вторник, 16. јули 2024

Задача 1. Определи ги сите реални броеви α такви што, за секој позитивен цел број n, целиот број

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

е делив со n. (Со $\lfloor z \rfloor$ е обележан најголемиот цел број помал или еднаков на z. На пример $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, а $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Задача 2. Определи ги сите парови (a, b) од позитивни цели броеви за кои постојат позитивни цели броеви g и N такви што

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

важи за секој цел број $n \geqslant N$. (Со $\gcd(x, y)$ е означен најголемиот заеднички делител на целите броеви x и y.)

Задача 3. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е бесконечна низа од позитивни цели броеви и нека N е позитивен цел број. Знаеме дека, за секој $n > N$, a_n е еднаков на бројот на појавувања на a_{n-1} во низата $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Докажи дека барем една од низите $a_1, a_3, a_5, \ldots$ и $a_2, a_4, a_6, \ldots$ е однекаде периодична. (Бесконечна низа $b_1, b_2, b_3, \ldots$ се нарекува *однекаде периодична* ако постојат позитивни цели броеви p и M такви што $b_{m+p} = b_m$ за секој $m \geqslant M$.)

Language: Macedonian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

среда, 17. јули 2024

Задача 4. Нека ABC е триаголник во кој $AB < AC < BC$. Нека впишаната кружница на триаголникот ABC е ω, а нејзиниот центар е I. Нека X е точката на правата BC различна од C таква што правата низ X паралелна на AC е тангента на ω. Слично, нека Y е точката на правата BC различна од B таква што правата низ Y паралелна на AB е тангента на ω. Нека AI ја сече опишаната кружница околу триаголникот ABC по втор пат во $P \neq A$. Нека K и L се средините на отсечките AC и AB, соодветно.

Докажи дека $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Задача 5. Полжавот Турбо ја игра следната игра на табла со 2024 редови и 2023 колони. На таблата има чудовишта скриени во 2022 од полињата. На почетокот Турбо не знае во кои полиња има чудовишта, но знае дека има по точно едно чудовиште во секој ред освен првиот и последниот, и дека секоја колона содржи најмногу едно чудовиште.

Турбо прави серија од обиди да стигне од првиот до последниот ред. Во секој обид, тој одбира да почне од произволно поле во првиот ред, па последователно се придвижува во соседно поле на моменталното, кое има заедничка страна. (Тој смее да се врати на поле кое веќе го посетил.) Ако стапне на поле со чудовиште, обидот завршува и тој е транспортиран во првиот ред, за следниот обид. Чудовиштата не се движат, а Турбо памти во кои од полињата што ги поминал има чудовиште и во кои нема. Ако стигне до поле во последниот ред обидот заврува, како и играта.

Определи го најмалиот број на обиди n за кој Турбо има стратегија која гарантира дека ќе стигне во последниот ред по $n-$ тиод обид или порано, независно од поставеноста на чудовиштата.

Задача 6. Нека $\mathbb{Q}$ е множеството од рационални броеви. За функцијата $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ велиме дека е *батска* ако го исполнува следното својствп: за секои $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{или} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Докажи дека постои цел број c таков што за секоја батска функција f постојат најмногу c различни рационални броеви меѓу броевите $f(r) + f(-r)$ добиени за секој рационален број r, а потоа најди ја најмалата можна вредност за c.

Tuesday, 16. July 2024

Problem 1. Determine all real numbers α such that, for every positive integer n, the integer

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

is a multiple of n. (Note that $\lfloor z \rfloor$ denotes the greatest integer less than or equal to z. For example, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ and $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Problem 2. Determine all pairs (a, b) of positive integers for which there exist positive integers g and N such that

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

holds for all integers $n \geqslant N$. (Note that $\gcd(x, y)$ denotes the greatest common divisor of integers x and y.)

Problem 3. Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be an infinite sequence of positive integers, and let N be a positive integer. Suppose that, for each $n > N$, a_n is equal to the number of times a_{n-1} appears in the list $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Prove that at least one of the sequences $a_1, a_3, a_5, \ldots$ and $a_2, a_4, a_6, \ldots$ is eventually periodic.

(An infinite sequence $b_1, b_2, b_3, \ldots$ is *eventually periodic* if there exist positive integers p and M such that $b_{m+p} = b_m$ for all $m \geqslant M$.)

Language: English

Time: 4 hours and 30 minutes.
Each problem is worth 7 points.

Wednesday, 17. July 2024

Problem 4. Let ABC be a triangle with $AB < AC < BC$. Let the incentre and incircle of triangle ABC be I and ω, respectively. Let X be the point on line BC different from C such that the line through X parallel to AC is tangent to ω. Similarly, let Y be the point on line BC different from B such that the line through Y parallel to AB is tangent to ω. Let AI intersect the circumcircle of triangle ABC again at $P \neq A$. Let K and L be the midpoints of AC and AB, respectively.

Prove that $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Problem 5. Turbo the snail plays a game on a board with 2024 rows and 2023 columns. There are hidden monsters in 2022 of the cells. Initially, Turbo does not know where any of the monsters are, but he knows that there is exactly one monster in each row except the first row and the last row, and that each column contains at most one monster.

Turbo makes a series of attempts to go from the first row to the last row. On each attempt, he chooses to start on any cell in the first row, then repeatedly moves to an adjacent cell sharing a common side. (He is allowed to return to a previously visited cell.) If he reaches a cell with a monster, his attempt ends and he is transported back to the first row to start a new attempt. The monsters do not move, and Turbo remembers whether or not each cell he has visited contains a monster. If he reaches any cell in the last row, his attempt ends and the game is over.

Determine the minimum value of n for which Turbo has a strategy that guarantees reaching the last row on the n^{th} attempt or earlier, regardless of the locations of the monsters.

Problem 6. Let $\mathbb{Q}$ be the set of rational numbers. A function $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ is called *aquaesulian* if the following property holds: for every $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{or} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Show that there exists an integer c such that for any aquaesulian function f there are at most c different rational numbers of the form $f(r) + f(-r)$ for some rational number r, and find the smallest possible value of c.