . Deinde in MN versus N capiatur MP , quæ sit ad longitudinem supra inventam N , in subduplicata ratione mediocris distantiae Telluris a Sole (seu semidiametri Orbis magni) ad distantiam OD . Si punctum P incidat in punctum N ; erunt A , B , C tria loca Cometæ, per quæ Orbis ejus in plano Eclipticæ describi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N ; in recta AC capiatur CG ipsi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad easdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E , A , C , G , ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniuntur ex assumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e , a , c , g , & ϵ , α , κ , γ . Deinde si per G , g , γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, secans rectam τC in Z : erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et si in AC , ac , $\alpha\kappa$ capiuntur AF , af , $\alpha\phi$ ipsis CG , cg , $\kappa\gamma$ respective æquales, & per puncta F , f , ϕ ducatur circumferentia circuli $Ff\phi$, secans rectam AT in X ; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ , & habebuntur loca duo Cometæ in Orbe proprio. Denique (per Prop. XI. Lib. I.) umbilico S , per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. L.*

Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur: quippe cum recta AC secetur in E in ratione temporum, per Lemma VII, ut oportet per Lem. VIII: & BE per Lem. XI. fit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. x.) longitudo fit chordæ arcus, quem Cometa in Orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modo B sit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.



Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt , in quo vestigium Orbis in plano Eclipticæ descriptum secat rectam tB , præterpropter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC , quæ sit ad tT in subduplicata ratione SQ ad St . Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt , determinabitur punctum B quod prima vice usurpare licet. Tum recta AC deleta & secundum præcedentem constructionem iterum ducta, & inventa

inventa in super longitudine MP ; in tB capiatur punctum b , ea lege, ut si TA , & C se mutuo secuerint in T , sit distantia Tb ad distantiam TB , in ratione composita ex ratione MP ad MN & ratione subduplicata SB ad sb . Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β , si modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia Bb perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta F, f & G, g , actæ rectæ Ff & Gg secabunt TA & C in punctis quæsitis X & Z .

LIBER
TERTIUS.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

	Tem. appar.	Temp. verum	Long. Solis	Long. Cometæ	Lar. Cometæ
	h. m. s.	h. m. s.	gr. m. s.	gr. m. s.	gr. m. s.
1680 Dec.	12	4.46	1.51.23	6.31.21	8.26.0
	21	6.32½	11.6.44	5.7.38	21.45.30
	24	6.12	14.9.26	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	16.9.22	28.24.6	27.0.57
	29	7.55	19.19.43	13.11.45	28.10.5
	30	8.2	20.21.9	17.39.5	28.11.12
1681 Jan.	5	5.51	26.22.18	8.49.10	26.15.26
	9	6.49	0.29.2	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	1.27.43	26.40.57	23.44.6
	13	6.56	4.33.20	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	16.45.36	9.35.48	17.56.54
	30	8.7	21.49.58	13.19.36	16.40.57
Feb.	2	6.20	24.46.59	15.13.48	16.2.2
	5	6.50	27.49.51	16.59.52	15.27.22

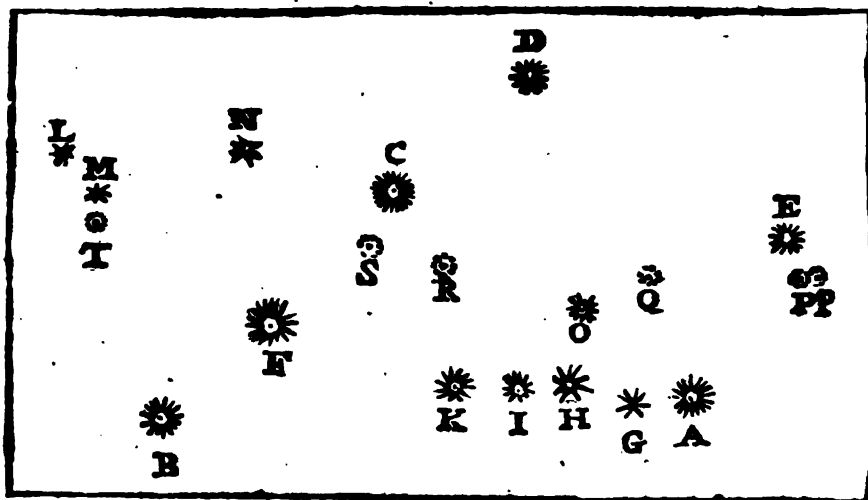
His adde Observaciones quasdam e nostris.

	Temp. appar.	Cometæ Longit.	Com. Lar.
	h. m. s.	gr. m. s.	gr. m. s.
Febr.	25	268°. 18' . 17"	128°. 46½'
	27	27 . 4 . 24	12 . 36½'
Mart.	1	27 . 53 . 6	12 . 24½'
	2	28 . 12 . 27	11 . 20'
	5	29 . 20 . 51	12 . 3½'
	9	II 0 . 43 . 4	11 . 45½'

Hæ Observaciones Telescopio septupedali, & Micrometro filifque in foco Telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis &

DE MONDI
SYSTEMATE

& positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* α), *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero* ζ) & *C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P, Q, R, S, T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia *AB* partium $80\frac{7}{17}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{2}$, *BC* $58\frac{1}{2}$, *AD* $57\frac{1}{11}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{1}{7}$, *AE* $29\frac{1}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{11}$, *AI* $27\frac{7}{11}$, *BI* $52\frac{1}{2}$, *CI* $36\frac{7}{11}$,



DI $53\frac{1}{11}$, *AK* $38\frac{2}{7}$, *BK* 43 , *CK* $31\frac{1}{5}$, *FK* 29 , *FB* 23 , *FC* $36\frac{1}{2}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{7}$, *BN* $46\frac{1}{11}$, *CN* $31\frac{1}{7}$, *BL* $45\frac{1}{11}$, *NL* $31\frac{1}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hac recta esset $\frac{1}{2}$ *CD*. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* existentis distantia a stella *E* erat minor quam $\frac{2}{7}$ *AE*, major quam $\frac{1}{7}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{3}{7}$ *AE* proxime; & angulus *ApE* non-nihil obtusus erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, distantia Cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{7}$ *pE*.

Eadem nocte, hora $9\frac{1}{2}$, Cometæ in *P* existentis distantia a stella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{2}}$ *AE*, adeoque æqua-

lis

lis $\frac{1}{4}$ AE , seu $\frac{2}{3}$ AE quamproxime. A perpendicularo autem a stella A ad rectam PE demisso, distantia Cometæ erat $\frac{1}{3}PE$.

Die 9^{ta}, Feb. 27. hor. 8 $\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in Q existentis distantia a stella O æquabat distantiam stellarum O & H , & recta QO producta transibat inter stellas K & B . Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes, magis accurate definire non potui.

Die 8^{ta}, Mart. 1, hor. 11. P. M. Cometa in R existens, stellis K & C accurate interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{4}CR$, adeoque æqualis $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{12}CR$ seu $\frac{4}{12}CK$.

Die 7^{ta}, Mart. 2. hor. 8. P. M. Cometæ existentis in S , distantia a stella C erat $\frac{1}{3}FC$ quamproxime. Distantia stellæ F a recta CS producta erat $\frac{1}{4}FC$, & distantia stellæ B ab eadem recta, erat quintuplo major quam distantia stellæ F . Item recta NS producta transibat inter stellas H & I , quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quam stellæ I .

Die 6^{ta}, Mart. 5. hor. 11 $\frac{1}{2}$. P. M. Cometa existente in T , recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta LT producta transibat inter B & F , quadruplo vel quintuplo propior F quam B , auferens a BF quintam vel sextam ejus partem versus F . Et MT producta transibat extra spatium BF ad partes stellæ B , quadruplo propior existens stellæ B quam stellæ F . Erat M stella per exigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum A & B distantia esset 2⁸. 6'. 46", & stellæ A longitudo γ 26⁸. 41'. 50" & latitudo borealis 12⁸. 8' $\frac{1}{2}$, stellæque B longitudo γ 28⁸. 40'. 24" & latitudo borealis 11⁸. 17' $\frac{2}{3}$;) derivabam longitudes & latitudes Cometæ. Micrometro parum affabre constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris oriantur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultima Mart. 9. ubi positiones stellarum minus accurate determinare potui. *Cassinus* qui ascensionem rectam Cometæ eodem tempore observavit, declinationem ejus tanquam invariata manentem parum diligenter definivit. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine

M m m

motus

motus sui notabiliter deflectere coepit boream versus, a parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum; felegi ex observationibus hætenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec. 21, Jan. 5, & Jan. 25*. Ex his inveni *S* partium 9842, 1 & *V* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter Orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *t B* partium 5657, inveni *S B* 9747, *B E* prima vice 412, *S μ* 9503, *ι λ* 413: *B E* secunda vice 421, *OD* 10186, *X* 8528, 4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias *TX* 4775 & *τ Z* 11322. Ex quibus Orbem definiendo, inveni Nodos ejus descendentem in \mathfrak{s} & ascendentem in ψ $1^{\circ} 53'$; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ $61^{\circ} 20'$; verticem ejus (seu Perihelium Cometæ) distare a Nodo $8^{\circ} 38'$, & esse in τ $27^{\circ} 43'$ cum latitudine australi $7^{\circ} 34'$; & ejus latus rectum esse 236,8, areamque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri Orbis magni posito 10000000; Cometam vero in hoc Orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb. 8^{d.} 0^{h.} 4' P.M. in vertice Orbis seu Perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula sinuum naturalium collectas, determinavi Graphice; construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter Orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16 $\frac{1}{2}$ pedis Anglicani.*

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc Orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

		Distant. Co- metæ a Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
<i>Dec.</i>	12	2792	ψ 6 . 32	8° . 18 $\frac{1}{2}$	ψ 6 . 31 $\frac{1}{2}$	8° . 26	+ 1	- 7 $\frac{1}{2}$
	29	8403	χ 13 . 13 $\frac{1}{2}$	28 . 0	χ 13 . 11 $\frac{1}{2}$	28 . 10 $\frac{1}{2}$	+ 2	- 10 $\frac{1}{2}$
<i>Febr.</i>	5	16669	ϑ 17 . 0	15 . 29 $\frac{1}{2}$	ϑ 16 . 59 $\frac{1}{2}$	15 . 27 $\frac{1}{2}$	+ 0	+ 2 $\frac{1}{2}$
<i>Mar.</i>	5	21737	29 . 19 $\frac{1}{2}$	12 . 4	29 . 20 $\frac{1}{2}$	12 . 3 $\frac{1}{2}$	- 1	+ $\frac{1}{2}$

Postea vero *Halleius* noster Orbitam, per calculum Arithmeticum, accuratius determinavit quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum Nodorum in \mathfrak{s} & ψ $1^{\circ} 53'$, & Inclinationem plani Orbitæ ad Eclipticam $61^{\circ} 20'$, ut & tempus Perihelii Cometæ *Decemb. 8^{d.} 0^{h.} 4': distantiam vero Perihelii*

Helii a Nodo ascendente, in Orbita Cometæ mensuratam, invenit esse 9^{sr} 20', & Latus rectum Parabolæ esse 243 partium, existente mediocri Solis a Terra distantia partium 10000. Et ex his datis, calculo itidem Arithmetico accurate instituto, loca Cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

LISSAK
TERTIUS.

	Tempus verum		Distantia Cometæ a ☉	Long. comp.		Lat. comp.		Errores in	
	d.	h.		gr.	i	gr.	"	Long.	Lat.
Dec.	12.	4. 46'. 0	28028	17	6. 29. 25	8. 26. 0	Hor.	-1. 56	+0. 0
	21.	6. 36. 59	61076	17	5. 6. 30	21. 43. 20		-1. 8	-2. 10
	24.	6. 17. 52	70008	18.	48. 20	25. 22. 40		-0. 30	-0. 44
	26.	5. 20. 44	75576	28.	22. 45	27. 1. 36		-1. 21	+0. 59
	29.	8. 3. 2	84021	13.	12. 40	28. 10. 10		+0. 55	+0. 5
	30.	8. 10. 26	86661	17.	40. 5	28. 11. 20		+1. 0	+0. 8
Jan.	5.	6. 1. 38	101440	8.	49. 49	26. 15. 15		+0. 39	-0. 11
	9.	7. 0. 53	110959	18.	44. 36	24. 12. 54		+1. 18	+0. 12
	10.	6. 6. 10	113162	20.	41. 0	23. 44. 10		+0. 3	+0. 10
	13.	7. 8. 55	120000	26.	0. 21	22. 17. 30		+0. 47	-0. 6
	25.	7. 58. 42	145370	89.	33. 40	17. 57. 55		-2. 8	+1. 1
	30.	8. 21. 53	155303	13.	17. 41	16. 42. 7		-1. 55	+1. 10
Feb.	2.	6. 34. 51	160951	15.	11. 11	16. 4. 15		-2. 37	+2. 13
	5.	7. 14. 41	166686	16.	58. 25	15. 29. 13		-1. 27	+1. 50
	25.	8. 19. 0	202570	26.	15. 46	12. 48. 0		-2. 31	+1. 8
Mar.	5. 11. 21. 0	216205	29.	18. 35	12. 5. 40		-2. 16	+2. 10	

Apparuit etiam hic Cometa mense *Novembri* præcedente, & die undecimo hujus mensis stylo veteri, ad horam quintam matutinam, *Cantuarie* in *Anglia*, visus fuit in $\approx 12\frac{1}{2}$ cum latitudine boreali 2^{sr} circiter. Crassissima fuit hæc Observatio: meliores sunt quæ sequuntur.

Nov. 17, st. vet. *Ponthæus* & focii hora sexta matutina *Rome* (id est, hora 5, 10' *Londini*) filis ad fixas applicatis Cometam observarunt in $\approx 8. 30'$, cum latitudine australi 0^{sr} 40'. Extant eorum Observationes in tractatu quem *Ponthæus*, de hoc Cometa, in lucem edidit. *Cellius* qui aderat & observationes suas in Epistola ad *D. Cassinum* missa, Cometam eadem hora vidit in $\approx 8. 30'$ cum latitudine australi 0^{sr} 30'. Eadem hora *Galletius* etiam Cometam vidit in $\approx 8. 5'$ sine latitudine.

Nov. 18. hora matutina 6. 30' *Rome* (id est, hora 5, 40' *Londini*) *Ponthæus* Cometam vidit in $\approx 13. 30'$ cum latitudine australi 1^{sr} 20'. *Cellius* in $\approx 13. 00'$, cum latitudine australi 1^{sr} 00'. *Galletius* autem hora matutina 5. 30' *Rome*, Cometam vidit in $\approx 13. 00'$, cum latitudine australi 1^{sr} 00'. Et *R. P. Anjo* in Academia *Flexiensi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id est, hora 5, 9' *Londini*) Cometam vidit in medio inter stellas

DE MONDI
SYSTEMATE

duas parvas, quarum una media est trium in recta linea in Virginiæ australi manu, & altera est extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in $\approx 12. 46'$, cum latitudine australi $50'$. Eodem die *Bostonie* in *Nova-Anglia* in Latitudine $43'$ graduum, hora quinta matutina, (id est *Londini* hora matutina $9. 44'$) Cometa visus est prope ≈ 14 , cum latitudine australi $1^{\circ} 30'$, uti a *Cl. Halleyo* accepti.

Nov. 19. hora mat. $4\frac{1}{2}$ *Cantabrigia*, Cometa (observante juvene quodam) distabat a Spica \approx quasi 2° Boreazephyrum versus. Eodem die hor. $5.$ mat. *Bostonie* in *Nova-Anglia*, Cometa distabat a Spica \approx gradu uno, differentia latitudinum existente $40'$. Eodem die in Insula *Jamaica*. Cometa distabat a Spica intervallo quasi gradus unius. Et ex his observationibus inter se collatis colligo, quod hora $9. 44'$. *Londini*, Cometa erat in $\approx 18^{\circ} 40'$, cum latitudine australi $1^{\circ} 18'$ circiter. Eodem die *D. Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginie* in Lat. $38\frac{1}{2}^{\circ}$ hora quinta matutina (id est, hora 10° *Londini*) Cometam vidit supra Spicam \approx , & cum Spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eodem quasi $\frac{2}{3}^{\circ}$. Observator idem, eadem hora diei sequentis, Cometam vidit quasi 2° inferiorem Spica. Congruent hæc observationes cum observationibus in *Nova-Anglia* & *Jamaica* factis, si modo distantia (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die prioris superior esset Spica \approx , altitudine 1° circiter, ac die posteriore inferior eadem stella, altitudine perpendiculari $3^{\circ} 40'$.

Nov. 20. *D. Montenus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, hora sexta matutina *Venetis* (id est, hora $5 10'$ *Londini*) Cometam vidit in $\approx 23^{\circ}$, cum latitudine australi $1^{\circ} 30'$. Eodem die *Bostonie*. distabat Cometa a Spica \approx , 4° longitudinis in orientem, adeoque erat in $\approx 23^{\circ} 24'$ circiter.

Nov. 21. *Ponthaus* & focii hor. mat. $7\frac{1}{2}$ Cometam observarunt in $\approx 27^{\circ} 50'$, cum latitudine australi $1^{\circ} 16'$; *Ango* hora quinta matutina in $\approx 27^{\circ} 45'$, *Montenus* in $\approx 27^{\circ} 51'$. Eodem die in Insula *Jamaica*, Cometa visus est prope principium *Scorpii*, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica *Virginis*, id est, $2^{\circ} 2'$.

Nov. 22. Cometa visus est a *Montenaro* in $\approx 2. 33'$. *Bostonie* autem in *Nova-Anglia* apparuit in $\approx 3^{\circ}$ circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id est, $1^{\circ} 30'$. Eodem die *Londini*,
hora

hora mat. 6; *Hookius* noster Cometam vidit in m $3^{\circ} 30'$ circiter, idque in linea recta quæ transit per Spicam Virginis & Cor Leonis, non exacte quidem, sed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a Cometa per Spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus Cordis Leonis, interposito perparvo intervallo inter Cor Leonis & hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis & Spicam Virginis transiens, Eclipticam secuit in m $3^{\circ} 46'$, in angulo $2^{\circ} 51'$. Et si Cometa locatus fuisset in hac linea in m 3° , ejus latitudo fuisset $2^{\circ} 26'$. Sed cum Cometa consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hac linea boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ m , eratque $1^{\circ} 30'$ circiter, & consentientibus *Hookio*, *Montenaro*, & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam sensibilibiter major erat quam $1^{\circ} 30'$. Inter limites autem jam constitutos $2^{\circ} 26'$ & $1^{\circ} 30'$, magnitudine mediocri latitudo erit $1^{\circ} 58'$ circiter. Cauda Cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad Spicam m , declinans aliquantulum a Stella ista, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & Cauda Æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione Solis boream versus.

Nov. 24. Ante ortum Solis Cometa visus est a *Montenaro* in m $12^{\circ} 52'$, ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis & Spicam Virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam $2^{\circ} 38'$. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam $1^{\circ} 58'$; & magnitudine mediocri, absque notabili errore, statui potest $2^{\circ} 18'$. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decrevisse volunt, & *Cellius* & Observator in *Nova-Anglia* eandem fere magnitudinem retinuisse, scilicet gradus unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes *Ponthæi* & *Cellii*, ex præsertim quæ per Azimuthos & Altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores sunt eæ quæ per positiones Cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & Observatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* sunt factæ.

Jam collatis Observationibus inter se, colligere videor quod Cometa hoc mense circulum fere maximum descripsit, secantem Eclipticam in m $25. 12'$, idque in angulo $3^{\circ} 12'$ quamproxime. Nam & *Montenarus* Orbitam ab Ecliptica in austrum, tribus sal-

tem gradibus declinasse dicit. Et cognita cursus positione, longitudines Cometæ ex observationibus collectæ, ad incudem jam revocari possunt & melius nonnunquam determinari, ut fit in sequentibus. *Cellius* Novemb; 17. observavit distantiam Cometæ a Spica α , æqualem esse distantie ejus a stella lucida in dextra ala Corvi: & hinc locandus est Cometa in interfectione hujus circuli quem Cometa motu apparente descripsit, cum circulo maximo qui a fixis illis duabus æqualiter distat, atque adeo in $\approx 7^{\circ} 54'$, cum latitudine australi $43'$. Præterea *Montenarus*, Novemb. 20. hora sexta matutina *Venetis*, Cometam vidit non totis quatuor gradibus distantiam a Spica; dicitque hanc distantiam, vix æquasse distantiam stellarum duarum lucidarum in alis Corvi, vel duarum in juba Leonis, hoc est 3° & $30'$ vel $32'$. Sit igitur distantia Cometæ a Spica $3^{\circ} 30'$, & Cometa locabitur in $\approx 22^{\circ} 48'$, cum latitudine australi $1^{\circ} 30'$. Adhæc *Montenarus*, Novemb. 21, 22, 24 & 25 ante ortum Solis, Sextante æneo quintupedali ad minuta prima & semiminuta diviso & vitris Telescopicis armato, distantias mensuravit Cometæ a Spica $8^{\circ} 28'$, $10^{\circ} 13'$, $23^{\circ} 30'$, & $28^{\circ} 13'$: & has distantias, per refractionem nondum correctas, addendo longitudini Spicæ, collegit Cometam his temporibus fuisse in $\approx 27^{\circ} 51'$. $m 2^{\circ} 33'$, $m 12^{\circ} 52'$ & $m 17^{\circ} 45'$. Si distantie illæ per refractiones corrigantur, & ex distantis correctis differentie longitudinum inter Spicam & Cometam probe deriventur, locabitur Cometa his temporibus in $\approx 27^{\circ} 52'$. $m 2^{\circ} 36'$, $m 12^{\circ} 58'$ & $m 17^{\circ} 53'$ circiter. Latitudines autem ad has longitudes in via Cometæ captas, prodeunt $1^{\circ} 45'$, $1^{\circ} 58'$, $2^{\circ} 22'$ & $2^{\circ} 31'$. Harum quatuor observationum horas matutinas *Montenarus* non posuit. Priores duæ ante horam sextam, posteriores (ob viciniam Solis) post sextam factæ videntur. Die 22, ubi Cometa ex observatione *Montenari* locatur in $m 2^{\circ} 36'$, *Hookius* noster eundem locavit in $m 3^{\circ} 30'$ ut supra. *Montenarus* in defectu, *Hookius* in excessu errasse videntur. Nam Cometa, ex serie observationum, jam fuit in $m 2^{\circ} 56'$ vel $m 3^{\circ}$ circiter.

Observationum suarum ultimam inter vapores & diluculum captam, *Montenarus* suspectam habebat. Et *Cellius* eodem tempore (id est, Novem. 25) Cometam per ejus Altitudinem & Azimuthum locavit in $m 15^{\circ} 47'$, cum latitudine australi quasi gradus unius. Sed *Cellius* observavit etiam eodem tempore, quod Cometa erat in linea recta cum stella lucida in dextro femore

Virginis & cum Lance australi Libræ, & hæc linea fecat viam Cometæ in m 18^{gr} 36'. *Ponthæus* etiam eodem tempore observavit, quod Cometa erat in recta transeunte per Chelam austrinam Scorpii & per stellam quæ Lancem borealem sequitur: & hæc recta fecat viam Cometæ in m 16^{gr} 34'. Observavit etiam, quod Cometa erat in recta transeunte per stellam supra Lancem australem Libræ & stellam in principio pedis secundi Scorpii: & hæc recta fecat viam Cometæ in m 17^{gr} 55'. Et inter longitudes ex his tribus Observationibus sic derivatas, longitudo mediocris est m 17^{gr} 42', quæ cum observatione *Montemari* satis congruit.

LIBER
TERTIUS.

Erravit igitur *Cellius* jam locando Cometam in m 15^{gr}. 47', per ejus Azimuthum & Altitudinem. Et similibus Azimuthorum & Altitudinum observationibus, *Cellius* & *Ponthæus* non minus erraverunt locando Cometam in m 20 & m 24 diebus duobus sequentibus, ubi stellæ fixæ ob diluculum vix aut ne vix quidem apparuere. Et corrigendæ sunt hæc observationes per additionem duorum graduum, vel duorum cum semisse.

Ex omnibus autem Observationibus inter se collatis & ad meridianum *Londini* reductis, colligo Cometam hujusmodi cursum quamproxime descripsisse.

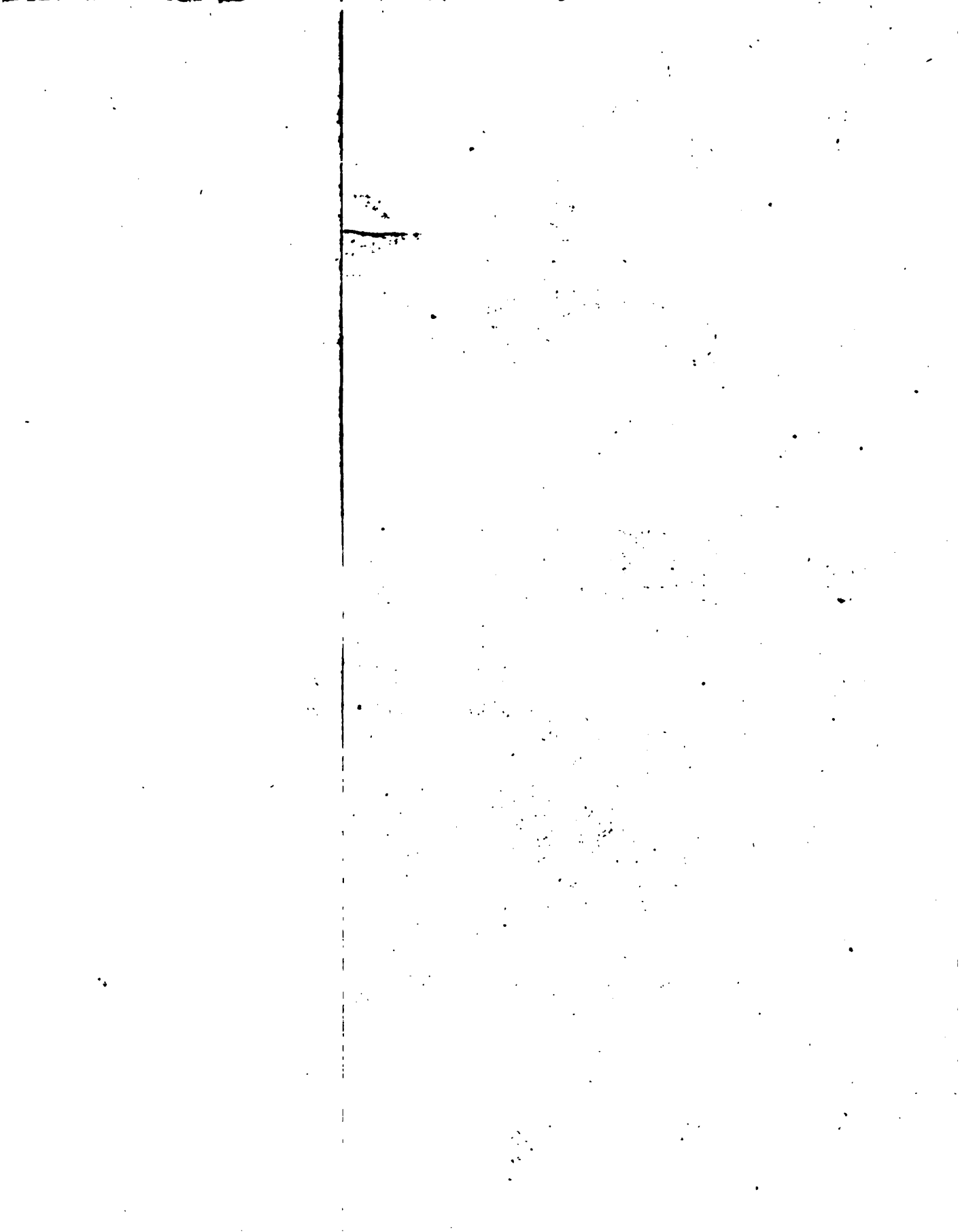
Temp. med. st. vet.		Long. Cometæ	Lat. Cometæ
d.	h.	gr.	'
Nov.	16. 17 . 10	m 8 . 0	0.44 Aust.
	17. 17 . 10	12 . 52	1 . 0
	18. 21 . 44	18 . 40	1.18
	19. 17 . 10	22 . 48	1.30
	20. 17 fere	27 . 52	1.45
	21. 17 fere	m 2 . 56	1.58
	23. 17½ fere	12 . 58	2.20
	24. 17½ fere	17 . 53	2.29
	26. 18 . 00	26 vel 27 gr.	2.42

Loca autem Cometæ in Orbe Parabolico computata, ita se habent.

Temp. verum		Dist. Com. a ☉	Long. comp.	Lat. comp.
h.	h.		gr.	'
Nov.	16. 17 . 0	83920	m 8 . 0 . 25	0.43.20 Aust.
	18. 21 . 34	78020	18.41.50	1.17.30
	20. 16 . 50	73012	27.59.40	1.44.25
	23. 17 . 5	64206	m 13.19.15	2.21.8
	26. 17 . 0	54799	26.46.30	2.42.30

Con-

Congruunt igitur Observationes Astronomicæ, tam mense *Novembri* quam mensibus quatuor sequentibus, cum motu Cometæ circum Solem in Trajectoria hacce Parabolica, atque adeo unum & eundem Cometam fuisse, qui mense *Novembri* ad Solem descendit, & mensibus sequentibus ab eodem ascendit, abunde confirmant, ut & hunc Cometam in Trajectoria hacce Parabolica delatum fuisse quamproxime. Mensibus *Decembri*, *Januario*, *Februario* & *Martio*, ubi Observationes hujus Cometæ sunt satis accuratæ, congruunt eadem cum motu ejus in hac Trajectoria, non minus accurate quam observationes Planetarum congruere solent cum eorum Theoriis. Mense *Novembri*, ubi observationes sunt crassæ, errores non sunt majores quam qui crassitudini observationum tribuantur. Trajectoria Cometæ bis secuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine *Virginis* & principio *Capricorni*, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus Cometæ plurimum deflectebatur a Circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab Ecliptica in austrum declinabat, & postea mense *Decembri* gradibus 29 vergebat ab Ecliptica in septentrionem, partibus duabus Orbitæ in quibus Cometa tendebat in Solem & redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic Cometa per signa fere novem, a *Virginis* scilicet duodecimo gradu ad principium *Geminorum*; præter signum *Leonis* per quod pergebat antequam videri coepit: & nulla alia extat Theoria, qua Cometa tantam Cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris*, descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea vero motu iterum accelerato, descripsit gradus fere quinque singulis diebus. antequam motus iterum retardari coepit. Et Theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe respondet, quæque easdem observat leges cum Theoria Planetarum, & cum accuratis observationibus Astronomicis accurate congruit, non potest non esse vera. Cometa tamen sub finem motus deviat ab hac Trajectoria Parabolica versus axem Parabolæ, ut ex erroribus minuti unius primi duorumve in latitudinem mense *Februario* & *Martio* conspirantibus, colligere videor; & propterea in Orbe Elliptico



Linea Nodorum Orbis

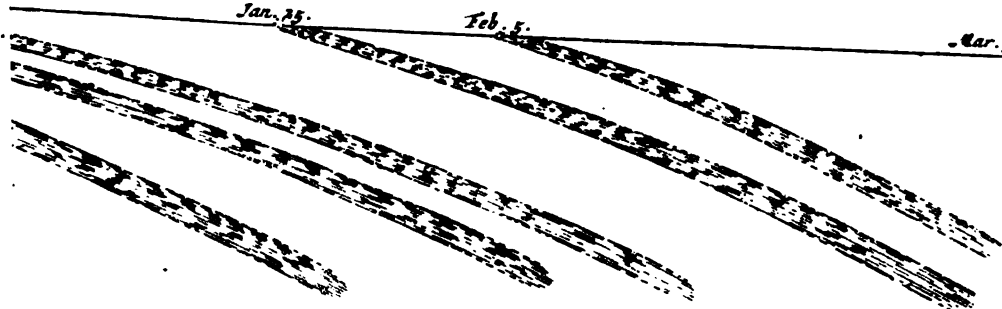
Orbis Cometae

Axis Orbis

Jan. 25.

Feb. 5.

Mar. 5.



liptico circum Solem movebatur, spatio annorum plusquam quingentorum, quantum ex erroribus illis judicare licuit, revolutionem peragens.

LIBER
TERTIUS.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa descripsit, & Caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere: Observationibus sequentibus in Cauda desinienda adhibitis.

Nov. 17 Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov. 18* Cauda 30° longa, Solique directe opposita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam δ , quæ tunc erat in $9^{\circ} 54'$. *Nov. 19* in *Mary-Land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec. 10* Cauda (observante *Fiamstedio*) transibat per medium distantiae inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in Aquilæ australi ala, & desinebat prope stellas *A, u, b* in *Tabulis Bayeri*. Terminus igitur erat in $19\frac{1}{2}^{\circ}$ cum latitudine boreali $33\frac{3}{4}^{\circ}$ circiter. *Dec. 11* surgebat ad usque caput Sagittæ (*Bayero, a, b,*) desinens in $26^{\circ} 43'$, cum latitudine boreali $38^{\circ} 34'$. *Dec. 12* transibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, desinens in 4° , cum latitudine boreali $42\frac{1}{2}^{\circ}$ circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec. 12*, hora 5, 40' *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra Cygni Uropygium ad gradus 10 sese extulit; atque ab hac stella ejus latus ad occasum & boream min. 45 destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat a Stella illa $2^{\circ} 15'$ austrum versus, & terminus superior erat in 22° cum latitudine boreali 61° . *Dec. 21* surgebat fere ad cathedram *Cassiopeia*, æqualiter distans a β & *Schedir*, & distantiam ab utraque distantiae earum ab invicem æqualem habens, adeoque desinens in 24° cum latitudine $47\frac{1}{2}^{\circ}$. *Dec. 29* tangebatur *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54° adeoque desinebat in 19° cum latitudine 35° . *Jan. 5* tetigit stellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus suum dextrum, & stellam μ in ejus cingulo, ad latus sinistram; & (juxta Observationes nostras) longa erat 40° ; curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum

octo. *Jan. 13* Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Al-mesh & Algol*, & luce tenuissima desinebat e regione *stellæ* α in latere *Persei*. Distantia termini caudæ a circulo *Solem & Cometam* jungente erat 3^u $50'$; & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^u$. *Jan. 25 & 26* luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi coelum valde serenum erat, luce tenuissima & ægerrime sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad *Lucidam* in humero orientali *Aurigæ* accurate, adeoque declinabat ab oppositione *Solis* boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb. 10* Caudam oculis armatis aspecti gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb. 7* se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua *Cometæ* hujus *Phænomena* in animo revolventi, haud difficulter constabit quod corpora *Cometarum* sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum *Planetarum*. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes *Terræ, Solis & Planetarum*, *Cometa* hicce in transitu suo per viciniam *Solis* statim dissipari debuisset. Est enim calor *Solis* ut radiorum densitas, hoc est, reciproce ut quadratum distantia locorum a *Sole*. Ideoque cum distantia *Cometæ* a centro *Solis* *Decemb. 8* ubi in *Perihelio* versabatur, esset ad distantiam *Terræ* a centro *Solis* ut 6 ad 1000 circiter; calor *Solis* apud *Cometam* eo tempore erat ad calorem *Solis* æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum *Solem*, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud *Cometam* in *Perihelio* versantem ex radiis *Solaribus* concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in *Perihelio* suo calorem immensum ad *Solem* concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambientis

planis Orbium Cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes, quas capita in Orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus a Sole directe averfis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad Orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in recta sunt linea a Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiore & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non sunt per refractionem cœlorum, sed a capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus: ita in Cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel recta petere, si corpus fumans quiescit; vel oblique, si corpus progrediendo loca semper deserit a quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De Caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus Aeris nostri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obscurantium oriuntur; vel forte a partibus Viæ Lactæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint; ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatii tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligitur ex raritate Aeris nostri. Nam Aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quam Aqua ejusdem ponderis, ideoque Aeris columna cylindrica pedes 850 alta, ejusdem est ponderis cum Aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem Aeris ad summitatem Atmosphære affurgens æquat pondere suo columnam Aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si columnæ totius Aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam Aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypothesi multis experimentis confirmata, quod compressio Aeris sit ut pondus Atmosphære incumbentis, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantie locorum a centro Terræ) computationem per Corol. Prop. xxii. Lib. II. ineundo, inveni quod Aer, si ascendatur a superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longe majori, quam spatii omnis infra Orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus Aeris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes Planetarum regiones ad usque spheram Saturni & longe ultra. Proinde cum Aer adhuc altior in immensum rarefcat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debet cauda esse quam rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut Aer in spatiis coelestibus inque Cometarum caudis non adeo rarefcat; per exiguam tamen quantitatem Aeris & vaporum, ad omnia illa caudarum Phenomena abunde sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum miliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam vero caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento transluere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam Aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudinis digiti unius duorumve, lucem Solis in jobare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat a Sole, ascendere coepit a capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non recta ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ Orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan. 25*, ascendere coeperat a capite ante *Dec. 11*, adeoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec. 10* apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui a tempore Perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia Solis celerrime ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni constabat qui a tempore Perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam a Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo a capitibus, & mox evanescent, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cælos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spacia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes a Sole averfas *Keplerus* adscribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est a ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impeditissimis in regionibus nostris, a radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam a Sole ascendere.

DE MONDI
SYST. MATHE

dere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servata quantitate materiae intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiae caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu Aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit a Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam qua prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam quod hi gyranter circa Solem & ea actione conantur a Sole recedere, at Solis Atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem a Solis rotatione acceperint, tardius gyranter. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia Solis, ubi Orbes curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt, & caudas quam longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsis pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant a capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadunt, vel simul in ascensu suo retardabuntur; adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem a causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque, facillime accipiant & postea liberrime servent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum Periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu a capitibus propagari debent, & subinde, in Periheliis Cometarum illorum qui ad usque Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuo rarefcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiore

riorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per coelos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri, rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis, requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum fumerent, perpetuo decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor Spiritum illum, qui Aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem, excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum a Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur si modo Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsitan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus, crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terra distantis, obscurius apparuit post Perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at Mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam *Juveni* cuidam *Cantabrigiensi*, *Novemb. 19*, Cometa hicce luce sua quantumvis plumbea & obtusa, æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus Mense *Decembri*, ubi caudam

DE MONDI
SISTEMATE

maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ, qui Mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emisserunt, apparuerint subobscura & exigua. Nam Anno 1668. *Mart. 5.* St. nov. hora septima vespertina *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis splendidæ longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tanta autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra Horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est quod caput a Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et similis legitur Cometa anni 1102 vel 1106, cujus *Stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevolius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio Mensis *Februarii*, circa vespere, ad occasum Solis brumalem. Inde vero & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit *Matthæus Parisiensis*, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia [rectius sexta] usque ad horam nonam radius ex se longum emittens*. Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. I. *Meteor. 6. cujus caput primo die non conspexitur. est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimiam ardentem [caudæ scilicet] nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempeste (ait Aristoteles) cum [caudæ] jam minus flagraret, reddita est [capiti] Cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem [id est, ad 60^o] extendit. Apparuit eodem tempore.*

tempore hyberno, & ascendens usque ad cingulum Orionis ibi exiit. LIBER
TERTIUS.
Cometa ille anni 1688, qui e radiis Solaribus caudatissimus emerfit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometas esse genus Planetarum in Orbibus vultu eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e Planetis non caudatis, minores esse solent qui in Orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, sic etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, ne Solem attractione sua nimis agitent, rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iisdem Orbibus post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Trajectoriam Cometæ Graphice inventam corrigere.

Oper. 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem Graphice inventa; & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maxime distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longe a Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunt D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20' vel 30', quæ dicantur P; & fervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex

prædictis tribus Cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut supra:) deinde etiam Orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e , nec non tempus totum t quo area tota $d+e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam $20'$ vel $30'$, quæ dicantur Q . Deinde ex observatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e , & tempus totum t quo area tota $d+e$ describi debeat.

Jam sit C ad i ut A ad B , & G ad i ut D ad E , & g ad i ut d ad e , & γ ad i ut δ ad ϵ ; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis $+$ & $-$ probe observatis quærantur numeri m & n , ea lege, ut sit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $2T - 2S$ æquale $mT - mt + nT - nr$. Et si, in operatione prima, I designet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique si in operatione prima, secunda ac tertia, quantitates R , r & ρ designent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{r}{L}$, $\frac{r}{l}$, $\frac{\rho}{\lambda}$ ejusdem Latera transversa respective: erit $R+mr - mR + n\rho - nR$ verum Latus rectum, & $\frac{I}{L+ml - m L + n\lambda - nL}$ verum Latus transversum Trajectoriæ quam Cometa describit. Dato autem Latere transverso datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & Orbium latera transversa, haud satis accurate determinabuntur, nisi per collationem Cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures Cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem Orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem Cometam, in eodem Orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus, dabuntur Orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur Orbis Elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypothefi quod sint Parabolicæ. Nam hujusmodi Trajectoriæ cum Phænomenis femper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex Trajectoria Parabolica Cometæ anni 1680, quam cum obfervationibus fupra contuli, fed etiam ex ea Cometæ illius infignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* obfervatus fuit. Is ex obfervationibus fuis longitudes & latitudes hujus Cometæ computavit, fed minus accurate. Ex iisdem obfervationibus, *Halleius* nofter loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis fic inventis Trajectoriam Cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum afcendentem in π 21^h. 13^m. 55^{''}, Inclinationem Orbitæ ad planum Eclipticæ 21^h. 18^m. 40^{''}, diftantiam Perihelii a Nodo in Orbita 49^h. 27^m. 30^{''}. Perihelium in Ω 8^h. 40^m. 30^{''} cum Latitudine aufrina heliocentrica 16^h. 1^m. 45^{''}. Cometam in Perihelio *Novemb.* 24^d. 11^h. 52^m. P.M. tempore æquato *Londini*, vel 13^h. 8^m *Gedani*, ftyle veteri, & Latus rectum Parabolæ 410286, exiftente mediocri Terræ a Sole diftantia 100000. Quam probe loca Cometæ in hoc Orbe computata, congruunt cum obfervationibus, patebit ex Tabula fequente ab *Halleio* fupputata.

Temp. Appar. <i>Gedani</i>	Obfervata Cometæ diftantia	Loca obfervata:	Loca computata in Orbe.
<i>Decemb.</i> 3 ^d . 18 ^h . 29 ^m 1/2	a Corde Leonis	8 ^h . 1 ^m . 11 ^{''} 46. 24. 20	Long. π 7. 1. 0 π 7. 1. 29
	a Spica Virginis	22. 52. 10	Lar. a. 21. 39. 0 21. 38. 50
4. 18. 1 1/2	a Corde Leonis	46. 2. 45	Long. π 6. 15. 0 π 6. 16. 5
	a Spica Virginis	23. 52. 40	Lar. a. 22. 24. 0 22. 24. 0
7. 17. 48	a Corde Leonis	44. 48. 0	Long. π 3. 6. 0 π 3. 7. 33
	a Spica Virginis	27. 56. 40	Lar. a. 23. 22. 0 23. 22. 40
17. 14. 43	a Corde Leonis	53. 15. 15	Long. Ω 2. 56. 0 Ω 2. 56. 0
	ab Humero Orionis dextr.	45. 43. 30	Lar. a. 49. 25. 0 49. 25. 0
19. 9. 25	a Procyone	35. 13. 50	Long. Π 28. 40. 30 Π 28. 41. 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	52. 56. 0	Lar. a. 45. 48. 0 45. 46. 0
20. 9. 53 1/2	a Procyone	40. 49. 0	Long. Π 13. 3. 0 Π 13. 5. 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	40. 4. 0	Lar. a. 39. 54. 0 39. 53. 0
21. 9. 9 1/2	ab Hum. dextr. Orionis	26. 21. 25	Long. Π 2. 16. 0 Π 2. 18. 30
	a Lucid. Mandib. Ceti	29. 28. 0	Lar. a. 33. 41. 0 33. 39. 40
22. 9. 0	ab Hum. dextr. Orionis	29. 47. 0	Long. Υ 24. 24. 0 Υ 24. 27. 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	20. 29. 30	Lar. a. 27. 45. 0 27. 46. 0
26. 7. 58	a Lucida Arietis	23. 20. 0	Long. Υ 9. 0. 0 Υ 9. 2. 28
	ab Aldebaran	26. 44. 0	Lar. a. 12. 36. 0 12. 34. 33

Temp.

DE MUNDI
SYSTEMATE

Temp. Appat. Gadem.		Observata Comete distantia	Loca observata	Loca in Orbe.	
d.	h.				
27.	6.	45	2 Lucida Arctis ab Aldebaran	Long. ζ 7. 5. 40 Lat. 2. 10. 23. 0	ζ 7. 8. 34 10. 23. 13
28.	7.	37	2 Lucida Arctis 2 Palladio	Long. ζ 5. 24. 45 Lat. 2. 3. 22. 50	ζ 5. 27. 52 8. 23. 37
31.	6.	43	2 Cing. Androm. 2 Palladio	Long. ζ 2. 7. 40 Lat. 2. 4. 13. 0	ζ 2. 8. 20 4. 16. 25
Jan.			2 Cing. Androm. 2 Palladio	Long. γ 23. 14. 47 Lat. bor. 0. 54. 0	γ 23. 24. 0 0. 53. 0
7.	7.	37	2 Palladio 2 Cing. Androm.	Long. γ 26. 29. 15 Lat. bor. 5. 25. 50	γ 26. 28. 50 5. 26. 0
24.	7.	29	Cometa ab <i>Hælia</i> prope secundam Arctis observata, <i>Mer.</i> 14. 7b. 0' <i>Londini</i> , cum		Long. γ 29. 17. 20 Lat. bor. 8. 37. 10
Mer.					γ 29. 18. 20 8. 35. 22
1.	8.	5			

Apparuit hic Cometa per menses tres, signaque fere sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, Theoria a principio ad finem cum observationibus non minus accurate congruit, quam Theoriæ Planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi Cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter Nodum ascendentem & Perihelium, seu constituendo angulum illum $49^{\circ} 27' 18''$. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) parallaxis annua insignis fuit, & inde demonstratur motus annuus Terræ in Orbe magno.

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in Orbe cujus planum cum plano Eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in π $23^{\circ} 23'$; Inclinatio Orbitæ ad Eclipticam $83^{\circ} 11'$; Perihelium in π $25^{\circ} 29' 30''$; Distantia perihelia a Sole 56020, existente radio Orbis magni 100000, & tempore Perihelii *Julii* 2^{d.} 3^{h.} 50'. Loca autem Cometæ in hoc Orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in Tabula sequente.

1683		Locus Solis.	Cometæ	Lat. Bor.	Cometæ	Lat. Bor.	Differ.	Differ.
Temp. Equat.		Long. Comp.	Comp.	Long. Obs.	Obsv.	Long.	Lat.	
h. m. s.	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "
Jul. 25. 22. 55	1. 2. 30	13. 5. 42	29. 28. 13	13. 6. 42	29. 28. 20	+ 1. 0	+ 0. 7	
15. 11. 15	2. 53. 12	11. 37. 48	29. 34. 0	13. 59. 43	29. 34. 50	+ 1. 55	+ 0. 59	
27. 10. 20	4. 41. 45	10. 7. 6	29. 33. 30	10. 8. 40	29. 34. 0	+ 1. 34	+ 0. 30	
23. 13. 40	10. 38. 21	5. 10. 27	28. 51. 42	5. 11. 30	28. 50. 28	+ 1. 3	- 1. 14	
25. 14. 5	12. 55. 28	3. 27. 53	24. 24. 47	3. 27. 0	28. 23. 40	- 0. 53	- 1. 7	
31. 9. 42	18. 9. 22	II 27. 55. 3	25. 22. 52	II 27. 54. 24	26. 22. 25	- 0. 39	- 0. 27	
31. 14. 55	18. 21. 53	27. 41. 7	26. 16. 57	27. 41. 8	26. 14. 50	+ 0. 1	- 2. 7	
Aug. 2. 14. 56	20. 17. 16	25. 29. 32	25. 16. 19	25. 28. 46	25. 17. 28	- 0. 46	+ 1. 2	
4. 10. 49	22. 2. 50	23. 18. 20	24. 10. 49	23. 16. 55	24. 12. 19	- 1. 25	+ 1. 30	
6. 10. 9	23. 56. 45	20. 42. 23	22. 47. 5	20. 40. 32	22. 49. 5	- 1. 51	+ 2. 0	
9. 10. 26	26. 50. 52	16. 7. 57	20. 6. 37	16. 5. 55	20. 6. 10	- 2. 2	- 0. 27	
15. 14. 1	22. 47. 13	3. 30. 48	11. 37. 33	3. 26. 18	11. 32. 1	- 4. 30	- 5. 24	
16. 15. 10	3. 48. 2	0. 43. 7	9. 34. 16	0. 41. 55	9. 34. 13	- 1. 12	- 0. 3	
28. 15. 44	5. 45. 53	2. 45. 53	5. 12. 15	2. 49. 5	5. 9. 11	- 3. 48	- 2. 4	
			Austr.		Austr.			
22. 14. 44	9. 35. 49	11. 7. 14	5. 16. 53	11. 7. 12	5. 16. 50	- 0. 2	- 0. 3	
23. 15. 52	10. 36. 48	7. 2. 18	8. 17. 9	7. 3. 17	8. 16. 41	- 1. 1	- 0. 28	
26. 16. 2	13. 31. 10	V 24. 45. 21	16. 38. 0	V 24. 44. 0	16. 38. 20	- 1. 31	+ 0. 20	

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ retrogradi qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus ascendens (computante Flamsteed) erat in $21^{\circ} 16' 30''$. Inclinatio Orbitæ ad planum Eclipticæ $17^{\circ} 56' 0''$. Perihelium in $2^{\circ} 52' 50''$. Distantia perihelia a Sole 58328. Et tempus æquatum Perihelii Sept. 4^d. 7^h. 39'. Loca vero ex observationibus Flamsteedii computata, & cum locis per Theoriam computatis collata, exhibentur in Tabula sequente.

1682		Locus Solis.	Cometæ	Lat. Bor.	Cometæ	Lat. Bor.	Differ.	Differ.
Temp. Apar.		Long. Comp.	Comp.	Long. Obs.	Obsv.	Long.	Lat.	
h. d. /	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "	gr. / ' / "
Aug. 19. 16. 38	7. 0. 7	18. 14. 28	25. 50. 7	18. 14. 40	25. 49. 55	- 0. 12	+ 0. 12	
20. 15. 38	7. 55. 52	24. 46. 23	26. 14. 42	24. 46. 22	26. 12. 57	+ 0. 1	+ 1. 50	
21. 8. 21	8. 36. 14	29. 57. 15	26. 20. 3	29. 38. 2	26. 17. 37	- 0. 47	+ 2. 26	
22. 8. 8	9. 33. 55	6. 29. 53	26. 8. 42	6. 30. 3	26. 7. 12	- 0. 10	+ 1. 30	
29. 8. 20	16. 22. 40	12. 37. 54	18. 37. 47	12. 37. 49	18. 34. 5	+ 0. 5	+ 3. 42	
30. 7. 45	17. 19. 41	15. 36. 1	17. 26. 43	15. 35. 18	17. 27. 17	+ 0. 43	- 0. 34	
Sept. 1. 7. 33	19. 16. 9	20. 30. 43	15. 13. 0	20. 27. 4	15. 9. 49	+ 3. 48	+ 3. 11	
4. 7. 22	22. 11. 28	25. 42. 0	12. 23. 48	25. 40. 58	12. 22. 0	+ 1. 2	+ 1. 48	
9. 7. 32	23. 10. 29	27. 0. 46	11. 31. 8	26. 59. 24	21. 33. 51	+ 1. 22	- 0. 41	
8. 7. 16	26. 5. 58	29. 58. 44	9. 26. 46	29. 58. 45	9. 26. 43	- 0. 1	+ 0. 3	
9. 7. 26	27. 5. 9	m. 0. 41. 10	8. 49. 10	m. 0. 44. 4	8. 48. 25	+ 0. 6	+ 0. 45	

His exemplis abunde satis manifestum est, quod motus Cometarum per Theoriam a nobis expositam non minus accurate exhibentur,

hibentur, quam solent motus Planetarum per eorum Theorias. Et propterea Orbes Cometarum per hanc Theoriam enumerari possunt, & tempus periodicum Cometæ in quolibet Orbe revolventis tandem sciri, & tum demum Orbium Ellipticorum latera transversa & Apheliorum altitudines innotescunt.

Cometa retrogradus qui apparuit anno 1607, descripsit Orbem cujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in $8\ 20^{\text{sc}}\ 21'$. Inclinatio plani Orbis ad planum Eclipticæ erat $17^{\text{sc}}\ 2'$. Perihelium erat in $\approx 2^{\text{sc}}\ 16'$, & distantia perihelia a Sole erat 58680, existente radio Orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* $16^{\text{d}}\ 3^{\text{h}}\ 50'$. Congruit hic Orbis quamproxime cum Orbe Cometæ qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa spatio annorum 75, & axis major Orbis ejus erit ad axem majorem Orbis magni, ut $\sqrt{c}: 75 \times 75$ ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. Et distantia aphelia Cometæ hujus a Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit Orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt si Cometa spatio annorum septuaginta quinque, in hoc Orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius ascendere.

Cæterum Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum a Sole distantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non est expectandum ut Cometa idem, in eodem Orbe & iisdem temporibus periodicis, accurate redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quam quæ a causis prædictis oriuntur.

Et hinc ratio redditur cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco (more Planetarum) sed inde migrent & motibus variis in omnes coelorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis suis ubi tardissime moventur, quam longissime distent ab invicem & se mutuo quam minime trahant. Qua de causa Cometæ qui altius descendunt, adeoque tardissime moventur in Apheliis, debent altius ascendere.

Cometa qui anno 1680 apparuit, minus distabat a Sole in Perihelio suo quam parte sexta diametri Solis; & propter summam velocitatem in vicinia illa, & densitatem aliquam Atmosphæræ Solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari,

dari & propius ad Solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio ubi tardissime movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari potest & subinde in Solem incidere. Sic etiam Stellæ fixæ quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro Stellis Novis haberi. Vapores autem qui ex Sole & Stellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in Atmosphæras Planetarum, & ibi condensari & converti in aquam & spiritus humidos, & subinde per lentum calorem in sales, & sulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & substantias alias terrestres paulatim migrare. Decrescente autem corpore Solis motus medii Planetarum circum Solem paulatim tardescit, & crescente Terra motus medius Lunæ circum Terram paulatim augetur. Et collatis quidem observationibus Eclipsium *Babylonicis* cum iis *Albategnis* & cum hodiernis, *Halleius* noster motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum, paulatim accelerari, primus omnium quod sciam deprehendit.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypothesis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unusquisque radio ad Solem ducto areas describat tempore proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent esse in duplicata ratione distantiarum a Sole. Ut periodica Planetarum tempora sint in proportione sesquuplicata distantiarum a Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent esse in eadem distantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyratione conserventur & tranquille natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis Solaris deberent esse æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes suos ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus Cometarum sunt summe regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest nisi Vortices tollantur.

Projectilia, in aere nostro, solam aeris resistantiam sentiunt. Sublato aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, resistantia cessat, siquidem pluma tenuis & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc

DE MONDI
SYSTEMATE

Vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum coelestium quæ sunt supra atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiiis liberissime moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus specie & positione datis, secundum leges supra expositas, perpetuo, revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hæc minime potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium Planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis Mechanicis; siquidem Cometæ in Orbibus valde eccentricis, & in omnes coelorum partes libere feruntur. Quo motus genere Cometæ per Orbem Planetarum celerissime & facillime transeunt, & in Apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur, quam longissime distant ab invicem, & se mutuo quam minime trahunt. Elegantissima hæc Solis, Planetarum & Cometarum compages non nisi consilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si Stellæ fixæ sint centra similium systematum; hæc omnia simili consilio constructa, suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux Fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, & systemata omnia hæc in omnia invicem immittant.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, sed ut universorum Dominus; & propter dominium suum Dominus Deus
 * Id est, Imperator universalis. * *παντοκράτωρ* dici solet. Nam *Deus* est vox relativa & ad servos refertur: & *Deitas* est dominatio Dei non in corpus proprium, sed in servos. *Deus summus* est Ens æternum, infinitum, absolute perfectum; sed Ens utcumque perfectum sine dominio, non est *Dominus Deus*. Dicimus enim *Deus meus*, *Deus vester*, *Deus Israelis*: sed non dicimus *Æternus meus*, *Æternus vester*, *Æternus Israelis*; non dicimus *Infinitus meus*, *Infinitus vester*, *Infinitus Israelis*; non dicimus *Perfectus meus*, *Perfectus vester*, *Perfectus Israelis*. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox *Deus* passim significat *Dominum*, sed omnis Dominus non est Deus. Dominatio Entis spiritualis *Deum* constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ sequitur, Deum verum esse vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse vel summe perfectum.

fectum. *Aeternus est & infinitus, Omnipotens & Omnisciens, id est, durat ab aeterno in aeternum & adest ab infinito in infinitum, omnia regit & omnia cognoscit quæ sunt aut sciri possunt. Non est aeternitas vel infinitas, sed aeternus & infinitus; non est duratio vel spatium, sed durat & adest. Durat semper & adest ubique, & existendo semper & ubique durationem & spatium, aeternitatem & infinitatem, constituit. Cum utraqueque spatii particula sit semper, & nunquodpiam durationis indivisibile momentum ubique; certe rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit nunquam nusquam. Omnipræsentis est non per virtutem solam, sed etiam per substantiam; tam virtus sine substantia subsistere non potest. In ipso * continentur & moventur universa, sed absque mutua passione. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistantiam ex omnipræsentia Dei. Deum summum necessario existere in confesso est: Et eadem necessitate semper est & ubique. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi & agendi; sed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus ideam non habet colorum, sic nos ideam non habemus modorum quibus Deus sapientissimus sentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorsus destituitur, ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus Substantia minime cognoscimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum sonos, tangimus tantum superficies externas, olfacimus odores solos, & gustamus sapes; Intimas substantias nullo sensu, nulla actione reflexa cognoscimus, & multo minus ideam habemus substantiæ Dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates suas & attributa, & per sapientissimas & optimas rerum structuras, & causas finales; veneramur ætem & colimus ob dominium. Deus enim sine dominio, providentia, & causis finalibus, nihil aliud est quam Fatum & Natura. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis differere, ad Philosophiam Experimentalem pertinet.*

Hactenus Phænomena cælorum & maris nostri per Vim gravitatis exposui, sed causam Gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc Vis a causa aliqua quæ penetrat ad usque centra Solis

* Ita sentiebant veteres, Aratus in Phænomen: sub initio. Paulus in Act. 7. 27. 28. Moyses Deut. 4. 39. & 10. 14. David Psal. 139. 7, 8. Solomon Reg. 8. 27. Job. 22. 12. Jeremias Propheta 23. 23, 24.

& Planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum in quas agit (ut solent causæ Mechanicæ,) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicata ratione distantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in singulas Solis particulas, & recedendo a Sole decrescit accurate in duplicata ratione distantiarum ad usque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifestum est, & ad usque ultima Cometarum Aphelia, si modo Aphelia illa quiescant. Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheses non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur, *Hypothosis* vocanda est; & Hypotheses seu Metaphysicæ, seu Physicæ, seu Qualitatum occultarum, seu Mechanicæ, in *Philosophia Experimentalis* locum non habent. In hac Philosophia Propositiones deducuntur ex Phænomenis, & redduntur generales per Inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod Gravitas revera existat, & agat secundum leges a nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente, cujus vi & actionibus particule corporum ad minimas distantias se mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Sensatio omnis excitatur, & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus Spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum & a cerebro in musculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritus accurate determinari & monstrari debent.

F I N I S.

INDEX RERUM

ALPHABETICUS.

N.B. Citationes factæ sunt ad normam sequentis Exempli. III, 10: 444, 20: 471, 28 designant Libri tertii Propositionem decimam: Pagina 444^{ta} lineam 20^{am}: Pagina 471^{am} lineam 28^{am}.

A.

Æ Quinotiorum præcessio
causæ hujus motus indicantur III,
21

quantitas motus ex causis computatur III, 39

Aeris

densitas ad quamlibet altitudinem colligitur
ex Prop. 22. Lib. II. quanta sit ad altitudinem
unius semidiametri Terrestris. ostenditur
470, 11

elastica vis quali causæ tribui possit II, 23

gravitas cum Aquæ gravitate collata 470, 3

resistentia quanta sit, per Experimenta Pendulorum
colligitur 286, 28; per Experimenta corporum
cadentium & Theoriam accuratius invenitur 327, 13

Anguli contactus non sunt omnes ejusdem generis,
sed alii aliis infinite minores p. 32

Apsidum motus expenditur I, Sect. 9

Arces quas corpora in gyros acta, radiis ad centrum
virium ductis, describunt, conferuntur cum temporibus
descriptionum I, 1, 2, 3, 58, 65

Attractio corporum universorum demonstratur
III, 7; qualis sit hujus demonstrationis certitudo
ostenditur 358, 28: 484, 11

Attractionis causam vel modum nullibi definit
Auctor 5, 17: 147, 32: 172, 31: 483, 34.

C.

Calore virga ferrea compacta est augeri longitudine
386, 4

Calor Solis quantus sit in diversis a Sole distantis
466, 20

quantus apud Mercurium 374, 12

quantus apud Cometam anni 1680 in Perihelio
versantem 466, 22

Centrum commune gravitatis corporum plurimum,
ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum
vel motus vel quietis

p. 17

Centrum commune gravitatis Terræ, Solis & Planetarum
omnium quiescere III, 11; confirmatur ex Cor. 2. Prop. 14. Lib. III.

Centrum commune gravitatis Terræ & Lunæ motu
annuo percurrit Orbem magnum 376, 6 quibus
intervallis distat a Terra & Luna 430, 22

Centrum Virium quibus corpora revolvantia in Orbibus
retinentur

quali Arcarum indicio invenitur 38, 14

qua ratione ex datis revolvantium velocitatibus
invenitur I, 5

Circuli circumferentia, qua lege vis centripetæ
tendentis ad punctum quodcumque datum describi
potest a corpore revolvente 1, 4, 7, 8

Cœli

resistentia destituuntur III, 10: 444, 20: 473, 28;
& propterea Fluido omni corporeo 328, 18

transitum Luci præbent absque ulla refractione
467, 33

Cómets

Genus sunt Planetarum, non Meteororum
444, 24: 466, 15

Luna superiores sunt, & in regione Planetarum
versantur p. 439

Distantia eorum qua ratione per Observationes
colligi potest quamproxime 439, 21

Plures observati sunt in hemisphærio Solem
versus, quam in hemisphærio opposito; & unde hoc fiat
444, 5

Splendent luce Solis a se reflexa 444, 4; Lux
illa quanta esse solet 441, 12

Cinguntur Atmosphæris ingenibus 442, 12: 444, 27

Qui ad Solem propius accedunt ut plurimum
minores esse existimantur 475, 7

Quo sine non comprehenduntur Zodiaco (more
Planetarum) sed in omnes œcelorum regiones
varie feruntur 480, 30

Possunt aliquando in Solem incipere & novum
illi alimentum ignis præbere 480, 37

Usus eorum suggeritur 473, 1: 481, 7

Comete

INDEX RERUM.

Compositio caudae
 a circumferentia Solis 418, 19
 ad Ximel' hanc & fulgentissimam statim post
 transitum per viciniam Solis 467. 8
 insignis eorum raritas 470, 32
 origo & natura expenditur 442, 19: 467, 29
 quo temporis spatio a capite ascendunt 471, 1

Comete
 Moventur in Sectionibus Conicis umbilicos
 in centro Solis habentibus, & radius ad So-
 lem ductis describunt areas temporibus pro-
 portionales. Et quidem in Ellipsis mo-
 ventur si in Orbem redeunt, hae tamen
 Parabolae erunt maxime finitimae III, 40
 Trajectoria Parabolica ex datis tribus Obser-
 vationibus invenitur III, 41; Inventa cor-
 rigitur III, 42
 Locus in Parabola invenitur ad tempus da-
 tum 445, 30: I, 30
 Velocitas cum velocitate Planetarum confer-
 ritur 445, 17

Cometa annorum 1664 & 1665
 Hujus motus observatus expenditur, & cum
 Theoria accurate congruere deprehenditur
 p. 477.
Cometa annorum 1680 & 1681
 Hujus motus observatus cum Theoria accu-
 rate congruere invenitur p. 455 & seqq.
 Videbatur in Ellipsi revolvi spatio annorum
 plusquam quingentorum 464, 37
 Trajectoria illius & Cauda singulis in locis
 delineantur p. 465.

Cometa anni 1682
 Hujus motus accurate respondet Theoriae
 p. 479
 Comparuisse visus est anno 1607, iterumque re-
 diturus videtur periodo 75 annorum 480, 6
Cometa anni 1683
 Hujus motus accurate respondet Theoriae
 p. 478
 Curvae distinguuntur in Geometricae rationales &
 Geometricae irrationales 100, 5
 Curvatura figurarum qua ratione aestimanda sit
 235, 28: 392, 33.
Cycloidis seu Epicycloidis
 rectificatio I, 48, 49: 142, 18
 Evoluta I, 50: 142, 22
**Cylindri attractio ex particulis trahentibus com-
 positi quarum vires sunt reciprocae ut qua-
 drata distantiarum** 198, 1

D.

Dei Natura p. 482 & 483
Descensus gravium in vacuo quantus sit, ex lon-
 gitudine Penduli colligitur 379, 1
Descensus vel Ascensus rectilinei spatia descri-
 pta, tempora descriptionum & velocitates ac-

quisque constituantur, postquam ab illis quae ge-
 neris vi constituta I, Sect. 7.
**Descensus & ascensus temporum in Media re-
 siliantibus** II, 3, 8, 9, 40, 13, 14

Ellipsis
 qua lege vis centripeta tendentis ad centrum
 figurae describitur a corpore revolvente
 I, 10, 64
 qua lege vis centripeta tendentis ad umbili-
 cum figurae describitur a corpore revol-
 vente I, 11

F.

Fluidi definitio p. 260
Fluidorum densitas & compressio quas leges ha-
 bent, ostenditur II, Sect. 5
**Fluidorum per foramina in vaso facti efflu-
 vium determinatur motus** II, 36
Fumi in camino ascensus obiter explicatur 472, 4

G.

Graduum in Meridiano Torculari mensurae exhi-
 beretur, & quana sit exigua inaequalitas osten-
 ditur ex Theoria III, 20
Gravitas
 diversi est generis a vi Magnetica 368, 39
 motus est inter Terram & ejus partes 22, 18
 ejus causa non assignatur 483, 34
 datur in Planetis universis 369, 15; & per-
 gendo a superficialibus Planetarum solum
 decrescit in duplata ratione distantiarum
 a centro III, 8, deorsum decrescit in sim-
 plici ratione quamprovisae III, 9
 datur in corpore omni, & proportionalis est
 quantitati materiae in singulis III, 7
Gravitatem esse vim illam qua Luna retinetur
 in Orbe III, 4, computo accuratiori com-
 probatur 450, 25
Gravitatem esse vim illam qua Planetae primarii
 & Satellites Jovis & Saturni retinentur in
 Orbibus III,

H.

Hydrostaticae principia traduntur II, Sect. 5
Hyperbola
 qua lege vis centrifuga tendentis a figurae cen-
 tro describitur a corpore revolvente 47, 26
 qua lege vis centrifuga tendentis ab umbilico
 figurae describitur a corpore revolvente 57, 6
 qua lege vis centripeta tendentis ad umbilicum
 figurae describitur a corpore revolvente I, 20
Hypotheses conjunctaeque generis rejiciuntur ab
 hac Philoſophia 484, 8.

INDEX RERUM

L

Inquis vis definitur p. a

Jovis

- distancia a Sole 461, 7
- semidiameter apparens 371, 3
- semidiameter vera 371, 14
- attractiva vis quanta sit 390, 43
- pondus corporum in ejus superficie 371, 39
- superficies 371, 37
- quantitas materiae 371, 27
- perturbatio a Saturno quantitas 375, 33
- diametrorum proportio comparo exhibetur 381, 27
- convertio circum axem quo tempore absolvitur 381, 25
- cingulae causa subindicatur 444, 32.

L

Locus definitur, & distinguitur in absolutum & relativum 6, 12

Loca corporum in Sectionibus conicis motuum inveniuntur ad utrumque assignatum I, Sect. 6

Lunae

- propagatio non est instantanea 207, 5; non sit per agnitivum Medii alicujus Rubrici 342, 36
- velocitas in diversis Mediis diversa I, 95
- reflexio quaedam explicatur I, 96
- refractio explicatur I, 94; non fit in puncto solum incidentiae 207, 29
- insturatio prope corporum terminos Experimentis observata 207, 8

Lunae

- corporis figura computo colligitur III, 38
- inde causa patefacta, cur eandem semper faciem in Terram obvertat 432, 9
- & librationes explicantur III, 17
- diameter mediocriis apparens 430, 12
- diameter vera 430, 37
- pondus corporum in ejus superficie 430, 20
- densitas 430, 15
- quantitas materiae 430, 19
- distancia mediocriis a Terra quae continet maximas Terrae semidiametros 430, 25; quae mediocriis 431, 18
- parallaxis maxima in longitudinem paulo major est quam parallaxis maxima in latitudinem 387, 8
- vis ad Mare inveniendum quanta sit III, 37; non fieri potest in Experimentis pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque 430, 4
- tempus periodicum 430, 32
- tempus revolutionis synodicae 398, 7
- motus medius cum diurno motu Terrae col-

latus paulatim accelerari deprehenditur 25

Halleo 481, 16

Lunae motus & motuum irregularitates a causis

fuis derivantur III, 22: p. 421 & seqq.

tardius revolvitur Luna dilato Orbe, in perihelio Terrae; citius in aphelio, contracto

Orbe III, 22: 421, 6

tardius revolvitur, dilato Orbe, in Apogei

Syzygis cum Sole; citius in Quadraturis

Apogei, contracto Orbe 422, 2

tardius revolvitur, dilato Orbe, in Syzygiis

Nocti cum Sole; citius in Quadraturis No-

di, contracto Orbe 422, 21

tardius movetur in Quadraturis suis cum Sole,

citius in Syzygiis; & radio ad Terram

disto descibit arcum pro tempore mino-

rem in priore casu, majorem in posteriore

III, 22: Inaequalitas motuum Arcuum con-

putatur III, 26. Orbem insuper habet ma-

gis curvum & longius a Terra recedit in

priore casu, minus curvum habet Orbem

& propius ad Terram accedit in posteriore

III, 22. Orbis hujus figura & proportio

diametrorum ejus tempore colligitur III,

28. Et subinde proponitur methodus in-

veniendi distantiam Lunae a Terra ex motu

ejus duratio III, 27

Apogium tardius movetur in Aphelio Terrae,

velocissimum Perihelium III, 22: 421, 21

Apogium ubi est in Sole Syzygis, maxime

progreditur; in Quadraturis ingreditur III,

22: 422, 37

Eccentricitas maxima est in Apogei Syzygis

cum Sole; minima in Quadraturis III, 22

422, 39

Nodi tardius moventur in Aphelio Terrae; eo-

locius in Perihelio III, 22: 422, 21

Nodi quiescunt in Syzygiis suis cum Sole, &

velocissime regrediuntur in Quadraturis

III, 22. Nodorum motus & irregularitates

motuum computantur ex Theoria Gravi-

tatis III, 30, 31, 32, 33

Inclinatio Orbis ad Eclipticam maxima est in

Syzygiis Nodorum cum Sole, minima in

Quadraturis I, 66 Cor. 10. Inclinacionis va-

riaciones computantur ex Theoria Gravitatis

III, 34, 35

Lunarium motuum Aequationes ad usus Astro-

gnomicos p. 421 & seqq.

Motus medii Lunae

Aequatio annua 421, 4

Aequatio semestris prima 422, 2

Aequatio semestris secunda 422, 21

Aequatio centri prima 423, 20: p. 302 &

seqq.

Aequatio centri secunda 424, 37

Variatio prima III, 29

Variatio secunda 425, 3.

MOTUS

INDEX RERUM.

Motus mediæ Apogei
Æquatio annua 421, 21
Æquatio semestris 422, 37
Eccentricitatis
Æquatio semestris 422, 37
Motus mediæ Nodorum
Æquatio annua 421, 21
Æquatio semestris III, 33
Inclinationis Orbitæ ad Eclipticam
Æquatio semestris 420, 22
Lunarium motuum Theoria, qua Methodo stabilienda sit per Observationes 425, 33.

M.

Magnetica vis 22, 23: 271, 25: 368, 29: 432, 23.
Maris æstus a causis suis derivatur III, 24, 36, 37
Martis
 distantia a Sole 361, 1
 Aphelii motus 376, 33
Mætricæ
 quantitas definitur p. 1
 vis inertia seu vis inertie definitur p. 2
 vis impressa definitur p. 2
 extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, vis inertie, gravitas, qua ratione innotescunt 357, 16: 484, 10
 divisibilitas nondum constat 358, 18
Materia subtilis Cartesianorum ad examen quoddam revocatur 292, 12
Materia vel subtilissima Gravitæ non destituitur 368, 1
Mechanicæ, quæ dicuntur, Potentiæ explicantur & demonstrantur p. 14 & 15: p. 23
Mercurii
 distantia a Sole 361, 1
 Aphelii motus 376, 33
Methodus
 Rationum primarum & ultimarum I. Sect. 1
 Transmutandi figuras in alias quæ sunt ejusdem Ordinis Analytici I, Lem. 22. pag. 79
 Fluxionum II, Lem. 2. p. 224
 Differentialis III, Lemm. 5 & 6. pagg. 446 & 447
 Inveniendi Curvarum omnium quadraturas proxime veras 447, 8
 Serierum convergentium adhibetur ad solutionem Problematum difficiliorum p. 127.
 128: 202: 235: 414
Motus quantitas definitur p. 2
Motus absolutus & relativus p. 6: 7: 8: 9 ab invicem fecerari possunt, exemplo demonstratur p. 10
Motus Leges p. 12 & seqq.
Motuum compositio & resolutio p. 14.
Motus corporum congregientium post reflexionem, quali Experimento recte colligi possunt,

ostenditur 19, 21
Motus corporum
 in Conicis sectionibus æccentricis I, Sect. 3
 in Orbibus mobilibus I, Sect. 9
 in Superficiebus datis & Funependulorum motus reciproci I, Sect. 10
Motus corporum viribus centripetis se mutuo petentium I, Sect. 21
Motus corporum Minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur I, Sect. 14.
Motus corporum quibus resistitur
 in ratione velocitatis II, Sect. 1
 in duplicata ratione velocitatis II, Sect. 2
 partim in ratione velocitatis, partim in eadem ratione duplicata II, Sect. 3
Motus
 corporum sola vi infra progredientium in Mediis resistentiibus II, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12: 302, 1
 corporum recta ascendentium vel descendendum in Mediis resistentiibus, agentæ vi Gravitatis uniformi II, 3, 8, 9, 40, 13, 14
 corporum projectorum in Mediis resistentiibus, agentæ vi Gravitatis uniformi II, 4, 10
 corporum circumgyrantium in Mediis resistentiibus II, Sect. 4
 corporum Funependulorum in Mediis resistentiibus II, Sect. 6
Motus & resistentia Fluidorum II, Sect. 7
Motus per Fluida propagatus II, Sect. 8
Motus circularis seu Vorticulus Fluidorum II, Sect. 9
Mundus originem non habet ex causis Mechanicis p. 482, 12.

N.

Navium constructioni Propositio non inutilis 300, 4.

O.

Opticarum ovalium inventio quam Cartesius celaverat I, 97. *Cartesiani* Problematis generalior solutio I, 98
Orbitarum inventio
 quas corpora describunt, de loco dato data cum velocitate, secundum datam rectam egressa, ubi vis centripeta est reciproce ut quadratum distantie & vis illius quantitas absoluta cognoscitur I, 19
 quas corpora describunt ubi vires centripetæ sunt reciproce ut cubi distantiarum 45, 18: 118, 27: 125, 25
 quas corpora viribus quibuscunque centripetis agitata describunt I, Sect. 8.

INDEX RERUM.

P.

Parabola, qua lege vis contripens tendentis ad umbilicum figuræ, describitur a corpore revolvente I, 13

Pendulorum affectiones explicantur I, 50, 51, 52, 53: II, Sect. 6.

Pendulorum isochronorum longitudines diversæ in diversis locorum Latitudinibus inter se conferuntur, tum per Observationes, tum per Theoriam Gravitatis III, 20

Philosophandi Regulæ p. 357

Planetæ

non deferuntur a Vorticibus corporeis 352, 37: 354, 25: 481, 21

Primarii

Solem circumgunt 360, 7

moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis III, 13

radiis ad Solem ductis describunt areas temporibus proportionales 361, 15: III, 13

temporibus periodicis revolvuntur quæ sunt in sesquuplicata ratione distantiarum a Sole 360, 17: III, 13 & I, 15

retinentur in Orbibus suis a vi Gravitatis qua respicit Solem, & est reciproce ut quadratum distantie ab ipsius centro III, 2, 5

Secundarii

moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Primariorum III, 22

radiis ad Primarios suos ductis describunt areas temporibus proportionales 359, 3, 22: 361, 27: III, 22

temporibus periodicis revolvuntur quæ sunt in sesquuplicata ratione distantiarum a Primariis suis 359, 3, 22: III, 22 & I, 15

retinentur in Orbibus suis a vi Gravitatis qua respicit Primarios, & est reciproce ut quadratum distantie ab eorum centrâ III, 1, 3, 4, 5

Planetarum

distantia a Sole 361, 1

Orbium Aphelia & Nodi prope quiescunt III, 14

Orbes determinantur III, 15, 16

loca in Orbibus inveniuntur I, 31

densitas calori quem a Sole recipiunt, accommodatur 372, 7

conversionis diurnæ sunt æquabiles III, 17

axes sunt minores diametris quæ ad eandem axes normaliter ducuntur III, 18

Pondera corporum

in Terram vel Solem vel Planetam quemvis, paribus distantiis ab eorum centrâ sunt ut

quantitates materiarum in corporibus III, 6

non pendent ab eorum formis & materiis 367, 35

in diversis Terræ regionibus inveniuntur & inter se comparantur III, 20

Problematis

Kepleriani solutio per Trochoidem & per Approximationes I, 31

Veterum de quatuor lineis, a Pappo memorati, a Cartesio per calculum Analyticum tentati, compositio Geometrica 70, 19

Projectilia, seposita Medii resistentia, moveri in Parabola colligitur 47, 23: 202, 23: 236, 29

Projectilium motus in Mediis resistentibus II, 4, 10

Pulsuum Aeris, quibus Soni propagantur, determinantur intervalla seu latitudines II, 50: 344, 18. Hæc intervalla in apertarum Fistularum Sonis æquari duplis longitudinibus Fistularum verosimile est 344, 26

Q.

Quadratura generalis Ovalium dari non potest per finitos terminos I, Lem. 28. p. 98

Qualitates corporum qua ratione innotescunt & admittuntur 357, 16

Quies vera & relativa p. 6, 7, 8, 9.

R.

Resistentiæ quantitas

in Mediis non continuis II, 35

in Mediis continuis II, 38

in Mediis cujuscunque generis 302, 32

Resistentiarum Theoria confirmatur

per Experimenta Pendulorum II, 30, 31, Sch. Gen. p. 284

per Experimenta corporum cadentium II, 40, Sch. p. 319

Resistentia Mediorum

est ut eorundem densitas, cæteris paribus

290, 29: 291, 35: II, 33, 35, 38: 327, 14

est in duplicata ratione velocitatis corporum quibus resistitur, cæteris paribus 219, 24:

284, 33: II, 33, 35, 38: 324, 23

est in duplicata ratione diametri corporum Sphæricorum quibus resistitur, cæteris paribus 288, 4: 289, 11: II, 33, 35, 38:

Sch. p. 319

non minuitur ab actione Fluidi in partes posticas corporis moti 312, 23

Resistentia Fluidorum duplex est; oriturque vel ab Inertia materię fluidę, vel ab Elasticitate,

Tenacitate & Frictione partium ejus 318, 1.

Resistentia quæ sentitur in Fluidis fere tota est prioris generis 326, 32, & minui non potest per subtilitatem partium Fluidi, manente densitate 328, 7

Resistentiæ Globi ad resistentiam Cylindri proportionis, in Mediis non continuis II, 34

Q99

Resisten-

INDEX RERUM

Refractio quam patitur a Fluido frustum Conicum, qua ratione fit minima 299, 30
Refractio minus Solidum 300, 19

S.

Saellius

Jovialis extimi elongatio maxima heliocentrica a centro Jovis 370, 35
Magestani elongatio maxima heliocentrica a centro Saturni 371, 5

Saellium

Jovialium tempora periodica & distantia a centro Jovis 359, 12
Saturniorum tempora periodica & distantia a centro Saturni 360, 1
Jovialium & Saturniorum inaequales motus a motibus Lunae derivari posse ostenditur III, 23.

Saturni

distantia a Sole 361, 1
 semidiameter apparens 371, 9
 semidiameter vera 371, 14
 vis attractiva quanta fit 370, 33
 pondus corporum in ejus superficie 371, 19
 densitas 371, 37
 quantitas materiae 371, 27
 perturbatio a Jovo quanta fit 375, 16
 diameter apparens Annuli quo cingitur 371, 8

Sectiones Conicae, qua lege vis centripeta tendentis ad punctum quodcumque datum, describuntur a corporibus revolventibus 58, 20

Sectionum Conicarum descriptio Geometrica

ubi dantur Umbilici I, Sect. 4
 ubi non dantur Umbilici I, Sect. 5, ubi dantur Centra vel Asymptoti 87, 9
 Sesquialtera ratio definitur 31, 49

Sol

circum Planetarum omnium communis gravitatis centrum movetur III, 12
 semidiameter ejus mediocris apparens 371, 12
 semidiameter vera 371, 14
 parallaxis ejus horizontalis 370, 33
 parallaxis menstrua 376, 4
 vis ejus attractiva quanta fit 370, 33
 pondus corporum in ejus superficie 371, 19
 densitas ejus 371, 27
 quantitas materiae 371, 27
 vis ejus ad perturbandos motus Lunae 363, 15: III, 25
 vis ad Mare movendum III, 36.

Sonorum

natura explicatur II, 43, 47, 48, 49, 50
 propagatio divergit a recto tramite 332, 9, fit per agitationem Aeris 343, 1
 velocitas compuro colligitur 343, 8, paululum major esse debet Aestivo quam Hyberno tempore, per Theoriam 344, 11
 cessatio fit statim ubi cessat motus corporis sonori 344, 29

auguratio per tres circumferentias 344, 32

Spirium

absolutum & relativum p. 1, 7
 non est aequaliter plenum 46, 18
Sphaeroides elliptici, cuius tractatus tres sunt capitulos in quatuor distinctas 198, 21

Spiralis quae sicut radius dicitur motus in angulo dato, qua lege vis centripeta tendens ad centrum Spiralis motum parit a corpore revolvente, ostenditur I, 9: III, 25, 16

Spirium quocumque motum perpendiculum & in corporibus laetentem, ac plurimum motus phenomenon solvenda, insuper auguratur 484, 17

Sellarum fixarum

quae demonstrantur 376, 28
 radiatio & scintillatio quibus causis referendae sunt 467, 38

Stellae Novae unde ortu possunt 481, 5

Substantiae terrae omnium circumferentiae 483, 23

T.

Tempus absolutum & relativum p. 5, 7

Temporis Aequino Astronomica per Horologium oscillatorium & Eclipses Saellium Jovis comprobantur 7, 15

Tempora periodica corporum revolventium in Ellipsis, ubi vires centripetae ad umbilicum tendunt I, 15

Terrae

dimensio per **Picatum** 378, 11, per **Cassium** 378, 21, per **Norwoodum** 378, 28

figura invenitur, & proportio diametrorum, & mensura graduum in Meridiano III, 19, 20

altitudinis ad Aequatorem supra altitudinem ad Polum quanta sit excessus 381, 7: 387, 1
 semidiameter maxima, minima & mediocris 387, 10

globus densior est quam si totus ex Aqua constaret 372, 32

globus densior est ad centrum quam ad superficiem 386, 1

molem indies augeri verosimile est 473, 28: 481, 13

axis nutatio III, 22

motus annuus in Orbe magno demonstratur III, 12, 13: 478, 26

Eccentricitas quanta fit 421, 15

Aphelii motus quanta fit 376, 33

V.

Vacuum dicitur, vel spacia omnia (si dicantur esse plena) non sunt aequaliter plena 328, 18: 368, 25.

Veloc

INDEX RERUM.

- Velocitas maxima quam Globus, in Mediore-**
sistente cadendo, potest acquirere II, 38,
 Cor. 2.^o
- Velocitates corporum in Sectionibus conicis mo-**
torum, ubi vires centripetæ ad umbilicum
tendunt I, 16.
- Veneris**
 distantia a Sole 361, 1
 tempus periodicum 370, 23
 Aphelii motus 376, 33
 Virium compositio & resolutio p. 14.
- Vires attractivæ corporum**
 sphericorum ex particulari quacunque lege
 trahentibus compositorum, expenduntur
 I, Sect. 12
 non sphericorum ex particulari quacunque
 lege trahentibus compositorum, expenduntur
 I, Sect. 13.
- Vis centrifuga corporum in Æquatore Terræ**
 quanta sit 379, 22.
- Vis centripeta definitur** p. 2
 quantitas ejus absoluta definitur p. 4.
 quantitas acceleratrix definitur p. 4.
 quantitas motrix definitur p. 4
 proportio ejus ad vim quamlibet notam, qua
 ratione colligenda sit, ostenditur 40, 1
- Virium centripetarum inventio, ubi corpus in**
spatio non resistente, circa centrum immo-
bile, in Orbe quocunque revolvitur I, 6: I,
 Sect. 2: & 3.
- Viribus centripetis datis ad quocunque pun-**
ctum tendentibus, quibus Figura quævis a
 corpore revolvente describi potest; dantur
 vires centripetæ ad aliud quodvis punctum
 tendentes, quibus eadem Figura eodem tem-
 pore periodico describi potest 44. 3.
- Viribus centripetis datis quibus Figura quævis**
describitur a corpore revolvente; dantur vires
quibus Figura nova describi potest, si Ordi-
nate auvantur vel minuuntur in ratione qua-
cunque data, vel angulus Ordinationis utcum-
que mutetur, manente tempore periodico
 47, 28
- Viribus centripetis in duplicata ratione distan-**
tiarum decrefcenibus, quænam Figure describi
possunt, ostenditur 53, 1: 150, 8.
- Vi centripeta**
 quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applica-
 tæ tendentis ad centrum virium maxime
 longinquum, corpus movebitur in data
 quavis conicæ sectione 45, 1
 quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ tenden-
 tis ad centrum virium maxime longinquum,
 corpus movebitur in Hyperbola 202, 26
- Umbra Terrestri in Eclipsibus Lunæ agenda est,**
propter Atmosphæræ refractionem 425, 27
- Umbra Terrestri diametri non sunt æquales;**
 quanta sit differentia ostenditur 387, 8.
- Undarum in aquæ stagnantis superficie propa-**
garum velocitas invenitur II, 46
- Vorticum natura & constitutio ad examen re-**
vocantur II, Sect. 9: 481, 21
- U.** Hujus voculæ significatio Mathematica de-
 finitur 30, 19.

FINIS.

ALPHABETICALLY

Number of ...
Date ...



