Ристо Малчески

КОМБИНАТОРИКА
(ДЕФИНИЦИИ, ТЕОРЕМИ И ЗАДАЧИ – прв дел)

Скопје, 2023

Рецензент:
Проф. д-р Даниел Велинов
Градежен факултет, УКИМ
Скопје

С О Д Р Ж И Н А

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е резултат на долгогодишната работа со надарените ученици за математика од средното образование, како и на предавањата по предметот Дискретна математика, ко авторот ги реализираше на ФОН универзитетот во периодот од 2007 до 2020 година. Книгава е пишувана како систем од задачи, при што во рамките на одделни задачи се воведени потребните поими, а како задачи се докажани и сите теореми неопходни за усвојување на предвидените содржини на напредно ниво, што значи до подготовка за учество на Меѓународната математичка олимпијада. Самата книга е поделена во два дела, а структурата на првиот дел на книгата изгледа вака:

Во првиот дел од книгата се дадени основните поими за множествата и пресликувањата. Притоа се докажани поголем број тврдења за операциите со множествата и за пресликувањата, а особено за инјекцијата, сурјекцијата и биекцијата. Во рамките на овој дел се разгледани и еквивалентните множества за кои се докажани основните тврдења. Сите теориски разгледувања се пропратени со задачи кои се задавани на бројни математички натпревари.

Во вториот дел се докажани основните комбинаторни принципи, како што се: принципот на еднаквост, принципот на збир, принципот на производ и принципот на исклучување. Како и во првиот дел, така и овде се содржани повеќе задачи задавани на разни математички натпревари.

Третиот дел е посветен на основните комбинаторни конфигурации. Притоа во одделни задчи се воведени варијациите, пермутациите и комбинациите со и без повторување, за кои се докажани формулите за нивно пресметување. Овој дел содржи голем број задачи поврзани со воведените поими, дел од кои биле задавни на престижни математички натпревари.

Заради важноста и огромната примена, во четвртиот дел засебно се докажани елементарниот и општиот принцип на Дирихле. Понатаму, примената на принципот на Дирихле е илустрирана како во доказите на повеќе теориски резултати, така и при докажување на егзистенција на одделни комбинаторни конфугурации во геометријата, теоријата на броеви итн.

Петтиот дел е посветен на принципот на вклучување и исклучување, кој се користи при решавање на задачи за пребројување елементи на унија на неколку конечни множеста. Иако формулациите и доказите на основните теореми за две и повеќе множества се релативно лесни, со примена на овој метод многу брзо и ефикасно се решаваат голем број проблеми за пребројување, за кои на прв поглед се мисли дека се исклучително тешки.

Заради значењето на пермутациите без повторување, во седмиот дел истите се дополнително разгледани. Во врска со пермутациите се воведени поимите цикл, транспозиција, орбита на елемент во однос на дадена пермутација, Кошиев број на пермутација, парност на пермутација и се докажани неколку својства поврзани со овие поими. Како и во другите делови и овде се содржани поголем број задачи, повеќето од кои се задавани на математички натпревари.

Седмиот дел е посветен на биномните коефициенти и Њутновата биномна формула. Во овој дел покрај Паскаловото правило и биномната и полиномната формула, се докажани поголем број идентитети со биномни коефициенти, а примената на некои од нив е илустрирана при решавање на натпреварувачки задачи.

Во осмиот дел е разгледан методот на двојно пребројување, кој е докажан во првата задача, а во преостанатите 26 задачи е илустрирана неговата примена. Во дел од задачите се докажуваат некои комбинаторни идентитети, кои со други методи потешко се докажуваат, а голем број од разгледаните задачи се задавани на меѓународни математички натпревари.

Деветтиот дел е посветен на диференцните равенки (рекурзиите), при што посебно внимание е обрнато на линеарните хомогени и нехомогени диференцни равенки од прв и втор ред. Меѓутоа, во дел од задачите се решени некои нелинеарни диференцни равенки и системи диференцни равенки. Како и во претходните делови и овде теориските разгледувања се илустрирани при решавање на задачи за пребројување елементи на конечни множества.

Во десеттиот дел се воведени генераторните функции на низи броеви, кои се важен апарат за решавање на задачи со пребројување на елементи на конечни множества. Покрај обичните, се разгледуваат и експоненцијалните генераторни функции, при што за двата вида се докажани поголем број својства и е илустрирана нивната примена при решавање на диференцни равенки. На крајот од овој дел е разгледан методот на змиско масло и неговата примена при докажување на комбинаторни идентитети.

Единаесеттиот дел е посветен на триаголните броеви, во врска со кои се докажани поголем број идентитети.

Во дванаесеттиот дел се разгледани Фибоначиевите и Лукасовите броеви. Во врска со овие броеви се докажани голем број тврдења, дел од кои се идентитетот на Касини, теоремата на Цезаро и теоремата на Цекендорф. Исто така за Фибоначиевите и Лукасовите броеви се определени нивните генераторни функции, и со нив е добиен експлицитен израз за Фибоначиевите броеви.

Со тринаесеттиот дел завршува првата книга од ова двотомно издание. Во овој дел се воведени Каталановите броеви и е покажана нивната примена во пребројување на десетина комбинаторни конфигурации. Исто така е изведена генераторната функција за овие броеви, со која е добиен експлицитен израз за Каталановите броеви.

Се надевам дека оваа книга ќе најде свои читатели меѓу младите математичари кои сакаат да ги прошират и продлабочат своите знаења во рамките на темите и надвор од нив кои се предвидени со стандардните наставни програми. Дел од материјалот обработен во книгава е предаван при подготовните на нашите најдобри ученици за учество на меѓународните математички натпревари, па затоа оваа книга пред сѐ е наменета на учениците кои сакаат да се подготват за успешно учество на натпреварите на младите математичари. Сметам дека книгава ќе биде корисна и за професорите по математика, особено за организирање на додатната настава по математика и работата на математичките секции. Книгава може да ја користат и студентите по математика и информатика, за совладување на темите од дискретната матемтика кои овде се содржани.

Рецензентот д-р Даниел Велинов даде многу корисни забелешки за содржините кои се обработени во книгава, за што посебно му благодарам.

Издавањето на секоја книга, па и на оваа, не го одминуваат како технички така и материјани грешки. Токму затоа ќе му бидам благодарен на секој кој ќе укаже на некоја грешка или пак со своите коментари и забелешки ќе придонесе на било кој начин да се подобри книгава.

Во Скопје, ноември 2023 Авторот

1. МНОЖЕСТВА И ПРЕСЛИКУВАЊА

1. За множеството A ќе велиме дека е *подмножество* од множеството B ако од $x \in A$ следува $x \in B$. Притоа означуваме $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. За множествата A и B ќе велиме дека се *еднакви* ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Притоа пишуваме $A = B$. Ако $A \subseteq B$ и B содржи елемент кој не му припаѓа на A, тогаш ќе велиме дека A е *вистинско подмножество* од B и пишуваме $A \subset B$ или $B \supset A$. Нека A е произволно множество. Множеството $\mathbb{P}(A)$ определено со $X \in \mathbb{P}(A)$ ако и само ако $X \subseteq A$ го нарекуваме *партитивно множество* (*булеан*) на множеството A.

   Докажи дека за секои множества A, B и C важи

   i) $A = A$,

   ii) Ако $A = B$, тогаш $B = A$.

   iii) Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогаш $A \subseteq C$.

   iv) Ако $A = B$ и $B = C$, тогаш $A = C$.

2. *Унија* на множествата A и B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат барем на едно од множествата A и B. Притоа означуваме $C = A \cup B$. Според тоа, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

   Пресек на множествата A и B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат на секое од множествата A и B. Притоа означуваме $C = A \cap B$. Според тоа, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

   За множествата A и B ќе велиме дека се *дисјунктни* ако $A \cap B = \varnothing$.

   Докажи дека за секои множества A, B и C важи

   i) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$,

   ii) $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$; $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$,

   iii) $A \cap A = A$; $A \cup A = A$, (закони за идемпотентност),

   iv) $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$, (комутативни закони),

   v) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, (асоцијативни закони),

   vi) $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$, (закони за апсорпција).

3. (*Дистрибутивни закони*). Докажи дека за секои множества A, B и C точни се следниве тврдења:

   i) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, *ii)* $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4. *Разлика* на множествата A и B го нарекуваме множеството C , кое се состои од сите елементи на множеството A кои не му припаѓаат на множеството B . Означуваме $C=A\setminus B$. Според тоа, $A\setminus B=\{x\mid x\in A$ и $x\notin B\}$.

   Докажи дека за секои множества A и B важи.

   i) $A\setminus\varnothing=A,\quad A\setminus A=\varnothing,\quad \varnothing\setminus A=\varnothing$.

   ii) $x\notin A\setminus B$ ако и само ако $x\notin A$ или $x\in B$.

   iii) Ако $A\subseteq B$, тогаш $A=B\setminus(B\setminus A)$.

   iv) $A\setminus B=\varnothing$ ако и само ако $A\subseteq B$.

   v) $A\setminus B=A$ ако и само ако $A\cap B=\varnothing$.

5. Докажи ги равенствата

   а) $M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)=\bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$,

   б) $M\setminus(\bigcup_{a\in A} M_a)=\bigcap_{a\in A}(M\setminus M_a)$.

6. Докажи дека

   а) $(\bigcup_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup_{a\in A} N_a)\subseteq\bigcup_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$,

   б) $(\bigcap_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap_{a\in A} N_a)\supseteq\bigcap_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$.

7. Докажи дека $A\setminus B\subseteq(A\setminus D)\cup(D\setminus B)$, за секои множества A,B и D .

8. Нека е дадено множеството A и $B\subseteq A$. *Комплемент* на B во однос на A го нарекуваме множеството ${}^cB=A\setminus B$. Според тоа, ${}^cB=\{x\mid x\in A$ и $x\notin B\}$.

   Нека $A,B\subseteq X$. Докажи дека

   i) ${}^c({}^cA)=A$,

   ii) $A\subseteq B$ ако и само ако ${}^cB\subseteq{}^cA$,

   iii) ${}^c(A\cup B)={}^cA\cap{}^cB$, и

   iv) ${}^c(A\cap B)={}^cA\cup{}^cB$.

9. *Декартов производ* на множествата A и B го нарекуваме множеството C , во ознака $C=A\times B$, кое се состои од сите *подредени парови* (x,y) , каде што $x\in A,\ y\in B$. Притоа, $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ ако и само ако $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Според тоа, $C=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$. Декартовиот производ на непразното мно-

жество A со самото себе го нарекуваме *Декартов квадрат* на множеството A и го означуваме A^2.

Аналогно дефинираме Декартов производ на множествата A_i, $i=1,2,\ ...,n$. Имено, $A_1\times A_2\times...\times A_n=\{(a_1,a_2,...,a_n)\mid\ a_i\in A_i,\ i=1,2,...,n\}$.

Докажи:

а) $\varnothing\times A=B\times\varnothing=\varnothing$, за секои множества A и B.

б) $A_1\subseteq A_2$ и $B_1\subseteq B_2$, тогаш $A_1\times B_1\subseteq A_2\times B_2$.

10. Докажи дека за секои множества $A_i, i=1,2,...,n$ и $B_i, i=1,2,...,n$ важи

а) $(A_1\times...\times A_n)\cap(B_1\times...\times B_n)=(A_1\cap B_1)\times...\times(A_n\cap B_n)$

б) $(A_1\times...\times A_n)\cup(B_1\times...\times B_n)\subseteq(A_1\cup B_1)\times...\times(A_n\cup B_n)$.

11. Дадени се множествата A и B. Определи го бројот на множествата X за кои важи $A\cap X=B\cap X=A\cap B$ и $A\cup B\cup X=A\cup B$.

12. На една олимпијада биле дадени три задачи A, B и C. Дваесет и пет учесници на натпреварот решиле барем една задача. Учесниците кои ја решиле задачата B, а не ја решиле задачата A, биле два пати повеќе од оние кои ја решиле задачата C, а не ја решиле задачата A. Учесниците кои ја решиле само задачата A, биле за еден повеќе од оние кои покрај задачата A, решиле и уште некоја друга задача. Половина од учениците кои решиле една задача, ја решиле само задачата A. Колку ученици ја решиле само задачата B.

13. Нека M е подмножество од множеството $\{1,2,...,15\}$ такво што производот од три различни елементи од M не е точен квадрат. Определи го максималниот број на елементи во M.

14. Ги разгледуваме сите подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои не содржат два последователни броја и за секое од нив го пресметуваме производот на неговите елементи. Докажи дека збирот на квадратите на овие производи е еднаков на $(n+1)!-1$.

15. Избрани се различни затворени интервали, со должина поголема од 0 и со краеви во целобројните точки од 0 до 2013. Притоа, ако еден интервал се содржи во друг интервал, тогаш тие два интервала имаат една заедничка крајна точка. Определи го најголемиот можен број на вакви интервали.

16. Нека A и B се две непразни множества. Ако на секој елемент $x\in A$ му е придружен, по некое правило f, еднозначно определен елемент $y\in B$, то-

гаш велиме дека f е *пресликување* (*функција*) од A во B и пишуваме $f:A\to B$. За елементот $y\in B$ велиме дека е *слика* на елементот $x\in A$ и пишуваме $y=f(x)$. Множеството A го нарекуваме *домен*, а множеството B - *кодомен* на пресликувањето f. Множеството $f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$ го нарекуваме *ранг* на функцијата f.

Со $I_A(x)=x$, за секој $x\in A$ е определено пресликување $I_A:A\to A$ кое го нарекуваме *идентично пресликување*.

За две пресликувања $f:A\to B$ и $g:C\to D$ ќе велиме дека *се еднакви* ако $A=C,\ B=D$ и $f(x)=g(x)$ за секој $x\in A$.

Нека $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се две пресликувања. За секој $x\in A$ ставаме $h(x)=g(f(x))$ и добиваме пресликување $h:A\to C$ кое го нарекуваме *композиција на пресликувањата* f и g и го означуваме со $h=g\circ f$.

Докажи:

а) Ако $f:A\to B$, тогаш $f\circ I_A=f$ и $I_B\circ f=f$.

б) Ако $f:A\to B$, $g:B\to C$ и $h:C\to D$, тогаш $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

17. За пресликувањето $f:A\to B$ ќе велиме дека е *инјекција* ако од $x_1\neq x_2$ следува $f(x_1)\neq f(x_2)$, т.е. различни елементи имаат различни слики.

Докажи, ако $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се инјекции, тогаш и $g\circ f$ е инјекција.

18. За пресликувањето $f:A\to B$ ќе велиме дека е *сурјекција* ако за секој $y\in B$ постои $x\in A$ таков, што $y=f(x)$, т.е. секој елемент на B е слика на барем еден елемент на A.

Докажи, ако $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се сурјекции, тогаш и $g\circ f$ е сурјекција.

19. За пресликувањето $f:A\to B$ ќе велиме дека е *биекција* ако тоа е и инјекција и сурјекција.

Докажи, ако пресликувањата $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се биекции, тогаш и нивната композиција $g\circ f$ е биекција.

20. Ако $f:A\to B$ е биекција, тогаш со $g(y)=x$, за секој $y\in B$, ако и само ако $y=f(x)$ е определено пресликување $g:B\to A$ кое го нарекуваме *инверзно* на пресликувањето f. За инверзното пресликување ја прифаќаме ознаката $g=f^{-1}$.

Ако $f: A \to B$ е биекција, тогаш инверзното пресликување $f^{-1}: B \to A$ е биекција. Докажи!

21. Докажи дека за секое непразно множество A пресликувањето I_A е биекција и важи $I_A^{-1} = I_A$.

22. Докажи дека, ако $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се биекции, тогаш

а) $(f^{-1})^{-1} = f$, б) $f \circ f^{-1} = I_B$,

в) $f^{-1} \circ f = I_A$, г) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

23. Нека $f: X \to Y$. За секое множество $B \subseteq Y$ дефинираме множество

$$f^{-1}(B) = \{x \mid \text{постои } x \in X \text{ таков што } f(x) \in B\}.$$

Докажи дека

а) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ за секое множество $B \subseteq Y$.

б) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ за секое множество $A \subseteq X$.

в) $f(f^{-1}(B)) = B$ за секое множество $B \subseteq Y$ ако и само ако f е сурјекција.

г) $f^{-1}(f(A)) = A$ за секое множество $A \subseteq X$ ако и само ако f е инјекција.

24. Нека $f: X \to Y$ и $M_a \subseteq X$ за секој $a \in A$. Докажи дека

а) $f(\bigcup_{a \in A} M_a) = \bigcup_{a \in A} f(M_a)$ и

б) $f(\bigcap_{a \in A} M_a) \subseteq \bigcap_{a \in A} f(M_a)$.

25. Нека $f: X \to Y$ и $N_a \subseteq Y$ за секој $a \in A$. Докажи дека

а) $f^{-1}(\bigcup_{a \in A} N_a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(N_a)$ и

б) $f^{-1}(\bigcap_{a \in A} N_a) = \bigcap_{a \in A} f^{-1}(N_a)$.

26. Нека $f: X \to Y$ и $M, N \subseteq Y$. Докажи дека $f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$.

27. Нека A и B се две множества. Множеството $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ го нарекуваме *симетрична разлика* на множествата A и B.
Дадени се n различни множества $A_1, A_2, ..., A_n$. Докажи дека меѓу множествата $A_i \Delta A_j$ ($1 \le i \le j \le n$) има барем n различни.

28. За множествата A и B ќе велиме дека се *еквивалентни*, во ознака $A \sim B$, ако постои биекција f од A во B. Докажи, дека за секои множества A, B и C важи:
i) $A \sim A$,
ii) Ако $A \sim B$, тогаш $B \sim A$, и
iii) Ако $A \sim B$ и $B \sim C$, тогаш $A \sim C$.

29. Ако $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, тогаш $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$. Докажи !

30. Ако $A \setminus B \sim B \setminus A$, тогаш $A \sim B$. Докажи!

31. Нека множествата B и C се такви што $B \cap C$. Докажи дека ако $A \subset B$ и $A \sim A \cup C$, тогаш $B \sim B \cup C$.

32. Нека $k \in \mathbb{N}$. За множеството M ќе велиме дека се состои од k елементи ако $M \sim \mathbb{N}_k = \{1, 2, ..., k\}$. Притоа ќе пишуваме $|M| = k$. По дефиниција земаме дека $|\varnothing| = 0$. За множеството M ќе велиме дека е *конечно* ако постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $|M| = k$. Во спротивно ќе велиме дека множеството M е *бесконечно*. Нека $k \neq 0$. Докажи, дека $|M| = k$ ако и само ако M може да се запише во видот $M = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

33. Дадени се подмножествата $S_1, S_2, ..., S_{2000}$ на конечното множество S, при што важи $|S_i| > \frac{1}{2}|S|$, за $i = 1, 2, ..., 2000$. Докажи дека постојат десет елементи $x_1, x_2, ..., x_{10}$ такви што секое подмножество S_i содржи барем еден од нив.

34. Нека S е непразно множество, $\mathcal{P}(S)$ е неговото партитивно множество и $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ е пресликување со својство да од $A \subset B$ следува $f(A) \subset f(B)$. Докажи дека постои $X \subseteq S$ таков што $f(X) = X$.

35. Нека $\mathcal{F} = \{E_1, E_2, ..., E_s\}$ е фамилија од r елементни подмножества од множеството X. Докажи дека ако пресекот на секои $r+1$ од множествата од фамилијата $\mathcal{F}$ не е празно множество, тогаш и пресекот на целата фамилија не е празно множество.

36. Даден е природен број $r \geq 2$. Нека $\mathcal{F}$ е бесконечна фамилија r – елементни множества такви што никои две не се дисјунктни. Докажи дека постои множество со $r-1$ елемент чиј пресек со секој елемент од $\mathcal{F}$ е непразен.

37. Докажи дека постои подмножество A од множеството природни броеви со следното својство: за секое бесконечно множество S од прости броеви постојат два природни броеви $m \in A$ и $n \notin A$ такви што секој од нив е производ на k различни елементи од множеството S, за некој $k \geq 2$.

38. На еден тениски турнир учествувале n тенисери и секои два тенисера меѓусебно одиграле точно еден натпревар. Тенисерот A добива награда ако за секој друг тенисер B важи: A го победил B или A победил некој друг тенисер C кој го победил B. Докажи, дека ако само еден тенисер добил награда, тогаш тој ги победил сите преостанати тенисери.

39. Определи го минималниот број елементи на конечното множество A за кое постои функција $f:\mathbb{N}\to A$ со следново својство: $f(i)\neq f(j)$ секогаш кога $|i-j|$ е прост број.

40. Дадени се природни броеви m и n, поголеми од 1 и цели броеви $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Докажи, дека постои множество T од цели броеви такво што

$$|T|\leq 1+\tfrac{a_m-a_1}{2n+1}$$

и секој a_i може да се претстави во облик $a_i = t+s$ за некои $t\in T$ и $s\in[-n,n]$.

41. Определи го најголемиот природен број n за кој постои множество природни броеви $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ такво што

1) броевите a_i, $i=1,2,\ldots,n$ се сложени,
2) броевите a_i, $i=1,2,\ldots,n$ се по парови заемно прости,
3) $1 < a_i \leq (3n+1)^2$, $i=1,2,\ldots,n$.

42. За секој природен број $n\geq 3$ определи го најмалиот природен број $f(n)$ со следново својство: за секој избор на множество $A\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ со $f(n)$ елементи постојат $x,y,z\in A$ кои се по парови заемно прости.

43. Определи го најмалиот природен број k со следново својство: за секое $k-$елементно подмножество A на множеството $S=\{1,2,\ldots,2012\}$ постојат $a,b,c\in S$, $a\neq b\neq c\neq a$ такви што $a+b, b+c, c+a\in A$.

44. Докажи, дека постои подмножество A на множеството $\{1,2,3,4,\ldots,2^{1996}-1\}$ со следниве својства:

1) $1, 2^{1996}-1 \in A$,
2) Секој елемент од $A \setminus \{1\}$ е збир на два (не задолжително различни) елементи од A,
3) Бројот на елементите на A е најмногу 2012.

45. Дали постои бесконечно множество природни броеви $S, S \neq \mathbb{N}$ такво што за секој природен број $n \notin S$ точно n броеви од S се заемно прости со n?

46. За секој природен број $n > 1$ дефинираме
$$D(n) = \{a - b \mid a, b \text{ се природни броеви и } n = ab,\ a > b\}.$$
Докажи дека за секој природен број $k > 1$ постојат k различни природни броеви $n_1, n_2, ..., n_k$, $n_i > 1, 1 \leq i \leq k$, за кои пресекот $D(n_1) \cap D(n_2) \cap ... \cap D(n_k)$ содржи барем два елементи.

47. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S. Докажи дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S.

48. За множеството $X = \{1, 2, ..., 100\}$ разгледуваме функција $f : X \to X$, за која се исполнето следниве два услови:
1) $f(x) \neq x$, за секој $x \neq X$;
2) $A \cap f(A) \neq \emptyset$ за секое множество $A \subset X$, за кое $|A| = 40$.

Определи го најмалиот природен број k, за кој за секоја таква функција постои множество $B \subseteq X$, за кое $|B| = k$ и $B \cup f(B) = X$.

49. Определи ги сите множества S од цели броеви, за кои од $m, n \in S$ следува $3m - 2n \in S$ (m и n не мора да се различни).

50. Определи ги сите реални броеви t со следново својство: Постои бесконечно множество реални броеви X такво што неравенството
$$\max\{|x-(a-d)|, |y-a|, |z-(a+d)|\} > td$$

е точно за секои $x, y, z \in X$, секој реален број a и секој позитивен реален број d (броевите x, y, z не мора да се различни).

51. Нека n е природен број и нека
$$P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, ..., 2\cdot 3^{n-1}, 3^n\}.$$
За секое подмножество X од множеството P_n со S_X да го означиме збирот на сите елементи од множеството X, при што $S_\varnothing = 0$, каде $\varnothing$ е празното множество. Нека y е реален број таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Докажи, дека постои подмножество Y на множеството P_n такво што $0 \le y - S_Y < 2^n$.

52. Нека $n \ge 2$ е природен број и нека S е подмножество на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ кое не содржи два заемно прости броја, ниту два броја од кои едниот е делител на другиот. Колку најмногу елементи може да има множеството S?

53. Нека $N = 2012^{2013}$. Кој е најголемиот број елементи што може да го има множество A кое ги задоволува следниве услови:
1) елементите на A се природни броеви помали или еднакви на N, и
2) ако $a, b \in A$, $a \ne b$, тогаш $N \mid ab$.

54. Нека S е множество од n елементи. Определи го најголемиот природен број m за кој постои фамилија $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ непразни подмножества на S таква што пресекот на секои три множества од таа фамилија е празно множество.

55. Нека $n > 2$ е природен број и $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ се по парови различни непразни подмножества на множеството $\{1, 2, ..., n\}$. Определи ја најголемата можна вредност на $\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i|\cdot|A_{i+1}|}$, каде $A_{2n+1} = A_1$.

56. Множеството X се состои од осум последователни природни броеви и е поделено на две дисјунктни подмножества A и B со еднаков број елементи. Ако збирот на квадратите на елементите на множеството A е еднаков на збирот на квадратите на елементите на множеството B, докажи дека тогаш збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B.

57. Нека M е множеството рационални броеви во интервалот $(0,1)$. Дали постои подмножество A од M такво што секој број од M може на единствен

начин да се претстави како збир на еден или конечно многу различни броеви од A?

58. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција за која важи

$$|f(x)|-|f(x)+x-1|=|x+1|-2|x|, \qquad (1)$$

за секој $x\in\mathbb{R}$. Докажи, дека множеството $A=\{(x,y)\,|\,0<y<f(x),\, x\in\mathbb{R}\}$ содржи внатрешност на триаголник со плоштина 1.

59. Определи ги сите конечни множества точки во рамнината S кои содржат барем три точки и кои го задоволуваат следниов услов: за секои две различни точки A и B од S, симетралата на отсечката AB е оска на симетрија на множеството S.

60. Нека се $a_1,a_2,...,a_n$ по парови различни природни броеви и нека M е множество кое се состои од $n-1$ природни броеви и не го содржи бројот $s=a_1+a_2+...+a_n$. Скакулец треба да направи n скокови надесно по бројната права, тргнувајќи од точката со координата 0. Притоа, должините на неговите скокови мора да бидат еднакви на броевите $a_1,a_2,...,a_n$, во некој редослед. Докажи, дека тој редослед може да се избере така што скакулецот никогаш нема да скокне во точка чија координата е во множеството M.

61. Нека $n\in\mathbb{N}$ и нека $A_1,A_2,...,A_{2n+1}$ се подмножества од некое множество B, такви што

а) секое множество A_i има точно $2n$ елементи

б) секој пресек $A_i\cap A_j$, $(1\le i<j\le 2n+1)$ содржи точно еден елемент, и

в) секој елемент од B се содржи барем во две множества A_i.

За кои вредности на n можеме на секој елемент од B да му придружиме еден од броевите 1 или 0 на начин таков што за секое множество A_i бројот на неговите елементите на кои им е придружена нула е еднаков на n.

62. Нека K е целобројната решетка. Дали постои биекција $f:\mathbb{N}\to K$ таква што за секои по парови различни $a,b,c\in\mathbb{N}$ важи: ако $(a,b,c)>1$, тогаш точките $f(a), f(b), f(c)$ не се колинеарни.

63. Даден е природен број k. Нека $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ е биекција таква што за секои $i,j\in\mathbb{Z}$ такви што $|i-j|\le k$ важи $|f(i)-f(j)|\le k$. Докажи, дека за секои $i,j\in\mathbb{Z}$ важи $|f(i)-f(j)|=|i-j|$.

64. Даден е природен број k . За секој природен број n дефинираме $f_k(n)$ да е најмалиот природен број, кој е поголем од kn и е таков, што $nf_k(n)$ е точен квадрат. Докажи, дека функцијата $f_k(n)$ е инјекција.

65. Нека S е множеството од сите деветцифрени природни броеви, во чиј декаден запис учествуваат само цифрите 1, 2 и 3. Определи ги сите функции $f : S \to \{1,2,3\}$, кои ги имаат следниве својства:

    1) $f(111111111) = 1,\ f(222222222) = 2,\ f(333333333) = 3,\ f(122222222) = 1$,

    2) ако $x, y \in S$ се разликуваат во секоја позиција, тогаш $f(x) \neq f(y)$.

66. Дадени се две конечни множества природни броеви A и B , секое од кои содржи најмалку три елементи. За два броја $a \in A$ и $b \in B$ велиме дека се *пријателски*, ако нивниот најголем заеднички делител е различен од 1. Познато е дека секој елемент на A не е *пријателски* со барем еден елемент од B и секој елемент на B е пријателски со барем еден елемент од A . Докажи, дека постојат $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$ такви што паровите (a_1, b_1) и (a_2, b_2) се пријателски, но паровите (a_1, b_2) и (a_2, b_1) не се пријателски.

67. На една меѓународна конференција има 4 официјални јазици. Секои вда учесника на конференцијата говорат по еден од официјалните јазици. Докажи, дека најмалку 60% од учесниците на конференцијата говорат еден ист јазик.

68. На Универзитетот има 999 професори. Со секоја научна тема се занимаваат точно три професори, и секои два професора имаа точно по една заедничка тема. Докажи дека може да се изберат 250 теми така што секој професор се занимава најмногу со една од нив.

2. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПРИНЦИПИ

1. (*Принцип на еднаквост*). а) Ако $|M|=k$ и $M\sim L$, тогаш $|L|=k$. Докажи.
   б) Ако $|M|=|L|=k$, тогаш $M\sim L$. Докажи.

2. Даден е природен број n. Колку најмногу квадрати со должина на страна n со темиња во целобројни точки и страни паралелни со координатните оски може да се изберат така што секои два имаат точно две заеднички точки кои припаѓаат на страните?

3. Нека триаголникот ABC има должини на страни a,b,c кои се ориродни броеви и за кои важи $a<b<c$. Изрази ги бројот на таквите триаголници во функција од бројот b.

4. (*Принцип на збир*). Докажи дека ако A и B се конечни множества такви што $A\cap B=\varnothing$, тогаш $|A\cup B|=|A|+|B|$.

5. Во еден институт работат вистинољупци (секогаш говорат вистина) и лажливци (секогаш лажат). Секој запослен искажал две тврдења за Институтот:
   1) Овде нема ниту 10 луѓе кои работат повеќе од мене, и
   2) Има најмалку 100 луѓе кои примаат поголема плата од мене.
   Под претпоставка дека сите работат различно и дека сите примаат различни плати, определи ги сите можни вредности на бројот на вработените во Институтот.

6. На еден тениски турнир секои двајца играчи играле еден против друг. На крајот на турнирот тенисерот A имал k, $k\ge 2$ победи повеќе од тенисерот B. Докажи, дека постои група S од тенисери, $|S|\ge k-1$, таква што секој тенисер од S е поразен од A и секој тенисер од S го победил B.

7. Нека O_{xyz} е правоаголен координатен систем во просторот, S е конечно множество точки во него, а S_x,S_y и S_z се множествата ортогонални проекции на точките од S на рамнините O_{yz},O_{zx},O_{xy}, соодветно. Докажи дека
$$|S|^2\le|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|.$$

8. (*Обопштен принцип на збир*). Докажи, дека ако $A_1, A_2, ..., A_k$ е фамилија од k, $k \geq 2$ по парови дисјунктни конечни множества, т.е. множества за кои важи $A_i \cap A_j = \varnothing$, за $i \neq j$, тогаш

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_k|.$$

9. Дадени се природни броеви a и b. Со $f(a,b)$ да го означиме бројот $a-$торки цели броеви чиј збир на апсолутните вредности на членовите не е поголем од b. Докажи дека $f(a,b) = f(b,a)$.

10. На испит учествувале 25 студенти. Испитот се состои од неколку прашања и за секое прашање се понудени пет одговори. Се покажало дека одговорите на секои два студента се поклопуваат на најмногу едно прашање. Докажи дека на испитот имало најмногу 6 прашања.

11. Нека A е подмножество на множеството $S = \{1, 2, ..., 1000000\}$, кое содржи точно 101 елемент. Докажи, дека постојат броеви $t_1, t_2, ..., t_{100} \in S$ такви што множествата

$$A_i = \{x + t_i \mid x \in A\}, \ i = 1, 2, ..., 100$$

се по парови дисјунктни.

12. (*Принцип на производ*). Докажи дека за секои конечни множества A и B важи $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

13. На колку начини на шаховска 8×8 табла може да се избере едно бело и едно црно поле? На колку начини на шаховска 8×8 табла во различни редови и разлини колони може да се избере едно бело и едно црно поле?

14. Квадрат со должина на страна n со помош на прави кои се паралелни на страните на квадратот е поделен на n^2 квадрати со должина на страна 1. Колку квадрати има вака добиената фигура?

15. Шаховската фигура крал на 8×8 шаховска табла е поставена произволно, а потоа е повлечен потег. Определи го вкупниот број можни потези?

16. Подмножеството A на множеството $S = \{1, 2, ..., n\}$ го нарекуваме интервал ако $A = \{k, k+1, ..., l\}$ за некои $1 \leq k \leq l \leq n$. Ако $A_1, A_2, ..., A_m$ се подмножества на множеството S такви што $A_i \cap A_j$ е интервал за секои $i \neq j$, колкава е најголемата можна вредност на m?

17. За непразни бројни множества S и T дефинираме
$$S+T=\{s+t \mid s\in S, t\in T\},\ \ 2S=\{2s \mid s\in S\}\ .$$
Нека n е природен број, а A и B се подмножества од $\{1,2,...,n\}$. Докажи, дека постои подмножество D на $A+B$, такво што
$$D+D\subseteq 2(A+B)\ \text{ и }\ |D|\geq \tfrac{|A|\cdot|B|}{2n}\ .$$

18. На турнир на кој учествуваат 16 тенисери се одиграни 55 натпревари. Докажи дека меѓу тенисерите постојат тројца така што никои двајца од нив не играле меѓу себе.

19. (*Обопштен принцип на производ*). Нека $k\geq 2$. Докажи дека
$$|A_1\times A_2\times ...\times A_k|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot...\cdot|A_k|$$
за секои конечни множества A_i, $i=1,2,...,k$.

20. Нека n е природен број. Правилен шестаголник со должина на страна еднаква на n е поделен со прави, кои се паралелни на неговите страни, на рамнострани триаголници чии страни се со должина 1. Определи го вкупниот број правилни шестаголници чии темиња воедно се и темиња на делбените рамнострани триаголници.

21. (*Принцип на исклучување*). Докажи, дека ако M е конечно множество и $A\subseteq M$, тогаш $|M\setminus A|=|M|-|A|$.

22. Дадени се $2n$ ($n>1$) точки кои лежат во една рамнина. Правата p лежи во истата рамнина и не минува низ ниту една од дадените точки. Докажи, дека правата сече најмногу n^2 отсечки чии краеви се во дадените точки.

23. На правата се запишани неколку природни броеви. Во еден чекор ги избираме сите парови од последователни броеви на правата и за парот (a,b) во средината на отсечката меѓу броевите a и b го запишуваме бројот $a+b$. Колку пати по 2013 чекори е запишан бројот 2013, ако:
а) дадените броеви се 1 и 1000,
б) дадените броеви се 1, 2, ..., 1000 запишани во растечки редослед од лево на десно.

24. За природниот број n ќе велиме дека е *обичен*, ако бројот на различните начини на претставување на n како збир на два или повеќе последователни природни броја е непарен број. Определи го бројот на обичните броеви помали од 2012?

25. Нека $n \geq 2$ е природен број и конечните непразни множества $A_1, A_2, ..., A_n$ се такви, што $|A_i \Delta A_j| = |i - j|$ за секои $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Определи ја најмалата можна вредност на $|A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$.

26. Разгледуваме квадратна $n \times n$ решетка. Квадратна патека ја нарекуваме затворената патека (долж линиите на решетката) во форма на квадрат со страни паралелни на рабовите на решетката. Нека $M(n)$ е најмалиот број темиња кои треба да се означат така што секоја квадратна патека минува најмалку низ една означена точка. Докажи дека

$$\frac{2}{7}(n-1)^2 \leq M(n) \leq \frac{2}{7}n^2.$$

3. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ КОНФИГУРАЦИИ

1. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и нека $k\in\{1,2,...,n\}$. Секоја подредена k – торка од видот

   $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})$, каде што $a_{i_p}\neq a_{i_t}$, за $p\neq t$ и $a_{i_p}\in A$, за $p=1,2,...,k$

   ја нарекуваме *варијација без повторување од* n *елементи од класа* k. Бројот на варијациите без повторување од n *елементи од класа* k го означуваме со V_n^k, $n=1,2,...;\ k=1,2,...,n$.

   а) Докажи, дека ако $k<n$, тогаш

   $$V_n^{k+1}=(n-k)V_n^k. \qquad (1)$$

   б) Докажи, дека ако $n\in\mathbb{N}$, тогаш

   $$V_n^k=n(n-1)...(n-k+1),\ \text{за}\ k=1,2,...,n. \qquad (2)$$

2. Еден шаховски клуб има 12 шахисти. За натпревар треба да се изберат 4 шахисти и да се распоредат на таблите $T1,T2,T3$ и $T4$. На колку начини тоа може да се направи?

3. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A=\{a_1,...,a_n\}$ и нека $k\in\mathbb{N}$. Секоја подредена k – торка од облик

   $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})$, каде што $a_{i_p}\in A$, за $p=1,2,...,k$

   ја нарекуваме *варијација со повторување од* n *елементи од класа* k. Бројот на варијациите со повторување од n *елементи од класа* k го означуваме со $\overline{V}_n^k$, $n=1,2,...;\ k=1,2,...,n$.

   Докажи, дека ако $n,k\in\mathbb{N}$, тогаш $\overline{V}_n^k=n^k$.

4. Нека A е множесвото од сите низи со должина 4, составени само од цифрите 0 и 1. Кој е најмалиот број низи кои треба да се изберат од A така, што произволна низа од A се разликува од некоја од избраните низи во најмногу една позиција?

5. На математички натпревар учествувале 21 момче и 21 девојче. Секој од нив решил најмногу 6 задачи. За секое момче и за секое девојче постои барем

една задача која и двајцата ја решиле. Докажи, дека постои задача која ја решиле барем три момчиња и барем три девојчиња.

6. Низа од четири парни цифри меѓу кои нема три еднакви се нарекува *допустлива*.
   а) Определи го бројот на допустливите низи.
   б) За секој природен број $n \geq 2$ со d_n да го означиме бројот на начините на кои може да се пополни табела со n редови и 4 колони со парни цифри така што секој ред е допустлива низа и низата 2,0,0,8 се среќава точно еднаш. Определи ги сите природни броеви n за кои $d_n \mid d_{n+1}$.

7. На еден натпревар учениците решавале пет задачи. Не постојат два ученика кои решиле исти задачи, но ако избереме било кои четири задачи, тогаш за секој ученик постои најмалку уште еден ученик кој ги решил токму истите тие четири избрани задачи. Колку ученици учествувале на натпреварот.

8. Определи го бројот на подредените тројки множества (A,B,C) такви што
   1) $A \cup B \cup C = \{1,2,...,n\}$,
   2) $A \cap B \cap C = \varnothing$
   3) $A \cap B \neq \varnothing$.

9. Нека A е множеството од сите низи со должина 2012, составени од броевите 0, 1 и 2. Нека $T \subset A$ е подмножеството со најмал број елементи кои го имаат следново својство: за секоја низа $a_1, a_2, ..., a_{2012}$ од A постои низа $b_1, b_2, ...,$ b_{2012} од A, за која $a_i \neq b_i$, за секој $i = 1,2,...,2012$. Докажи дека
$$\frac{3^{2011}}{2^{2010}} < |T| \leq 3^{1006}.$$

10. Определи го бројот на подмножествата B на множеството $\{1,2,...,2005\}$ со својство: збирот на елементите на B при делење со 2048 дава остаток 2006.

11. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Варијацијата без повторување од n елементи од класа n ја нарекуваме *пермутација без повторување од n елементи*. бројот на пермутациите без повторување од n елементи го означуваме со P_n.
    Докажи, дека $P_n = n!$.

12. Определи го бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,...,n\}$ во кои двојката се наоѓа (не задолжително непосредно) по единицата.

13. Нека $n \geq k+2$. Определи го бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,...,n\}$ во кои меѓу единицата и двојката има точно k елементи.

14. На колку начини n лица можат да застанат во редица, а притоа две фиксирани лица да не бидат едно до друго?

15. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација $(i_1, i_2, ..., i_n)$ на броевите $1,2,...,n$ таква што ако околу тркалезна маса со n столици седнат n луѓе и за секој $k=1,2,...,n$, $k-$тиот човек се помести за i_k столици на десно, тогаш сите луѓе ќе седнат на различни столици.

16. Нека $n>1$ е природен број, M е производот на сите природни делители на n и X е најголемиот природен број таков што X^2 е делител на M. Докажи, дека бројот на начините, на кои од делителите на бројот n можат да се отстранат три броја, така што производот на останатите делители да е еднаков на X^2, е број од видот на $\frac{3^s-1}{2}$, каде s е ненегативен цел број.

17. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{A}_n$ е множеството од сите пермутации без повторување $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што важи

$$k \mid 2(a_1 + a_2 + ... + a_k) \text{, за секој } k \in \{1,2,...,n\}.$$

Определи го бројот на елементите на множеството $\mathbf{A}_n$.

18. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и нека $k_1, k_2, ..., k_n$ се цели броеви. За секоја пермутација $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ нека

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i \ .$$

Докажи, дека постојат различни пермутации b и c такви што $n!$ е делител на бројот $S(b)-S(c)$.

19. Нека $(a_1, a_2, ..., a_n)$ е пермутација на броевите $1,2,...,n$, $n \geq 2$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| .$$

20. Определи го бројот на пермутациите $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ за кои изразот

$$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + ... + |a_n - a| \qquad (1)$$

прима најголема можна вредност.

21. Определи го бројот S на сите пермутации ® на множеството $\{1, 2, 3, ..., n\}$ такви што производот

$$(®_1 - 1)(®_2 - 2)...(®_n - n)$$

е непарен број.

22. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Секое подмножество од k елементи, $k \leq n$ на множеството A го нарекуваме *комбинација без повторување од* n *елементи од класа* k. Бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k го означуваме со C_n^k, $n = 1, 2, 3, 4, ...$, $k = 1, 2, ..., n$. Во натамошните разгледувања ќе ја користиме и ознаката $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Докажи, дека

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}, \qquad (1)$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \qquad (2)$$

каде што $n = 1, 2, 3, 4, ...$, $k = 1, 2, ..., n$.

23. Шаховски клуб има 8 шахисти и 6 шахистки. За претстојниот турнир клубот треба да го претставува екипа составена од 3 шахисти и 2 шахистки. На колку различни начини може да се избере екипата?

24. На шаховски турнир учествувале мајстори и велемајстори. Секои двајца учесници на турнирот меѓусебно одиграле по една патија. Ако секој учесник на турнирот точно половина од своите поени ги освоил во партии кои ги играл против мајсторите, докажи дека вкупниот број на учесници на турнирот е точен квадрат.

25. Во група од n луѓе секој има по едно велигденско јајце. Тие ги разменуваат јајцата на следниов начин: при секоја размена двајца ги разменуваат јајцата кои ги имаат во моментот и секои двајца ги разменуваат јајцата барем еднаш. По неколку такви размени се покажало, дека секој го има истото јаце, кое го имал на почетокот. Определи го најмалиот број размени, ако:

а) $n = 5$, б) $n = 6$.

26. На колку начини од 6 луѓе може да се состават 5 трочлени делегации, така што некои две од 5-те делегации не се со ист состав?

27. Определи го бројот на подредените четворки цели броеви (a_1, a_2, a_3, a_4) такви, што $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$, $a_3 \geq 3$, $-10 \leq a_4 \leq 10$ и
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2011.$$

28. Определи го најголемиот можен број на пермутации од n, $n > 1$ елементи такви што секои два елементи се соседни најмногу во една пермутација.

29. За даден број ќе велиме дека е „шарен“ ако е запишан со еднаков број парни и непарни цифри. Да се определи бројот на сите четирицифрени „шарени“ броеви запишани со различни цифри?

30. На секој ѕид на една коцка дадени се по n точки така што било кои три точки не се колинеарни и ниту една точка не лежи на рабовите на коцката.
а) Колку прави што не лежат на ѕидовите на коцката се определени со дадените точки?
к) Колку триаголници што не лежат на ѕидовите на коцката се определени со дадените точки?
в) Ако ѕидовите на коцката се обојат со различни бои, колку тетраедри со темиња во дадените точки имаат:
i) три истобојни темиња,
ii) две по две истобојни темиња.

31. Даден е правилен $n-$аголник, $n \geq 6$. Колку триаголници има со темиња во темињата на $n-$аголникот, чии страни се дијагоналите на $n-$аголникот?

32. Во сенатот има 30 сенатори. Секој од сенаторите е скаран со точно шест други сенатори. На колку начини може да биде формирана трочлена комисија таква што секои два члена на комисијата се скарани меѓу себе или никои два члена на комисијата не се скарани.

33. Еден човек има 12 роднини – 5 мажи и 7 жени, а неговата сопруга исто така има 12 роднини – 5 жени и 7 мажи. Тие немаат заеднички роднини. Решиле секој на гости да повика по 6 роднини, но така што меѓу гостите да има 6 мажи и 6 жени. На колку начини тоа може да го направат?

34. На колку начини кошаркарски тренер може да состави екипат од 5 кошаркари, во која двајца ќе играат на местото центар, двајца на местото бек и еден на местото крило, ако тренерот има на располагање 10 кошаркари, од кои тројца може да се само центри, тројца само бекови, еден само крило, двајца може дасе бек или крило, а еден крило или центар?

35. На воениот совет на индијанските племиња учествувале поглавиците на Команчите, Сијуксите, Кајовите, Чеените, Шошоните и Апачите, и уште двајца воини на Апачите. Сите присутни биле рамноправни и зборувале само по еднаш, еден по еден, во произволен редослед, при што ниту еден од воините на Апачите не можел да земе збор пред својот поглавица. На колку различни начини може да се одвива разговорот меѓу нив.

36. На тениски турнир учествуваат 14 тенисери и секои два тенисера меѓу себе играат точно еден меч. Тројката играчи (a,b,c) ја нарекуваме триаголник ако a го победил b, b го победил c и c го победил a. Определи го најголемиот можен број триаголници на овој турнир.

37. Десет луѓе купувале книги. Притоа
    1) Секој купил три различни книги и
    2) Секои двајца купиле најмалку една иста книга.

    Да ја разгледаме книгата купена најголем број пати. Определи ја најмалата вредност на овој број.

38. На кружница се обележени n точки. Кој е најголемиот можен број на остроаголни триаголници со темиња во тие точки?

39. Во рамнина се дадени $n, (n > 4)$ точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Докажи дека постојат најмалку $\binom{n-3}{2}$ конвексни четириаголници кои имаат темиња во четири од дадените точки.
    $n = 6$.

40. Во рамнина се дадени 100 точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Да ги разгледаме сите триаголници со темиња во дадените точки. Докажи дека најмногу 70% од овие триаголници се остроаголни.

41. Нека $k \le n+1$. На колку начини може во низа да се наредат n нули и k единици така што никои две единици не се соседни?

42. На полицата се наоѓаат 12 книги. На колку начини може да се изберат 5 книги така што никои две книги не се соседни?

43. Околу тркалезната маса на кралот Артур седат 12 витези. Секој витез е скаран со своите соседи. На колку начини може да се изберат 5 витези, но така што меѓу нив да нема два витези кои се скарани?

44. Во компанијата Креативност работат научни работници. Во текот на осумчасовен работен ден тие ја посетуваат библиотеката (можно е и по неколку пати). Познато е дека за секој пар научници вкупното време во кое само еден од нив е во библиотеката не е помало од x часови ($x > 4$). Определи го најголемиот можен број на научни работници (во зависност од x)?

45. Околу тркалезна маса седат $n > 2$ ученици. На почетокот секој ученик има точно по една бонбона. Во секој чекор секој ученик избира една од следниве две операции:
    1) му дава една своја бонбона или на ученикот лево од себе или на ученикот десно од себе,
    2) ги дели сите свои бонбони на две множества (не задолжително непразни) и едно множество му дава на ученикот лево, а друго на ученикот десно од себе.

    Сите операции во еден чекор се извршуваат истовремено. За распоредот на бонбоните ќе велиме дека е *достижен* ако може да се добие во конечно многу чекори. Определи го бројот на достижните распореди.
    (Два распореди се различни ако барем еден ученик во нив има различен број бонбони.)

46. Даден е природен број $n \le 2015$ кој не е делив со 5. Определи го бројот на различните n – елементни подмножества на множеството $\{1, 2, ..., 2015\}$ такви што збирот на нивните елементи е делив со 5.

47. Нека p е непарен прост број. Определи го бројот на сите подмножества A од множеството $\{1, 2, 3, ..., 2p\}$ такви што:
    a) A има точно p елементи, и
    b) збирот на сите елементи од множеството A е делив со p.

48. За пресликувањето $f : X \to X$ ќе велиме дека е идемпотентно ако
$$f(f(x)) = f(x) \text{, за секој } x \in X \text{ .}$$
    Ако $|X| = n$, определи го бројот на идемпотентните пресликувања $f : X \to X$.

49. Нека $\mathbb{F}$ е фамилија подмножества на множество од n елементи таква што ниту еден нејзин член не е подмножество на некој друг нејзин член. Докажи дека фамилијата $\mathbb{F}$ може да има најмногу $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ членови.

50. За множеството A од природни броеви помали од 2000000 ќе велиме дека е *добро* ако $2000 \in A$ и $a \mid b$ за секои $a, b \in A$, $a < b$.

а) Колку најмногу елементи може да има едно добро множество?
б) Определи го бројот на добрите множества со максимален број елементи.

51. Нека $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ е фамилија од k елементни различни подмножества од множеството X. Докажи, дека $\min |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$ е еднаков на најмалиот број m таков што $n \leq \binom{m}{k}$.

52. Дадено е множество X со 2009 елементи и негови подмножества $A_1, A_2, ...,$ A_n секое од кои има барем 4 елементи. Познато е дека пресекот на било кои две од подмножествата содржи најмногу два елемента. Докажи дека постои множество $B \subset X$ со 24 елементи, кое не содржи ниту едно од множествата $A_1, A_2, ..., A_n$.

53. Нека $A_1, A_2, ..., A_m$ се триелементни подмножества на множеството A од n елементи такви што $|A_i \cap A_j| \leq 1$ за $i \neq j$. Докажи дека постои множество $X \subset A$ кое има најмалку $[\sqrt{2n}]$ елементи и кое не го содржи ниту едно од множествата A_i.

54. Нека $n \geq k \geq 3$ и $\mathbf{F}_k$ е фамилија $k-$елементни подмножества на множеството $X = \{1, 2, ..., n\}$ таква што секои две елементи на $\mathbf{F}_k$ се сечат во најмногу $k-2$ елементи. Докажи дека постои множество $M_k \subset X$ со најмалку $[\log_2 n]+1$ елементи кое не содржи ниту едно од подмножествата од $\mathbf{F}_k$.

55. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, ..., a_m\}$, $k_i \in \mathbb{N}$, за $i = 1, ..., m$ и

$$n = k_1 + k_2 + ... + k_m.$$

Подредената $n-$торка елементи на множеството A во која за секој $i \in \{1, 2, ..., m\}$ елементот a_i се јавува точно k_i пати, ја нарекуваме *пермутација од n елементи од тип* $(k_1, k_2, ..., k_m)$ или *пермутација со повторување*. Бројот на пермутациите од n елементи од тип $(k_1, k_2, ..., k_m)$ го означуваме со $P_n^{k_1, k_2, ..., k_m}$.

Докажи, дека ако $k_i \in \mathbb{N}$, за $i = 1, 2, ..., m$ и $n = k_1 + k_2 + ... + k_m$, тогаш

$$P_n^{k_1, k_2, ..., k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!}. \qquad (1)$$

56. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ ненегативни цели броеви. Докажи дека

$$a_1!a_2!...a_n! \le (a_1+a_2+...+a_n)!.$$

57. Докажи, дека за секој природен број n важи
$$\sum_{\substack{k_i\in\mathbb{N}_0,\ i=1,2,..,m\\ k_1+k_2+...+k_m=n}} \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} = m^n. \qquad (1)$$

58. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и нека за неговите елементи знаеме кој е прв, кој е втор итн., т.е. нека $a_1<a_2<...<a_n$. За подредената k – торка $(b_1,b_2,...,b_k)$, $b_i\in A$ ќе велиме дека е *комбинација со повторување од n елементи од класа k* ако $b_i \le b_j$, за $i<j$. Бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k ќе го означуваме со $\overline{C}_n^k$.
Докажи, дека бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k е
$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \qquad (1)$$

59. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Докажи, дека бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k во кои секој елемент на множеството A се појавува најмалку еднаш е еднаков на $\binom{k-1}{n-1}$.

60. За природниот број чиј декаден запис е
$$a_N 10^N + a_{N-1}10^{N-1} + ... + 10a_1 + a_0,\ \ a_i\in\{0,1,2,...,9\}$$
ќе велиме дека е *монотон* ако $a_N \le a_{N-1} \le ... \le a_1 \le a_0$. Определи го бројот на сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри.

61. Колку нули има во записите на броевите $1,2,3,...,10^9$.

62. На колку начини може да се потполни правоаголна таблица со m редици и n колони (вкупно mn полиња) со броевите $+1$ и -1 така што производот на броевите во секој ред и секоја колона да биде еднаков на 1?

63. Најди го бројот на подмножествата на множеството $\{1,2,...,2n\}$ во кои равенката $x+y=2n+1$ нема решение?

64. Најди го бројот на пермутациите на цифрите $1,2,...,9$ такви што единицата не е на првото место, двојката не е на првите две места и тројката не е на првите три места.

65. Во изразот

$$x_1 : x_2 : x_3 : ... : x_n \,, \;\; n \geq 3$$

запишуваме загради. Определи го бројот на начините на кои тоа може да се направи така што добените изрази се различни како функции од $n-$ променливи.

66. Нека $A(n,k)$ е бројот на $k-$торките $(a_1, a_2, ..., a_k)$ од цели броеви, за кои важи

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} \leq n \\ &a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k > n \qquad (1) \\ &1 \leq a_i \leq n, \;\; i = 1, 2, ..., k. \end{aligned}$$

За кој k вредноста на $A(12,k)$ е најголема?

67. Нека n е парен број и A е множеството од сите ненулти низи од 0 и 1 со должина n. Докажи дека елементите на A можат да се поделат на дисјунктни тројки така што за произволна тројка $(a_1a_2...a_n, b_1b_2...b_n, c_1c_2...c_n)$ бројот на единиците меѓу a_i, b_i, c_i, за секој $i = 1, 2, ..., n$ е парен број.

68. Нека $m, n \geq 2$ се природни броеви. mn момчиња се распоредени во m екипи, секоја по n момчиња. На секоја екипа ѝ е доделена различна боја и потоа секое момче добило крпа со боја од својата екипа. Сите момчиња седнале во круг околу оган, при што $n-$те момчиња од секоја екипа седат заедно (еден по друг).
Инструкторот сака од момчињата да трчаат во групи, при што во една трка групата се состои од барем двајца и сите нејзини членови имаат крпи од една иста боја. По трката сите членови на групата се враќаат на своите места и инструкторот наоѓа друга група за следната трка. Во никои две трки не учествува една иста група деца, без разлика на бојата на крпата.
Ако инструкторот во некој момент не може да најде група момчиња која ги исполнува горните услови, тој ќе нареди на секое момче да ја даде крпата на својот лев сосед пред да се обиде да најде група за нова трка. Ова се повторува додека е можно да има групи кои ги исполнуваат горните услови.
Определи го бројот на можните трки.

69. Нека $X_1, X_2, ..., X_{100}$ се по парови различни непразни подмножества на множеството S. За секој $i \in \{1, 2, ..., 99\}$ е познато дека множествата X_i и X_{i+1} се дисјунктни и дека нивната унија не е еднаква на S. Определи го најма-лиот можен број елементи на S.

70. Даден е конвексен n – аголник $A_1A_2...A_n$. Определи го бројот на m – аголниците со темиња меѓу $A_1, A_2, ...A_n$, кои се такви, што меѓу секои две нивни соседни темиња има најмалку k темиња од n – аголникот.

71. Дадено е множество T од природни броеви, секој од кои е поголем од 1. За едно подмножество S на T ќе велиме дека е *добро*, ако за секој $t \in T$ постои $s \in S$ таков, што $\mathrm{NZD}(t, s) > 1$. Докажи, дека бројот на добрите подмножества на T е непарен.

4. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. (*Принцип на Дирихле - елементарен случај*). Нека n е природен број. Ако $n+1$ предмети се распоредени на произволен начин во n кутии, тогаш барем во една кутија има два предмета. Докажи!

2. Во координатна рамнина се дадени пет точки $P_i, i=1,2,3,4,5$ со целобројни координати. Докажи дека постојат барем две точки P_i, P_j за $i \neq j$ такви што правата P_iP_j содржи точка со целобројни координати која е меѓу P_i и P_j.

3. Три меѓусебно паралелни прави се сечат со седум на нив нормални прави во 21 точка. Некои од овие точки се обоени во црвено, а другите се обоено во сино. Докажи дека секогаш може да се изберат четири истобојни точки кои се темиња на правоаголник.

4. Докажи дека за секој природен број n кој не е делив ниту со 2 ниту со 5, постои природен број N чии цифри се сите единици и кој е делив со n.

5. Дадени се произволни 2012 природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{2012}$. Докажи дека можеме да избереме неколку од нив така што збирот од нивните четврти степени е делив со 2012.

6. Докажи, дека постои степен на бројот 3 чиј запис во декаден броен систем завршува на 0001.

7. Определи го најмалиот природен број n таков што за произволни природни броеви $a_i, i=1,2,...,n$ постојат $\pounds_i \in \{-1,0,1\}$ кои не се сите еднакви на нула и важи $2017 \mid \sum_{i=1}^{n} \pounds_i a_i$.

8. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се различни прости броеви,

$$M=\{m \mid m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{N}_0\}$$

и N е 2^n+1 елементно подмножество од M. Докажи, дека постојат два различни броја од N чиј производ е точен квадрат.

9. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се различни прости броеви,

$$M = \{m \mid m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{N}_0\}.$$

и N е подмножество од M такво што $|N| = n+1$. Докажи, дека постојат неколку различни броеви од N чиј производ е точен квадрат.

10. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се природни броеви такви што $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n$.

а) Докажи, дека за $n = 2k$ и $a_n \neq n+1$ од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ може да се изберат неколку чиј збир е еднаков на n.

б) Докажи, дека за $n = 2k+1$ и $a_n \neq 2$ од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ може да се изберат неколку чиј збир е еднаков на n.

11. Нека S е множество природни броеви кои се помали или еднакви на 15 и такво што збировите на елементите на било кои две непразни дисјунктни подмножества од S се различни. Докажи, дека S има најмногу 5 елементи.

12. Дадени се 2^{51} подмножества од множеството S кое има 101 елемент. Докажи дека меѓу овие подмножества постојат три подмножества A, B и C такви што $C \subseteq A \cup B$.

13. Определи ја најмалата можна константа C таква што за било кои позитивни реални броеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (не задолжително различни) може да се изберат различни индекси i, j, k, l такви што

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \le C. \quad (1)$$

14. Во рамнината е дадено множество A од $n \ge 2$ точки, при што некои парови точки од A се поврзани со отсечки. Докажи, дека во A постојат најмалку две точки кои со отсечки се поврзани со еднаков број точки од A.

15. На секоја планета од еден систем седи астроном и ја набљудува најблиската планета. Растојанијата меѓу планетите се меѓусебно различни. Докажи, дека ако бројот на планетите е непарен, тогаш постои планета која никој не ја набљудува.

16. (*Теорема на Дирихле*). Нека $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажи, дека постојат $p, q \in \mathbb{Z}$ такви што $1 \le q \le n$ и

$$| x - \frac{p}{q} | \leq \frac{1}{nq} .$$

17. Нека се дадени реалните броеви a_i, $i = 1, 2, ..., 7$. Докажи, дека постојат a_k, a_m, $k \neq m$ такви што

$$0 \leq \frac{a_k - a_m}{1 + a_k a_m} < \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

18. (*Теорема на Кронекер*). Нека $\sim$ е ирационален број и x, y $(x < y)$ се реални броеви. Докажи, дека постојат цели броеви m и n такви што

$$x < m\sim + n < y .$$

19. Нека $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ се природни броеви такви што $1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} \leq 2n$. Докажи, дека постојат природни броеви a_i и a_j такви што $a_i \mid a_j$.

20. Нека S е множество од n елементи и $M_i \subseteq S, M_i \neq \emptyset$, за $i = 1, 2, ..., n+1$. Докажи, дека постојат два различни избори на броеви

$$1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n+1 \text{ и } 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_s \leq n+1 \qquad (1)$$

такви што

$$M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup ... \cup M_{i_r} = M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup ... \cup M_{j_s} . \qquad (2)$$

21. На игранка 20 момчиња и 20 девојчиња, сите со различни висини, формирале 20 парови за игра. Во секој пар разликата во висината меѓу секое девојче и секое момче е помала од $10\, cm$ (момчињата се повисоки од девојчињата). Ако паровите се формираат така што највисокото момче игра со највисокото девојче, второто по висина момче игра со второто по висина девојче итн. докажи, дека повторно во секој пар разликата во висината меѓу секое момче и секое девојче ќе биде помала од $10\, cm$.

22. Комисија составена од 3366 филмски критичари гласа за Оскар. Секој критичар гласа за еден глумец и една глумица. По гласањето се констатирало дека за секој природен број n помал или еднаков на 100 постои глумец или глумица кој добил/ла точно n гласови. Докажи, дека постојат двајца критичари кои гласале за ист глумец или глумица.

23. Докажи дека од секое множество од било кои десет различни двоцифрени природни броеви може да се одделат две дисјунктни подмножества такви што збировите на броевите во овие подмножества се еднакви.

24. На почетокот на месец декември еден ученик почнал да се подготвува за натпревар по математика кој бил закажан за почетокот на март следната година. Ученикот секој ден решавал најмалку по една задача, но за да не се премори, во текот на една седмица решавал најмногу 12 задачи. Докажи, дека во периодот на подготовките постојат неколку последователни деновиво кои ученикот решил точно 21 задача.

25. Дадено е множеството $S=\{(i,j)\,|\,i,j=1,2,...,100\}$. Определи го најголемиот можен број на елементи на множество $A\subset S$ за кое важи: секоја отсечка чии крајни точки се во A содржи најмалку една точка од множеството $S\setminus A$.

26. Во рамнината секоја точка со целобројни координати е означена со еден од броевите $1,2,...,n$. Докажи дека постои правоаголник чии темиња се означени со ист број.

27. Некои парови на множество од n точки $A_1,A_2,...,A_n$ ($n\geq 4$) се меѓусебно поврзани со отсечки, така што секоја точка е поврзана со барем три од дадените точки. Докажи дека постојат различни точки $X_1,X_2,...,X_{2k}\in\{A_1,A_2,...,A_n\}$ за некој $k\geq 2$ така што точките X_i и X_{i+1} се поврзани за секој $i\ (1\leq i\leq 2k)$ каде $X_{2k+1}=X_1$.

28. На тениски турнир учествувале 110 тенисери, при што секој играл со секој од останатите тенисери по еден меч (во тенисот нема нерешени резултати). Се покажало дека во секоја група од 55 тенисери има барем еден тенисер кој изгубил од не повеќе од четири од преостанатите 54 тенисери од таа група. Докажи дека на овој турнир има тенисер кој изгубил од не повеќе од четири од преостанатите 109 тенисери.

29. (*Принцип на Дирихле - општ случај*). Нека $kn+r$ предмети $r\geq 1$ се сместени во n кутии. Тогаш, барем во една кутија се сместени најмалку $k+1$ предмети. Докажи!

30. Во квадрат со страна $1m$ на произволен начин се сместени 51 точка. Докажи дека меѓу овие 51 точка, постојат три точки кои можат да се покријат со круг чиј радиус е $\frac{1}{7}m$.

31. Во квадрат чии страни се со должина $1\,dm$ се наоѓаат 110 точки. Докажи дека постои круг со радиус $\frac{1}{8}\,dm$ во кој се наоѓаат најмалку 4 од избраните точки.

32. Во координатна рамнина се дадени 20 точки со целобројни координати, такви што меѓу нив нема три колинеарни точки. Докажи дека постои триаголник чии темиња се дадените точки и чие тежиште исто така е очка со целобројни координати.

33. На еден меѓународен собир имало учесници од шест земји. Вкупниот број на учесници бил 1978, а секој учесник бил нумериран со број од 1 до 1978. Докажи дека постои барем еден учесник чиј број е еднаков на збирот на броевите на два члена од неговата земја, или е два пати поголем од бројот на некој член од неговата земја.

34. За секој цел број a, $a \neq 0$ со $v_2(a)$ да го означиме најголемиот ненегативен цел број k таков што $2^k \mid a$. Нека $n \in \mathbb{N}$. Определи го најголемиот можен број елементи на подмножествата A од множеството $\{1, 2, ..., 2^n\}$ со својство: за секои $x, y \in A$, $x \neq y$ бројот $v_2(x-y)$ е парен.

35. На меѓународна средба учествувале 1985 лица. Меѓу секои три лица има двајца кои зборуваат еден ист јазик. Докажи, дека ако секој учесник зборува на не повеќе од 5 јазици, тогаш има барем 200 лица кои знаат еден ист јазик.

36. Секој од 17 научници се допишува со секој преостанатите. Тие се допишуваат на три теми и секој пар се допишува само на една тема. Докажи дека постојат барем тројца научници кои меѓусебно се допишуваат на една иста тема.

37. На правата се дадени $mn+1$ отсечка. Докажи, дека постојат $m+1$ отсечка кои имаат заедничка точка или $n+1$ отсечка кои се по порови дисјунктни.

38. Нека $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ се подмножества на конечното множество M такви што $|A_j| > \frac{1}{2}|M|$, за $j = 1, 2, ..., 1066$. Докажи, дека постојат елементи $x_1, x_2, ..., x_{10}$ од M такви што секој A_j содржи најмалку еден елемент од $x_1, x_2, ..., x_{10}$.

39. Дадени се множествата $A_1, A_2, ..., A_n$ чиј пресек е празен и за кои важи $|A_i| = 30$ за секој i и $|A_i \cap A_j| = 1$ за $i \neq j$. Определи ја најголемата можна вредност на n.

40. На едно тестирање учествувале $n, (n \geq 3)$ ученици. Тестот се состоел од 15 прашања и на секое прашање се понудени повеќе одговори од кои само еден

е точен. На прашање се одговара со заокружување на точниот одговор. За секој точен одговор се добива по 1 бод, а за неточен одговор или неодговорено прашање не се добиваат бодови. По тестирањето се покажало дека збирот на освоените поени на било кои 12 ученици е поголем или еднаков на 36 и има најмалку три ученици, за кои постојат три прашања на кои овие ученици точно одговориле. Определи ја најмалата можна вредност на n.

41. Во рамнината се дадени две заемно нормални прави, три правоаголници чии страни се паралелни со дадените прави и еден триаголник. Унијата на правоаголниците го покрива работ на триаголникот, т.е. секоја точка од страните на триаголникот лежи во внатрешноста на еден правоаголник. Докажи, дека целиот триаголник лежи во внатрешноста на унијата на правоаголниците.

42. Во координатната рамнина се дадени 2000 правоаголници чии должини на страни се природни броеви помали или еднакви на 100. Правоаголниците се наоѓаат во првиот квадрант и имаат теме во кординатниот почеток. Докажи, дека меѓу дадените правоаголници постојат најмалку 40 правоаголници кои се подредени монотоно во однос на инклузијата на множества.

43. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем и пет точки A, B, C, D, E со целобројни координати. Докажи, дека меѓу триаголниците (дегенерирани или недегенерирани) со темиња во дадените точки има најмалку три со целобројна плоштина.

44. Во просторот е даден правоаголен координатен систем Докажи, дека меѓу 19 точки со целобројни координати секогаш има 4 кои се темиња на тетраедар со целоброен волумен.

45. Дадена е кружница со центар во координатниот почеток и радиус 2016. На кружницата и во нејзината внатрешност се избрани 540 точки со целобројни координати такви што меѓу нив нема три колинеарни точки. Докажи, дека постојат два триаголника чии темиња се во дадените точки и кои имаат еднакви плоштини.

46. Докажи дека ако една рамнинска фигура има плоштина поголема од 1, тогаш постојат две нејзини точки со координати (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такви што $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ се цели броеви.

47. Во правоаголник со страни $20cm$ и $25cm$ се сместени 120 квадрати со страна $1cm$ без притоа квадратите да се преклопуваат. Докажи, дека во право-

аголникот може да се впише круг со дијаметар $1cm$ кој не сече ниту еден од квадратите.

48. Конечното множество $\mathbb{S}$ точки во рамнината го нарекуваме урамнотежено ако за секои две различни точки A и B од множеството $\mathbb{S}$ постои точка C во множеството $\mathbb{S}$ таква што $\overline{AC}=\overline{BC}$. Множеството $\mathbb{S}$ го нарекуваме бесцентрично ако за никои три точки A,B и C од множеството $\mathbb{S}$ не постои точка P во $\mathbb{S}$ таква што $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$.
а) Докажи дека за секој природен број $n\geq 3$ постои урамнотежено множество кое се состои од n точки.
б) Определи ги сите природни броеви $n\geq 3$ за кои постои урамнотежено бесцентрично множество.

49. Дадени се шест подредени тројки реални броеви. Докажи дека постојат барем две тројки (a,b,c) и (x,y,z) такви што
$$ax+by+cz\geq 0\,. \tag{1}$$

50. Дадени се природните броеви $n\geq 2$ и $k\geq \frac{5}{2}n-1$. Докажи дека при секој избор на k различни точки со целобројни координати (x,y), $1\leq x,y\leq n$ постои кружница која минува низ најмалку четири од тие точки.

51. Даден е квадрат *ABCD* со должина на страна 4. Определи го најголемиот природен број *k* такав што, за секој распоред на *k* точки во внатрешноста на квадратот *ABCD*, секогаш постои квадрат со должина на страна 1, кој се содржи во квадратот *ABCD* (страните не мора да се паралелни со страните на квадратот *ABCD*) и во чија внатрешност нема ниту една од разгледуваните *k* точки.

52. Нека $P=\{(x,y)\,|\,x,y\in\{0,1,2,...,2015\}\}$ е множество точки во рамнината. Во рамнината се поставени хоризонтални и вертикални отсечки, секоја со единечна должина, така што крајните точки на овие отсечки припаѓаат на P, секоја точка од P е крајна точка на барем една отсечка и никои две отсечки немаат заедничка крајна точка.
Докажи дека постои хоризонтална или вертикална права која минува низ средините на барем 506 отсечки.

53. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ со плоштина еднаква на 1 е избрана произволна точка, која е поврзана со неговите темиња. Потоа во еден од добиените три триаголници одново е избрана произволна точка и е поврзана со неговите темиња. Во секој чекор се избира произволна точка од внатрешноста на некој

од до тој момент добиените триаголници и таа се поврзува со темињата на тој триаголник. Со n да го означиме бројот на избраните точки.

а) Докажи, дека $\triangle ABC$ е поделен на $2n+1$ триаголници.

б) За секои два триаголника од поделбата кои имаат заедничка страна пресметан е збирот на нивните плоштини. Докажи, дека максималниот од добиените збирови е поголем или еднаков на $\frac{2}{2n+1}$.

54. Во рамнината се дадени 2015 кружници со радиусу 1. Докажи дека меѓу нив постојат 27 кружници такви што или секој пар има заеднички точки или секој пар нема заеднички точки.

55. Секој ѕид на еден тетраедар може да се смести во кружница со радиус 1. Докажи дека овој тетраедар може да се смести во сфера со радиус $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

5. ПРИНЦИП НА ВКЛУЧУВАЊЕ И ИСКЛУЧУВАЊЕ

1. (*Принцип на вклучување и исклучување за две множества*). Докажи, дека за произволни конечни множества A и B важи $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

2. Браќата Горјан и Андре собираат стрипови. Во својата колекција моментално имаат 67 стрипови, од кои Горјан прочитал 34, а Андреј прочитал 27. Колку стрипови се непрочитани, ако Горјан и Андреј прочитале 15 исти стрипови?

3. Колку има природни броеви помали од 2011 кои се деливи со барем еден од броевите 2 и 7, но не се деливи со бројот 5?

4. (*Обопштен принцип на вклучување и исклучување*). Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека за произволни конечни множества $A_i,\ i=1,2,...,n$ важи

$$|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+ +...+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap...\cap A_n|. \quad (1)$$

5. За еден број ќе велиме дека е навидум прост ако е сложен и ако не е делив со 2, 3 и 5. Постојат 168 прости броеви помали од 1000. Определи го бројот навидум прости броеви кои се помали ос 1000.

6. Колку има природни броеви кои се помали од 2011 и кои се деливи со 2, 3, 5 или 7?

7. Шест класа од четврта година $IV^a, IV^b, IV^v, IV^g, IV^d, IV^e$ треба да одат на матурска екскурзија, а можни дестинации се: Будимпешта, Виена, Прага и Варшава. На колку начини тоа може да го направат ако секој клас може да оди само во еден од наведените градови и секој град мора да биде посетен најмалку од еден клас?

8. Определи го бројот на деветцифрените броеви запишани со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (секоја цифра е употребена само еднаш), во кои никои три последователни цифри не се ниту 123, ниту 246, ниту 678.

9. Нека $n\ge 2$ е природен број. Од квадратна $n\times n$ табла, поделенна на единечни полиња се отстранети две спротивни аголни полиња. На колку начини

на таблата може да се поставаат n жетони така, што никои два жетони не се во ист ред или иста колона?

10. Нека $S=\{1,2,3,...,280\}$. Определи го најмалиот природен број n, таков што во секое n елементно подмножество од множеството S постојат 5 броеви, такви што секои два се заемно прости.

11. Множеството A има 6 елементи. Докажи дека во секоја фамилија од различни триелементни подмножества

$$\{A_1, A_2,..., A_{11}\} \ (|A_j|=3,\ A_i \neq A_j,\ i\neq j,\ i,j=1,2,...,11)$$

постојат три различни множества A_i, A_j, A_k кои се подмножества од исто четириелементно множество.

12. Дадени се конечни множества $A_1, A_2,..., A_n$ такви што

$$|A_i \cap A_{i+1}| > \tfrac{n-2}{n-1}|A_{i+1}|,$$

за секој $i=1,2,...,n$ ($A_{n+1}=A_1$). Докажи дека пресекот на овие множества е непразно множество.

13. Нека $A_1, A_2,..., A_n$ е фамилија конечни подмножества на множеството U и нека $A_i^c = U \setminus A_i$, $i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_n^c| = |U| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\ + ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|. \qquad (1)$$

14. Определи го бројот на пермутациите $(a_i, a_2,..., a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои немаат фиксна точка, т.е. такви што $a_i \neq i$ за $i=1,2,...,n$.

15. Заборавен шанкер служи 10 гости со 10 различни коктели. На колку начини може да ги послужи коктелите така што ниту еден гостин да не ја добие својата порачка?

16. На колку начини полињата на табла со димензии 8×8 може да се обојат во 8 различни бои така, што во секој ред се појавуваат сите 8 бои и во секоја колона две соседни полиња не се обоени со иста боја?

17. Нека $\{1,2,...,n\}$ и $1\leq k\leq n$. Определи го бројот $P_n(k)$ на пермутации на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои имаат точно k фиксни точки.

18. Нека A_i, $i=1,2,\dots,n$ се подмножества на конечното множество S и нека

$|S|=m$, $|S\setminus(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)|=m_0$, $|A_i|=m_1$, за секој $i=1,2,\dots,n$,

$|A_i\cap A_j|=m_2$, за секои $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$,

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=m_3$, за секои $i\neq j\neq k\neq i$, $i,j,k\in\{1,2,\dots,n\}$,

....

$|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|=m_n$.

Докажи, дека

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n|=\binom{n}{1}m_1-\binom{n}{2}m_2+\binom{n}{3}m_3-\dots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}m_n, \quad (1)$$

$$m_0=m-\binom{n}{1}m_1+\binom{n}{2}m_2-\binom{n}{3}m_3-\dots+(-1)^{n}\binom{n}{n}m_n. \quad (2)$$

19. Нека $S=\{1,2,\dots,n\}$, $F=\{f\mid f:S\to S\}$ и $F_0\subset F$ е множеството функции $f:S\to S$ кои немаат неподвижна точка, т.е. $f(x)\neq x$, за секој $x\in S$. Определи го бројот на елементите на множеството F_0.

20. Нека $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $Y=\{1,2,\dots,k\}$ и F е множеството од сите сурјекции од X на Y, т.е.

$$F=\{f:X\to Y\mid(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\ f(x)=y\}.$$

Определи го бројот на елементите на множеството F.

21. Колку има шестцифрени броеви во чиј запис учествуваат точно три различни цифри?

22. Колку има n – цифрени броеви во чиј запис учествуваат k различни ненулти цифри, каде $1\leq k\leq 9$?

6. ГРУПАТА ПЕРМУТАЦИИ БЕЗ ПОВТОРУВАЊЕ

1. Нека е дадено множеството $\{1,2,...,n\}$. Докажи дека $(a_i, a_2,...,a_n)$ е пермутација без повторување на множеството $\mathbb{N}_n$ ако и само пресликувањето $a:\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ определено со $a(i)=a_i$ е биекција.

2. Ако $Ᵽ_n = \{±_1, ±_2, ..., ±_{n!}\}$ и ¨ е произволна пермутација од $Ᵽ_n$, тогаш
$$Ᵽ_n = \{±_1 ¨, ±_2 ¨, ..., ±_{n!} ¨\} = \{¨ ±_1, ¨ ±_2, ..., ¨ ±_{n!}\}.$$
Докажи!

3. Пермутацијата $± \in Ᵽ_n$ ја нарекуваме $k-$*цикл* ако постои $i \in \{1,2,...,n\}$ таков што
$$±^k(i) = i,\ ±^t(i) \neq i, \text{ за } t = 1,2,...,k-1 \text{ и } ±(j) = j, \text{ за } j \notin \{i, ±(i), ..., ±^{k-1}(i)\}.$$
Притоа ја прифаќаме ознаката $± = (i, ±(i), ..., ±^{k-1}(i))$. Јасно, идентичната пермутација e е 1-цикл. Понатаму, $2-$циклот на пермутацијата $±$ го нарекуваме *транспозиција*.
а) Докажи, дека пермутацијата $± \in Ᵽ_n$ е $k-$цикл ако и амо ако постои множество $K = \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ такво што
$$±(i_t) = i_{t+1}, \text{ за } t = 1,2,...,k-1,\ ±(i_k) = i_1 \text{ и } ±(j) = j, \text{ за } j \notin K.$$
б) Докажи, дека пермутацијата $± \in Ᵽ_n$ е транспозиција ако и само ако
$$±(i) = j,\ ±(j) = ±^2(i) = i \text{ и } ±(p) = p, \text{ за } p \neq i, j.$$

4. Нека $i \in \{1,2,...,n\}$ и нека $± \in Ᵽ_n$. Множеството
$$±[i] = \{±(i), ±^2(i), ..., ±^k(i)\},$$
каде k е најмалиот позитивен број таков што $±^k(i) = i$, го нарекуваме *орбита на i во однос на $±$*. Бројот k го нарекуваме *должина на орбитата* $±[i]$. Докажи дека за секој $t \in \mathbb{N}$ важи $±^t(i) \in ±[i]$ и $|±[i]| = k$.

5. а) Докажи, дека орбитите на пермутацијата $± \in Ᵽ_n$ се по парови заемно дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството $\{1,2,...,n\}$.
б) Докажи, дека секоја пермутација $± \in Ᵽ_n$ на единствен начин може да се претстави како композиција на дисјунктни цикли.

в) Докажи, дека секоја пермутација е производ на транспозиции.

6. Нека $\pm = \pm_m \pm_{m-1} .. \pm_1 \in P_n$ е декомпозицијата на $\pm$ на дисјунктни цикли и $\pm_i$ е $k_i -$цикл, $i = 1, 2, ..., m$. Бројот

$$C(\pm) = \sum_{i=1}^{m} (k_i - 1)$$

го нарекуваме *Кошиев број за пермутацијата* $\pm$. За пермутацијата $\pm$ ќе велиме дека е *парна* ако $C(\pm)$ е парен број, а *непарна* ако $C(\pm)$ непарен број. Бројот

$$£(\pm) = (-1)^{C(\pm)} \qquad (1)$$

го нарекуваме *знак на пермутацијата* $\pm$.

Ако $\pm = ²_k ²_{k-1} .. ²_1$, каде $²_i$, $i = 1, 2, ..., k$ се транспозиции во S_n, тогаш

$$£(\pm) = (-1)^k \,. \qquad (2)$$

Докажи!

7. Нека $n \geq 2$. Докажи дека бројот на парните пермутации во групата P_n е еднаков на $\frac{n!}{2}$.

8. Докажи, дека ако $\pm, ¨ \in P_n$, тогаш

$$£(\pm ¨) = £(\pm) £(¨) \text{ и } £(\pm^{-1}) = £(\pm) \,.$$

9. Нека $\pm \in P_n$ и $\pm(i) = i$, $i = 1, 2, ..., k$. Дефинираме пермутација $¨ \in P_{n-k}$ со

$$¨(t) = \pm(t + k) - k \,,\ t = 1, 2, ..., n - k \,.$$

Докажи дека $£(\pm) = £(¨)$.

10. Нека за броевите $\sim_i, i = 1, 2, ..., k$ и $\ _i, i = 1, 2, ..., n - k$ важи

$$1 \leq \sim_1 < \sim_2 < ... < \sim_k \leq n \,,\ 1 \leq \ _1 < \ _2 < ... < \ _{n-k} \leq n \text{ и}$$

$$\{\sim_i, i = 1, 2, ..., k\} \cup \{\ _i, i = 1, 2, ..., n - k\} = \{1, 2, ..., n\} \,.$$

Докажи, дека ако $\pm \in P_n$ е определена со

$$\pm(i) = \begin{cases} \sim_i, & i = 1, 2, ..., k, \\ \ _{i-k}, & i = k + 1, ..., n, \end{cases}$$

тогаш

$$£(\pm) = (-1)^{s(\sim) + k(k+1)/2} \,,$$

каде $s(\sim) = \sum_{t=1}^{k} \sim_t$.

11. Нека

$$\pm = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in \mathrm{P}_n .$$

Докажи, дека ако $\sim_1, \sim_2, ..., \sim_k$ се броевите $i_1, i_2, ..., i_k$ подредени во растечки редослед и $_{k+1}, \quad _{k+2}, ..., \quad _n$ се броевите $i_{k+1}, i_{k+2}, ..., i_n$ подредени во растечи редослед, тогаш

$$\pounds(\pm) = (-1)^{i_1 + i_2 + ... + i_k + k(k+1)/2} \pounds(^{2\,-1}) \pounds(^{\cdot\cdot\,-1}) ,$$

каде

$$\ddot{} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \\ \sim_1 & \sim_2 & \cdots & \sim_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in \mathrm{P}_n$$

и

$$^2 = \begin{pmatrix} \sim_1 & \sim_2 & \dots & \sim_k & i_{k+1} & \dots & i_n \\ \sim_1 & \sim_2 & \cdots & \sim_k & _{k+1} & \cdots & _n \end{pmatrix} \in \mathrm{P}_n .$$

12. Нека $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_k \le n$ и $\pm \in S_k$. Дефинираме $\ddot{} \in \mathrm{P}_n$ со:

$$\ddot{}(j_t) = j_{\pm(t)}, \; t = 1, 2, ..., k \text{ и}$$

$$\ddot{}(i) = i, \; i \notin \{j_1, j_2, ..., j_k\} .$$

Докажи дека $\pounds(\ddot{}) = \pounds(\pm)$.

13. Нека A е множеството пермутации $\sim = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на $\{1, 2, ..., n\}$ со следново својство: не постои подмножество S на $\{1, 2, ..., n\}$ такво што $\sim(S) = S$. За секоја таква пермутација $\sim$ нека $d(\sim) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2$. Определи ја најмалата можна вредност на $d(\sim)$.

14. Нека n е природен број и T е множество точки (x, y) во рамнината такви што x и y се ненегативни цели броеви и $x + y < n$. Секоја точка на множеството T е обоена црвено или сино. Ако точката (x, y) е обоена црвено, такви се и сите точки (x', y') на множеството T за кои истовремено важи $x' \le x$ и $y' \le y$. Множеството од n сини точки се нарекува X – *множество* ако сите точки имаат различни x-координати, а множеството од n сини точки се нарекува Y – *множество* ако сите точки имаат различни y-координати. Докажи дека бројот на X – множествата е еднаков на бројот на Y -множествата.

15. Дадено е природен број n. Докажи дека бројот на пермутациите $\pm$ на множеството $\{1, 2, ..., 4n\}$ такви што $i + \pm(\pm(i)) = 4n + 1$ за секој $i = 1, 2, ..., 4n$ е еднаков на $\frac{(2n)!}{n!}$.

16. Во рамнината се дадени десет точки означени со броевите 1, 2, ..., 10. Можеме да поставиме координатен систем во рамнината и да ги запишеме точките во растечки редослед по првата координата (под услов овие координати да се различни). Определи го најголемиот можен број пермутации на броевите 1, 2, ..., 10 кои можеме да ги добиеме на овој начин.

17. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација $\pm$ на броевите $1, 2, ..., n$ таква што $\sqrt{\pm(1)+\sqrt{\pm(2)+\sqrt{...+\sqrt{\pm(n)}}}}$ е рационален број.

18. Даден е природен број n, кој е делив со 4. Разгледуваме пермутација $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на броевите $(1, 2, ..., n)$ за која за секој j имаме $a_i + j = n+1$ каде $i = a_j$. Докажи, дека постојат $\frac{(\frac{n}{2})!}{(\frac{n}{4})!}$ такви пермутации.

19. Дадени се $2n$ различни точки во рамнината $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n$. Докажи дека постои пермутација на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ таква што $A_iB_{\pm(i)}$ и $A_jB_{\pm(j)}$ немаат заедничка точка, кога $i \neq j$.

20. Нека $n \in \mathbb{N}$. За пермутацијата $\{x_1, ... x_{2n}\}$ на множеството $\{1, ..., 2n\}$ ќе велиме дека го има својството P ако $|x_i - x_{i+1}| = n$, за некој $i \in \{1, 2, ..., 2n-1\}$.
Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот на пермутации кои го имаат својството P е поголем од бројот на пермутации кои го немаат тоа својство.

21. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви кои ги задоволуваат условите
$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| = 1, \quad |x_i| \le \tfrac{n+1}{2} \text{ за } i = 1, 2, ..., n.$$
Докажи дека постои пермутација $y_1, y_2, ..., y_n$ на $x_1, x_2, ..., x_n$ така што
$$|y_1 + 2y_2 + ... + ny_n| \le \tfrac{n+1}{2}.$$

22. Потврди го или негирај го тврдењето: за секоја пермутација $a_1, a_2, ..., a_{2002}$ на броевите $1, 2, ..., 2002$ постојат природни броеви m и n со еднаква парност, за кои $1 \le m < n \le 2002$ и $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$.

23. Нека n е природен број, а $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ е пермутација. Множествата A, B, C и D се дефинирани како што следува
$$A = \{i \mid i > f(i)\},$$

$B=\{(i,j)\,|\,i<j\le f(j)<f(i)$ или $f(j)<f(i)<i<j\}$,

$C=\{(i,j)\,|\,i<j\le f(i)<f(j)$ или $f(i)<f(j)<i<j\}$ и

$D=\{(i,j)\,|\,i<j$ и $f(i)>f(j)\}$.

Докажи, дека $|A|+2|B|+|C|=|D|$.

24. За полиномите $A(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ и $B(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}b_kx^k$, ($a_nb_m\neq 0$) ќе велиме дека се *слични* ако се исполнети следниве услови

1) $n=m$,
2) Постои пермутација ® на множеството $\{0,1,2,...n\}$ таква што $b_i=a_{®(i)}$, за секој $i\in\{0,1,2,...,n\}$.

Нека $P(x)$ и $Q(x)$ се слични полиноми со целобројни коефициенти. Ако $P(16)=3^{2012}$, која е најмалата можна вредност на $|Q(3^{2012})|$?

25. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $a_1,a_2,...,a_n$ и $b_1,b_2,...,b_n$ се позитивни цели броеви такви што збировите $a_1+a_2,a_1+a_3,a_1+a_4,...,a_{n-1}+a_n$ се пермутација на збировите $b_1+b_2,b_1+b_3,b_1+b_4,...,b_{n-1}+b_n$. Докажи дека бројот n е степен на бројот 2.

26. Определи го бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,3,4,5\}$ кои може да се претстават како композиција на точно четири дисјунктни циклуси, при што секоја фиксна точка ќе ја сметаме за циклус со должина 1.

27. Определи ја пермутацијата на множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ чие разбивање во дисјункни циклуси е

$$[1,6][2,4,5][3].$$

28. Бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,...,n\}$ со k дисјунктни циклуси, при што фиксната точка се смета за циклус со должина еден (*тривијален циклус*), го нарекуваме *Стирлингов број од прв вид*, во ознака $s_{n,k}$ ($s(n,k)$ или $[{n \atop k}]$).

Ако $0\le n<k$, тогаш треба да имаме повеќе циклуси отколку што имаме елементи, што не е можно бидејќи наједноставниот циклус е фиксната точка и истиот има должина еден. Затоа $s_{n,k}=s(n,k)=[{n \atop k}]=0$ за $0\le n<k$. Ако $n=k$, тогаш треба да имаме n циклуси, а тоа е можно ако секоја точка е фиксна, т.е. е циклус со должина еден. Јасно, тоа е идентичната пермутација,

од каде заклучуваме дека $s_{n,n} = s(n,n) = \left[{n \atop n}\right] = 1$, $n \in \mathbb{N}$. По договор земаме дека $s_{0,0} = s(0,0) = \left[{0 \atop 0}\right] = 1$. Во следните разгледувања ќе ја користиме ознаката $s_{n,k}$.

Докажи дека за секои $n,k \in \mathbb{N}$ важи

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}. \tag{1}$$

29. Користејќи ја рекурзијата (1) од претходната задача пресметај ги Стирлинговите броеви од прв вид за $0 \le n,k \le 10$.

30. Имаме 8 монистра и 3 идентични врвки. На колку начини можеме да направиме 3 гердани, ако секој гердан мора да содржи најмалку едно монистро?

31. Пермутацијата $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ на множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ претстави ја како композиција на k дисјунктни циклуси. Определи го k и бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ со k дисјунктни циклуси.

7. БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ, ЊУТНОВА БИНОМНА ФОРМУЛА

1. (*Паскалово правило*). Докажи, дека за секој $k \geq 1$ и за секој $i \in \{1, 2, ..., k\}$ важи

$$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}.$$

Решение. Нека $k \geq 1$. Тогаш, за секој $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ имаме

$$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!} + \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!}\left[\frac{1}{k-i+1} + \frac{1}{i}\right]$$

$$= \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} \cdot \frac{i+k-i+1}{i(k+1-i)} = \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} = \binom{k+1}{i}$$

што и требаше да се докаже.

2. Докажи, дека

$$\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{M} \binom{n-1-k}{m-k}, \text{ каде } M = \min\{m, n-1\}.$$

3. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k},$$

каде $0 \leq k \leq m \leq n$.

4. Нека i, j, n се цели броеви такви што $0 < i < j < n$. Дали е точно точно, дека биномните коефициенти $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{j}$ имаат заеднички делител поголем од 1?

5. Докажи, дека за секои $a, b \in \mathbb{R}$ и секој $n \in \mathbb{N}$ точна е формулата

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n. \qquad (1)$$

6. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \qquad (1)$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n\binom{n}{n} = 0 \qquad (2)$$

7. Нека A е конечно множество и $\mathbb{P}(A)$ е неговото партитивно множество. Докажи, дека ако $|A| = n$, тогаш $|\mathbb{P}(A)| = 2^n$.

8. Докажи, дека за секој $n \geq 0$ важи

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 4^n .$$

9. Докажи, дека за секој $n \geq 1$ важи

а) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n$

б) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} = 0$,

в) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = 2^{n-2}n(n+1)$.

10. Пресметај го збирот

а) $S = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$

б) $S = \frac{1}{2}\binom{n}{0} + \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{4}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+2}\binom{n}{n}$.

11. Пресметај го збирот

$$S = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{2[\frac{n}{2}]} .$$

12. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2 .$$

13. Нека $n \geq k$. Пресметај го збирот

$$\binom{n}{k}\binom{k}{k} - \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k} + \binom{n}{k+2}\binom{k+2}{k} + \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n}{n}\binom{n}{k} .$$

14. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} .$$

15. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи идентитетот

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} . \quad (1)$$

16. Докажи, дека

$$n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

17. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{2k}=\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2[\frac{n}{2}]}.$$

18. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}.$$

19. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1}=2^{4n-2}.$$

20. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n+1}{1}+\frac{1}{2^2}\binom{n+2}{2}+...+\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}=2^n. \quad (1)$$

21. Нека $S_n(k)=\sum_{i=1}^{n}i^k$. Докажи, дека

$$(n+1)^m=1+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}S_n(k).$$

22. Докажи, дека

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^{-1}=\frac{n+1}{n+2}(1+(-1)^n).$$

23. Докажи, дека

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{x+k}\binom{n}{k}=\frac{n!}{x(x+1)...(x+n)},\ x\notin\{0,-1,-2,...,-n\},\ n\in\mathbb{N}.$$

24. Пресметај го збирот:

а) $S_1=\frac{3}{1}\binom{n}{0}+\frac{3^2}{2}\binom{n}{1}+\frac{3^3}{3}\binom{n}{2}+...+\frac{3^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}$,

б) $S_2=\frac{1}{1\cdot2}\binom{n}{0}+\frac{1}{2\cdot3}\binom{n}{1}+\frac{1}{3\cdot4}\binom{n}{2}+...+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\binom{n}{n}$.

25. Пресметај го збирот:

$$1^2+2^2\binom{n}{1}+3^2\binom{n}{2}+...+(n+1)^2\binom{n}{n}.$$

26. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $n_1,n_2,...,n_k\in\mathbb{N}$ се такви што $n_1+n_2+...+n_k=n+1$. Докажи, дека

$$P_{n+1}^{n_1,n_2,...,n_k}=\sum_{i=1}^{k}P_n^{n_1,...,n_{i-1},n_i,n_{i+1},...,n_k}.$$

27. Докажи, дека за секои $a_1,a_2,...,a_k\in\mathbb{R}$ и секој $n\in\mathbb{N}$ точна е формулата

$$(a_1+a_2+...+a_k)^n=\sum_{\substack{n_1,n_2,...,n_k\geq 0\\ n_1+n_2+...+n_k=n}}\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_k^{n_k}. \quad (1)$$

Формулата (1) во литературата е позната како *полиномна формула* или *полиномна Њутнова формула*

28. Колку најмногу подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ може да се изберат такви што секои две подмножества имаат непразен пресек?

29. Дали за секој природен број n постојат 2^{n-1} подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што секои две имаат непразен пресек, но пресекот на сите подменожества е празно множество?

30. Нека S е $n-$елементно множество и $\mathcal{F}$ е фамилија од 2^{n-1} подмножества на S такви што секои три множества од $\mathcal{F}$ имаат непразен пресек. Докажи, дека пресекот на сите множества од $\mathcal{F}$ е непразно множество.

31. Нека S е множество со $n\geq 2$ елементи и $A_1,A_2,...,A_m$ $(m\geq 2)$ се подмножества од S со следново својство: за секои два различни елементи x и y од S постои подмножество A_i кое содржи точно еден од овие два елементи. Докажи дека $2^m\geq n$.

32. За две подмножества X и Y на множеството $A=\{1,2,...,2n\}$, $n\in\mathbb{N}$ ќе велиме дека се соседни ако $|X\cap Y|=1$ и $X\cup Y=A$. Докажи, дека може да се изберат најмногу $2^{2n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}-1$ подмножества на A меѓу кои нема соседни множества.

33. Во летна школа се предаваат 9 предмети на 512 ученици, кои се сметени во 256 двокреветни соби. Учениците кои се наоѓаат во иста соба ги нарекуваме

соседи. Познато е дека за секои два ученика множеството од предмети кои им се интересни се различни (во случајов, точно на еден ученик не му е ништо интересно). Докажи, дека е можно сите ученици да бидат подредени во круг така што секои два соседи да седат еден до друг, а за секои двајца кои не се соседи и се еден до друг за едниот ученик се интересни сите предмети кои се интересни и за другиот ученик и точно уште еден предмет.

34. Нека X е множество и $X_{\sim}, \sim \in A$ е фамилија подмножества од X. За фамилијата $X_{\sim}, \sim \in A$ ќе велиме дека е *покривка* на множеството X ако $\bigcup_{\sim \in A} X_{\sim} = X$. Со $A(n)$ да го означиме бројот на покривните на множеството $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Докажи, дека

$$A(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}-1} . \qquad (1)$$

35. Мравка се наоѓа во координатниот почеток O. Секоја секунда таа минува пат од $1cm$ во некоја од насоките исток, запад, север или југ. По m секунди мравката повторно се вратила во точката O. Ако бројот на можните маршрути на мравката е делив со 2015, определи ја најмалата можна вредност на m.

36. Дадени се броевите n и r $(1 \leq r \leq n)$. Ги формираме сите подмножества од $\{1, 2, ..., n\}$ со r елементи и за секое подмножество го наоѓаме најмалиот елемент. Со $f(n,r)$ ја означуваме аритметичката средина на сите така добиени броеви. Докажи дека

$$f(n,r) = \tfrac{n+1}{r+1} .$$

37. Множеството M е добиено од множеството $\mathbb{R}$ со бришење на конечен број реални броеви. Докажи, дека за секој природен број n постои полином $f(x)$ таков што $\deg f = n$, коефициентите на f припаѓаат на множеството M и сите n корени на f припаѓаат на множеството M.

38. Еден зад друг во круг се застанати n ученици, чии висини се $h_1 < h_2 < ... < h_n$. Ако ученикот со висина h_k е веднаш зад ученикот со висина h_{k-2} или помала, тогаш двајцата ученици можат да ги заменат местата. Докажи, дека се можни најмногу $\binom{n}{3}$ такви замени, т.е. дека после најмногу $\binom{n}{3}$ замени ќе се добие распоред после кој повеќе не се можни замени.

39. Во Декартов правоаголен координатен систем од точката $(0,0)$ тргнуваат 2^n ученици, половината од нив одат на исток, а половината на север. Кога ќе дојдат до точка со целобројни координати секоја група повторно се дели на два дела, половината движењето го продолжува на исток, а половината на север. Опишаната поделба се случува во секоја точка со целобројни координати. Опиши ја положбата на учениците кога ќе се помине пат со должина n.

40. Нека $n \geq 3$ природен број. На кружницата се земени n точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Даден е жетон, кој од една од дадените точки во еден чекор се поместува во насока на движењето на стрелката на часовникот во соседната точка или во точката по соседната точка (т.е. имаме $2n$ дозволени чекори). Со a_n да го означиме бројот на начините, на кој кружницата, без повторување на чекор, може да биде обиколена двапати со почеток и крај во фиксирана точка од дадените.

Докажи, дека $a_{n-1} + a_n = 2^n$ за секој $n \geq 4$.

41. Да ги разгледаме сите природни броеви чии записи во систем со основа 2 имаат 2013 цифри и содржат повеќе нули отколку единици. Нека n е бројот на тие броеви, а s е нивниот збир. Докажи дека записот на бројот $n+s$ во систем со основа 2 содржи повеќе нули отколку единици.

8. ДВОЈНО ПРЕБРОЈУВАЊЕ

1. Нека се дадени множествата $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и $B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ и нека $S\subseteq A\times B$. Понатаму, нека $x_i=|\{(x,y)\in S \mid x=a_i\}|$, за секој $i=1,2,...,n$ и $y_j=|\{(x,y)\in S \mid y=b_j\}|$, за секој $j=1,2,...,m$. Докажи дека
$$|S|=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{j=1}^{m}y_j\ . \qquad (1)$$

2. Во едно друштво, третина од сите пензионери се шахисти, а четвртина од сите шахисти се пензионери. Дали во ова друштво има повеќе шахисти или пензионери?

3. Во внатрешноста на n – аголник ($n\geq 3$) се дадени m точки, меѓу кои никои три не се колинеарни. Овие точки и темињата на n – аголникот се поврзани со отсечки кои не се сечат во внатрешни точки и го делат многуаголникот на триаголници. Определи го бројот на добиенте триаголници.

4. На едн натпревар 200 ученици решавале 6 задачи. Секоја задача ја решиле најмалку 120 ученици. Докажи дека постојат два ученика така што секоја задача ја решил барем еден од нив.

5. Сите ѕидови на еден полиедар се триаголници. Темињата на полиедарот се обоени во три бои. Докажи дека бројот на ѕидовите на кои се појавуваат сите три бои е парен.

6. Докажи, дека
$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+...+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{k}\ . \qquad (1)$$

7. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи
$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+...+\binom{n}{n}^2\ .$$

8. Докажи, дека за секои природни броеви m,n,k точни се равенствата
$$\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\binom{n-1}{j-1}=\binom{n+m-1}{n}\ , \qquad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{k-1+j}{j}\binom{m+n-k-1-j}{n-j}=\binom{n+m-1}{n}. \qquad (2)$$

9. Докажи, дека за секој природен број n важи

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\cdot 2^{2n-2k}=\binom{4n}{2n}. \qquad (1)$$

10. Интервалот $(0,20)$ е покриен со 13 отворени подинтервали такви што ниту еден од нив не е подмножество на унијата на преостанатите интервали. Докажи дека барем една од овие интервали има должина која е помала или еднаква на 3.

11. Нека $n\geq 4$ е парен број. Полињата на $n\times n$ табла се обоени во $\frac{n^2}{2}$ бои, по две во секоја боја. Докажи дека може да се постават n топови на полиња во n различни бои таков што никои два топа меѓусебно не се напаѓаат.

12. Во прва година на едно училиште се запишале 90 ученици, секој од кои се познава со најмалку 30 други ученици. Докажи дека учениците може да се поделат во три класа од по 30 ученици така што секој ученик има најмалку еден познаник во својот клас.

13. На еден универзитет има 10001 студент. Некои студенти формирале клубови (еден студент може да биде член во повеќе клубови). Некои клубови се групирале во здруженија (еден клуб може да биде во повеќе здруженија). Вкупно има k здруженија. Притоа се исполнети следниве услови:
i) Секој пар студенти припаѓа на точно еден клуб.
ii) За секој студент и секое здружение важи дека тој студент членува во точно еден клуб од тоа здружение.
iii) Секој клуб има непарен број студенти и клуб со $2m+1$ студент се наоѓа во точно m здруженија.
Определи ги сите можни вредности на k.

14. Во квадратна $n\times n$ табла најмалку $n(\sqrt{n}+\frac{1}{2})$ полиња се обоени. Докажи дека постојат четири обоени полиња чии сентри се темиња на правоаголник.

15. Нека $\boldsymbol{F}=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ е фамилија подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ која ги задоволува следниве услови:
i) секои две различни множества од $\boldsymbol{F}$ имаат точно еден заеднички елемент,

ii) секој елемент на $\{1,2,...,n\}$ се содржи во точно k множества од $\mathcal{F}$.

Дали може n да е еднаков на 2023?

16. Нека $S_n=\{1,2,...,n\}$. Со $P_n(k)$ го означуваме бројот на пермутации на множеството S_n кои имаат точно k фиксни точки $(k\geq 0, n\geq 1)$. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)=n!$$

17. Нека $n, k\in\mathbb{N}$ и S е множество од n точки од рамнината такви што:

a) било кои три точки од S не се колинеарни,

b) за секоја точка P од S постојат најмалку k различни точки од S кои се еднакво оддалечени од P.

Докажи дека

$$0<k<\tfrac{1}{2}+\sqrt{2n}.$$

18. На еден натпревар учествувале a натпреварувачи, кои биле оценувани од b судии, каде $b\geq 3$ е непарен број. Секој судија го оценува секој натпреварувач со „положил“ или „не положил“. Нека k е број, таков што оценките на било кои двајца судии се совпаѓаат кај најмалку k натпреварувачи. Докажи дека $\frac{k}{a}\geq\frac{b-1}{2b}$.

19. Нека $\mathbb{F}$ е множество, чии елементи се подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ и кои ги имаат следниве својства:

1) Ако $A\in\mathbb{F}$, тогаш $|A|=3$.

2) Ако $A,B\in\mathbb{F}$ и $A\neq B$, тогаш $|A\cap B|\leq 1$.

Нека $f(n)$ е максималната вредност на $|\mathbb{F}|$ за сите такви множества $\mathbb{F}$. Докажи дека за $n\geq 3$ важи

$$\frac{n^2-4n}{6}\leq f(n)\leq\frac{n^2-n}{6}.$$

20. На еден математички натпревар учениците решавале 6 задачи. Се покажало дека секој пар задачи бил решен од повеќе од $\frac{2}{5}$ од учениците и дека не постои ученик кој ги решил сите 6 задачи. Докажи, дека постојат најмалку два ученика такви што секој од нив решил точно 5 задачи.

21. Во група од n луѓе секој познава точно k членови на групата. Секои двајца кои се познаваат имаат точно l заеднички познаници, а секои двајца кои не

се познаваат имаат точно m заеднички познаници. Определи ја врската меѓу k, l, m, n.

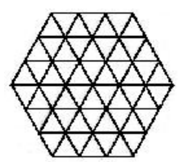
22. Нека n е природен број и S е множеството од сите точки (x, y), каде x и y се природни броеви и $x \leq n, y \leq n$. Нека $\mathbb{T}$ е множеството од сите квадрати со темиња од S. Со a_k, $k \geq 0$ да го означиме бројот на паровите точки од S, кои се темиња на точно k квадрати од $\mathbb{T}$. Докажи дека $a_0 = a_2 + 2a_3$.

23. Нека n е природен број. На една конференција учествуваат $15n$ луѓе кои комуницираат на 5 јазици. Се покажало дека на секој пар различни јазици може да разговараат точно $6n$ учесници, а на секоја тројка различни јазици може да разговараат точно $3n$ учесници. Докажи дека секои двајца учесници на конеференцијата може да се разберат на некој од овие јазици, како и дека постои јазик кој го говорат најмалку $10n$ учесници на конференцијата.

24. Нека $A_1, A_2, ..., A_k$ се подмножества од множеството $\{1, 2, ..., n\}$ такви што $|A_i \cap A_j| = 1$ за секои $i \neq j$. Докажи дека $k \leq n$.

25. Нека за природниот број n постои пресликување $f : \{0,1\}^n \to \{1, 2, ..., n\}$ со следново својство: ако низите $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ се разликуваат во точно две места, тогаш $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$. Докажи дека $n = 2^k$ за некој k.

26. Правилен шестаголник со должина на страна 3 е поделен на 54 рамнострани триаголници со должина на страна 1 (цртеж десно). Добиените 37 темиња на триаголниците се означени со броевите 1, 2, ..., 37 во произволен редослед. За единичниот триаголник ќе велиме дека е „часовен“ ако трите броја со кои се означени неговите темиња се распоредени во растечки редослед во насока на движењето на стрелката на часовникот. Докажи дека има најмалку 19 часовни триаголници.



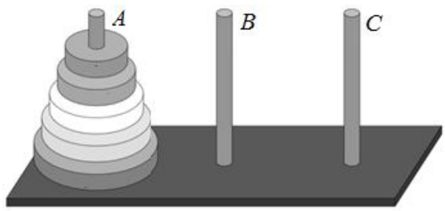
27. Нека $n \geq 3$ е даден природен број. Секое поле од табла $n \times n$ е обоено со една од $[\frac{(n+2)^2}{3}]$ бои, при што секоја боја е употребена најмалку еднаш. Докажи дека постои правоаголник 1×3 или 3×1 кој се сотои од три полиња кои се обоени со три различни бои.

9. ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

1. Нека $a_1 = 2, a_2 = 3$, $a_{2n} = a_{2n-1} + 2a_{2n-2}$ и $a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n-1}$, за $n \in \mathbb{N}$. Определи ја формулата за a_n.

2. Колку има стоцифрени природни броеви во чиј декаден запис се појавуваат само непарни цифри такви што разликата на секои две соседни цифри е еднаква на 2?

3. (*Ханојски кули*). На еден од три стапа A, B, C, на пример A, се наоѓаат n дискови со различна големина ставени така што секој диск (освен најдолниот) е помал од дискот под него (види цртеж). Сите дискови треба да ги префрлиме на стапот B така што таме ќе се наоѓаат во иста полжба. Притоа дисковите се пренесуваат од стап на стап така што секој пат се пренесува само еден диск и никогаш поголем диск не се става над помал диск. Во пренесувањето може да се користи стапот C. Најди формула за потребниот најмал број преноси дисковите од A да се наредат на B и определи го тој број.



4. Нека се дадени првите k членови $x_0,...,x_{k-1}$ на низата $\{x_n\}$. Функционалната врска

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2},..., x_n), \quad (1)$$

со која секој член на низата $\{x_n\}$ се изразува со помош на k претходни, се нарекува *диференцна (рекурзивна) равенка од* k *– ти ред.*

За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е *решение на диференцната равенка* (1) ако нејзините членови ја задоволуваат функционалната врска (1). Релацијата со која се добиваат сите низи кои се решенија на диференцната равенка (1) ја нарекуваме *општо решение на диференцната равенка* (1).

Првите k членови $x_0,...,x_{k-1}$ на низата $\{x_n\}$ ги нарекуваме *почетни услови на диференцната равенка* (1).

Нека $P, Q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Диференцната равенка од видот

$$x_{n+1} + [P(n) - 1]x_n = Q(n), \quad (2)$$

со почетен услов x_0, ја нарекуваме *линеарна диференцна равенка од прв ред.* Ако, $Q(n)=0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш диференцната равенка ја нарекуваме *хомогена,* а во спротивно ја нарекуваме *нехомогена.*
Докажи, дека ако $P(n)\neq 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш општото решение на хомогената линеарна диференцна равенка

$$x_{n+1}+[P(n)-1]x_n=0\,, \qquad (3)$$

е дадено со

$$x_n=C\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)]\,, \qquad (4)$$

каде C е произволна константа.

5. Реши ја диференцната равенка

$$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}\,,\ a_0=a_1=1\,.$$

6. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1}-x_n=R(n)\,. \qquad (1)$$

7. Реши ја диференцната равенка

$$x_n=\frac{x_{n-1}}{2nx_{n-1}+1}$$

со почетен услов $x_1=\frac{1}{2}$.

8. Докажи, дека ако $P(n)\neq 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш општото решение на нехомогената линеарна диференцна равенка

$$x_{n+1}+[P(n)-1]x_n=Q(n)\,, \qquad (1)$$

е дадено со

$$x_n=\Big(C+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Q(j)}{\prod_{i=0}^{j}[1-P(i)]}\Big)\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)]\,, \qquad (2)$$

каде C е произволна константа.

9. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1}-ax_n=Q(n)\,,\ a\in\mathbb{R}\ \text{ и }\ Q:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\,.$$

10. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})\,,$$

со почетен услов $a_1=1$.

11. Нека $P, Q, R : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Диференцната равенка од видот

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = R(n), \qquad (1)$$

со почетен услов x_0, ја нарекуваме *линеарна диференцна равенка од втор ред*. Ако, $R(n) = 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш диференцната равенка ја нарекуваме *хомогена*, а во спротивно ја нарекуваме *нехомогена*.
Нека е дадена линеарната хомогена диференцна равенка од втор ред

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = 0, \qquad (2)$$

Докажи, дека ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две нејзини решенија, тогаш, за секои $A, B \in \mathbb{C}$ низата $\{A \cdot a_n + B \cdot b_n\}$ е решение на (2).

12. За решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на линеарната хомогена диференцна равенка

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = 0 \qquad (1)$$

ќе велиме дека се *пропорционални* ако постои $A \in \mathbb{C}$ таков што $a_n = Ab_n$, за секој $n \geq 0$. Во спротивен случај ќе велиме дека решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се *непропорционални*. Докажи, дека
а) Решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на хомогената равенка (1) се пропорционални ако и само ако $a_0 : b_0 = a_1 : b_1$.
б) Решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на хомогената равенка (1) се непропорционални ако и само ако $a_0 : b_0 \neq a_1 : b_1$.

13. Докажи, дека ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две непропорционални решенија на хомогената равенка

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = 0, \qquad (1)$$

тогаш за секое решение $\{x_n\}$ на (1) постојат единствени $A, B \in \mathbb{C}$ такви што $x_k = Aa_k + Bb_k$, за секој $k \geq 0$.

14. Нека е дадена нехомогената диференцна равенка од втор ред

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = R(n), \qquad (1)$$

Докажи, дека ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две непропорционални решенија на соодветната хомогена равенка

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = 0, \qquad (2)$$

а $\{x_n\}$ е решение на нехомогената равенка (1), тогаш за секое решение $\{y_n\}$ на (1) постојат $A, B \in \mathbb{C}$ такви што $y_k = Aa_k + Bb_k + x_k$, за секој $k \geq 0$.

15. Диференцната равенка

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad b, c \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

ја нарекуваме *хомогена диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред*. Квадратната равенка

$$r^2 + br + c = 0 \qquad (2)$$

придруженана равенката (1) ја нарекуваме *карактеристична равенка* за равенката (13).

Нека ~ и   се различни решенија на карактеристичната равенка (2) за равенката (1). Докажи, дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определени со $a_n = \sim^n$ и $b_n = \ ^n$, $n = 0,1,2,...$ се непропорционални решенија на равенката (1).

16. Нека ~ е двоен корен на карактеристичната равенка

$$r^2 + br + c = 0 \qquad (1)$$

за равенката

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad b, c \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

Докажи, дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определени со $a_n = \sim^n$ и $b_n = n\sim^n$, $n = 0,1,2,...$ се непропорционални решенија на равенката (2).

17. Реши ги диференцните равенки

а) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$.

б) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

в) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

18. Низата $\{x_n\}$ е решение на диференцната равенка

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n, \; x_1 = 6, \; x_2 = 34.$$

Докажи, дека ниту еден член на $\{x_n\}$ не е делив со 5.

19. Дадена е низата $a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$. Докажи дека $2a_n - 1$ е точен квадрат.

20. Реши го системот диференцни равенки

$$\begin{cases} x_{n+1} = px_n + qy_n \\ y_{n+1} = rx_n + sy_n. \end{cases} \qquad (1)$$

21. Реши ги системите диференцни равенки:

а) $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 5x_n - y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0 = 0, \; y_0 = 6$.

b) $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0 = 2, \; y_0 = 1$.

22. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1} = \frac{px_n+q}{rx_n+s} . \qquad (1)$$

23. Реши ја диференцната равенка:

а) $x_{n+1} = \frac{x_n-2}{x_n+4}$, при почетен услов $x_0 = 0$, и

б) $x_{n+1} = \frac{x_n-1}{x_n+3}$, при почетен услов $x_0 = 1$.

24. Докажи, дека решенијата на нехомогената диференцна равенка

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n) \qquad (1)$$

каде $b,c \in \mathbb{R}$ и $f(n) \not\equiv 0$ се дадени со

$$y_n = Aa_n + Bb_n + \sum_{t=0}^{n-1} \frac{a_{t+1}b_n - b_{t+1}a_n}{a_{t+1}b_{t+2} - b_{t+1}a_{t+2}} f(t) .$$

каде $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на хомогената равенка

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 . \qquad (2)$$

25. Нека $\{x_n\}$ е решение на равенката

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n) . \qquad (1)$$

Докажи, дека

а) Ако $f(n)$ е полином од k – ти степен, тогаш

- $x_n = \sum_{i=0}^{k} A_i n^i$, ако 1 не е корен на карактеристичната равенка,
- $x_n = \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+1}$, ако 1 е еден од различните корени на карактеристичната равенка,
- $x_n = \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+2}$, ако 1 е двоен корен на карактеристичната равенка.

б) Ако $f(n) = P_k(n)e^{\sim n}$, каде P_k е полином од k – ти степен, тогаш

- $x_n = e^{\sim n} \sum_{i=0}^{k} A_i n^i$, ако $\sim$ не е корен на карактеристичната равенка,
- $x_n = e^{\sim n} \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+1}$, ако $\sim$ е еден од различните корени на карактеристичната равенка,
- $x_n = e^{\sim n} \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+2}$, ако $\sim$ е двоен корен на карактеристичната равенка.

в) Ако $f(n) = P_k(n)a^n$, каде P_k е полином од k – ти степен, тогаш

- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^i$, ако a не е корен на карактеристичната равенка,
- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+1}$, ако a е еден од различните корени на карактеристичната равенка,
- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+2}$, ако a е двоен корен на карактеристичната равенка,

каде коефициентите A_i, $i = 0,1,2,...,k$ треба дополнително да се определат.

26. Реши ја нехомогената диференцна равенка:

    а) $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = n-1$, и   б) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n^2$.

27. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$, со почетен услов $x_0 = a$

28. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$, со почетен услов $x_0 = a$.

29. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, со почетен услов $x_0 = a$

30. Низата $\{x_n\}$ е решение на диференцната равенка $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$, кое го задоволува условот $x_{1998} = 3$. Определи го x_1?

31. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, со почетен услов $x_1 = a_1$.

32. Реши го системот диференцни равенки

    $$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$$

    со почетни услови $x_0 = a$ и $y_0 = b$.

33. Реши ја диференцната равенка

    $$a_n = \frac{4n-2}{n} a_{n-1}, \qquad (1)$$

    со почетен услов $a_1 = 1$.

34. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = x_n^2 + (x_n - 1)^2$, $n \geq 0$, со почетен услов $x_0 = 3$.

35. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+1}=\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+...+\frac{a_n^2}{a_{n-1}}, \qquad (1)$$

со почетни услови $a_1=1, a_2=1$.

36. Реши ја диференцната равенка

$$a_n=2+a_0a_1...a_{n-1},$$

со почетен услов $a_0=3$.

37. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1}=3x_n+\sqrt{8x_n^2+1},\ n\geq 1 \qquad (1)$$

со почетен услов $x_1=1$.

38. Куварот на едно зимско одмаралиште прави мени за ручек за следните n денови. Секој ден за ручекот има понуда од две јадења од следнава листа: риба со компир-салата, подварок, месо со сос од печурки и мусака. Мусаката е секогаш на менито два дена по ред, а подварокот и месото со сос од печурки не се во ист дена на менито. На колку начини може да се состави менито?

39. Во просторија се наоѓаат n кутии со висини $1,2,...,n$ кои во некој редослед треба да се наредат покрај ѕид. Мачорот Дивко може да скокне од една кутија на следната ако следната кутија е пониска (не е важно колку) од кутијата на која моментално се наоѓа или е за најмногу 1 повисока од кутијата на која моментално се наоѓа. На колку начини може кутиите да се наредат така што Дивко може да тргне од првата кутија во низата и редоследно да скокне на секоја следна кутија?

40. Дадени се 12 кутии и доволен број црвени, сини и бели топчиња. Треба да ставиме по едно топче во секоја кутија така што за секое топче барем едно од соседните е истобојно. На колку начини тоа може да се направи?

41. Секоја низа од буквите во македонската азбука ќе ја наречеме збор. Ќе велиме дека еден збор е *убав*, ако во него не се среќава ЏЏ, т.е. нема две соседни букви Џ. Определи ја функцијата $f(n)$, чија вредност е бројот на убавите зборови со должиња n.

42. Определи го бројот на сите зборови со должина n составени од буквите a,b,c,d такви што буквата a никогаш не е соседна со буквата b.

43. Во редот пред универзитетската библиотека стојат студенти, студентки и професори. За редот ќе врлиме дека е *подноослив* ако во него не стојат две студентки една до друга (бидејќи ако две стидентки се најдат една до друга одма почнуваат да зборуваат). Определи го бројот на подносливи редови со должина n.

44. Правоаголна табла со димензија $2\times n$ е поделена на $2n$ единечни квадрат. Располагаме со доволен број плочки со големина 2×1 и 2×2. На колку начини таблата $2\times n$ може да се покрие со овие плочки? (Плочките не смее да се преклопуваат или да излегуваат надвор од таблата.)

45. Нека

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}^{i}(\varnothing)$$

каде $\mathbb{P}(X)$ е множеството од сите подмножества на множеството X, а $\mathbb{P}^{i}(X)$ го означува изразот $\mathbb{P}(\mathbb{P}(...\mathbb{P}(X)...))$, каде $\mathbb{P}$ е применето i пати.

За даден природен број n, броиме колку постојат $n-$елементни подмножества A на множеството U за кои важи $A\subseteq\mathbb{P}(A)$. Дали е можно резултатот да се состои од цифрите 0, 1, 2 и 8 во некој редослед?

46. На кружница, со лицето кон центарот на кружницата, се наредени n ученици со различни имиња. Имињата на учениците се напишани на n картички и картичките се распределени меѓу учениците на произволен начин, секој ученик има по една картичка. Учениците ја повторуваат следната операција: ученик, кој ја има картичката со неговото име ја напушта кружницата, по што секој од преостанатите ученици ја дава својата картичка на ученикот десно од него.

Определи го бројот на почетните распоределби на картичките, при кои по 4 опишани операции сите ученици го напуштиле кругот.

47. Нека A и E се две спротивни темиња на правилен осумаголник. На темето A се наоѓа жаба. Од секое теме на осумаголникот, освен од темето E, жабата може да скокне на соседно теме. Кога ќе дојде на темето E жабата останува на него. Со a_n да го означиме бројот на начините на кои жабата може да дојде од темето A на темето E скокнувајќи точно n пати. Докажи дека $a_{2n-1}=0,\quad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),\quad n=1,2,3,...$ каде $x=2+\sqrt{2}$ и $y=2-\sqrt{2}$.

(Жабата може да дојде од темето A во темето E скокнувајќи точно n пати ако скока по низа од темиња $(P_0,P_1,P_2,...,P_n)$ така што се исполнети условите:

(i) $P_0=A,P_n=E$;

(ii) за секој $i, 0 \le i \le n-1$, $P_i \ne E$;

(iii) за секој $i, 0 \le i \le n-1$, P_i и P_{i+1} се соседни темиња на осумаголникот.)

48. За даден природен број n нека T е множеството од првите $2n$ природни броеви. Определи го бројот на подмножествата S на T такви што не постојат $a, b \in S$ за кои $|a-b| \in \{1, n\}$.

(Празното множество го има горното својство.)

10. ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ

1. Нека е дадена низата реални броеви $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Формалниот степенски ред

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \,, \qquad (1)$$

го нарекуваме *генераторна функција за низата* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. За две генераторни функции $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ ќе велиме дека се *еднакви* ако им се еднакви соодветните коефициенти, односно $a_n = b_n$, за секој $n \in \mathbb{N}_0$.
Определи ја генераторната функција на биномните коефициенти од $n =$ ти ред $\binom{n}{k}$, $k = 0,1,2,...,n$,

2. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $B(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $C(x) = A(x) + B(x)$ е генераторна функција на низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $c_i = a_i + b_i$, $i = 0,1,2,3,...$.
Функцијата $C(x)$ ја нарекуваме *збир на генераторните функции* A и B.

3. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и c е константа. Докажи дека $F(x) = cA(x)$ е генераторна функција на низата $\{ca_i\}_{i=0}^{\infty}$.
Функцијата F ја нарекуваме *производ на генераторната функција* A *со константата* c.

4. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $B(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\sim, \quad \in \mathbb{R}$. Докажи, дека

$$G(x) = \sim A(x) + \quad B(x)$$

е генераторна функција на низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $c_i = \sim a_i + \quad b_i$, $i = 0,1,2,3,...$.

5. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $x^n A(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $b_k = 0, k = 0,1,2,...,n-1$ и $b_k = a_{k-n}, k \geq n$.

6. Определи ја генераторната функција на низата

а) $a_k = 1$, $k = 0,1,2,3,...$.

б) $a_k = (-1)^k$, $k = 0,1,2,3,...$

7. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи дека

$$\frac{A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2-...-a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}$$

е генераторна функција на низата $a_n, a_{n+1}, a_{n+2},...$.

8. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи дека $A(cx)$ е генераторна функција на низата $\{c^i a_i\}_{i=0}^{\infty}$.

9. а) Нека $A(x)$ е генераторна функција за низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $B(x)$ е генераторна функција за низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $C(x) = A(x)B(x)$ е генераторна функција за низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ каде

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + ... + a_{n-1}b_1 + a_nb_0, \qquad (1)$$

Функцијата $C(x)$ ја нарекуваме *производ на генераторните функции* A и B.

б) Нека

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

е генераторна функција таква што $A(0) = a_0 \neq 0$. Докажи, дека постои единствена генераторна функција

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ...$$

таква што $A(x)B(x) = 1$. Притоа пишуваме $B(x) = \frac{1}{A(x)}$.

10. Нека е дадена низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Определи ја генераторната функција на парцијалните суми на редот $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

11. Нека $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ и $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ се две генераторни функции. За степенскиот редот

$$(B \circ A)(x) = B(A(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A(x))^n$$

ќе велиме дека е *композиција на генераторните функции* A и B.
Меѓутоа, редот $B \circ A$ не е секогаш добро дефиниран. Имено, ако $B(x)$ не е полином и ако $A(0) = a_0 \neq 0$, тогаш при пресметување на коефициентот пред x^n во $(B \circ A)(x)$ ќе се појави бесконечен збир, кој не е можно да се пресмета. Ако $a_0 = 0$, тогаш лесно се гледа дека

$$B(A(x)) = b_0 + b_1a_1x + (b_1a_2 + b_2a_1^2)x^2 + (b_1a_3 + 2b_2a_1a_2 + b_3a_1^3)x^3 + ... \qquad (1)$$

Според тоа, композицијата $B \circ A$ е добро дефинирана ако $A(0) = a_0 = 0$ или ако $B(x)$ е полином.
За формалниот степенски ред $B(x)$ ќе велиме дека е *композициска инверзија* на редот $A(x)$ ако $(B \circ A)(x) = (A \circ B)(x) = x$.
Докажи, ако за редовите $A(x)$ и $B(x)$ важи $(B \circ A)(x) = (A \circ B)(x) = x$, тогаш

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

при што $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$.

12. За секоја генераторна функција од видот $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $a_1 \neq 0$ постои единствена композициска инверзија која е од видот $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Докажи!

13. Нека $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е формален степенски ред. *Формален извод* за овој ред е редот $A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. За пресметување на вака дефинираниот извод на формални степенски редови важат истите правила како и за пресметувањето на изводите на обичните функции:

1) $(\alpha A(x))' = \alpha A'(x)$,

2) $(A(x) + B(x))' = A'(x) + B'(x)$,

3) $(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$,

4) $\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)}$

Докажи, дека ако $A(x)$ е генераторна функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогаш $xA'(x)$ е генераторна функција за низата $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $x(xA'(x))'$ е генераторна функција за низата $\{n^2a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

14. Определи ги генераторната функции на низата

а) $\{n+1\}_{n=0}^{\infty}$,

б) $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$.

15. Нека $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е формален степенски ред. *Формален определен интеграл* за овој ред е редот $\int_0^x A(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$. Според тоа, ако функцијата $A(x)$ е генераторна за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогаш функцијата $\int_0^x A(t)dt$ е генераторна за низата $0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots$.

Определи ја генераторната функција за низата $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$.

16. Броевите $H_0=0$ и $H_k=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}$, за $k=1,2,\dots$. ги нарекуваме *хармониски броеви* и тие се еднакви на парцијалните суми на хармонискиот ред $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$.

а) Докажи, дека за секој природен број m важи

$$H_{2^m} \geq 1+\frac{m}{2}. \qquad (1)$$

б) Определи ја генераторната функција на низата хармониски броеви.

17. Определи ја генераторната функција на низата $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $n=0,1,2,\dots$.

18. Докажи, дека за секој $m \geq 1$ важи

$$\frac{1}{(1-ax)^m}=1+\binom{m}{1}ax+\binom{m+1}{2}a^2x^2+\binom{m+2}{3}a^3x^3+\dots+\binom{m+n-1}{n}a^nx^n+\dots \qquad (1)$$

19. Реши ја диференцната равенка

$$a_0=5, \quad a_k=a_{k-1}+3, \text{ за } k \geq 1. \qquad (1)$$

20. Реши ја диференцната равенка

$$a_0=0 \text{ и } a_{n+1}=2a_n+1, \ n \geq 0. \qquad (1)$$

21. Во едно езеро на почетокот на годината имало k жаби. Во текот на секоја година бројот на жабите се зголемувал l пати. На почетокот на секоја следна

година m жаби од езерото се преселуваат во други езера. Нека броевите k, l и m се такви што $k(l-1) > m$. Колку жаби ќе има во ова езеро по N години?

22. Нека низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ја задоволува линеарната диференцна равенка

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_m a_{n-m} \quad (1)$$

од $m-$ти ред со константни коефициенти $c_1, c_2, ..., c_m$ и почетни услови $a_0, a_1, ..., a_m$. Докажи, дека генераторната функција $A(x)$ на оваа низа е од видот $A(x) = \frac{P_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$, каде $Q_m(x)$ е полином од $m-$ти степен, а степенот на полиномот $P_{m-1}(x)$ е помал или еднаков на $m-1$.

23. Нека генераторната функција

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m + ... \quad (1)$$

е рационална, т.е. $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, каде $P(x)$ и $Q(x)$ се заемно прости полиноми. Докажи, дека почнувајќи од некој број n низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ја задоволува линеарната диференцна равенка

$$a_{n+m} = c_1 a_{n+m-1} + c_2 a_{n+m-2} + ... + c_m a_n , \quad (2)$$

каде m е степенот на полиномот $Q(x)$, а $c_1, c_2, ..., c_m$ се некои константи.

24. Реши ја диференцната равенка

$$a_0 = 1, \ a_1 = 4, \ a_k = a_{k-1} + 6a_{k-2}, \quad k \geq 2 . \quad (1)$$

25. Низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена со рекуретната релација

$$a_0 = 2, a_1 = 7, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 3^n, n \geq 0 .$$

Определи експлицитен израз за a_n.

26. Реши ја диференцната равенка

$$a_0 = 1, \quad a_k = 3a_{k-1} + 4^k, k \geq 1 \quad (1)$$

27. Реши ја диференцната равенка

$$a_0 = 3, \quad a_k = 2a_{k-1} + k, k \geq 1 \quad (1)$$

28. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n ,$$

со почетни услови $a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = -2$.

29. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=2^n+n,\ \ n\geq 0 \qquad (1)$$

со почетни услови $a_0=a_1=0$.

30. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1=1, a_{2n}=a_n$ и $a_{2n+1}=a_n+a_{n+1}$. Определи ја генераторната функција на оваа низа.

31. За секој природен број n, нека

$$S_n=1+\tfrac{1}{2}+...+\tfrac{1}{n},$$
$$T_n=S_1+S_2+...+S_n,$$
$$U_n=\tfrac{T_1}{2}+\tfrac{T_2}{3}+...+\tfrac{T_n}{n+1}.$$

За секој n определи константи a_n,b_n,c_n,d_n такви, што

$$T_n=a_nS_{n+1}+b_n \text{ и } U_n=c_nS_{n+1}+d_n.$$

32. Докажи, дека генераторната функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е рационална ако и само ако постојат броеви $q_1,q_2,...,q_k$ и полиноми $p_1(t), p_2(t),..., p_k(t)$ такви што почнувајќи од некој n важи

$$a_n=p_1(t)q_1^n+p_2(t)q_2^n+...+p_k(t)q_k^n. \qquad (1)$$

Изразот на десната страна на (1) го нарекуваме *квазиполином* од променлива n.

33. *Производ на Адамар* за генераторните функции

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...$$

и

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+...$$

ја нарекуваме генераторната функција

$$C(x)=a_0b_0+a_1b_1x+a_2b_2x^2+a_3b_3x^3+....$$

Докажи, дека производот на Адамар на две рационални генераторни функции и рационална генераторна функција.

34. Докажи дека

а) $\sum_n \binom{2n}{m}x^{2n}=\frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}}+\frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}}\right)$,

б) $\sum_n \binom{2n+1}{m}x^{2n+1}=\frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}}-\frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}}\right)$.

35. Формалниот степенски ред $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ го нарекуваме *експоненцијална генераторна функција* за низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Нека $A(x)$ и $B(x)$ се експоненцијални генераторни функции за низите $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$. Докажи дека

a) функцијата $C(x) = A(x) + B(x)$ е експоненцијална генераторна функција за низата $\{a_k + b_k\}_{k=0}^{\infty}$.

b) функцијата $C(x) = A(x)B(x)$ е експоненцијална генераторна функција за низата

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}, \; n = 0,1,2,3,...$$

која ја нарекуваме *биномна конволуција на низите* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$.

36. Определи ја експоненцијалната генераторна функција на низата

$$a_k = \frac{n!}{(n-k)!}, \; k = 0,1,2,...,n .$$

37. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+1} = (n+1)[a_n - n + 1], \tag{1}$$

со почетен услов $a_0 = 1$.

38. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+1} = (n+1)[(-1)^{n-1}(1 - \tfrac{1}{n+1}) - a_n], \tag{1}$$

со почетен услов $a_0 = 2$.

39. Нека е дадена комбинаторна сума S која треба да ја пресметаме. Пресметувањето на сумата S може да се направи со помош на следниов метод:

1) Идентификуваме слободна променлива од која зависи сумата, на пример n. Нека $f(n)$ е вредноста на сумата.
2) Нека $F(x)$ е генератотната функција на низата $f(n)$.
3) Ја множиме сумата S со x^n и сумираме по n. Генераторната функција сега е двојна сума: надворешната е по n, а внатрешната е првобитната сума S.
4) Го заменуваме редоследот на собирање и ја наоѓаме внатрешната сума по n.
5) Ги идентификуваме коефициентите за генераторната функција, бидејќи тие се вредностите на сумата S во зависност од n.

Со претходно изложениот метод може да се решат голем број задачи, а самиот метод е познат како *метод на змијско масло*. Ова чудно име станува малку појасно ако се знае дека методот настанал и го добил името во Америка, каде американските индијанци змијското масло го сметале за универзален лек на.

Пресметај го збирот $\sum\limits_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

40. Пресметај го збирот $\sum\limits_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

41. Докажи дека

$$\sum_k \binom{n}{[\frac{k}{2}]}x^k = (1+x)(1+x^2)^n,$$

а потоа пресметај го збирот

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]}y^k,$$

во експлицитен облик кога $y=\pm 2$.

42. Докажи дека за секој $n\geq 0$ важи

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k = \binom{n}{j}x^j(1+x)^{n-j}. \qquad (1)$$

43. Докажи дека

$$\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}. \qquad (1)$$

44. Докажи дека $\sum\limits_k (-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

45. Пресметај го збирот $\sum\limits_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$.

46. Докажи дека $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$.

47. Докажи дека за $n\geq 1$ важи $\sum\limits_{k\geq 1}\binom{n+k-1}{2k-1}\frac{(x-1)^{2k}x^{n-k}}{k} = \frac{(x^n-1)^2}{n}$.

11. ТРИАГОЛНИ БРОЕВИ

1. Реши ја диференцната равенка

$$t_n - t_{n-1} = n\,,$$

со почетен услов $t_0 = 0$.

2. Докажи дека збирот на два последователни триаголни броја е квадрат на некој природен број и обратно, секој точен квадрат поголем од 1 може да се запише како збир на два триаголни броја.

3. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни триаголни броеви е куб на природен број.

4. Докажи дека збирот на квадратите на два последователни триаголни броја е триаголен број.

5. Докажи дека двојниот производ на два последователни триаголни броја е триаголен број.

6. Докажи дека во низата триаголни броеви има само еден прост број.

7. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $\frac{n^2+2n+12}{2}$ е триаголен број.

8. Докажи дека природниот број m е триаголен ако и само ако $8m+1$ е точен квадрат на некој природен број.

9. Докажи, дека за секој непарен број $n>1$ бројот $\frac{1}{8}(n^2-1)$ е триаголен број.

10. Докажи дека за секој природен број n бројот:

    а) $\frac{1}{8}(n^4+2n^3+3n^2+2n)$,

    б) $9^n+9^{n-1}+...+9+1$,

    е триаголен број.

11. Докажи дека $\frac{9n+2}{2}$ е триаголен броја ако и само ако $\frac{n}{2}$ е триаголен број.

12. Докажи дека $8\underbrace{99...9}_{k}1\underbrace{00...0}_{k}2$ е триаголен број.

13. Докажи дека $\underbrace{55...5}_{n-1}6\underbrace{11...1}_{n-1}$ е триаголен број.

14. Докажи дека низата триаголни броеви содржи бесконечно многу точни квадрати.

15. Докажи дека

а) $8t_{n-1}+4n=(2n)^2$, б) $t_{2n}=3t_n+t_{n-1}$,

в) $t_{2n+1}=3t_n+t_{n+1}$, г) $t_{t_{n-1}}+t_{t_n}=t_n^2-nt_{n-1}$,

д) $t_{2n}-2t_n=n^2$, ѓ) $t_{2n-1}-2t_{n-1}=n^2$,

е) $t_n^2=t_n+t_{n-1}t_{n+1}$, ж) $t_{3n-1}=3t_n+6t_{n-1}$.

16. Ако за триаголните броеви t_m и t_n важи $t_n=2t_m$, тогаш триаголниот број t_{2m-n} е квадратен број, т.е. тој е точен квадрат. Докажи!

17. Ако $\frac{r(r+1)}{2}=t_r=k_s=s^2$, докажи дека

$$t_{3r+4s+1}=(2r+3s+1)^2. \quad (1)$$

18. Определи ги природните броеви p и q за кои важи

$$\frac{p(p+1)}{2}=q^2.$$

19. Со $[x]$ да го означиме најголемиот природен број кој е помал или еднаков на x. На пример, $[2,345]=2$, $[0,124]=0$. Ако m е триаголен број, т.е. $m=t_n$, тогаш $n=[\sqrt{2m}]$. Докажи!

20. Нека бројот $x=0,136051865...$ е формиран од цифрите на единиците на триаголните броеви. Дали x е рационален број?

21. Ако $t_1,t_2,...,t_n,...$ е низата триаголни броеви, тогаш

$$A=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+...+\frac{1}{t_n}+...=2.$$

22. Докажи дека сите броеви кои во систем со основа 9 се запишуваат само со цифрата 1 се триаголни броеви.

23. Докажи дека секој триаголен број, освен t_1 и t_3, може да се запише како збир на три, не задолжително различни триаголни броеви.

24. Докажи дека од низата триаголни броеви може да се избере бесконечна подниза таква што сите нејзини парцијални збирови се точни квадрати.

25. Докажи дека

$$t_{(n-1)^2+(n-1)-1}+t_{n^2+n-1}=n^4 .$$

26. Пресметај го збирот

$$S=\frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+\ldots+\frac{2020}{4\cdot 2020^4+1} .$$

27. Определи ја генераторната функција на низата триаголни броеви.

12. ФИБОНАЧИЕВИ И ЛУКАСОВИ БРОЕВИ

1. Реши ја диференцната равенка

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad (1)$$

со почетни услови $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

Низата $\{f_n\}$ која е решение на диференцната равенка (1) во литературата е позната како *Фибоначиева низа*, а нејзините членови како *Фибоначиеви броеви*.

2. Докажи дека ножеството $\{1,2,...,n\}$ содржи точно f_{n+2} подмножества (вклучувајќи го и празното множество) во кои не се содржат два последователни природни броја.

3. а) Нека a_n е бројот на начините на покривање на правоаголник $1\times n$ со домина 1×2 и квадрати 1×1. Докажи дека за секој $n\geq 1$ важи

$$a_n = f_{n+1}. \quad (1)$$

б) На колку начини правоаголник со димензии $2\times n$ може да се покрие со домина 1×2.

4. Фибоначиевиот број f_k е парен ако и само ако k е од видот $3n, n\in\mathbb{N}$. Докажи!

5. За секој $n\in\mathbb{N}_0$ важи $5\mid f_{5n}$. Докажи!

6. Докажи, дека бизата цифри на единиците на Фибоначиевите броеви е периодична со период 60.

7. Докажи дека бројот f_n е најблизок природен број на бројот $\frac{a^n}{\sqrt{5}}$, каде $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8. Докажи, дека бројот на цифрите на Фибоначиевиот број f_n е поголем од $\frac{n-2}{5}$.

9. Докажи дека за Фибоначиевите броеви важи:

а) $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$, $n \geq 2$

б) $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$,

в) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$, $n \geq 2$

г) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$, $n \geq 1$

д) $f_{n-m} f_{n+m} - f_n^2 = (-1)^{n+m-1} f_m^2$, $n > m$

ѓ) $f_n^4 - f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = 1$,

е) $f_{n+i} f_{n+j} - f_n f_{n+i+j} = (-1)^n f_i f_j$.

10. Докажи дека

$$f_{3n} = 3 f_n f_{n+1}^2 - 3 f_n^2 f_{n+1} + 2 f_n^3 .$$

11. Користејќи ја задача 2 докажи го Касиниевиот идентитет.

12. За секој природен број $n \geq 2$ точна е формулата

$$x^n = (x^2 - x - 1)(f_1 x^{n-2} + f_2 x^{n-3} + f_3 x^{n-4} + \dots + f_{n-2} x + f_{n-1}) + f_n x + f_{n-1} . \quad (1)$$

Докажи!

13. Докажи дека

$$f_1 - f_2 + f_3 - \dots - f_{2k-2} + f_{2k-1} = f_{2k-2} + 1 .$$

14. Користејќи ја задача 6 докажи го Касиниевиот идентитет

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n .$$

15. Нека се $m, n \geq 2$. Докажи дека

$$f_{n+m-1} = f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1} . \quad (1)$$

16. Докажи дека

а) $f_{2n+1} = f_n f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+1}$

б) $f_{3n} = f_n f_{2n+1} + f_{n-1} f_{2n}$

17. Докажи дека

$$f_{n+1} f_{n+2} f_{n+6} - f_{n+3}^3 = (-1)^n f_n .$$

18. Докажи дека за Фибоначиевите броеви важи:

а) $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$,

б) $\sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) f_i = f_{n+4} - (n + 3)$

в) $\sum_{i=1}^{n} i f_i = n f_{n+2} - f_{n+3} + 2$,

г) $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$

д) $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$,

ѓ) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_i = (-1)^n f_{n-1} - 1$, е) $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$.

19. Докажи деказа низата Фибоначиеви броеви $\{f_n\}$ важи

$$f_{n+2} + f_{n-2} = 3f_n, \qquad (1)$$

за $n = 0,1,2,3,...$.

20. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи равенството

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \underbrace{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\, 1+\cfrac{1}{1}}}}_{n}. \qquad (1)$$

21. Нека

$$x_1 = 2,\ x_2 = x_3 = 7 \text{ и } x_{n+1} = x_n x_{n-1} - x_{n-2},\text{ за } n \geq 3.$$

Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $x_n + 2$ е точен квадрат.

22. Докажи дека меѓу првите 10^8 членови на низата на Фибоначи

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\text{ за } n \geq 0$$

постои барем еден кој е делив со 10^4.

23. (*Теорема на Цезаро*). Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}$$

24. Докажи дека

$$f_n^2 = 2f_{n-1}^2 + 2f_{n-2}^2 - f_{n-3}^2,\text{ за } n \geq 0. \qquad (1)$$

25. Докажи дека

$$f_n^3 = 3f_{n-1}^3 + 6f_{n-2}^3 - 3f_{n-3}^3 - f_{n-4}^3,\text{ за } n \geq 0. \qquad (1)$$

26. Дали постојат бесконечно многу парови природни броеви (m,n) такви што $m\,|\,(n^2+1)$ и $n\,|\,(m^2+1)$.

27. Докажи дека ако го знаеме f_{2k+1}, тогаш можеме да ги најдеме f_{2k-1} и f_{2k+3}.

28. Докажи дека ако го знаеме f_{2k+2}, тогаш можеме да ги најдеме f_{2k} и f_{2k+4}.

29. Нека $m,n\in\mathbb{N}$, $1\le m,n\le 1981$ се такви што $|n^2-mn-m^2|=1$. Определи ја најголемата вредност на изразот m^2+n^2.

30. (*Теорема на Цекендорф*). Докажи, дека секој природен број n еднозначно може да се претстави во видот

$$n=\sum_{i\ge 2} c_i f_i,\quad c_i\in\{0,1\},\qquad c_i c_{i+1}=0.$$

Тоа значи дека во збирот никогаш не се појавуваат два последователни Фибоначиеви броја.

31. Со помош на генераторни функции изведи ја формулата за општиот член на низата на Фибоначи:

$$f_0=0,\ f_1=1,\quad f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\ \text{за } n\ge 0.$$

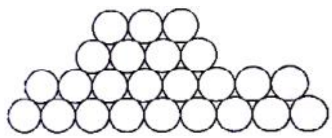
32. Претстави ги следниве низ со помош на Фибоначиевите броеви:

а) $a_0=r,\ a_1=s,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, за $n\ge 0$,

б) $b_0=0,\ b_1=1,\ b_{n+2}=b_{n+1}+b_n+c$, за $n\ge 0$,

в) $b_0=1,\ b_1=2,\ b_{n+2}=b_{n+1}b_n$, за $n\ge 0$.

33. а) *Куп* монети го нарекуваме распоредот на n исти монети во редови така што во првиот ред монетите формираат непрекината низа, а во горните редови секоја монета допира точно две монети од претходниот ред. Ако првиот ред содржи k монети, тогаш купот го означуваме со (n,k). На горниот цртеж е прикажан $(24,9)$ – куп.



Блок куп монети е куп во кој секој ред се состои само од една непрекината низа монети. Нека a_k е бројот блок купови монети кои во првиот ред содржат точно k монети, $k\ge 0$. Определи ја генераторната функција за низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

б) Докажи дека $a_k=f_{2k-1}$, за $k\ge 1$, каде $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ е низата Фибоначиеви броеви.

34. а) Докажи дека за секој $n\ge 1$ важи

$$\frac{f_{n-1}}{f_n}-\frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}=\frac{(-1)^n}{f_{2n}}. \tag{1}$$

б) Пресметај го збирот $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{f_{2^k}}$.

в) Пресметај го збирот на редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^k}}$.

35. Докажи дека за $n \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = f_{n+1} . \qquad (1)$$

36. Докажи дека

$$f_n = \frac{2}{\sqrt{5}} i^n \operatorname{sh} n(t - i \tfrac{®}{2}) , \qquad (1)$$

каде $t = \ln \sim\, = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ е функцијата синусхиперболикум.

37. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со равенствата

$$a_1 = 4,\ a_2 = a_3 = (a^2 - 2)^2 \text{ и } a_n = a_{n-1}a_{n-2} - 2(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3} + 8,\ n \ge 4 ,$$

каде $a > 2$ е природен број. Докажи дека бројот $2 + \sqrt{a_n}$ е точен квадрат за секој n .

38. Нека $\{f_n\}$ е низата на Фибоначи. Пресметај го збирот

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{2^i} = \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{2^2} + \frac{f_3}{2^3} + \dots . \qquad (1)$$

39. Реши ја диференцната равенка

$$l_{n+2} = l_{n+1} + l_n \qquad (1)$$

со почетни услови $l_1 = 1, l_2 = 3$.

Низата $\{l_n\}$ која е решение на диференцната равенка (1) во литературата е позната како *Лукасова низа*, а нејзините членови како *Лукасови броеви*.

40. Докажи дека за низите Фибоначиеви броеви $\{f_n\}$ и Лукасови броеви $\{l_n\}$ важи:

$$f_{n+1} + f_{n-1} = l_n \text{, за } n = 1, 2, 3, \dots . \qquad (1)$$

41. Докажи, дека множеството $\{1, 2, ..., n\}$ содржи точно l_n подмножества (вклучувајќи го и $\varnothing$) во кои не се наоѓаат два последователни броја, како ниту 1 и n истовремено.

42. Докажи дека за низите Фибоначиеви броеви $\{f_n\}$ и Лукасови броеви $\{l_n\}$ важи:

$$l_{n+1} + l_{n-1} = 5 f_n \,. \tag{1}$$

43. Докажи дека за секој природен број n важи

$$l_n^2 - 5 f_n^2 = 4 \cdot (-1)^n \,.$$

44. Докажи дека:

а) $f_{2n} = f_n l_n$,   б) $f_{m+1} l_n + f_m l_{n-1} = l_{m+n}$,

в) $2 f_{m+n} = f_m l_n + f_n l_m$,

45. Докажи дека

$$l_{n-1} l_{n+1} - l_n^2 = 5 \cdot (-1)^{n+1} \,.$$

46. За секој природен број k и за сите природни броеви n такви што $n \geq k$ важи

$$l_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} l_{n-i} \,. \tag{1}$$

Докажи!

47. Нека бесконечната реална матриаца $A = [a_{ij}]$ е определена со

$$a_{ij} = \binom{i}{j-i}, \text{ за секој } (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tag{1}$$

при што дополнително претпоставуваме дека се точни равенствата

$$\binom{n}{k} = 0, \text{ за } n < k \text{ или за } k < 0, \tag{2}$$

и нека бесконената реална матрица $B = [b_{ij}]$ е определена со

$$b_{ij} = \frac{j}{i} a_{ij}, \text{ за секој } (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,. \tag{3}$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{j} b_{ij} = l_j, \quad j \geq 1 \,. \tag{4}$$

48. Определи ја генераторната функција на низата Лукасови броеви:

$$l_1 = 1, l_2 = 3, \quad l_{n+2} = l_{n+1} + l_n, \text{ за } n \geq 1 \,.$$

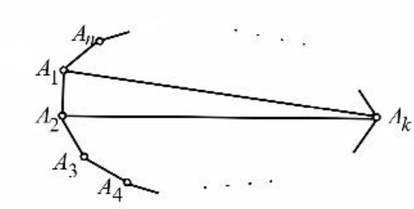
49. Докажи дека

$$l_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \,.$$

50. Во еден ред во кино сала има $5n$ места за седење, и по секои 5 места се наоѓа пролаз. Столицата може да биде стандардна (1 мест) или *love box* (2 места). На колку начини може да се постават столиците во еден ред така што никои два *love box* столици не се соседни и не постојат три стандардни столици по ред (столиците се сметаат за соседни и вослучај кога преминот е меѓу нив). Јасно, *love box* столицата не може да преминува преку пролазот.

13. КАТАЛАНОВИ БРОЕВИ

1. Нека е даден конвексен $n-$ аголник $A_1A_2...A_n$, (цртеж десно). Под *триангулација на $n-$аголникот* ќе подразбираме негова поделба на триаголници при што се исполнети условите:
а) или триаголниците немаат заеднички точки,
б) или имаат само заедничко теме,
в) или имаат заедничка страна.



Триангулацијата која се состојат само од дијагонали на $n-$аголникот ја нарекуваме дијагонална.
Нека со T_n, $n \geq 3$ го означиме бројот на дијагоналните триангулации на конвексниот $n-$аголник. Докажи, дека броевите $T_n, n \geq 2$ ја задоволуваат диференцната равенка
$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + ... + T_{n-1}T_3 + T_nT_2 . \qquad (1)$$

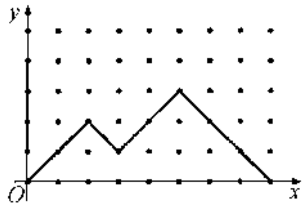
2. Докажи, дека броевите $T_n, n \geq 4$ на дијагоналните триангулации ја задоволуваат диференцната равенка
$$T_n = \frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + ... + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3) . \qquad (1)$$

3. Нека со T_n, $n \geq 2$ го означиме бројот на дијагоналните триангулации на конвексниот $n-$аголник. Докажи, дека за секој $n \geq 2$ важи
$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2} . \qquad (1)$$

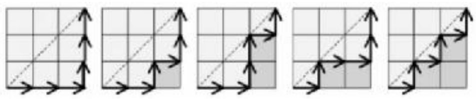
4. (*Проблем на загради*). а) Определи го бројот на начините на кои можат да се помножат n броеви.
б) Определи го бројот на различните начини на кои може да се помножат n броеви, чиј распоред е фиксиран. На пример, $x_1, x_2, ..., x_n$.

5. Да ја разгледаме целобројната решетка во првиот квадрант на Oxy рамнината. *Пат на Дик* ја нарекуваме секоја непрекината искршена линија со целобројни темиња, која се состои од $\mathbf{a}(1,1)$ и $\mathbf{b}(1,-1)$ и која почнува од ко-

ординатниот почеток, завршува на оската Ox и никогаш не оди под неа (цртеж десно). Притоа, делот од искршената линија кој се состои од еден вектор **a** или **b** го нарекуваме *чекор* во патот на Дик, а бројот на чекорите од кои е составен патот го нарекуваме *должина* на патот на Дик. Определи го бројот на патиштата на Дик со должина $2n$.



6. (*Патишта во целобројна мрежа*). Цебројната мрежа се состои од прави кои минуваат низ целобројните точки, кои се паралелни со координатните оски во Декартов кординатен систем. Разгледуваме дел од мрежата со големина $n\times n$. Определи го бројот на различни најкратки патишта во ваква целобројна мрежа кои тргнуваат од долниот лев агол и одат до горниот десен агол, но никогаш не ја преминуваат дијагоналата, односно патишта под дијагоналата од долниот лев агол до горниот десен агол по кои се движеме само горе и десно. На цртежот десно се прикажани патиштата во мрежата 3×3 .



7. Даден е природен број n . Еден шеф пишува секој ден по n писма и ги нумерира со броевите $1,2,3,...,n$. Кога ќе напише писмо тој го става најгоре во една кутија. Ако неговата секретарка е слободна, таа го зема најгорното писмо од кутијата и го отчукува. Понекогаш секретарката успева да го отчука писмото пред шефот да го стави следното, а понекогаш тој успева да стави едно или повеќе писма пред тоа време. Секретарката секогаш успева да ги отчука сите писма до крајот на работниот ден.
За една пермутација на броевите од 1 до n ќе велиме дека е печатна, ако е можно писмата да бидат отчукани во тој редослед. Определи го бројот на сите печатни пермутации.

8. (*Проблем на дисјунктни тетиви*). На кружницата се дадени $2n$ точки. На колку начини овие точки можат да се разбијат на n парови така што меѓу n – те тетиви определени со овие парови точки не постојат две кои се сечат?

9. Наставникот по физичко во сала наредил 30 ученици, така да сенаоѓаат во темиња на правилен триесетаголник. На колку начини може да се изберат 15парови кои ќе си додаваат со одбојкарски топки (се претпоставува дека движењето на топката е праволиниско), така што ќе бидеме сигурни дека никои две топки нема да се судрат.

10. За низата нули и единици со должина $2n$ ($2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$) ќе велиме дека е *урамнотежена* ако содржи n нули и n единици. За урамнотежената $2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$ ќе велиме дека е *добра* ако во ниту еден нејзин почетен дел нема повеќе нули од единици. Во спротивно ќе велиме дека $2n$-низата е *лоша*.

    Докажи, дека бројот на добри $2n$-низи над азбука $\{0,1\}$ е $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$.

11. Пред билетарница стојат $2n$ лица. Секоја од нив сака да купи по еден билет кој чини 50 денари. Меѓу лицата во редот точно n лица имаат по 50 денари, а останатите имаат по една банкнота од по 100 денари. На почетокот касата на билетарницата е празна. Колкав е бројот на распоредите на лицата така што продавачката може да врати кусур на секое лице кое купува билет?

12. (*Проблем на гласање на Бертранд*). На претседателски избори има два кандидати A и B за кои гласаат $2n$ гласачи. На колку начини можеме да ги преброиме резултатите од гласањето, така што во ниту еден момент на броењето B нема да има повеќе гласови од A, а конечниот резултат ќе биде нерешен?

13. Кловн стои на работ на базени држи вреќа во која има n сини и n црвени топчиња. Од вреќата без гледање извлекува топче по топче. Кога ќе извлече сино топче прави чекор кон базенот, а кога ќе извлече црвено топче прави чекор од базенот (се претпоставува дека сите чекори се со иста должина). На колку начини кловнот може да ги извлече топчињата, а притоа да не падне во базенот?

14. На хоризонтална права се земени $2n$ точки. Определи го бројот на начините на поврзување на овие точки со дисјунктни лаци така што сите лаци се на иста страна од правата и секој лак поврзува две точки. На долниот цртеж се дадени сите поврзувања за 6 точки.

15. Определи ја генераторната функција за низата Каталанови броеви.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. МНОЖЕСТВА И ПРЕСЛИКУВАЊА

1. За множеството A ќе велиме дека е *подмножество* од множеството B ако од $x \in A$ следува $x \in B$. Притоа означуваме $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. За множествата A и B ќе велиме дека се *еднакви* ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Притоа пишуваме $A = B$. Ако $A \subseteq B$ и B содржи елемент кој не му припаѓа на A, тогаш ќе велиме дека A е *вистинско подмножество* од B и пишуваме $A \subset B$ или $B \supset A$. Нека A е произволно множество. Множеството $\mathcal{P}(A)$ определено со $X \in \mathcal{P}(A)$ ако и само ако $X \subseteq A$ го нарекуваме *партитивно множество* (*булеан*) на множеството A.
Докажи дека за секои множества A, B и C важи
i) $A = A$,
ii) Ако $A = B$, тогаш $B = A$.
iii) Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогаш $A \subseteq C$.
iv) Ако $A = B$ и $B = C$, тогаш $A = C$.
Решение. Ќе го докажеме само тврдењето *iii*).
Да претпоставиме дека $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$. Ако $x \in A$, тогаш од $A \subseteq B$ следува дека $x \in B$. Понатаму, бидејќи $B \subseteq C$, добиваме дека $x \in C$. Според тоа, од $x \in A$ следува дека $x \in C$, а тоа значи дека $A \subseteq C$.
Слично се докажуваат и останатите три тврдења. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

2. *Унија* на множествата A и B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат барем на едно од множествата A и B. Притоа означуваме $C = A \cup B$. Според тоа, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.
Пресек на множествата A и B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат на секое од множествата A и B. Притоа означуваме $C = A \cap B$. Според тоа, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.
За множествата A и B ќе велиме дека се *дисјунктни* ако $A \cap B = \varnothing$.
Докажи дека за секои множества A, B и C важи
i) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$,
ii) $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$; $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$,
iii) $A \cap A = A$; $A \cup A = A$, (закони за идемпотентност),
iv) $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$, (комутативни закони),
v) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, (асоцијативни закони),

vi) $A\cap(A\cup B)=A;\quad A\cup(A\cap B)=A,$ (закони за апсорпција).

Решение. Ќе го докажеме првото равенство во *v)*. Имаме

$$x\in A\cap(B\cap C)\Rightarrow(x\in A \text{ и } x\in B\cap C)\Rightarrow(x\in A \text{ и } (x\in B \text{ и } x\in C))$$
$$\Rightarrow((x\in A \text{ и } x\in B) \text{ и } x\in C)\Rightarrow(x\in A\cap B \text{ и } x\in C)\Rightarrow x\in(A\cap B)\cap C$$

што значи $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$.

Од друга страна имаме

$$x\in(A\cap B)\cap C\Rightarrow(x\in A\cap B \text{ и } x\in C)\Rightarrow((x\in A \text{ и } x\in B) \text{ и } x\in C)$$
$$\Rightarrow(x\in A \text{ и } (x\in B \text{ и } x\in C))\Rightarrow(x\in A \text{ и } x\in B\cap C)\Rightarrow x\in A\cap(B\cap C)$$

што значи $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$.

Конечно, од $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$ и $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$ следува

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\,.$$

Слично се докажуваат останатите тврдења. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

3. (*Дистрибутивни закони*). Докажи дека за секои множества A,B и C точни се следниве тврдења:

i) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

Решение. *i*) Нека $x\in(A\cup B)\cap C$. Според тоа, $x\in A\cup B$ и $x\in C$, што значи дека $x\in A$ или, $x\in B$ и $x\in C$. Затоа, $x\in A$ и $x\in C$ или, $x\in B$ и $x\in C$. Но, тоа значи дека $x\in A\cap C$ или $x\in B\cap C$, т.е. $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$. Според тоа

$$(A\cup B)\cap C\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)\,.$$

Ако $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$, тогаш $x\in A\cap C$ или $x\in B\cap C$. Затоа, $x\in A$ и $x\in C$ или, $x\in B$ и $x\in C$, што значи дека $x\in A$ или $x\in B$, и $x\in C$, односно $x\in A\cup B$ и $x\in C$. Но, тоа значи дека $x\in(A\cup B)\cap C$. Според тоа

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap C\,.$$

Конечно, бидејќи

$$(A\cup B)\cap C\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C) \text{ и } (A\cap C)\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap C\,,$$

добиваме

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)\,.$$

Равенството под *ii*) се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Забелешка. За произволни множества $X_a, a\in A,\ Y_b, b\in B$ и Y важи:

а) $(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap Y=\bigcup_{a\in A}(X_a\cap Y)$,

б) $(\bigcap_{a\in A} X_a)\cup Y=\bigcap_{a\in A}(X_a\cup Y)$, в) $(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap(\bigcup_{b\in B} Y_b) = \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} (X_a \cap Y_b)$,

г) $(\bigcap_{a\in A} X_a)\cup(\bigcap_{b\in B} Y_b) = \bigcap_{\substack{a\in A\\ b\in B}} (X_a \cup Y_b)$

Доказот на равенството а) е аналоген на доказот на равенствато *i)* од претходната задача. На читателот му препорачуваме самостојно да ги докаже овие равенства.

4. *Разлика* на множествата A и B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи на множеството A кои не му припаѓаат на множеството B. Означуваме $C = A\setminus B$. Според тоа, $A\setminus B = \{x \mid x\in A$ и $x\notin B\}$.

Докажи дека за секои множества A и B важи.

i) $A\setminus\emptyset = A$, $A\setminus A=\emptyset$, $\emptyset\setminus A=\emptyset$.

ii) $x\notin A\setminus B$ ако и само ако $x\notin A$ или $x\in B$.

iii) Ако $A\subseteq B$, тогаш $A = B\setminus(B\setminus A)$.

iv) $A\setminus B=\emptyset$ ако и само ако $A\subseteq B$.

v) $A\setminus B = A$ ако и само ако $A\cap B=\emptyset$.

Упатство. Искористи ја дефиницијата на разликата на множества.

5. Докажи ги равенствата

а) $M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a) = \bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$,

б) $M\setminus(\bigcup_{a\in A} M_a) = \bigcap_{a\in A}(M\setminus M_a)$.

Решение. а) Нека $x\in M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)$. Тогаш $x\in M$ и $x\notin \bigcap_{a\in A} M_a$. Од последната релација следува дека постои $a_0\in A$ таков што $x\notin M_{a_0}$, па затоа $x\in M\setminus M_{a_0}$. Значи, $x\in \bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$, т.е. $M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)\subseteq \bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$.

Обратно, нека $y\in \bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$. Тогаш постои $a_1\in A$ таков што $x\in M\setminus M_{a_1}$.

Според тоа, $y\in M$ и $y\notin M_{a_1}$, па затоа $y\in M$ и $y\notin \bigcap_{a\in A} M_a$, што значи дека $y\in M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)$. Според тоа, $\bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)\subseteq M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)$.

б) Доказот е аналоген на доказот на равенството под а). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

6. Докажи дека

а) $(\bigcup_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup_{a\in A} N_a)\subseteq \bigcup_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$, б) $(\bigcap\limits_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap\limits_{a\in A} N_a) \supseteq \bigcap\limits_{a\in A}(M_a \setminus N_a)$.

Решение. а) Нека $x\in(\bigcup\limits_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup\limits_{a\in A} N_a)$. Тогаш $x\in \bigcup\limits_{a\in A} M_a$ и $x\notin \bigcup\limits_{a\in A} N_a$, т.е. постои $a_0\in A$ таков што $x\in M_{a_0}$ и за секој $x\in A$ важи $x\notin N_a$. Значи, постои $a_0\in A$ таков што $x\in M_{a_0}\setminus N_{a_0}$, па затоа $x\in \bigcup\limits_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$, односно $(\bigcup\limits_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup\limits_{a\in A} N_a)\subseteq \bigcup\limits_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$.

б) Нека $x\in \bigcap\limits_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$. Значи, за секој $x\in A$ важи $x\in M_a\setminus N_a$, т.е. за секој $x\in A$ важи $x\in M_a$ и $x\notin N_a$. Според тоа, $x\in \bigcap\limits_{a\in A} M_a$ и $x\notin \bigcap\limits_{a\in A} N_a$, па затоа $x\in(\bigcap\limits_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap\limits_{a\in A} N_a)$, односно $(\bigcap\limits_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap\limits_{a\in A} N_a)\supseteq \bigcap\limits_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$.

7. Докажи дека $A\setminus B\subseteq (A\setminus D)\cup(D\setminus B)$, за секои множества A, B и D.

Решение. Нека $x\in A\setminus B$. Тогаш $x\in A$ и $x\notin B$. Ако $x\notin D$, тогаш $x\in A\setminus D$ и затоа $x\in(A\setminus D)\cup(D\setminus B)$. Ако $x\in D$, тогаш бидејќи $x\notin B$ следува $x\in D\setminus B$ и затоа $x\in(A\setminus D)\cup(D\setminus B)$. Според тоа, $A\setminus B\subseteq(A\setminus D)\cup(D\setminus B)$.

8. Нека е дадено множеството A и $B\subseteq A$. *Комплемент* на B во однос на A го нарекуваме множеството ${}^cB = A\setminus B$. Според тоа, ${}^cB=\{x\mid x\in A \text{ и } x\notin B\}$. Нека $A,B\subseteq X$. Докажи дека

i) ${}^c({}^cA)=A$,

ii) $A\subseteq B$ ако и само ако ${}^cB\subseteq {}^cA$,

iii) ${}^c(A\cup B)={}^cA\cap {}^cB$, и

iv) ${}^c(A\cap B)={}^cA\cup {}^cB$.

Решение. Ќе ги докажеме првото и третото тврдење. Останатите тврдења се докажуваат аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

i) Равенството ${}^c({}^cA)=A$ следува од $x\in {}^c({}^cA)\Leftrightarrow x\notin {}^cA\Leftrightarrow x\in A$.

iii) Имаме

$$x\in {}^c(A\cup B)\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A \text{ и } x\notin B\Leftrightarrow x\in {}^cA \text{ и } x\in {}^cB\Leftrightarrow x\in {}^cA\cap {}^cB.$$

Тврдењата искажани под *iii*) и *iv*) се познати како *Де Морганови закони*.

9. *Декартов производ* на множествата A и B го нарекуваме множеството C, во ознака $C=A\times B$, кое се состои од сите *подредени парови* (x,y), каде што $x\in A,\ \ y\in B$. Притоа, $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ ако и само ако $x_1=x_2,\ \ y_1=y_2$. Спо-

ред тоа, $C=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$. Декартовиот производ на непразното множество A со самото себе го нарекуваме *Декартов квадрат* на множеството A и го означуваме A^2.

Аналогно дефинираме Декартов производ на множествата A_i, $i=1,2,\ ...,n$. Имено, $A_1\times A_2\times...\times A_n=\{(a_1,a_2,...,a_n)\mid a_i\in A_i,\ i=1,2,...,n\}$.

Докажи:

а) $\varnothing\times A=B\times\varnothing=\varnothing$, за секои множества A и B.

б) $A_1\subseteq A_2$ и $B_1\subseteq B_2$, тогаш $A_1\times B_1\subseteq A_2\times B_2$.

Решение. б) Ако $(x,y)\in A_1\times B_1$, тогаш $x\in A_1$ и $y\in B_1$. Бидејќи $A_1\subseteq A_2$ и $B_1\subseteq B_2$, следува дека $x\in A_2$ и $y\in B_2$, па затоа $(x,y)\in A_2\times B_2$. Според тоа, $A_1\times B_1\subseteq A_2\times B_2$.

Доказот на тврдењето под а) го препуштаме на читателот за вежба.

10. Докажи дека за секои множества $A_i, i=1,2,...,n$ и $B_i, i=1,2,...,n$ важи

а) $(A_1\times...\times A_n)\cap(B_1\times...\times B_n)=(A_1\cap B_1)\times...\times(A_n\cap B_n)$

б) $(A_1\times...\times A_n)\cup(B_1\times...\times B_n)\subseteq(A_1\cup B_1)\times...\times(A_n\cup B_n)$.

Решение. а) Нека $x=(x_1,...,x_n)\in(A_1\times...\times A_n)\cap(B_1\times...\times B_n)$. Според тоа, $x\in A_1\times...\times A_n$ и $x\in B_1\times...\times B_n$, односно $x_i\in A_i$ и $x_i\in B_i$, за $i=1,2,...,n$. Но, тоа значи $x_i\in A_i\cap B_i$ за $i=1,2,...,n$, т.е. $x\in(A_1\cap B_1)\times...\times(A_n\cap B_n)$.

Обратно, од $x=(x_1,...,x_n)\in(A_1\cap B_1)\times...\times(A_n\cap B_n)$ следува $x_i\in A_i\times B_i$ за $i=1,2,...,n$. Според тоа, $x_i\in A_i$ и $x_i\in B_i$, за $i=1,2,...,n$, па затоа

$$x=(x_1,...,x_n)\in A_1\times...\times A_n \text{ и } x=(x_1,...,x_n)\in B_1\times...\times B_n,$$

т.е. $x=(x_1,...,x_n)\in(A_1\times...\times A_n)\cap(B_1\times...\times B_n)$.

б) Нека $x=(x_1,...,x_n)\notin(A_1\cup B_1)\times...\times(A_n\cup B_n)$. Тоа значи дека постои $i_0\in\{1,2,...,n\}$ таков што $x_{i_0}\notin A_{i_0}\cup B_{i_0}$, т.е. $x_{i_0}\notin A_{i_0}$ и $x_{i_0}\notin B_{i_0}$. Сега, од $x_{i_0}\notin A_{i_0}$ следува $x\notin A_1\times...\times A_n$, а од $x_{i_0}\notin B_{i_0}$ следува $x\notin B_1\times...\times B_n$. Значи, $x\notin(A_1\times...\times A_n)\cup(B_1\times...\times B_n)$.

Обратната инклузија не важи. Навистина, доволно е да го разгледаме случајот кога $n=2$, $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{a,b\}$, $B_1=\{3,4\}$ и $B_2=\{c,d\}$.

11. Дадени се множествата A и B. Определи го бројот на множествата X за кои важи $A\cap X=B\cap X=A\cap B$ и $A\cup B\cup X=A\cup B$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$(A\cup B)\cap X=(A\cap X)\cup(B\cap X)=A\cap B.$$

Од друга страна

$$(A\cup B)\cap X=(A\cup B\cup X)\cap X=X,$$

па затоа $X=A\cap B$, т.е. постои само едно множество со саканите својства.

12. На една олимпијада биле дадени три задачи A,B и C. Дваесет и пет учесници на натпреварот решиле барем една задача. Учесниците кои ја решиле задачата B, а не ја решиле задачата A, биле два пати повеќе од оние кои ја решиле задачата C, а не ја решиле задачата A. Учесниците кои ја решиле само задачата A, биле за еден повеќе од оние кои покрај задачата A, решиле и уште некоја друга задача. Половина од учениците кои решиле една задача, ја решиле само задачата A. Колку ученици ја решиле само задачата B.

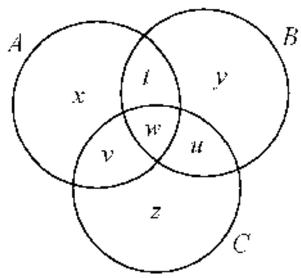
Решение. Нека x, y, z е бројот на ученици кои ја решиле само задачата A, B, C соодветно; t, u, v е бројот на ученици кои ги решиле само задачите A и B, B и C, A и C, соодветно, и нека w е бројот на ученици кои ги решиле сите три задачи. Имаме:

$$x+y+z+t+u+v+w=25 \qquad (1)$$

$$y+u=2(z+u) \qquad (2)$$

$$x-1=t+v+w \qquad (3)$$

$$x+y+z=2(y+z) \qquad (4)$$



Јасно, $x,y,z,t,u,v,w\in\mathbb{N}$. Од (1) и (3) следува

$$2x+y+z+u=26, \qquad (5)$$

а од (2) и (4) се добива

$$y-2z-u=0 \qquad (2')$$

$$-x+y+z=0 \qquad (4')$$

Сега од (5) , (2') и (4') добиваме

$$z=26-4y \qquad (6)$$

$$u=y-2(26-4y)=9y-52 \qquad (7)$$

Бидејќи y, z и u се природни броеви, од (6) добиваме $y\le 6$, а од (7) добиваме $y\ge 6$. Значи, ако постои решение, тогаш $y=6$.

Решение постои, на пример: $x=8,\ y=6,\ z=2,\ t=3,\ u=2,\ v=2,\ w=2.$

13. Нека M е подмножество од множеството $\{1,2,...,15\}$ такво што производот од три различни елементи од M не е точен квадрат. Определи го максималниот број на елементи во M.

Решение. За секое множество

$$A=\{1,4,9\},\ b=\{2,6,12\},\ C=\{3,5,15\} \text{ и } D=\{7,8,14\}$$

производот на неговите елементи е точен квадрат. Бидејќи овие множества се по парови дисјунктни, ако M има најмалку 12 елементи, тогаш постои барем едно од множествата A,B,C,D кое целосно се содржи во M, што е противречност. Значи, $|M|\le 11$.

Нека претпоставиме дека $|M|=11$. Во овој случај во M не припаѓа точно по еден елемент од A,B,C,D. Јасно, $10\in M$ бидејќи 10 не се содржи во ниту едно од множествата A,B,C,D. Ниту едно од множествата $\{1,4,9\},\{2,5\}$, $\{6,15\}$ и $\{7,8,14\}$ не е подмножество на M бидејќи

$$1\cdot 4\cdot 9=6^2,\ 2\cdot 5\cdot 10=10^2,\ 6\cdot 10\cdot 15=30^2,\ 7\cdot 8\cdot 14=28^2.$$

Оттука $3,12\in M$. Според тоа ниту едно од множествата $\{1\},\{4\},\{9\},\{2,6\}$, $\{5,15\},\{7,8,14\}$ не е подмножество на M. Значи $|M|\le 15-6=9$, што противречи на $|M|=11$.

Според тоа, $|M|\le 10$, а дека $|M|=10$ покажува множењството

$$M=\{1,4,5,6,7,10,11,12,13,14\},$$

кое го задоволува условот на задачата.

14. Ги разгледуваме сите подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои не содржат два последователни броја и за секое од нив го пресметуваме производот на неговите елементи. Докажи дека збирот на квадратите на овие производи е еднаков на $(n+1)!-1$.

Решение. Бараниот збир да го означиме со S_n. За $n=1,2$ непосредно се проверува дека $S_n=(n+1)!-1$. Нека $n>2$. Збирот по оние подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои не го содржат n е еднаков на S_{n-1}. Збирот по подмножествата различни од $\{n\}$ кои го содржат n и не го содржат $n-1$ е еднаков на n^2S_{n-2}. Затоа важи $S_n=S_{n-1}+n^2S_{n-2}+n^2$. Сега тврдењето лесно се докажува со математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

15. Избрани се различни затворени интервали, со должина поголема од 0 и со краеви во целобројните точки од 0 до 2013. Притоа, ако еден интервал се содржи во друг интервал, тогаш тие два интервала имаат една заедничка крајна точка. Определи го најголемиот можен број на вакви интервали.

Решение. На интервалот $[i,j]$ му го придружуваме бројот $i+j$. Најголемиот број интервали со својството кога еден интервал се содржи во друг интервал, двата интервали да имаат заедничка крајна точка се добива ако не постојат два интервали на кои им е доделен ист број (Зошто?). Бидејќи придружените броеви се природни и не се поголеми од $2012+2013=4025$, заклучуваме дека имаме најмногу 4025 интервали. Пример со 4025 интервали добиваме ако ги земеме сите интервали со една крајна точка 0 или 2013.

16. Нека A и B се две непразни множества. Ако на секој елемент $x \in A$ му е придружен, по некое правило f, еднозначно определен елемент $y \in B$, тогаш велиме дека f е *пресликување* (*функција*) од A во B и пишуваме $f : A \to B$. За елементот $y \in B$ велиме дека е *слика* на елементот $x \in A$ и пишуваме $y = f(x)$. Множеството A го нарекуваме *домен*, а множеството B - *кодомен* на пресликувањето f. Множеството $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ го нарекуваме *ранг* на функцијата f.

Со $I_A(x) = x$, за секој $x \in A$ е определено пресликување $I_A : A \to A$ кое го нарекуваме *идентично пресликување*.

За две пресликувања $f : A \to B$ и $g : C \to D$ ќе велиме дека *се еднакви* ако $A = C,\ B = D$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$.

Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се две пресликувања. За секој $x \in A$ ставаме $h(x) = g(f(x))$ и добиваме пресликување $h : A \to C$ кое го нарекуваме *композиција на пресликувањата* f и g и го означуваме со $h = g \circ f$.

Докажи:

а) Ако $f : A \to B$, тогаш $f \circ I_A = f$ и $I_B \circ f = f$.

б) Ако $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$, тогаш $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Решение. а) Пресликувањата $f \circ I_A$ и f имаат исти домени и кодомени и притоа за секој $x \in A$ важи

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x),$$

па затоа $f \circ I_A = f$.

Аналогно се докажува дека $I_B \circ f = f$.

б) Пресликувањата $h \circ (g \circ f)$ и $(h \circ g) \circ f$ имаат исти домен A и кодомен D и притоа за секој $x \in A$ важи

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

од што следува $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

17. За пресликувањето $f : A \to B$ ќе велиме дека е *инјекција* ако од $x_1 \neq x_2$ следува $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. различни елементи имаат различни слики.

Докажи, ако $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се инјекции, тогаш и $g \circ f$ е инјекција.

Решение. Нека f и g се инјекции. Ако $x_1, x_2 \in A$ се такви, што $x_1 \neq x_2$, тогаш бидејќи f е инјекција, добиваме $f(x_1) \neq f(x_2)$. Сега, од $f(x_1) \neq f(x_2)$ и фактот дека g е инјекција имаме $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, односно

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2),$$

што значи дека $g \circ f$ е инјекција.

18. За пресликувањето $f : A \to B$ ќе велиме дека е *сурјекција* ако за секој $y \in B$ постои $x \in A$ таков, што $y = f(x)$, т.е. секој елемент на B е слика на барем еден елемент на A.
Докажи, ако $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се сурјекции, тогаш и $g \circ f$ е сурјекција.
Решение. Нека f и g се сурјекции и нека $z \in C$ е произволен. Бидејќи g е сурјекција, добиваме дека за секој $z \in C$ постои барем еден $y \in B$ таков што $z = g(y)$. Може да постојат и повеќе елементи во B со ова својство. Избираме еден од овие елементи y и бидејќи f е сурјекција, следува дека постои елемент $x \in A$ таков што $y = f(x)$. Според тоа, за секој $z \in C$ постои $x \in A$ таков што $g(f(x)) = g(y) = z$, што значи дека $g \circ f$ е сурјекција.

19. За пресликувањето $f : A \to B$ ќе велиме дека е *биекција* ако тоа е и инјекција и сурјекција.
Докажи, ако пресликувањата $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се биекции, тогаш и нивната композиција $g \circ f$ е биекција.
Решение. Нека f и g се биекции. Тоа значи дека f и g се инјекции, па од задача 15 следува дека $g \circ f$ е инјекција. Понатаму, f и g се сурјекции, па од задача 16 следува дека $g \circ f$ е сурјекција.
Конечно, $g \circ f$ е инјекција и сурјекција, па значи тоа е биекција.

20. Ако $f : A \to B$ е биекција, тогаш со $g(y) = x$, за секој $y \in B$, ако и само ако $y = f(x)$ е определено пресликување $g : B \to A$ кое го нарекуваме *инверзно* на пресликувањето f. За инверзното пресликување ја прифаќаме ознаката $g = f^{-1}$.
Ако $f : A \to B$ е биекција, тогаш инверзното пресликување $f^{-1} : B \to A$ е биекција. Докажи!
Решение. Јасно, f^{-1} е пресликување од B во A.
Ако $y_1 \neq y_2$, тогаш $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ бидејќи во спротивно еден ист елемент од A со f ќе се преслика во два различни елементи од B, што не е можно бидејќи f е пресликување. Значи f^{-1} е инјекција.
Ако $x \in A$, тогаш $x = f^{-1}(y)$ каде што $y = f(x)$, што значи дека f^{-1} е сурјекција.

Конечно, f^{-1} е инјекција и сурјекција, па значи е биекција.

21. Докажи дека за секое непразно множество A пресликувањето I_A е биекција и важи $I_A^{-1} = I_A$.

Решение. За секој $x \in A$, важи $I_A(x) = x$, што значи дека I_A е сурјекција. Понатаму, од $x \neq y$ следува $I_A(x) \neq I_A(y)$, т.е. I_A е инјекција, па значи е биекција.

Јасно, I_A^{-1} е пресликување од A во A. Ако $I_A^{-1}(y) = x$, тогаш $I_A(x) = y$ и како $I_A(x) = x$, добиваме $x = y$. Според тоа, $I_A^{-1}(y) = y = I_A(y)$, па затоа $I_A^{-1} = I_A$.

22. Докажи дека, ако $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се биекции, тогаш

а) $(f^{-1})^{-1} = f$,

б) $f \circ f^{-1} = I_B$,

в) $f^{-1} \circ f = I_A$,

г) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Решение. Тврдењата непосредно следуваат од дефинициите на инверзното пресликување, композицијата на пресликувања и задача 19. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

23. Нека $f: X \to Y$. За секое множество $B \subseteq Y$ дефинираме множество

$$f^{-1}(B) = \{x \mid \text{постои } x \in X \text{ таков што } f(x) \in B\}.$$

Докажи дека

а) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ за секое множество $B \subseteq Y$.

б) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ за секое множество $A \subseteq X$.

в) $f(f^{-1}(B)) = B$ за секое множество $B \subseteq Y$ ако и само ако f е сурјекција.

г) $f^{-1}(f(A)) = A$ за секое множество $A \subseteq X$ ако и само ако f е инјекција.

Решение. а) Нека $y \in f(f^{-1}(B))$. Тоа значи, дека постои $x \in f^{-1}(B)$ таков што $y = f(x)$ и $f(x) \in B$. Според тоа, $y \in B$, па затоа $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Во случајов обратната инклузија не е точна. Најди пример.

б) Ако $x \in A$, тогаш $f(x) \in f(A)$, па затоа $x \in f^{-1}(f(A))$. Последното значи дека $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

Во случајов обратната инклузија не е точна. Најди пример.

в) Нека $f(f^{-1}(B))=B$ за секое множество $B\subseteq Y$ и $y\in Y$. Ќе докажеме дека $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$. Навистина, ако $f^{-1}(\{y\})=\varnothing$, тогаш $\{y\}=f^{-1}(\{y\})=\varnothing$, што е противречност. Според тоа, постои $x\in X$ таков што $x\in f^{-1}(\{y\})$, што значи дека постои $x\in X$ таков што $f(x)=y$, т.е. пресликувањето f е сурјекција.

Во а) докажавме дека $f(f^{-1}(B))\subseteq B$ за секое множество $B\subseteq Y$. Ќе докажеме дека ако f е сурјекција, тогаш $B\subseteq f(f^{-1}(B))$, за секое множество $B\subseteq Y$. Ако $y\in B$, тогаш бидејќи f е сурјекција постои $x\in X$ таков што $f(x)=y$. Според тоа, постои $x\in X$ таков што $x\in f^{-1}(B)$. Но, тоа значи дека $y=f(x)\in f(f^{-1}(B))$. Конечно $B\subseteq f(f^{-1}(B))$.

г) Нека $f^{-1}(f(A))=A$ за секое множество $A\subseteq X$ и $f(x_1)=f(x_2)$. Тогаш $f(\{x_1\})=f(\{x_2\})$, па затоа $\{x_1\}=\{x_2\}$, односно $x_1=x_2$, т.е. f е инјекција.

Во б) докажавме дека $f^{-1}(f(A))\supseteq A$ за секое множество $A\subseteq X$. Ќе докажеме дека ако f е инјекција, тогаш $f^{-1}(f(A))\subseteq A$ за секое множество $A\subseteq X$. Ако $x\notin A$, тогаш $f(x)\notin f(A)$. Навистина, ако $f(x)\in f(A)$, тогаш постои $x_1\in A$ таков што $f(x_1)=f(x)$ и како f е инјекција добиваме дека $x=x_1\in A$, што е противречност. Сега, од $f(x)\notin f(A)$ добиваме дека $x\notin f^{-1}(f(A))$, па затоа $f^{-1}(f(A))\subseteq A$.

24. Нека $f:X\to Y$ и $M_a\subseteq X$ за секој $a\in A$. Докажи дека

а) $f(\bigcup\limits_{a\in A}M_a)=\bigcup\limits_{a\in A}f(M_a)$ и

б) $f(\bigcap\limits_{a\in A}M_a)\subseteq\bigcap\limits_{a\in A}f(M_a)$.

Решение. а) Нека

$$f(x)\in f(\bigcup_{a\in A}M_a)=\{f(t)\,|\,t\in\bigcup_{a\in A}M_a\}.$$

Според тоа, $x\in\bigcup\limits_{a\in A}M_a$, т.е. постои $a_0\in A$ таков што $x\in M_{a_0}$. Значи, постои $a_0\in A$ таков што $f(x)\in f(M_{a_0})$, однсно $f(x)\in\bigcup\limits_{a\in A}f(M_a)$.

Обратно, ако $f(x)\in\bigcup\limits_{a\in A}f(M_a)$, тогаш $f(x)\in f(M_{a_0})$ за некој $a_0\in A$. Според тоа, постои $a_0\in A$ таков што $x\in M_{a_0}$. Значи, $x\in\bigcup\limits_{a\in A}M_a$, од каде добиваме $f(x)\in f(\bigcup\limits_{a\in A}M_a)$.

б) Од $f(x)\in f(\bigcap_{a\in A} M_a)=\{f(t)\mid t\in \bigcap_{a\in A} M_a\}$ следува $x\in \bigcap_{a\in A} M_a$. Според тоа, за секој $a\in A$ важи $x\in M_a$, од каде добиваме дека за секој $a\in A$ важи $f(x)\in f(M_a)$. Значи, $f(x)\in \bigcap_{a\in A} f(M_a)$, т.е. $f(\bigcap_{a\in A} M_a)\subseteq \bigcap_{a\in A} f(M_a)$.

Во случајов обратната инклузија не важи. Најди пример.

25. Нека $f:X\to Y$ и $N_a\subseteq Y$ за секој $a\in A$. Докажи дека

а) $f^{-1}(\bigcup_{a\in A} N_a)=\bigcup_{a\in A} f^{-1}(N_a)$ и

б) $f^{-1}(\bigcap_{a\in A} N_a)=\bigcap_{a\in A} f^{-1}(N_a)$.

Решение. а) Ако $x\in f^{-1}(\bigcup_{a\in A} N_a)$, тогаш $f(x)\in \bigcup_{a\in A} N_a$. Според тоа, постои $a_0\in A$ таков што $f(x)\in N_{a_0}$, т.е. постои $a_0\in A$ таков што $x\in f^{-1}(N_{a_0})$, што значи дека $x\in \bigcup_{a\in A} f^{-1}(N_a)$.

Нека $x\in \bigcup_{a\in A} f^{-1}(N_a)$. Тогаш постои $a_1\in A$ таков што $x\in f^{-1}(N_{a_1})$, т.е. $f(x)\in N_{a_1}$ за некој $a_1\in A$. Значи, $f(x)\in \bigcup_{a\in A} N_a$, односно $x\in f^{-1}(\bigcup_{a\in A} N_a)$.

б) Нека $x\in f^{-1}(\bigcap_{a\in A} N_a)$. Тогаш $f(x)\in \bigcap_{a\in A} N_a$, па затоа $f(x)\in N_a$ за секој $a\in A$. Според тоа, $x\in f^{-1}(N_a)$ за секој $a\in A$, па затоа $x\in \bigcap_{a\in A} f^{-1}(N_a)$.

Обратно, ако $x\in \bigcap_{a\in A} f^{-1}(N_a)$, тогаш $x\in f^{-1}(N_a)$ за секој $a\in A$, па затоа $f(x)\in N_a$ за секој $a\in A$. Според тоа, $f(x)\in \bigcap_{a\in A} N_a$, т.е. $x\in f^{-1}(\bigcap_{a\in A} N_a)$.

26. Нека $f:X\to Y$ и $M,N\subseteq Y$. Докажи дека $f^{-1}(M\setminus N)=f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$.

Решение. Ако $x\in f^{-1}(M\setminus N)$, тогаш $f(x)\in M\setminus N$, односно $f(x)\in M$ и $f(x)\notin N$. Но, тоа значи дека $x\in f^{-1}(M)$ и $x\notin f^{-1}(N)$, од каде добиваме дека $x\in f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$.

Ако $x\in f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$, тогаш $x\in f^{-1}(M)$ и $x\notin f^{-1}(N)$, т.е. $f(x)\in M$ и $f(x)\notin N$. Според тоа, $f(x)\in M\setminus N$, од каде следува дека $x\in f^{-1}(M\setminus N)$.

27. Нека A и B се две множества. Множеството $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ го нарекуваме *симетрична разлика* на множествата A и B.

Дадени се n различни множества $A_1, A_2, ..., A_n$. Докажи дека меѓу множествата $A_i \Delta A_j$ ($1 \le i \le j \le n$) има барем n различни.

Решение. Да означиме $f(X) = X \Delta A_1$. Доволно е да се докаже дека од $X \ne Y$ следува $f(X) \ne f(Y)$. Всушност важи

$$\begin{aligned} f(f(X)) &= (X \Delta A_1) \Delta A_1 \\ &= ((X \Delta A_1) \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus (X \Delta A_1)) \\ &= (X \setminus A_1) \cup (X \cap A_1) = X, \end{aligned}$$

што значи дека пресликувањето f е биекција, од што следува тврдењето на задачата.

28. За множествата A и B ќе велиме дека се *еквивалентни*, во ознака $A \sim B$, ако постои биекција f од A во B. Докажи, дека за секои множества A, B и C важи:
i) $A \sim A$,
ii) Ако $A \sim B$, тогаш $B \sim A$, и
iii) Ако $A \sim B$ и $B \sim C$, тогаш $A \sim C$.

Решение. *i)* Пресликување $I_A : A \to A$ е биекција, па затоа $A \sim A$.
ii) Нека $A \sim B$. Тоа значи дека постои биекција $f : A \to B$. Но, за секоја биекција постои инверзно пресликување $f^{-1} : B \to A$ кое е биекција, па затоа $B \sim A$.
iii) Нека $A \sim B$ и $B \sim C$. Тоа значи дека постојат биекции $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Понатаму, композицијата е биекција $g \circ f : A \to C$ е биекција, па затоа $A \sim C$.

29. Ако $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, тогаш $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$. Докажи !

Решение. Нека $f_1 : A_1 \to B_1$ и $f_2 : A_2 \to B_2$ се биекции и да ставиме

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ако } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{ако } x \in A_2. \end{cases}$$

Бидејќи $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, добиваме дека за секој $x \in A_1 \cup A_2$ постои еден и само еден $y \in B_1 \cup B_2$ таков што $f(x) = y$, што значи дека f е пресликување од $A_1 \cup A_2$ во $B_1 \cup B_2$.

Нека $f(x_1) = f(x_2) \in B_1 \cup B_2$. Од $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ следува

$$\text{или } f(x_1) = f(x_2) \in B_1 \text{ или } f(x_1) = f(x_2) \in B_2.$$

Ако $f(x_1) = f(x_2) \in B_1$, тогаш $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ и како f_1 е инјекција следува дека $x_1 = x_2$. Ако $f(x_1) = f(x_2) \in B_2$, тогаш $f_2(x_1) = f_2(x_2)$ и како f_2 е инјекција следува дека $x_1 = x_2$. Според тоа, f е инјекција.

Ако $y \in B_1 \cup B_2$, тогаш или $y \in B_1$ или $y \in B_2$. Но, f_1 и f_2 се сурјекции, па затоа или постои $x_1 \in A_1$ таков што $f_1(x_1) = y$ или постои $x_2 \in A_2$ таков што $f_2(x_2) = y$. Според тоа, f е сурјекција.

Конечно, f е биекција, што значи $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

30. Ако $A \setminus B \sim B \setminus A$, тогаш $A \sim B$. Докажи!

Решение. За множествата A и B се исполнети равенствата

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \text{ и } B = (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

при што

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing \text{ и } (B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing,$$

Сега, бидејќи $A \setminus B \sim B \setminus A$ и $A \cap B \sim A \cap B$, од претходната задача следува дека $A \sim B$.

31. Нека множествата B и C се такви што $B \cap C$. Докажи дека ако $A \subset B$ и $A \sim A \cup C$, тогаш $B \sim B \cup C$.

Решение. За множествата $B \cup C$ и B важи

$$B = (B \setminus A) \cup A \text{ и } B \cup C = (B \setminus A) \cup (A \cup C).$$

Сега, бидејќи $B \setminus A \sim B \setminus A$ и $A \sim A \cup C$, од задача 27 следува дека $B \sim B \cup C$.

32. Нека $k \in \mathbb{N}$. За множеството M ќе велиме дека се состои од k елементи ако $M \sim \mathbb{N}_k = \{1, 2, ..., k\}$. Притоа ќе пишуваме $|M| = k$. По дефиниција земаме дека $|\varnothing| = 0$. За множеството M ќе велиме дека е *конечно* ако постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $|M| = k$. Во спротивно ќе велиме дека множеството M е *бесконечно*.

Нека $k \neq 0$. Докажи, дека $|M| = k$ ако и само ако M може да се запише во видот $M = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

Решение. Нека $|M| = k$. Тоа значи дека $M \sim \mathbb{N}_k$, т.е. постои биекција $f : \mathbb{N}_k \to M$. Да означиме $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(k) = a_k$. Тогаш,

$$M = \{f(1), f(2), ..., f(k)\} = \{a_1, a_2, ..., a_k\}.$$

Обратно, нека $M = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Тогаш пресликувањето $f : \mathbb{N}_k \to M$ определено со $f(i) = a_i$, $i = 1, 2, ..., k$ е биекција. Навистина, за секој $a_i \in M$ постои $i \in \mathbb{N}_k$ таков што $f(i) = a_i$, што значи дека f е сурјекција. Понатаму, од $i \neq j$ следува $a_i \neq a_j$, па затоа $f(i) \neq f(j)$, т.е. f е и инјекција. Според тоа, $|M| = k$.

33. Дадени се подмножествата $S_1, S_2, ..., S_{2000}$ на конечното множество S, при што важи $|S_i| > \frac{1}{2}|S|$, за $i = 1, 2, ..., 2000$. Докажи дека постојат десет елементи $x_1, x_2, ..., x_{10}$ такви што секое подмножество S_i содржи барем еден од нив.

Решение. Со индукција ќе докажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ и било кои $2^{n+1} - 2$ подмножества такви што секое содржи повеќе од половина елементи на множеството S, постојат n елементи $x_1, x_2, ..., x_n$ такви што секое од одбраните подмножества на S содржи некој од елементите $x_1, x_2, ..., x_n$. Тврдењето е тривијално за $n = 0$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n = m - 1$. Ако сега имаме $k = 2^{m+1} - 2$ такви подмножества, на пример $S_1, S_2, ..., S_k$, тогаш $|S_1| + |S_2| + ... + |S_k| > \frac{1}{2}k|S| = (2^m - 1)|S|$, па затоа постои елемент x_m кој припаѓа барем на 2^m подмножества. Преостануваат $k - 2^m = 2^m - 2$ подмножества, и според индуктивната претпоставка постојат елементи $x_1, x_2, ..., x_{m-1}$ такви што секое од преостанатите множества содржи некој од овие елементи. Со тоа доказот е завршен.

34. Нека S е непразно множество, $\mathbf{P}(S)$ е неговото партитивно множество и $f : \mathbf{P}(S) \to \mathbf{P}(S)$ е пресликување со својство да од $A \subset B$ следува $f(A) \subset f(B)$. Докажи дека постои $X \subseteq S$ таков што $f(X) = X$.

Решение. Да ја разгледаме фамилијата $\mathbf{F}$ од сите подмножества $Y \subseteq S$ за кои важи $f(Y) \subseteq Y$. Со X да го означиме пресекот на сите подмножества од $\mathbf{F}$. Ќе докажеме дека $f(X) = X$.

За секој $Y \in \mathbf{F}$ важи $f(X) \subseteq f(Y) \subseteq Y$, па затоа $f(X) \subseteq \bigcap_{Y \in \mathbf{F}} Y = X$. Од друга страна, од $f(X) \subseteq X$ според условот на задачата следува $f(f(X)) \subseteq f(X)$, па затоа $f(X) \in \mathbf{F}$. Според тоа, $X = \bigcap_{Y \in \mathbf{F}} Y \subseteq f(X)$. Конечно, од $f(X) \subseteq X$ и $X \subseteq f(X)$ следува $f(X) = X$.

35. Нека $\mathbf{F} = \{E_1, E_2, ..., E_s\}$ е фамилија од r елементни подмножества од множеството X. Докажи дека ако пресекот на секои $r+1$ од множествата од фамилијата $\mathbf{F}$ не е празно множество, тогаш и пресекот на целата фамилија не е празно множество.

Решение. Нека претпоставиме дека $\bigcap_{k=1}^{s} E_k = \varnothing$ и нека $E_1 = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$. Тогаш од $x_i \notin \bigcap_{k=1}^{s} E_k$, за $i = 1, 2, .., r$ следува дека постои $F_i \in \mathbb{F}$ таков што $x_i \notin F_i$, за $i = 1, 2, .., r$. Затоа, $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_r \cap E_1 = \varnothing$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $\bigcap_{k=1}^{s} E_k \neq \varnothing$.

36. Даден е природен број $r \geq 2$. Нека $\mathbb{F}$ е бесконечна фамилија r – елементни множества такви што никои две не се дисјунктни. Докажи дека постои множество со $r-1$ елемент чиј пресек со секој елемент од $\mathbb{F}$ е непразен.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. Разгледуваме било кое множество A со помалку од r елементи кое е содржано во бесконечно многу множества од $\mathbb{F}$. Според претпоставката постои множество $B \in \mathbb{F}$ чиј пресек со A е празен. Бидејќи секое од бесконечно многуте множества кои го содржат A го сече B, некој елемент $b \in B$ се содржи во бесконечно многу од овие множества. Но, тогаш и $A \cup \{b\}$ се содржи во бесконечно многу множества од $\mathbb{F}$. Такво множество A постои, на пример празното множество. Сега, ако го земеме максималното вакво множество добиваме противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

37. Докажи дека постои подмножество A од множеството природни броеви со следното својство: за секое бесконечно множество S од прости броеви постојат два природни броеви $m \in A$ и $n \notin A$ такви што секој од нив е производ на k различни елементи од множеството S, за некој $k \geq 2$.

Решение. Нека $P = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$ е множеството од сите прости броеви. Дефинираме $A = \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k$, каде $A_k = \{q_1 ... q_k \mid q_i \in P,\ p_{k-1} \neq q_1, q_2, ..., q_k\}$.

Нека S е бесконечно множество прости броеви и $p_k \in S$. Тогаш, множеството $S \setminus \{p_k\}$ е бесконечно, па постојат $q_1, q_2, ..., q_{k+1} \in S \setminus \{p_k\}$ и притоа ако

$$m = q_1 q_2 ... q_k q_{k+1} \text{ и } n = q_1 q_2 ... q_k p_k$$

добиваме $m \in A$ и $n \notin A$. Ако $p_k \notin S$, тогаш егзистенцијата на броевите m и n е очигледна.

38. На еден тениски турнир учествувале n тенисери и секои два тенисера меѓусебно одиграле точно еден натпревар. Тенисерот A добива награда ако за секој друг тенисер B важи: A го победил B или A победил некој друг тенисер C кој го победил B. Докажи, дека ако само еден тенисер добил награда, тогаш тој ги победил сите преостанати тенисери.

Решение. Да претпоставиме дека само тенисерот A добил награда. Со S_0 да го означиме множеството тенисери кои го победиле A. Нека $S_0 \neq \varnothing$ и нека $B_0 \in S_0$. Тогаш не е можно B_0 да ги победил сите тенисери од S_0, бидејќи во тој случај B_0 ќе добие награда, што противречи на претпоставката дека само тенисерот A добил награда. Со $S_1 \subset S_0$ да го означиме множеството тенисери кои го победиле B_0. Од претходните разгледувања следува дека $S_1 \neq \varnothing$. Секој тенисер B_1 од S_1 ги победил A и B_0. Со $S_2 \subset S_1$ да го означиме множеството тенисери кои го победиле B_1. Јасно, $S_2 \neq \varnothing$. Ако ја продолжиме постапката, добиваме бесконечна низа од непразни множества

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots,$$

што противречи на фактот на турнирот учествувале конечен број тенисери. Конечно, од добиената противречност следува $S_0 = \varnothing$.

39. Определи го минималниот број елементи на конечното множество A за кое постои функција $f:\mathbb{N} \to A$ со следново својство: $f(i) \neq f(j)$ секогаш кога $|i-j|$ е прост број.

Решение. Нека функцијата $f:\mathbb{N} \to A$ го има саканото својство. Да ги разгледаме броевите 1, 3, 6 и 8. Разликата меѓу секои два од овие броеви е прост број и затоа A има барем 4 елементи.

Нека $A = \{0,1,2,3\}$ и за секој n нека $f(n)$ е остатокот од делењето на n со 4. Тогаш, од $f(i) = f(j)$ следува дека $|i-j|$ е делив со 4, т.е. $|i-j|$ е сложен број. Според тоа, минималниот број елементи на A е 4.

40. Дадени се природни броеви m и n, поголеми од 1 и цели броеви $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Докажи, дека постои множество T од цели броеви такво што

$$|T| \leq 1 + \tfrac{a_m - a_1}{2n+1}$$

и секој a_i може да се претстави во облик $a_i = t + s$ за некои $t \in T$ и $s \in [-n, n]$.

Решение. Да ставиме

$$a_1 = a,\ a_m = b,\ b - a = (2n+1)q + r \text{, каде } q, r \in \mathbb{Z} \text{ и } 0 \leq r \leq 2n.$$

Да го разгледаме множеството

$$T = \{a + n + (2n+1)k \mid k = 0,1,2,\dots,q\}.$$

Имаме

$$|T| = q + 1 \leq 1 + \tfrac{b-a}{2n+1} = 1 + \tfrac{a_m - a_1}{2n+1}.$$

Нека

$$B=\{t+s \mid t\in T,\ s=-n,-n+1,...,n\}=\{a,a+1,a+2,...,a+(2n+1)q+2n\}.$$

Останува да забележиме дека $a+(2n+1)q+2n \ge a+(2n+1)q+r=b$, т.е. секој a_i припаѓа на B, со што задачата е решена.

41. Определи го најголемиот природен број n за кој постои множество природни броеви $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ такво што

1) броевите a_i, $i=1,2,...,n$ се сложени,
2) броевите a_i, $i=1,2,...,n$ се по парови заемно прости,
3) $1<a_i \le (3n+1)^2$, $i=1,2,...,n$.

Решение. За секој $j=1,2,...,n$ со q_j да го означиме најмалиот прост делител на a_j. Нека $q=\max\limits_{1\le i\le n} q_i$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека тој максимум се достигнува за $i=1$, т.е. $q=q_1$. Очигледно,

$$(3n+1)^2 \ge a_1 \ge q_1^2 \ge p_n^2,$$

каде p_n е $n-$тиот прост број. Затоа треба да важи $p_n \le 3n+1$. Лесно се докажува, на пример со индукција, дека $p_n > 3n+1$ за $n\ge 15$. Затоа $n\le 14$. На пример, множество кое ги има саканите својства и содржи 14 елементи е множеството $\{2^2,3^2,5^2,...,p_{14}^2\}$. Според тоа, најмалиот природен број со саканите својства е бројот $n=14$.

42. За секој природен број $n\ge 3$ определи го најмалиот природен број $f(n)$ со следново својство: за секој избор на множество $A\subseteq\{1,2,...,n\}$ со $f(n)$ елементи постојат $x,y,z\in A$ кои се по парови заемно прости.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m е природен број и $M=\{m,m+1,...,m+5\}$. Тогаш секое петелементно подмножество на M содржи три броја кои се по парови заемно прости.

Доказ. Постои непарен број a таков што $A=\{a,a+2,a+4\}\subset M$. Навистина, ако m е непарен број, тогаш $a=m$, а ако m е парен број, тогаш $a=m+1$. Елементите на $\{a,a+2,a+4\}$ се по парови заемно прости. Барем еден од броевите $a+1$ и $a+3$ не е делив со 3. Тој број да го означиме со b и да го разгледаме множеството $B=\{a,a+2,\ a+4,b\}\subset M$. Тогаш елементите на B се по парови заемно прости, а секое петелементно подмножество на M содржи три елементи од B. Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Да го разгледаме множеството $X\subset\{1,2,3,...,n\}$ кое се состои од броевите деливи со 2 или со 3. Тогаш X го нема саканото својство, бидејќи во секое триелементно подмножество на X ќе има два броја со заеднички делител 2 или 3. Според тоа, секое множество со саканото својство има најмалку $|X|+1$ елемент, па затоа

$$f(n) \geq [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{3}] - [\tfrac{n}{6}] + 1 .$$

Со индукција ќе докажеме дека за секој избор на множество $A \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ со

$$g(n) = [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{3}] - [\tfrac{n}{6}] + 1$$

елементи постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости. Да забележиме дека $g(n+6) = g(n) + 4$.

Случаите $n = 3, 4, 5$ се тривијални, а за $n = 6$ тврдењето следува од лемата. За $n = 7$ ја применуваме лемата кога $1, 7 \notin A$, а во спротивен случај тројката $\{1, 7, x\}$, каде $x \neq 1, 7$ е произволен елемент од A е бараната тројка од условот на задачата. На сличен начин се разгледува и случајот $n = 8$.

Нека $n \geq 9$ и $f(k) \leq g(k)$ за секој $k \in \{3, 4, ..., n-1\}$. Нека A е произволно подмножество од $\{1, 2, ..., n\}$ со $g(n)$ елементи. Ако $A \cap \{n-5, n-4, ..., n\}$ содржи барем пет елементи, тогаш тврдењето следува од лемата. Ако

$$| A \cap \{n-5, n-4, ..., n\} | \leq 4 ,$$

тогаш во A се содржат најмалку $g(n) - 4 = g(n-6)$ елемент од $\{1, 2, ..., n-6\}$, а според индуктивната претпоставка меѓу нив постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости.

43. Определи го најмалиот природен број k со следново својство: за секое $k-$ елементно подмножество A на множеството $S = \{1, 2, ..., 2012\}$ постојат $a, b, c \in S$, $a \neq b \neq c \neq a$ такви што $a+b, b+c, c+a \in A$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a < b < c$. Ако $x = a+b,\ y = a+c$ и $z = b+c$, тогаш $x < y < z,\ x+y > c$ и $x+y+z$ е парен број. Обратно, ако $x, y, z \in A$ се такви што $x < y < z,\ x+y > z$ и $x+y+z$ е парен број, тогаш

$$a = \tfrac{x+y-z}{s},\ b = \tfrac{x+z-y}{2},\ c = \tfrac{y+z-x}{2}$$

се различни елементи од S и $x = a+b,\ y = a+c$ и $z = b+c$.

Од досега изнесеното следува дека задачата е еквивалентна на задачата: за секое $k-$елементно подмножество A од S постојат три елементи на A такви што

$$x < y < z,\ x+y > z, \text{ и } x+y+z \text{ е парен број.} \qquad (1)$$

За множеството $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 2011\}$ имаме $|A| = 1007$ и лесно се докажува дека A не содржи три елементи со саканото својство. Според тоа,

$k \geq 1008$. Ќе докажеме дека секое 1008-елементно подмножество на S го има својството (1).

Со индукција по n ќе го докажеме следново тврдење: за секој $n \geq 4$ секое $n+2$ елементно подмножество на множеството $\{1,2,3,4,...,2n\}$ содржи три елемнти кои ги задоволуваат условите (1).

За $n=4$ нека A е 6-елементно подмножество на $\{1,2,3,...,8\}$. Бидејќи тројката 4, 6, 8 го има својството (1), нека барем еден од елементите 4, 6, 8 не е во A. Ако $4 \notin A$, тогаш ги разгледуваме тројките 3, 6, 7; 5, 6, 7; 5, 7, 8 и 3, 5, 6, секоја од кои го задоволува условот (1). Аналогно се разгледуваат случаите кога $6 \notin A$ и $8 \notin A$.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $n \geq 4$ и нека A е $n+3$ елементно подмножество на множеството $\{1,2,3,4,...,2n+2\}$. Ако

$$|A \cap \{1,2,...,2n\}| \geq n+2,$$

тогаш тврдењето следува од индуктивната претпоставка. Останува да го разгледаме случајот кога

$$|A \cap \{1,2,...,2n\}| = n+1 \text{ и } 2n+1, 2n+2 \in A.$$

Ако A содржи непарен број $x>1$ од множеството $\{1,2,...,2n\}$, тогаш тројката $x, 2n+1, 2n+2$ го задоволува условот (1). Во спротивно

$$A = \{1,2,4,6,...,2n,2n+1,2n+2\}$$

и тројката 4, 6, 8 го задоволува условот (1).

Од претходно изнесеното следува дека $k = \frac{2012}{2} + 2 = 1008$.

44. Докажи, дека постои подмножество A на множеството $\{1,2,3,4,...,2^{1996}-1\}$ со следниве својства:

1) $1, 2^{1996}-1 \in A$,
2) Секој елемент од $A \setminus \{1\}$ е збир на два (не задолжително различни) елементи од A,
3) Бројот на елементите на A е најмногу 2012.

Решение. *Прв начин*. Нека $f(n)$ е најмалиот можен број на елементи на подмножеството A од множеството $\{1,2,3,4,...,2^n\}$, кое ги задоволува условите 1) и 2). Тогаш

- $f(2^{n+1}-1) \leq f(2^n-1)+2$. Навистина, $B = A \cup \{2^{n+1}-2, 2^{n+1}-1\}$ е подмножество на $\{1,2,3,...,2^{n+1}\}$ кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи

$$2^{n+1}-2 = 2^n-1+2^n-1 \text{ и } 2^{n+1}-1 = 1+2^{n+1}-2.$$

- $f(2^{2n}-1) \leq f(2^n-1)+(n+1)$. Навистина

$$C = A \cup \{2(2^n - 1), 2^2(2^n - 1), ..., 2^n(2^n - 1), 2^{2n} - 1\}$$

е подмножество на $\{1, 2, 3, ..., 2^{2n} - 1\}$, кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи

$$2^{j+1}(2^n - 1) = 2^j(2^n - 1) + 2^j(2^n - 1), \text{ за } j = 0, 1, ..., n-1$$

и

$$2^{2n} - 1 = 2^n(2^n - 1) + 2^n - 1.$$

Тогаш

$$f(2^{1996} - 1) \le f(2^{998} - 1) + 999, \quad f(2^{998} - 1) \le f(2^{499} - 1) + 500,$$
$$f(2^{499} - 1) \le f(2^{498} - 1) + 2, \quad f(2^{498} - 1) \le f(2^{249} - 1) + 250,$$
$$f(2^{249} - 1) \le f(2^{248} - 1) + 2, \quad f(2^{248} - 1) \le f(2^{124} - 1) + 125,$$
$$f(2^{124} - 1) \le f(2^{62} - 1) + 63, \quad f(2^{62} - 1) \le f(2^{31} - 1) + 32,$$
$$f(2^{31} - 1) \le f(2^{30} - 1) + 2, \quad f(2^{30} - 1) \le f(2^{15} - 1) + 16,$$
$$f(2^{15} - 1) \le f(2^{14} - 1) + 2, \quad f(2^{14} - 1) \le f(2^7 - 1) + 8,$$
$$f(2^7 - 1) \le f(2^6 - 1) + 2, \quad f(2^6 - 1) \le f(2^3 - 1) + 4,$$
$$f(2^3 - 1) \le f(2^2 - 1) + 2, \quad f(2^2 - 1) \le f(2^1 - 1) + 2,$$
$$f(2^1 - 1) \le 1.$$

Ако ги собереме горните неравенства, по скратувањето добиваме

$$f(2^{1996} - 1) \le 2012.$$

Втор начин. Со $a_0(x)$ и $a_1(x)$ ќе го означуваме бројот на нулите и единиците во бинарниот запис на природниот број x. Со индукција по n ќе докажеме дека постои множество $A_n \subset \mathbb{N}$ кое го задоволува условот 2) такво што $1, 2^n - 1 \in A_n$ и $|A_n| \le n - 2 + a_0(n) + 2a_1(n)$. Бидејќи $a_0(1996) = 4$ и $a_1(1996) = 7$ ($1996 = 11111001100_2$), од тука ќе следува тврдењето на задачата.

За $n = 1$ тврдењето важи. Нека претпоставиме дека $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тогаш за множеството A_n доволно е да земеме

$$A_k \cup \{2^{k+1} - 2, 2^{k+2} - 2^2, ..., 2^{2k} - 2^k, 2^{2k} - 1\}.$$

Навистина, лесно се гледа дека множеството го задоволува условот 2) и има

$$2k - 1 + a_0(k) + 2a_1(k) = n - 2 + a_0(n) + 2a_1(n)$$

елементи.

Нека сега $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Слично како во претходниот случај за множеството A_n можеме да го земеме множеството

$$A_k \cup \{2^{k+1} - 2, 2^{k+2} - 2^2, ..., 2^{2k+1} - 2^{k+1}, 2^{k+1} - 1, 2^{2k+1} - 1\}.$$

45. Дали постои бесконечно множество природни броеви $S, S \neq \mathbb{N}$ такво што за секој природен број $n \notin S$ точно n броеви од S се заемно прости со n?
Решение. Ќе докажеме дека множество со саканите својства не постои. Нека го претпоставиме спротивното и нека $n \notin S$ е природен број. Бидејќи точно n броеви од S се заемно прости со n, заклучуваме дека постојат бесконечно многу прости броеви кои не се содржат во S. Нека p и q се два од тие прости броеви. Точно p од броевите во S не се деливи со p. Уште повеќе, имаме $p^{\sim} \in S$ за секој природен број $\sim > 1$, бидејќи во спротивно ќе имаме $p^{\sim} > p$ броеви од S кои се заемно прости со $p^{\sim}$, па оттука и со p. Но, сега имаме бесконечно многу броеви од S кои се заемно прости со q, што е противречност.

46. За секој природен број $n > 1$ дефинираме
$$D(n) = \{a - b \mid a, b \text{ се природни броеви и } n = ab,\ a > b\}.$$
Докажи дека за секој природен број $k > 1$ постојат k различни природни броеви $n_1, n_2, ..., n_k$, $n_i > 1, 1 \leq i \leq k$, за кои пресекот $D(n_1) \cap D(n_2) \cap ... \cap D(n_k)$ содржи барем два елементи.
Решение. Нека $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ се $k+1$ различни непарни природни броеви, такви што секој од нив е помал од производот на останатите k броеви. За $N = a_1 a_2 ... a_{k+1}$ за секој $i = 1, 2, ..., k+1$ да ставиме
$$x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{a_i} + a_i\right), \quad y_i = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{a_i} - a_i\right).$$
Тогаш $x_i^2 - y_i^2 = N$ и бидејќи $a_i a_j < N$ и $\frac{N}{a_i} > a_i$, добиваме дека (x_i, y_i), $1 \leq i \leq k+1$ се $k+1$ различни целобројни решенија на равенката $x^2 - y^2 = N$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $x_{k+1} = \min\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. За секој $i \in \{1, 2, ..., k\}$ од $x_i^2 - y_i^2 = x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = N$ следува
$$(x_i + x_{k+1})(x_i - x_{k+1}) = x_i^2 - x_{k+1}^2 = y_i^2 - y_{k+1}^2 = (y_i + y_{k+1})(y_i - y_{k+1}).$$
За $n_i = (x_i + x_{k+1})(x_i - x_{k+1}) = (y_i + y_{k+1})(y_i - y_{k+1})$ имаме
$$2x_{k+1} = (x_i + x_{k+1}) - (x_i - x_{k+1}) \in D(n_i),$$
$$2y_{k+1} = (y_i + y_{k+1}) - (y_i - y_{k+1}) \in D(n_i).$$
Затоа $x_{k+1} > y_{k+1}$, т.е. $2x_{k+1}$ и $2y_{k+1}$ се два различни елементи пресекот $D(n_1) \cap D(n_2) \cap ... \cap D(n_k)$.

47. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Не-

празното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S . Докажи дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S .

Решение. Јасно, не постојат два елементи на добро множество со k елементи кои припаѓаат на исто лошо множество. Затоа ни требаат барем k лоши множества за да го покриеме S .

Ќе конструираме k лоши множества кои го покриваат S . Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се сите прости броеви во S . Бидејќи S ги содржи сите делители на своите елементи, секој елемент на S е од облик $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$, каде $r_i \le k-1$ за секој i (броевите $\frac{x}{p_i^j}$, $j = 0,1,2,...,r_i$, формираат добро подмножество на множеството S со $r_i + 1$ елементи).

За секој таков $x \in S$ дефинираме

$$h(x) = r_1 + r_2 + ... + r_n .$$

Ако $x, y \in S, x < y$ припаѓаат на некое добро множество, тогаш важи

$$1 \le h(y) - h(x) \le k-1 .$$

Да ги разгледаме множествата $S_m = \{x \in S \mid h(x) \equiv m (\bmod k)\}$, $m = 1,2,...,k$. Овие множества се дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството S . Од претходно изнесеното следува дека секое множество S_m е лошо, што значи дека тоа е бараната конструкција.

48. За множеството $X = \{1,2,...,100\}$ разгледуваме функција $f : X \to X$, за која се исполнето следниве два услови:

1) $f(x) \ne x$, за секој $x \ne X$;

2) $A \cap f(A) \ne \varnothing$ за секое множество $A \subset X$, за кое $|A| = 40$.

Определи го најмалиот природен број k , за кој за секоја таква функција постои множество $B \subseteq X$, за кое $|B| = k$ и $B \cup f(B) = X$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f : X \to X$ дефинирана со

$$f(3i-2) = 3i-1,\ f(3i-1) = 3i,$$
$$f(3i) = 3i-2,\ i = 1,2,...,30 \quad ,$$
$$f(j) = 100,\ 91 \le j \le 99,\ f(100) = 99 .$$

Очигледно оваа функција го задоволува условот 1). За секое множество $A \subset X$, за кое $|A| = 40$ имаме:

i) или постои $i, 1 \le i \le 30$, таковшто $|A \cap \{3i-2, 3i-1, 3i\}| \ge 2$ и тогаш важи $A \cap f(A) \ne \varnothing$,

ii) или $91, 92, 93, ..., 100 \in A$ и тогаш важи $A \cap f(A) \ne \varnothing$.

Значи, и во двата случаја f го задоволува условот 2). За множество $B \subseteq X$, за кое $B \cup f(B) = X$ имаме $|B \cap \{3i-2, 3i-1, 3i\}| \ge 2$ за секој $i, 1 \le i \le 30$, како и $\{91, 92, ..., 98\} \subset B$ и $B \cap \{99, 100\} \ne \varnothing$. Значи, $|B| \ge 69$.

Ќе докажеме, дека за секоја функција f која ги задоволува дадените услови, постои множество $B \subseteq X$, за кое $|B| \le 69$ и $B \cup f(B) = X$.

Меѓу сите подмножества $U \subseteq X$, за кои $U \cup f(U) = X$ (егзистенцијата на барем едно такво множество следува од условот 1)) да избереме множество за кое $|U|$ е можно најголем. Ако $V = f(U)$ и $W = X \setminus (U \cup V)$, тогаш U, V и W се по парови дисјунктни множества и $X = U \cup V \cup W$. Од условите $|U| \le 39, |V| \le 39$ и од 2) следува:

i) $f(w) \in U$ за секој $w \in W$, Во спротивен случај за множеството $U' = U \cup \{w\}$ имаме $f(U) = V$, $f(w) \notin U$, $f(w) \ne w$, од каде следува дека $U' \cap f(U') = \varnothing$. Последното противречи на максималноста на $|U|$.

ii) $f(w_1) \ne f(w_2)$, за секои $w_1, w_2 \in W, w_1 \ne w_2$. Во спротивно ако $u = f(w_1) = f(w_2)$, тогаш од 1) следува $u \in U$. Според тоа, за множеството $U' = (U \setminus \{u\}) \cup \{w_1, w_2\}$ важи $f(U') \subseteq V \cup \{u\}$, $U' \cap (V \cup \{u\}) = \varnothing$, што противречи на максималноста на $|U|$.

iii) $f(u_i) \ne f(u_j)$ за $1 \le i < j \le m$. Во спротивен случај нека $v = f(u_i) = f(u_j) \in V$ и $U' = (U \setminus \{u_i\}) \cup \{w_i\}$. Тогаш $f(U') = V \cup \{u_i\}, U' \cap f(U') = \varnothing$ и од $|f(U')| > |f(U)|$ одново добиваме противречност со максималноста на $|f(U)|$.

Според тоа, $f(u_1), f(u_2), ..., f(u_m)$ се различни елементи на V. Во случајов $|V| \ge |W|$ и како $|U| \le 39$ имаме $|V| + |W| \ge 61$ и $|V| \ge 31$. За множеството $B = U \cup W$ имаме $|B| \le 69$ и $B \cup f(B) \supseteq B \cup V = X$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бараниот број е $k = 69$.

49. Определи ги сите множества S од цели броеви, за кои од $m, n \in S$ следува $3m - 2n \in S$ (m и n не мора да се различни).

Решение. Јасно, секое едноелементно множество S е решение на задачата. Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $|S|\geq 2$.

Нека $d=\min\{|m-n|: m,n\in S,\, m\neq n\}$. Лесно се гледа дека постои цел број a таков, што $a+d$ и $a+2d$ се елементи на S (на пример, $a=n-d$, за $d=m-n$). Последователно добиваме

$$a+4d=3(a+2d)-2(a+d)\in S,\qquad a-d=3(a+d)-2(a+2d)\in S,$$

$$a+5d=3(a+d)-2(a-d)\in S,\qquad a-2d=3(a+2d)-2(a+2d)\in S,$$

и аналогно понатаму, добиваме $S_0=\{a+kd: k$ не е делив со $3\}\subset S$. Уште повеќе, множеството S_0 е решение на задачата за произволен цел број a .

Нека претпоставиме, дека $S\setminus S_0\neq\varnothing$ и нека $b\in S\setminus S_0$. Тогаш постои $l\in\mathbb{Z}$, таков што $a+ld\leq b<a+(l+1)d$. Јасно, барем еден од броевите $a+ld$ и $a+(l+1)d$ се содржи во S_0 . Оттука и од дефиницијата на d лесно следува дека $b=a+ld$, а од последното и од дефиницијата на b следува, дека $a+ld\notin S_0$, т.е. l е делив со 3.

Значи, постои $l\in\mathbb{Z}$, за кој петте броеви $a+il,\, i\in\{-2,-1,0,1,2\}$ припаѓаат на S . Оттука лесно се добива, дека $\{a+kd: k\in\mathbb{Z}\}\subset S$. Од друга страна, од дефиницијата на d следува дека ниту еден интервал $(a+kd, a+(k+1)d)$ не содржи броеви од S , т.е $S=\{a+kd: k\in\mathbb{Z}\}$.

Конечно, решенија на задачата се три вида множества

$$S=\{a\},\;\; S=\{a+kd: k \text{ не е делив со } 3\},\;\; S=\{a+kd: k\in\mathbb{Z}\}$$

при што и во трите случаи a е произволен цел број, а d е природен број.

50. Определи ги сите реални броеви t со следново својство: Постои бесконечно множество реални броеви X такво што неравенството

$$\max\{|x-(a-d)|,|y-a|,|z-(a+d)|\}>td$$

е точно за секои $x,y,z\in X$, секој реален број a и секој позитивен реален број d (броевите x,y,z не мора да се различни).

Решение. Нека $t\in(0,\frac{1}{2})$ и да избереме фиксен $\alpha\in(0,\frac{1-2t}{2(1+t)})$. Ќе докажеме дека геометриската прогресија $X=\{x_i=\alpha^i\mid i\in\mathbb{N}\}$ го има саканото својство.

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. постојат реални броеви a и $d>0$ и три броеви $x_i, x_j, x_k\in X$ (не задолжително различни), за кои

$$\max\{|x_i-(a-d)|,|x_j-a|,|x_k-(a+d)|\}\leq td\ .$$

Последниот услов е еквивалентен на истовремено исполнување на неравенствата

$$-td\leq x_i-(a-d)\leq td\qquad\Leftrightarrow\qquad x_i+(1-t)d\leq a\leq x_i+(1+t)d\ ,$$

$$-td \le x_j - a \le td \qquad \Leftrightarrow \qquad x_j - td \le a \le x_j + td\ ,$$
$$-td \le x_k - (a+d) \le td \qquad \Leftrightarrow \qquad x_k - (1+t)d \le a \le x_k + (t-1)d\ .$$

Од неравенствата за a добиваме

$$x_k - (1+t)d \le a \le x_i + (1+t)d$$
$$x_i + (1-t)d \le a \le x_j + td$$
$$x_j - td \le a \le x_k + (t-1)d$$

од каде наоѓаме

$$d \ge \tfrac{x_k - x_i}{2(t+1)},\quad d \le \tfrac{x_j - x_i}{1-2t},\quad d \le \tfrac{x_k - x_j}{1-2t}\ .$$

Бидејќи $d > 0$, од горните неравенства следува $x_i < x_j < x_k$, од каде добиваме $i > j > k$ и значи

$$\alpha^j + \alpha^{i+1} < \alpha^{k+1} + \alpha^i \qquad \Leftrightarrow \quad \alpha^j - \alpha^i < \alpha(\alpha^k - \alpha^i)\ ,$$

па затоа

$$\tfrac{x_j - x_i}{x_k - x_i} = \tfrac{\alpha^j - \alpha^i}{\alpha^k - \alpha^i} < \alpha\ .$$

Од друга страна од неравенствата $\tfrac{x_k - x_i}{2(t+1)} \le d \le \tfrac{x_j - x_i}{1-2t}$ добиваме

$$\tfrac{x_j - x_i}{x_k - x_i} \ge \tfrac{1-2t}{2(t+1)} > \alpha\ ,$$

што противречи на претходното неравенство. Според тоа, множеството $X = \{x_i = \alpha^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ го има саканото својство.

Нека сега $t \ge \frac{1}{2}$. Ќе докажеме, дека за секое бесконечно множество X и за секои три броеви $x < y < z$ од X, постојат реални броеви a и $d > 0$ такви, што

$$\max\{|x-(a-d)|, |y-a|, |z-(a+d)|\} \le td\ . \qquad (1)$$

Нека $d = \frac{z-x}{2}$, од каде добиваме $x + (1-t)d = z - (1+t)d$. Нека

$$a = \max\{x + (1-t)d, y - td\}\ .$$

Бидејќи $t \ge \frac{1}{2}$, имаме

$$y - x < 2d \le (1+2t)d,\ \ x - y < 0 < (2t-1)d$$

од каде следува

$$y - td \le x + (1+t)d, \quad x + (1-t)d \le y + td\ .$$

Оттука и од изборот на a следуваат неравенствата

$$x + (1-t)d \le a \le x + (t+1)d,$$
$$y - td \le a \le y + td,$$
$$z - (1+t)d \le a \le z - (1-t)d,$$

од каде следува неравенството (1).

51. Нека n е природен број и нека

$$P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, ..., 2\cdot 3^{n-1}, 3^n\}.$$

За секое подмножество X од множеството P_n со S_X да го означиме збирот на сите елементи од множеството X, при што $S_\varnothing = 0$, каде $\varnothing$ е празното множество. Нека y е реален број таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Докажи, дека постои подмножество Y на множеството P_n такво што $0 \le y - S_Y < 2^n$.

Решение. *Прв начин*. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по N. Очигледно тврдењето важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$. Нека е даден y таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Можни се следниве случаи:

1) $0 \le y \le 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$. Од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \le \frac{y}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' = \{2t \mid t \in Y'\}$.

2) $2\cdot 3^n - 2^{n+1} \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Тогаш $0 < 3^n - 2^{n+1} \le y - 3^n \le 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$, па од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \le \frac{y-3^n}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' \cup \{3^n\}$.

Според тоа, тврдењето важи и за n. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број.

Втор начин. Имаме $S_{P_n} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, па ако сите елементи на P_n ги поделиме со 2^n задачата се сведува на следнава еквивалентна задача:

Нека n е природен број, $a = \frac{3}{2}$ и $Q_n = \{1, a, a^2, ..., a^n\}$. Докажи дека за секој реален број $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$ постои подмножество X на Q_n за кое $0 < x - S_X < 1$.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ имаме $S_\varnothing = 0$, $S_{\{1\}} = 1$, $S_{\{a\}} = \frac{3}{2}$ и $S_{\{1,a\}} = \frac{5}{2}$, т.е. тврдењето очигледно е точно.

Нека тврдењето е точно за n и нека $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n + a^{n+1}]$ е произволен. Ако $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$, од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $X \subset Q_n \subset Q_{n+1}$ за кое $0 < x - S_X < 1$.

Нека $x > 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Бидејќи $\frac{a^{n+1}-1}{a-1} > a^{n+1}$, заклучуваме дека $x_1 = x - a^{n+1} \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$. Сега, од индуктивната претпоставка следува дека постои $X_1 \subset Q_n$ таков што $0 < x_1 - S_{X_1} < 1$, па затоа доволно е да земеме $X = X_1 \cup \{a^{n+1}\}$.

52. Нека $n \geq 2$ е природен број и нека S е подмножество на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ кое не содржи два заемно прости броја, ниту два броја од кои едниот е делител на другиот. Колку најмногу елементи може да има множеството S?

Решение. За секој $x \in S$ постои единствен $k_x \in \mathbb{N}_0$ таков што $\frac{n}{2} < 2^{k_x} x \leq n$. Да означиме $f(x) = 2^{k_x} x$. Пресликувањето f е инјекција. Навистина, ако за $x, y \in S$ важи $f(x) = f(y)$, тогаш или $x \mid y$ или $y \mid x$, па според условот на задачата $x = y$. Според тоа, множеството $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ има еднаков број елементи како и множеството S. Притоа $f(S)$ не содржи два последователни броја (бидејќи тие се заемно прости), па затоа

$$| f(S) | \leq [\frac{n - [\frac{n}{2}] + 1}{2}] = [\frac{n+2}{4}].$$

Од друга страна, множеството $S = \{2i \mid \frac{n}{4} < i \leq \frac{n}{2}\}$ има точно $[\frac{n+2}{4}]$ елементи и ги задоволува условите на задачата. Според тоа, одговорот е $[\frac{n+2}{4}]$.

53. Нека $N = 2012^{2013}$. Кој е најголемиот број елементи што може да го има множество A кое ги задоволува следниве услови:

1) елементите на A се природни броеви помали или еднакви на N, и
2) ако $a, b \in A$, $a \neq b$, тогаш $N \mid ab$.

Решение. Ќе го определиме бараниот максимален број за сите цели броеви N од видот $N = p^{\sim} q$, каде $\sim$ е парен и е непарен број. Да ги разгледаме множествата

$$X_0 = \{m \mid m = p^{\text{ª}} q^{\text{«}} r, \text{ª} < \frac{\sim}{2}, \text{«} \leq \frac{-1}{2}, (r, p) = (r, q) = 1\},$$
$$X_1 = \{m \mid m = p^{\text{ª}} q^{\text{«}} r, \text{ª} < \frac{\sim}{2}, \text{«} \geq \frac{+1}{2}, (r, p) = (r, q) = 1\},$$
$$X_2 = \{m \mid m = p^{\text{ª}} q^{\text{«}} r, \text{ª} \geq \frac{\sim}{2}, \text{«} \leq \frac{-1}{2}, (r, p) = (r, q) = 1\},$$
$$X_3 = \{m \mid m = p^{\text{ª}} q^{\text{«}} r, \text{ª} \geq \frac{\sim}{2}, \text{«} \geq \frac{-1}{2}, (r, p) = (r, q) = 1\}.$$

Очигледно множествата $X_0 \cup X_1$ и $X_0 \cup X_2$ содржат најмногу по еден елемент од множеството A . Затоа $|A| \leq |X_3| + 2$. Нека претпоставиме дека A содржи и елемент од X_1 и елемент од X_2. Тогаш постои барем еден елемент од X_3 кој не се содржи во A. Според тоа, $|A| \leq |X_3| + 1$.

Множество A со овој број елементи може да се конструира, на пример, такво е множеството $A = X_3 \cup \{p^{\sim} q^{\frac{-1}{2}}\}$. Останува да забележиме дека $|X_3| = p^{\sim} q^{\frac{-1}{2}}$.

За конкретната вредност на $N = 2012^{2013} = 2^{2\cdot 2013}503^{2013}$ имаме

$$p = 2,\ \ q = 503,\ \ \sim\ = 2\cdot 2013,\ \ \ \ = 2013,$$

па затоа најголемиот број елементи кој може да го има множеството A е $2^{2013}503^{1006} + 1$.

54. Нека S е множество од n елементи. Определи го најголемиот природен број m за кој постои фамилија $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ непразни подмножества на S таква што пресекот на секои три множества од таа фамилија е празно множество.

Решение. Нека $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ е фамилија непразни подмножества на множеството $S = \{1, 2, ..., n\}$ таква што пресекот на секои три множества од таа фамилија е празно множество. Тогаш секој елемент на множеството S може да биде елемент на најмногу две од множествата $S_1, S_2, ..., S_m$. Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{m} |S_i| \le 2n.$$

Од друга страна, ако со k го означиме бројот на едноелементните множества S_i, кои се членови на дадената фамилија, тогаш

$$\sum_{i=1}^{m} |S_i| \ge k + 2(m-k).$$

Од последните две неравенства следува дека $2m \le 2n + k$ и бидејќи $k \le n$ добиваме $2m \le 3n$, т.е. $m \le [\frac{3n}{2}]$. На пример, фамилијата

$$\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, ..., \{2[\tfrac{n}{2}] - 1, 2[\tfrac{n}{2}]\}$$

има точно $[\frac{3n}{2}]$ елементи и ги задоволува условите на задачата.

55. Нека $n > 2$ е природен број и $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ се по парови различни непразни подмножества на множеството $\{1, 2, ..., n\}$. Определи ја најголемата можна вредност на $\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}$, каде $A_{2n+1} = A_1$.

Решение. Ќе докажеме дека $\frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \le \frac{1}{2}$. Ако $A_i \cap A_{i+1} = \varnothing$, тогаш имаме $|A_i \cap A_{i+1}| = 0$ и неравенството е очигледно. Нека $|A_i \cap A_{i+1}| = a \ge 1$. Тогаш или двете множества имаат повеќе од a елементи, или едното од двете множества има a елементи, а другото има најмалку $a+1$ елемент. И во двата случаја важи $|A_i|\cdot|A_{i+1}|\geq a(a+1)$, па затоа

$$\frac{|A_i\cap A_{i+1}|}{|A_i|\cdot|A_{i+1}|}\leq\frac{a}{a(a+1)}=\frac{1}{a+1}\leq\frac{1}{2}.$$

Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{|A_i\cap A_{i+1}|}{|A_i|\cdot|A_{i+1}|}\leq\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2}=n.$$

Оваа граница се достигнува со множествата

$$A_1=\{1\}, A_2=\{1,2\}, A_3=\{2\}, A_4=\{2,3\},\dots, A_{2n-1}=\{n\}, A_{2n}=\{n,1\}.$$

56. Множеството X се состои од осум последователни природни броеви и е поделено на две дисјунктни подмножества A и B со еднаков број елементи. Ако збирот на квадратите на елементите на множеството A е еднаков на збирот на квадратите на елементите на множеството B, докажи дека тогаш збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B.

Решение. Ако a е најмалиот елемент на множеството X, тогаш

$$X=\{a,a+1,a+2,\dots,a+7\}.$$

Нека $X=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$ и нека збирот на квадратите на елементите на множеството A е еднаков на збирот на квадратите на елементите на множеството B. Со S_X, S_A, S_B да ги означиме збировите на квадратите на елементите на множествата X, A, B, соодветно. Според условот на задачата имаме $S_A=S_B=\frac{1}{2}S_X$. Ќе го определиме збирот S_X. Имаме

$$S_X=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\dots+(a+7)^2=8a^2+56a+140.$$

Значи,

$$S_A=S_B=4a^2+28a+70.$$

Имаме, $a+7\in X$ и $X=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a+7\in A$ и $a+7\notin B$. Нека $a+i, a+j, a+k$, за некои $i,j,k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ се останатите елементи на множеството A. Тогаш

$$\begin{aligned}S_A&=(a+i)^2+(a+j)^2+(a+k)^2+(a+7)^2\\&=4a^2+2a(i+j+k+7)+i^2+j^2+k^2+49.\end{aligned}$$

Но, $S_A=4a^2+28a+70$, па затоа

$$4a^2+28a+70=4a^2+2a(i+j+k+7)+i^2+j^2+k^2+49,$$

т.е.

$$2a(i+j+k-7)=21-(i^2+j^2+k^2). \tag{1}$$

Збирот на елементите на множеството X е $a+28$, а збирот на елементите на множеството A е $4a+i+j+k+7$. Треба да докажеме дека множествата A и B имаат еднакви збирови на елементите, т.е. дека збирот на елементите на множеството A е еднаков на $4a+14$, од каде добиваме $i+j+k=7$.

Нека претпоставиме дека $i+j+k>7$, т.е. $i+j+k\geq 8$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за различните ненегативни броеви следува

$$\sqrt{\frac{i^2+j^2+k^2}{3}}>\frac{i+j+k}{3}\geq\frac{8}{3},$$

па затоа

$$i^2+j^2+k^2\geq\frac{64}{3}>21. \qquad (2)$$

Од $i+j+k>7$, следува дека левата страна на (1) е позитивна, па затоа и десната страна треба да е позитивна, т.е. $21-(i^2+j^2+k^2)>0$, односно $i^2+j^2+k^2<21$, што противречи на (2). Од добиената противречност следува $i+j+k\leq 7$. Нека претпоставиме дека $i+j+k<7$. Левата страна на (1) е парен број, па затоа и десната мора да е парен број. Но, тогаш $i^2+j^2+k^2$ е непарен број, па затоа и $i+j+k$ е непарен број. Бидејќи $i+j+k<7$, важи $i+j+k=1$ или 3 или 5. Но, $i\neq j\neq k\neq i$ и $i,j,k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$, па затоа: $\{i,j,k\}\in\{\{0,1,2\},(0,1,4\},\{0,2,3\}\}$. Според тоа, $i^2+j^2+k^2\in\{5,13,17\}$, т.е. $i^2+j^2+k^2<21$, па затоа десната страна на (1) е позитивна, а од $i+j+k<7$ следува дека левата страна на (1) е негативна, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $i+j+k=7$, што и требаше да се докаже.

57. Нека M е множеството рационални броеви во интервалот $(0,1)$. Дали постои подмножество A од M такво што секој број од M може на единствен начин да се претстави како збир на еден или конечно многу различни броеви од A?

Решение. Ќе докажеме дека такво множество не постои.

Нека го претпоставиме спротивното. Нека $a\in A$ и да претпоставиме дека $a'\in A$ е таков што $a'>\frac{a}{2}$. Тогаш бројот $a-a'<\frac{a}{2}$ може да се претстави како збир на еден или конечно многу различни броеви од A. Бидејќи секој од овие броеви е помал од $\frac{a}{2}$, добиваме дека бројот $a=a'+a-a'$ се претставува на два различни начини (еднаш како a, а вториот пат како збир од a' и претставувањето на $a-a'$) како збир на еден или конечно многу броеви од

A, што е противречност. Според тоа, ако $a \in A$, тогаш $A \cap (\frac{a}{2}, a) = \varnothing$. Последното значи дека секој од интервалите $[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}),\ i = 1, 2, \ldots$ содржи најмногу еден елемент од A. Но, множеството A е бесконечно (во спротивно како збир на различни броеви од A може да се претстават само конечно многу броеви, а множеството рационални броеви од интервалот $(0,1)$ е бесконечно), па затоа елементите на A може да се подредат во бесконечна низа $a_1, a_2, \ldots$ при што важи $a_i \geq 2a_{i+1}$, за секој i. Ако за некој i во последното неравенство имаме строго неравенство, тогаш

$$s = \sum_{i=2}^{\infty} a_i < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_1}{2^{i-1}} = a_1 .$$

Последното значи дека броевите од интервалот (s, a_1) не може да се претстават како збир на различни броеви од A. Според тоа, $a_{i+1} = \frac{a_1}{2^i}$ за секој i. Тогаш лесно се покажува дека само броевите од видот $a_1 \frac{m}{2^n}$ може да се претставаат како збир на еден или конечно многу броеви од A. Бидејќи секој рационален број со непарен именител кој е заемно прост со именителот на a_1 не може да се претстави во дадениот вид, добиваме противречност, со што задачата е решена.

58. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција за која важи

$$|f(x)| - |f(x) + x - 1| = |x + 1| - 2|x|, \qquad (1)$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Докажи, дека множеството

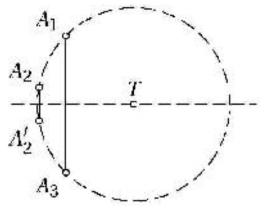
$$A = \{(x, y) \mid 0 < y < f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

содржи внатрешност на триаголник со плоштина 1.

Решение. Нека $x \leq -1$ и $f(x) > 0$. Ако $f(x) + x - 1 \geq 0$, тогаш од (1) следува дека $x = 1$, што е противречност. Ако $f(x) + x - 1 < 0$, тогаш од (1) следува $f(x) = 0$, што повторно е противречност. Според тоа, $f(x) \leq 0$. Обратно, ако $x \leq -1$ и $f(x) \leq 0$, тогаш равенството (1) е исполнето. Аналогно се проверува, дека за $-1 < x < 0$ равенството (1) е исполнето само ако $f(x) > 0$ и $f(x) + x - 1 \leq 0$. Во овој случај наоѓаме дека $f(x) = x + 1$. Со аналогни размислувања се докажува дека за $0 \leq x < 1$ равенството (1) е еквивалентно на $f(x) \geq 1 - x$, а за $x \geq 1$ тоа е еквивалентно на $f(x) \geq 0$. Според тоа, множеството A ја содржи внатрешноста на триаголникот чии темиња се $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и $(0,1)$ и плоштината на овој триаголник е еднаква на 1.

59. Определи ги сите конечни множества точки во рамнината S кои содржат барем три точки и кои го задоволуваат следниов услов: за секои две различни точки A и B од S, симетралата на отсечката AB е оска на симетрија на множеството S.

Решение. За произволни различни точки $A,B\in S$, симетријата во однос на симетралата s_{AB} на отсечката AB го пресликува множеството S во себе, па така го пресликува во себе и тежиштето T на множеството S. Значи, $T\in s_{AB}$, т.е. $\overline{TA}=\overline{TB}$. Последното значи дека целото множество S припаѓа на кружница со центар T.



Нека точките на множеството S определуваат конвексен многуаголник $A_1A_2...A_n$. Точката $A_2^{'}$, симетрична на точката A_2 во однос на $S_{A_1A_3}$ припаѓа на лакот $A_1A_2A_3$ и припаѓа на множеството S, па затоа мора да важи $A_2^{'}\equiv A_2$. Оттука следува дека $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$. Аналогно следува дека $\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=...=\overline{A_nA_1}$, т.е. $A_1,A_2,...,A_n$ се темиња на правилен $n-$аголник. Јасно е дека сите вакви множества ги задоволуваат условите на задачата.

60. Нека се $a_1,a_2,...,a_n$ по парови различни природни броеви и нека M е множество кое се состои од $n-1$ природни броеви и не го содржи бројот $s=a_1+a_2+...+a_n$. Скакулец треба да направи n скокови надесно по бројната права, тргнувајќи од точката со координата 0. Притоа, должините на неговите скокови мора да бидат еднакви на броевите $a_1,a_2,...,a_n$, во некој редослед. Докажи, дека тој редослед може да се избере така што скакулецот никогаш нема да скокне во точка чија координата е во множеството M.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $n\geq 2$ и дека тврдењето важи за сите $k<n$. Нека $a_1<a_2<...<a_n$ и $m=\min M$. Можни се два случаја.

1) $m<a_n$. Ако $a_n\notin M$, скакулецот го прави првиот скок со должина a_n. Потоа, треба да направи скокови со должини $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ така што прескокнува $n-2$ точки од множеството $M\setminus\{m\}$, а тоа според индуктивната претпоставка може да го направи.

   Нека претпоставиме дека $a_n\in M$. Паровите (a_i,a_i+a_n) за $1\leq i\leq n-1$ се меѓусебно дисјунктни, па барем еден од нив не содржи ниту еден елемент од множеството $M\setminus\{a_n\}$ (а не го содржи ниту a_n). Нека тоа е парот (a_k,a_k+a_n). По два скока со должини a_k и a_n редоследно, на скакулецот му останува да направи скокови со должини $a_1,...,a_{k-1},a_{k+1}...,a_{n-1}$ така што ќе прескокне $n-3$ точки на множеството $M\setminus\{m,a_n\}$, што според индуктивната претпоставка повторно може да го направи.

2) $m \ge a_n$. Според индуктивната претпоставка, скакулецот може првиот скок да го направи со должина a_n и останатите скокови по некој редослед a_{i_1} , . . . , $a_{i_{n-1}}$ така што ќе ги заобиколи сите точки на множеството $M\setminus\{m\}$. Ако притоа не скокне и во точката m, доказот е завршен. Затоа нека претпоставиме дека во $k-$тиот скок тој скокнува во точката m, т.е. $a_n + a_{i_1} + ... + a_{i_k-1} = m$. Во овој случај, скакулецот со низа $a_{i_1},...,a_{i_k},a_n$, $a_{i_{k+1}},...,a_{n-1}$ ги исполнува барањата на задачата. Навистина, и на овој начин скакулецот ги прескокнува точките на множеството $M\setminus\{m\}$, но ја прескокнува и точката m бидејќи $a_{i_1} + ... + a_{i_k} < m < a_{i_1} + ... + a_{i_k} + a_n$.

61. Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ се подмножества од некое множество B, такви што

а) секое множество A_i има точно $2n$ елементи

б) секој пресек $A_i \cap A_j$, $(1 \le i < j \le 2n+1)$ содржи точно еден елемент, и

в) секој елемент од B се содржи барем во две множества A_i.

За кои вредности на n можеме на секој елемент од B да му придружиме еден од броевите 1 или 0 на начин таков што за секое множество A_i бројот на неговите елементите на кои им е придружена нула е еднаков на n.

Решение. Ќе докажеме дека такво означување на елементите на B со 0 или 1 е можно ако и само ако n е парен број.

Најпрво ќе докажеме дека секој елемент на B припаѓа точно на две од множествата A_i. Ќе докажеме дека за секој фиксен j, $1 \le j \le 2n+1$ важи

$$A_j = \bigcup_{i \ne j} (A_i \cap A_j)\,. \qquad (1)$$

Навистина $A_i \cap A_j \subseteq A_j$, па затоа $\bigcup_{i \ne j}(A_i \cap A_j) \subseteq A_j$. Обратно, нека $x \in A_j$. Тогаш според в) постои индекс $i \ne j$ таков што $x \in A_i$. Затоа $x \in A_i \cap A_j$, од што следува $A_j \subseteq \bigcup_{i \ne j}(A_i \cap A_j)$, со што равенството (1) е докажано. Да претпоставиме дека некој $x \in B$ е содржан барем во три множества A_i. Нека на пример $x \in A_1, x \in A_2, x \in A_3$. Тогаш од условот б) следува дека секое од множествата $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3), A_1 \cap A_4, ..., A_1 \cap A_{2n+1}$ содржи точно еден елемент, што противречи на условот а). Значи, секој елемент на B припаѓа точно на две множества A_i.

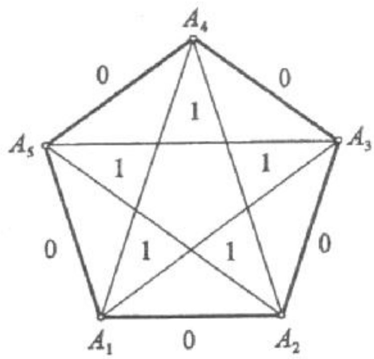
Множествата $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ може да ги претставиме како темиња на конвексен $(2n+1)-$аголник. Сега задачата се сведу-ва на следнава поедноставна задача: За кои природни броеви n е можно страните и дијагоналите на $(2n+1)-$аголникот да се обележат со 0 и 1, така што од секое теме да излегуваат n отсечки со 0 и n отсечки со 1? Ако е можно такво означување, тогаш вкупниот број страни и дијагонали

$$1+2+...+2n = n(2n+1)$$

мора да биде парен број, бидејќи колку што има отсечки означени со 0, толку има отсечки означени со 1. Затоа n мора да е парен број. Обратно, ако n е парен број, $n = 2k$, тогаш отсечката што ги поврзува A_i и A_j ја означуваме со 0 ако

$$0 <| i - j | (\mathrm{mod}\, 2n+1) \leq k$$

и ја означуваме со 1 во спротивен случај. На пример, за $n = 2$ сите страни се означуваат со 0, а сите дијагонали со 1 (цртеж десно).



62. Нека K е целобројната решетка. Дали постои биекција $f: \mathbb{N} \to K$ таква што за секои по парови различни $a,b,c \in \mathbb{N}$ важи: ако $(a,b,c) > 1$, тогаш точките $f(a), f(b), f(c)$ не се колинеарни.

Решение. Точките на K да ги наредиме во низа $A_1, A_2, A_3, ...$. Ова може да се направи, на пример, спирално:

$$(0,0), (0,1), (1,1), (1,0), (1,-1), (0,-1), (-1,-1), ...$$

Индуктивно ќе конструираме биекција со бараното својство.

Ставаме $f(1) = A_1$. Нека претпоставиме дека $f(1), f(2), ..., f(n-1)$ се определени и за $f(n)$ да ја земеме точката A_m со најмал индекс m таква што за било кои броеви $i, j < n$, $(i, j, n) > 1$ точката A_m не лежи на правата $f(i)f(j)$. Бидејќи бројот на правите $f(i)f(j)$, $i, j < n$ е конечен, навистина во K постои точка која не лежи ниту на една од нив. Притоа, имаме бесконечно многу прости броеви, па како за простите броеви нема ограничување при изборот на $f(p)$ заклучуваме дека секоја точка од K ќе биде слика на некој природен број. Јасно, вака дефинираното пресликување f ги задоволува условите на задачата.

63. Даден е природен број k. Нека $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ е биекција таква што за секои $i,j\in\mathbb{Z}$ такви што $|i-j|\le k$ важи $|f(i)-f(j)|\le k$. Докажи, дека за секои $i,j\in\mathbb{Z}$ важи $|f(i)-f(j)|=|i-j|$.

Решение. За $k=1$ тврдењето е тривијално. Нека $k>2$. Интервал со должина k го нарекуваме множеството од облик $\{x,x+1,...,x+k\}$, $x\in\mathbb{Z}$. Два цели броја x и y се последователни ако и само ако постојат интервали I_1 и I_2 со должина k такви што $I_1\cap I_2=\{x,y\}$. Меѓутоа, според условот на задачата $f(I_1)$ и $f(I_2)$ се исто така интервали со должина k, па како $\{f(x),f(y)\}=$ $f(I_1)\cap f(I_2)$, следува дека $f(x)$ и $f(y)$ се последователни броеви. Оттука следува дека $|f(x+1)-f(x)|=1$, за $x\in\mathbb{Z}$. Конечно, ако се искористи инјективноста на пресликувањето f со едноставна индукција по n се добива дека $|f(x+n)-f(x)|=n$, што е еквивалентно со тврдењето на задачата.

64. Даден е природен број k. За секој природен број n дефинираме $f_k(n)$ да е најмалиот природен број, кој е поголем од kn и е таков, што $nf_k(n)$ е точен квадрат. Докажи, дека функцијата $f_k(n)$ е инјекција.

Решение. Нека $f_k(m)=f_k(n)=t$, при што $t=as^2$ и a не е делив со квадрат на природен број различен од 1. Сега, бидејќи $mf_k(m)=mt=mas^2$ е точен квадрат, заклучуваме дека ma е точен квадрат. Затоа $m=au^2$, $u\in\mathbb{N}$. Аналогно се докажува дека $n=av^2$, $v\in\mathbb{N}$.

Бидејќи $f_k(au^2)=as^2$, од условот следува дека $as^2>km=kau^2$, од каде следува $s>u\sqrt{k}$ и s е најмалиот природен број со ова својство. Аналогно имаме $s>v\sqrt{k}$ и s е најмалиот природен број со ова својство. Според тоа, $|v\sqrt{k}-u\sqrt{k}|<1$, од каде добиваме $|v-u|<\frac{1}{\sqrt{k}}\le 1$, што значи, дека $u=v$, од каде следува $m=n$.

65. Нека S е множеството од сите деветцифрени природни броеви, во чиј декаден запис учествуваат само цифрите 1, 2 и 3. Определи ги сите функции $f:S\to\{1,2,3\}$, кои ги имаат следниве својства:

1) $f(111111111)=1,\ f(222222222)=2,\ f(333333333)=3,\ f(122222222)=1$,

2) ако $x,y\in S$ се разликуваат во секоја позиција, тогаш $f(x)\ne f(y)$.

Решение. Ќе докажеме дека $f(x)$ е еднакво на првата цифра на x за секој $x\in S$. Од условот на задачата непосредно следува дека

$$f(111111111)=f(122222222)=f(133333333)=1,$$
$$f(211111111)=f(222222222)=f(233333333)=2,$$
$$f(311111111)=f(322222222)=f(333333333)=3.$$

Нека (a,b,c) е пермутација на цифрите 1, 2, 3. Ако $x\in S$ има прва цифра a и само цифри a и c, тогаш $f(x)=a$. Навистина, $f(x)\neq f(\overline{bbbbbbbbb})=b$, бидејќи x и $\overline{bbbbbbbbb}$ се разликуваат во секоја позиција, и важи $f(x)\neq f(\overline{cbbbbbbbb})=c$ бидејќи x и $\overline{cbbbbbbbb}$ се разликуваат во секоја позиција. Сега нека $x=\overline{x_1x_2...x_9}$ е произволен број од S, таков што $x_1=a$. Да ги разгледаме броевите $\overline{y_1y_2...y_9}$ и $\overline{z_1z_2...z_9}$ определени со $y_1=b$, $z_1=c$, ако $2\le i\le 9$, тогаш кога $x_i=a$ или $x_i=c$ ставаме $y_i=z_i=b$, а ако $x_i=b$ ставаме $y_i=z_i=c$. Од погоре докажаното следува $f(y)=b$ и $f(z)=c$. Тогаш $f(x)=a$, со што тврдењето е докажано.

66. Дадени се две конечни множества природни броеви A и B, секое од кои содржи најмалку три елементи. За два броја $a\in A$ и $b\in B$ велиме дека се *пријателски*, ако нивниот најголем заеднички делител е различен од 1. Познато е дека секој елемент на A не е *пријателски* со барем еден елемент од B и секој елемент на B е пријателски со барем еден елемент од A. Докажи, дека постојат $a_1,a_2\in A$ и $b_1,b_2\in B$ такви што паровите (a_1,b_1) и (a_2,b_2) се пријателски, но паровите (a_1,b_2) и (a_2,b_1) не се пријателски.

Решение. Да го означиме со a_1 елементот од A, кој е пријателски со најмногу елементи од B. Бидејќи секој елемент на A не е пријателски со барем еден елемент на B, постои $b_2\in B$ кој не е пријателски на a_1. Освен тоа, секој елемент на B е пријателски со барем еден елемент на A и нека $a_2\in A$ е пријателски со b_2. Јасно, $a_2\neq a_1$. Ќе докажеме дека постои $b_1\in B$ кој е пријателски со a_1, но не е пријателски со a_2. Навистина, ако секој елемент кој е пријателски со a_1 е пријателски и со a_2, а b_2 е пријателски со a_2 и не е пријателски со a_1, добиваме дека a_2 има повеќе пријателски броеви од a_1. Последното противречи на изборот на a_1. Од добиената противречност следува дека постои елемент $b_1\in B$ кој е пријателски со a_1, но не е пријателски со a_2.

Значи, за елементите $a_1,a_2\in A$ и $b_1,b_2\in B$ важи паровите (a_1,b_1) и (a_2,b_2) се пријателски, но паровите (a_1,b_2) и (a_2,b_1) не се пријателски, што и требаше да се докаже.

67. На една меѓународна конференција има 4 официјални јазици. Секои вда учесника на конференцијата говорат по еден од официјалните јазици. Докажи, дека најмалку 60% од учесниците на конференцијата говорат еден ист јазик.

Решение. Ако има учесник кој говори само еден од јазиците, тогаш тврдењето е очигледно. Затоа да претпоставиме дека не постои таков учесник на конференцијата. Нека со X го означиме множеството на учесници, кои говорат точно два од јазиците, а со Y го означиме множеството од преостанатите учесници. Понатаму, со A, B, C, D да ги означиме множествата учесници, кои ги говорат одделните јазици. Јасно, пресеците AB и CD; AC и BD; AD и BC се празни множества. Освен тоа важи

$$|A|+|B|+|C|+|D| \geq 3|Y|+2|X|. \tag{1}$$

Нека n е бројот на учесниците на конференцијата. Без ограничување на општоста можеме да земеме, дека $X = AB \cup AC \cup BC$, или $X = AB \cup AC \cup AD$. Ако, на пример, $|D| \leq |Y|$, тогаш од (1) добиваме

$$|A|+|B|+|C| \geq 2|Y|+2|X| = 2n,$$

па затоа $\max\{|A|,|B|,|C|\} \geq \frac{2}{3}n$. Во спротивно, ќе следува дека, на пример, $|A| \geq |X| = n - |Y|$. Ако сега $|A| \geq 0,6n$, тогаш нема што да се докажува, а ако $|A| < 0,6n$, тогаш $|Y| > 0,4n$, па од (1) ќе следува

$$|A|+|B|+|C|+|D| \geq 3|Y|+2|X| = 2n + |Y| > 2,4n,$$

па затоа $\max\{|A|,|B|,|C|,|D|\} \geq 0,6n$, што и требаше да се докаже.

68. На Универзитетот има 999 професори. Со секоја научна тема се занимаваат точно три професори, и секои два професора имаа точно по една заедничка тема. Докажи дека може да се изберат 250 теми така што секој професор се занимава најмногу со една од нив.

Решение. На професорите им соодветствува множество со 999 елементи, а на темите им соодветствуваат триелементни подмножества од ова множество. Секој пар елементи е содржан во точно една тројка, а треба да избереме 250 дисјунктни тројки.

Нека $\mathbb{T} = \{T_1, T_2, ..., T_k\}$ е најголемата можна фамилија дисјунктни тројки и да претпоставиме дека $k \leq 249$. Вкупно $s = 999 - 3k \geq 252$ елементи не припаѓаат на ниту една тројка T_i. Нека S е множеството од овие елементи. За секои два елементи $a, b \in S$ постои точно една тројка $T_{a,b}$ која ги содржи и двата елементи. Третиот член на тројката $T_{a,b}$ не е во S, бидејќи во спротивно фамилијата $\mathbb{T}$ можеме да ја прошириме со тројката $T_{a,b}$. Значи, тој трет член е во некој тројка T_i и на парот (a,b) да му ја придружиме тројката T_i.

Во S има $\frac{s(s-1)}{2}$ парови елементи, па значи една тема $T_i=\{x,y,z\}$ е придружена најмалку $\frac{s(s-1)}{2k}>\frac{s}{2}$ пати, и тоа на паровите $(a_i,b_i), i=1,2,...,d$ ($d>\frac{s}{2}$). Меѓу овие парови има повеќе од $\frac{s}{6}>2$ парови, да кажеме (a_i,b_i), $i=1,2,...,p$ на кои им соодветствува ист член на тројката T_i, да кажеме x. Паровите $(a_i,b_i), i=1,2,...,p$ се дисјунктни. Навистина, ако некои два пара имаат заеднички елемент a, тогаш постојат две тројки кои ги содржат a и x. Според тоа, $p\le\frac{s}{2}<d$. Нека на парот (a_{p+1},b_{p+1}) му соодветствува елементот y. Овој пар е дисјунктен со еден од првите p парови, да кажеме со (a_1,b_1). Според тоа, од фамилијата $\mathbb{T}$ можеме да ја исфрлиме тројката T_i и да ги додадеме тројките $\{a_1,b_1,x\}$ и $\{a_{p+1},b_{p+1},y\}$, со што ја зголемуваме $\mathbb{T}$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

2. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПРИНЦИПИ

1. (*Принцип на еднаквост*). а) Ако $|M|=k$ и $M \sim L$, тогаш $|L|=k$. Докажи.

   б) Ако $|M|=|L|=k$, тогаш $M \sim L$. Докажи.

   Решение. а) Од $|M|=k$ имаме $\mathbb{N}_k \sim M$. Понатаму, бидејќи $\mathbb{N}_k \sim M$ и $M \sim L$, добиваме дека дека $\mathbb{N}_k \sim L$, што значи дека $|L|=k$.

   б) Нека $|M|=|L|=k$. Тогаш $\mathbb{N}_k \sim M$ и $\mathbb{N}_k \sim L$, па затоа $M \sim L$.

2. Даден е природен број n. Колку најмногу квадрати со должина на страна n со темиња во целобројни точки и страни паралелни со координатните оски може да се изберат така што секои два имаат точно две заеднички точки кои припаѓаат на страните?

   Решение. Нека K е еден од разгледуваните квадрати. Секој друг квадрат има точно едно теме во K. Да го означиме ова теме. Никои две означени темиња не лежат на иста права паралелна со некоја од оските. Според тоа, не може да има повеќе од $n-1$ означени темиња, што значи дека може да има најмногу n квадрати. Пример со n квадрати се квадратите чии долни леви темиња се во точките $(0,0), (1,1), ..., (n-1, n-1)$.

3. Нека триаголникот ABC има должини на страни a,b,c кои се оприродни броеви и за кои важи $a<b<c$. Изрази ги бројот на таквите триаголници во функција од бројот b.

   Решение. Прво да забележиме дека должините на страните на разностран триаголник се природни броеви, тогаш ниту една страна на триаголникот не може да има должина 1. Имено, во спротивно, т.е. ако постои разностран триаголник со стани $1<b<c$, каде b и c се природни броеви, тогаш од $b<c$ следува $b+1 \le c$. Од друга страна, од неравенството на триаголник следува $c<b+1$. Според тоа, $c<b+1 \le c$, што е противречност.

   Од условот на задачата следува $1 \le a < b < c$. Понатаму, од неравенството на триаголник имаме $c<a+b$, па затоа $b<c<a+b$, односно $b+1 \le c \le a+b-1$, при што важи $1 \le a \le b-1$. Погоре докажавме дека $a \ge 2$, па затоа добиваме $2 \le a \le b-1$ и $b+1 \le c \le a+b-1$. Значи, за еден a постојат $a+b-1-b=a-1$ можности. Конечно, од принципот на еднаквост добиваме дека бараниот број триаголници е еднаков на

$$\sum_{a=2}^{b-1}(a-1)=1+2+3+...+(b-2)=\frac{(b-2)(b-1)}{2}.$$

4. (*Принцип на збир*). Докажи дека ако A и B се конечни множества такви што $A\cap B=\varnothing$, тогаш $|A\cup B|=|A|+|B|$.

Решение. Нека $A\cap B=\varnothing$ и $f:A\to\mathbb{N}_n$, $g:B\to\mathbb{N}_m$ се биекции. Ќе докажеме дека пресликувањето $h:A\cup B\to\mathbb{N}_{n+m}$ определено со $h(a)=f(a)$, $a\in A$ и $h(b)=g(b)+n$, $b\in B$ е биекција. Нека $x,y\in A\cup B$ и $x\neq y$. Можни се два случаи и тоа:

а) x и y му припаѓаат на едно од множествата A и B, да кажеме A. Тогаш, од дефиницијата на пресликувањето h следува дека $h(x)=f(x)$ и $h(y)=f(y)$ и бидејќи f е биекција, имаме $f(x)\neq f(y)$, па затоа $h(x)\neq h(y)$.

б) x и y му припаѓаат на различни множества, да кажеме $x\in A$ и $y\in B$. Тогаш $h(x)=f(x)\leq n<n+1\leq g(y)+n=h(y)$, т.е. $h(x)\neq h(y)$.

Според тоа, во секој случај од $x\neq y$ следува $h(x)\neq h(y)$, т.е. h е инјекција.

Нека $p\in\mathbb{N}_{n+m}$. Можни се два случаја и тоа:

а) $p\leq n$ и во тој случај бидејќи f е биекција, постои $z\in A$ таков што $f(z)=p$. Но тоа, значи дека постои $z\in A\cup B$ таков што $h(z)=f(z)=p$.

б) $p>n$ и во овој случај $1\leq p-n\leq m$. Но g е биекција, па затоа постои $z\in B$ таков што $g(z)=p-n$. Значи постои $z\in A\cup B$ таков што

$$p=(p-n)+n=g(z)+n=h(z).$$

Според тоа, во секој случај постои $z\in A\cup B$ таков што $h(z)=p$, т.е. h е сурјекција.

Конечно, h е инјекција и сурјекција, т.е. е биекција. Значи, $A\cup B\sim\mathbb{N}_{n+m}$ од што следува $|A\cup B|=n+m=|A|+|B|$.

5. Во еден институт работат вистинољупци (секогаш говорат вистина) и лажливци (секогаш лажат). Секој запослен искажал две тврдења за Институтот:

1) Овде нема ниту 10 луѓе кои работат повеќе од мене, и
2) Има најмалку 100 луѓе кои примаат поголема плата од мене.

Под претпоставка дека сите работат различно и дека сите примаат различни плати, определи ги сите можни вредности на бројот на вработените во Институтот.

Решение. Од изјавата на вистинољубецот со најголема плата следува дека има најмалку 100 лажливци (подобро платени од него), додека од изјавата на најлошо платениот лажливец следува дека лажливци нема повеќе од 100. Според тоа, има точно 100 лажливци. Аналогно се добива дека има точно 10 вистинољупци. Значи, вкупно има 110 вработени.

6. На еден тениски турнир секои двајца играчи играле еден против друг. На крајот на турнирот тенисерот A имал k, $k \geq 2$ победи повеќе од тенисерот B. Докажи, дека постои група S од тенисери, $|S| \geq k-1$, таква што секој тенисер од S е поразен од A и секој тенисер од S го победил B.

Решение. Нека R_A е множеството тенисери кои се поразени од A и нека b е бројот на тенисерите кои на турнирот се поразени од B. Тогаш $|R_A| = k+b$. Можни се два случаја:

1) $B \in R_A$. Нека V е подмножество играчи од R_A кои што го победиле B. Јасно, $V \neq \varnothing$. Ако претпоставиме дека $|V| < k-1$, тогаш

$$b \geq |R_A| - 1 - |V| > (b+k) - 1 - (k-1) = b,$$

што е противречност.

2) $B \notin R_A$. Нека V е подмножество играчи од R_A кои што го победиле B. Јасно, $V \neq \varnothing$. Ако претпоставиме дека $|V| < k-1$, тогаш

$$b \geq |R_A| - |V| > (b+k) - (k-1) = b+1,$$

што е противречност.

7. Нека O_{xyz} е правоаголен координатен систем во просторот, S е конечно множество точки во него, а S_x, S_y и S_z се множествата ортогонални проекции на точките од S на рамнините O_{yz}, O_{zx}, O_{xy}, соодветно. Докажи дека

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

Решение. *Прв начин*. Нека $|S_x| = a, |S_y| = b, |S_z| = c$. Доказот ќе го дадеме со индукција по $|S|$.

За едноелементно множество S тврдењето важи.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за секое S, такво што $|S| < n$.

Да го разгледаме множеството S за кое $|S| = n$. Постои рамнина паралелна со некоја координатна рамнина која не содржи ниту една точка од S и која го дели тоа множество на две непразни подмножества S_1 и S_2 такви што $n = |S_1| + |S_2|, |S_1| < n, |S_2| < n$. Од индуктивната претпоставка следува

$$|S_1|^2 \leq a_1 b_1 c_1, \quad |S_2|^2 \leq a_2 b_2 c_2.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека таа рамнина е паралелна со xy -рамнината. Тогаш

$$a_1 + a_2 = a, \quad b_1 + b_2 = b, \quad c_1 \leq c, \quad c_2 \leq c.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека

$$
\begin{aligned}
|S|^2 &= (|S_1|+|S_2|)^2 \le (\sqrt{a_1b_1c_1}+\sqrt{a_2b_2c_2})^2\\
&\le (\sqrt{a_1b_1}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{a_2b_2}\cdot\sqrt{c})^2\\
&= c(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})^2\\
&\le c(a_1+a_2)(b_1+b_2)=abc
\end{aligned}
$$

со што е докажана точноста на даденото неравенство.

Втор начин. Да означиме

$$
\begin{aligned}
&S(x)=\{(y,z)\,|\,(x,y,z)\in S\},\\
&S_y(x)=\{z\,|\,(x,z)\in S_y\},\\
&S_z(x)=\{y\,|\,(x,y)\in S_z\}.
\end{aligned}
$$

Ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и инклузиите $S(x)\subseteq S_x$ и $S(x)\subseteq S_z(x)\times S_y(x)$ добиваме

$$
\begin{aligned}
|S| &= \sum_x |S(x)| \le \sum_x \sqrt{|S_x|\cdot|S_y(x)|\cdot|S_z(x)|}\\
&\le \sqrt{|S_x|}\cdot\sum_x\sqrt{|S_y(x)|\cdot|S_z(x)|}\\
&\le \sqrt{|S_x|}\cdot\sqrt{\sum_x|S_y(x)|}\cdot\sqrt{\sum_x|S_z(x)|}\\
&= \sqrt{|S_x|}\cdot\sqrt{|S_y|}\cdot\sqrt{|S_z|}\\
&= \sqrt{|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|}.
\end{aligned}
$$

8. (*Обопштен принцип на збир*). Докажи, дека ако $A_1, A_2, ..., A_k$ е фамилија од k, $k\ge 2$ по парови дисјунктни конечни множества, т.е. множества за кои важи $A_i\cap A_j=\varnothing$, за $i\ne j$, тогаш

$$|A_1\cup A_2\cup...\cup A_k|=|A_1|+|A_2|+...+|A_k|\,.$$

Решение. Точноста на тврдењето следува од задача 4 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

9. Дадени се природни броеви a и b. Со $f(a,b)$ да го означиме бројот $a-$торки цели броеви чиј збир на апсолутните вредности на членовите не е поголем од b. Докажи дека $f(a,b)=f(b,a)$.

Решение. Природно се додефинира $f(n,0)=1$ за $n\in\mathbb{N}$. Понатаму, важи $f(n,1)=f(1,n)=2n+1$. За $a\ge 2$ да разгледаме низа од a членови со збир на апсолутните вредности на членовите еднаков на b. Бројот на таквите низи со последен член k, $(|k|\le b)$ е еднаков на $f(a-1,b-|k|)$, па затоа точна е формулата

$$f(a,b)=\sum_{k=-b}^{b} f(a-1,b-|k|)\,.$$

Ако од горното равенство го одземеме равенството

$$f(a,b-1)=\sum_{k=1-b}^{b-1} f(a-1,b-|k|-1)\,,$$

добиваме

$$f(a,b)=f(a,b-1)+f(a-1,b)+f(a-1,b-1)\,.$$

Сега со едноставна индукција се докажува дека $f(a,b)=f(b,a)$.

10. На испит учествувале 25 студенти. Испитот се состои од неколку прашања и за секое прашање се понудени пет одговори. Се покажало дека одговорите на секои два студента се поклопуваат на најмногу едно прашање. Докажи дека на испитот имало најмногу 6 прашања.

Решение. Бројот на прашањата да го означиме со n. Ако на едно прашање 6 студенти дале ист одговор, барем двајца од нив исто одговориле и на некое друго прашање, што противречи на условот на задачата. Според тоа, на секое прашање, секој од од петте понудени одговори го дале точно 5 студенти. Набљудуваме еден студент, да го наречеме Павел. На секое од n прашања уште 4 студенти дале ист одговор. Ако, на пример, Марко се наоѓа во две такви четворки, тогаш неговите одговори и одговорите на Павел ќе се поклопуваат на две прашања, што е спротивно на условот на задачата. Следува дека сите овие четворки се дисјунктни, па затоа имаме најмалку $4n+1$ студенти. Оттука следува дека $4n+1\le 25$, односно $n\le 6$.

11. Нека A е подмножество на множеството $S=\{1,2,...,1000000\}$, кое содржи точно 101 елемент. Докажи, дека постојат броеви $t_1,t_2,...,t_{100}\in S$ такви што множествата

$$A_i=\{x+t_i \mid x\in A\}\,,\ i=1,2,...,100$$

се по парови дисјунктни.

Решение. Да го разгледаме множеството $D=\{x-y \mid x,y\in A\}$. Јасно, множеството D има најмногу $101\cdot 100+1$ елемент. Понатаму, множествата $A_i=t_i+A$ и $A_j=t_j+A$ се дисјунктни ако и само ако $t_i-t_j\notin D$. Бараните броеви $t_1,t_2,...,t_{100}$ ќе ги избереме индуктивно.

Прво, да земеме произволен број $t_1\in S\setminus D$. Нека претпоставиме дека сме избрале $k\le 99$ броеви $t_1,t_2,...,t_k\in D$ такви што разликата на било кои два од овие броеви не припаѓа на множеството D. За t_{k+1} е доволно да се избере било кој број од S кој не припаѓа на множествата $t_1+D,t_2+D,...,t_k+D$. Последното може да се направи бидејќи за секој i важи $|t_i + D| \leq 101\cdot 100+1$, па затоа

$$|\bigcup_{i=1}^{k}(t_i + D)| \leq 99\cdot(101\cdot 100+1) = 999999 < 1000000.$$

12. (*Принцип на производ*). Докажи дека за секои конечни множества A и B важи $|A\times B| = |A|\cdot|B|$.

Решение. Нека A и B се конечни множества такви што $|A| = m$ и $|B| = n$. Тогаш, од задача 1 имаме $A = \{a_1,...,a_m\}$ и $B = \{b_1,...,b_n\}$.

За множеството $A\times B$ имаме

$$\begin{aligned}A\times B &= \{(a_1,b_1),...,(a_m,b_1),(a_1,b_2),...,(a_m,b_2),...,(a_1,b_n),...,(a_m,b_n)\}\\ &= \{(a_1,b_1),...,(a_m,b_1)\}\cup\{(a_1,b_2),...,(a_m,b_2)\}\cup...\cup\{(a_1,b_n),...,(a_m,b_n)\} \quad (1)\\ &= (A\times\{b_1\})\cup(A\times\{b_2\})\cup...\cup(A\times\{b_n\}).\end{aligned}$$

Понатаму, $A\times\{b_i\}\cap A\times\{b_j\} = \varnothing$, за $i \neq j$ и бидејќи $|A\times\{b_i\}| = m$ за секој $i = 1,2,...,n$ од (1) и од обопштениот принцип на збир добиваме

$$\begin{aligned}|A\times B| &= |A\times\{b_1\}| + |A\times\{b_2\}| + ... + |A\times\{b_n\}|\\ &= \underbrace{m+m+...+m}_{n \text{ пати}} = mn = |A|\cdot|B|.\end{aligned}$$

13. На колку начини на шаховска 8×8 табла може да се избере едно бело и едно црно поле? На колку начини на шаховска 8×8 табла во различни редови и разлини колони може да се избере едно бело и едно црно поле?

Решение. Ако C е множеството црни и B е множеството бели полиња на шаховската 8×8 табла, тогаш $|C| = |B| = 32$. Изборот на едно бело и едно црно поле всушност е избор на елемент од множеството $C\times B$. Затоа бројот на начините на кои тоа може да се направи е еднаков на $32\cdot 32 = 1024$.

Во случај на избор на плиња кои не припаѓаат ма ист ред и на иста колона, прво за избор на црно (бело) поле имаме 32 можности, а потоа за избор на бело (црно) поле имаме $32-8=24$ можности. Затоа бројот на изборите во овој случај е $32\cdot 24 = 768$.

14. Квадрат со должина на страна n со помош на прави кои се паралелни на страните на квадратот е поделен на n^2 квадрати со должина на страна 1. Колку квадрати има вака добиената фигура?

Решение. Да претпоставиме дека разгледуваниот квадрат $[0,n]\times[0,n]$ е во координатен систем. Нека S е бараното множество од сите квадрати. Со S_k да го означиме подмножеството од S кое го формираат сите квадрати со должина k. Јасно, S е дисјунктна унија на множествата $S_1, S_2,...,S_n$.

Квадрат со должината на страна k е потполно определен ако ги знаеме координатите (i, j) на неговото долно лево теме. Тогаш горното десно теме има координати $(i+k, j+k)$. Бидејќи квадратот со должина на страна k се наоѓа во квадратот $[0,n]\times[0,n]$, т.е. $0 \le i, j \le n$ и $0 \le i+k, j+k \le n$, па затоа $0 \le i, j \le n-k$, т.е. точката (i, j) е теме на таков квадрат ако и само ако $(i, j) \in \{0,1,2,...,n-k\}\times\{0,1,2,...,n-k\}$. Сега, од принципот на производ следува $|S_k| = (n-k+1)^2$. Бидејќи S е дисјунктна унија на множествата $S_1, S_2, ...,$ S_n, од принципот на збир следува

$$|S| = |S_1| + |S_2| + ... + |S_n| = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

15. Шаховската фигура крал на 8×8 шаховска табла е поставена произволно, а потоа е повлечен потег. Определи го вкупниот број можни потези?

Решение. Од секое од четирите аголни полиња може да се повлечат по 3 потези. Потоа, од секое од 24-те рабни полиња кои не се аголни може да се повлечат по 5 потези и на крајот од секое од 36-те внатрешни полиња можед се повлечат по 8 потези. Конечно, бараниот број потези кои шаховската фигура крал може да ги одигра на таблата е еднаков на

$$4\cdot 3 + 24\cdot 5 + 36\cdot 8 = 12 + 120 + 288 = 420.$$

16. Подмножеството A на множеството $S = \{1, 2, ..., n\}$ го нарекуваме интервал ако $A = \{k, k+1, ..., l\}$ за некои $1 \le k \le l \le n$. Ако $A_1, A_2, ..., A_m$ се подмножества на множеството S такви што $A_i \cap A_j$ е интервал за секои $i \ne j$, колкава е најголемата можна вредност на m?

Решение. Ако секое множество A_i го замениме со најмалиот интервал кој го содржи A_i, тогаш важи условот на задачата. Затоа, без ограничување на општоста, можеме да сметаме дека сите A_i се интервали. Тогаш мора да постои елемент x кој припаѓа на сите множества A_i. Бројот на интервалите кои го содржат x е еднаков на

$$x(n+1-x) \le [\tfrac{(n+1)^2}{4}],$$

од каде добиваме $m \le [\frac{(n+1)^2}{4}]$. Оваа вредност за m се достигнува, на пример, ако A_i се сите интервали кои го содржат елементот $[\frac{n}{2}]$.

17. За непразни бројни множества S и T дефинираме

$$S+T = \{s+t \mid s \in S, t \in T\},\ \ 2S = \{2s \mid s \in S\}.$$

Нека n е природен број, а A и B се подмножества од $\{1,2,...,n\}$. Докажи, дека постои подмножество D на $A+B$, такво што

$$D+D\subseteq 2(A+B) \text{ и } |D|\geq \frac{|A|\cdot|B|}{2n}.$$

Решение. Нека $S_y=\{(a,b)\,|\,a-b=y,\,a\in A,\,b\in B\}$. Бидејќи

$$\sum_{y=1-n}^{n-1}|S_y|=|A|\cdot|B|,$$

постои y_0, таков што $1-n\leq y_0\leq n-1$ и множеството $D=S_{y_0}$ го има второто од саканите својства, т.е.

$$|D|=|S_{y_0}|\geq \frac{|A|\cdot|B|}{2n}.$$

Од дефиницијата на S_{y_0} следува, дека за секој $d\in D$ постои подреден пар $(a,b)\in S_{y_0}$ таков што

$$d=2b+y_0=a+b\in A+B$$

и следствено $D\subseteq A+B$. За секои $d_1,d_2\in D$ нека

$$d_1=2b_1+y_0=2a_1-y_0,\quad d_2=2b_2+y_0,$$

каде $b_1,b_2\in B,\quad a_1\in A$. Тогаш

$$d_1+d_2=2a_1-y_0+2b_2+y_0=2(a_1+b_2)\in 2(A+B).$$

Според тоа, множеството $D=S_{y_0}$ го има и второто од саканите својства.

18. На турнир на кој учествуваат 16 тенисери се одиграни 55 натпревари. Докажи дека меѓу тенисерите постојат тројца така што никои двајца од нив не играле меѓу себе.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека меѓу секои три тенисери постојат двајца кои играле меѓусебно. Нека тенисерот A одиграл најмал број натпревари и тоа k натпревари. Секој тенисер кој играл со A одиграл најмалку k натпревари. Од преостанатите $15-k$ тенисери кои не играле со A секој играл со секој од преостанатите $14-k$ тенисери (тенисерот A со било кои двајца од преостанатите $14-k$ тенисери формира тројка во која тој не играл со другите двајца, па затоа тие играле меѓу себе). Затоа бројот на одиграните натпревари не е помал од

$$\tfrac{1}{2}(k^2+k+(15-k)(14-k))=k^2-14k+105=(k-7)^2+56\geq 56,$$

што е противречност.

19. (*Обопштен принцип на производ*). Нека $k\geq 2$. Докажи дека

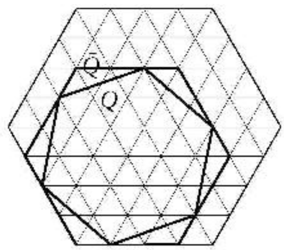
$$|A_1\times A_2\times...\times A_k|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot...\cdot|A_k|$$

за секои конечни множества $A_i,\,i=1,2,...,k$.

Решение. Точноста на тврдењето следува од задача 12 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

20. Нека n е природен број. Правилен шестаголник со должина на страна еднаква на n е поделен со прави, кои се паралелни на неговите страни, на рамнострани триаголници чии страни се со должина 1. Определи го вкупниот број правилни шестаголници чии темиња воедно се и темиња на делбените рамнострани триаголници.

Решение. Нека P е дадениот шестаголник. Темињата на разгледуваните рамнострани триаголници ќе ги нарекуваме *јазли*. За секој шестаголник Q со темиња во јазлите го разгледуваме шестаголникот $\overline{Q}$ опишан околу Q со страни паралелни на страните на P (види цртеж десно). Темињата на $\overline{Q}$ се исто така јазли.



За $0 \le m < n$ шестаголникот $\overline{Q}$ со должина на страна $n-m$ може да се избере на

$$3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3 - m^3$$

начини. За дадениот шестаголник $\overline{Q}$, шестаголникот Q може да се избере на $n-m$ начини. Според тоа, вкупниот број можни шестаголници Q е еднаков на

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)((m+1)^3 - m^3) &= \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)(m+1)^3 - \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n}(n-m+1)m^3 - \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

21. (*Принцип на исклучување*). Докажи, дека ако M е конечно множество и $A \subseteq M$, тогаш $|M \setminus A| = |M| - |A|$.

Решение. Од $M = A \cup (M \setminus A)$ и $A \cap (M \setminus A) = \emptyset$, според принципот на збир следува $|M| = |A| + |M \setminus A|$, односно $|M \setminus A| = |M| - |A|$.

22. Дадени се $2n$ ($n > 1$) точки кои лежат во една рамнина. Правата p лежи во истата рамнина и не минува низ ниту една од дадените точки. Докажи, дека правата сече најмногу n^2 отсечки чии краеви се во дадените точки.

Решение. Нека дадените точки и правата p лежат во рамнината ® . Правата p ја дели рамнината ® на две полурамнини ®$_1$ и ®$_2$. Ако во едната полурамнина лежат m точки, тогаш во другата полурамнина лежат $2n-m$ точки. Отсечки на кои двете крајни точки им се во иста полурамнина правата не ги сече. Правата ги сече отсечките, со крајни точки во дадените, на кои едниот крај му е во полурамнината ®$_1$, а другиот крај им е во полурамнината ®$_2$. Такви отсечки има $m(2n-m)$. Бидејќи

$$n^2 - m(2n-m) = n^2 - 2nm + m^2 = (n-m)^2 \geq 0\,,$$

добиваме дека $n^2 \geq m(2n-m)$. Значи, правата не сече повеќе од n^2 отсечки.

23. На правата се запишани неколку природни броеви. Во еден чекор ги избираме сите парови од последователни броеви на правата и за парот (a,b) во средината на отсечката меѓу броевите a и b го запишуваме бројот $a+b$. Колку пати по 2013 чекори е запишан бројот 2013, ако:
а) дадените броеви се 1 и 1000,
б) дадените броеви се 1, 2, ..., 1000 запишани во растечки редослед од лево на десно.

Решение. а) Да забележиме, дека бројот 2013 не може да се појави на правата за парот (a,b), ако $a+b > 2013$. Лесно се покажува дека по 2013 чекори бројот 2013 се запишува само двапати и тоа во $8-$миот и $2013-$тиот чекор.
б) Да го додадеме на правата бројот 1 по бројот 1000. Ќе преброиме колку пати се среќава бројот 2013 на новата права по 2013 чекори. Конструираме индуктивно низа A од парови броеви. Прво избираме

$$A = \{(1,2),\{2,3),\ldots,(999,1000),(1000,1)\}$$

и на секој чекор при запишување на бројот $k=a+b$ за парот (a,b) во множеството A додаваме два нови парови (a,k) и (k,b) .
Со индукција по $a+b$ ќе докажеме дека подредениот пар (a,b) се појавува во множеството A само кога $(a,b)=1$ и секогаш кога $(a,b)=1$ парот (a,b) се појавува точно еднаш во множеството A . Базата на индукцијата се проверува директно. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $a+b<k$. Ќе докажеме дека тоа е точно за $a+b=k$. Парот (a,b) се додава во A кога го запишуваме бројот b меѓу броевите од парот $(a,b-a)$. Бидејќи $a+(b-a)=$ $b<k$, добиваме дека парот $(a,b-a)$ е во множеството само ако $(a,b-a)=1$ и ако $(a,b-a)=1$, тогаш парот $(a,b-a)$ се појавува точно еднаш. Бидејќи $(a,b)=(a,b-a)$ тврдењето е точно и за $a+b=k$, со што доказот е завршен. Според тоа, бројот на запишувања на бројот 2013 е еднаков на паровите

$(a, 2013-a)$ за кои $(a, 2013-a)=1$. Тоа значи, дека 2013 се запишува точно $\ddot{}\,(2013)=1200$ пати.

Од а) имаме дека 2013 меѓу 1 и 1000 се запишува двапати. Значи, на почетната права 2013 е запишан $1200-2=1198$ пати.

24. За природниот број n ќе велиме дека е *обичен*, ако бројот на различните начини на претставување на n како збир на два или повеќе последователни природни броја е непарен број. Определи го бројот на обичните броеви помали од 2012?

Решение. За секој непарен делител q на n добиваме различно претставување на n како збир на еден или повеќе последователни природни броеви на следниов начин. Нека $d=\frac{n}{q}$. Земаме q последователни цели броеви такви што средниот од нив е еднаков на d. Ако сите овие броеви се природни имаме претставување на n како збир на непарен број природни броеви. Ако меѓу овие броеви има непозитивни, тогаш нивните спротивни броеви исто така припаѓаат на збирот (0 е спротивна сама на себе). Во овој случај ги отфрламе спротивните броеви и добиваме претставување на n како збир од парен број природни броеви.

Обратно, ако n е збир на непарен број q природни броеви и средниот од нив е d, тогаш $n=dq$. Ако n е збир на парен број природни броеви, тогаш кон збирот да ги додадеме сите помали природни броеви, нулата и нивните спротивни. Ако средниот од нив е еднаков на d, тогаш $n=dq$. Добиените на тој начин делители q на n за секое претставување на n како збир на еден или повеќе последователни се различни.

Од досега изнесеното следува дека бројот на различните начини за претставување на n како збир на еден или повеќе последователни природни броеви е еднаков на бројот на непарните делители на n. Ако го исклучиме преставувањето на n како збир на еден број, добиваме дека бараните броеви во задачата се оние со парен број непарни делители. Полесно е да ги преброиме останатите броеви – тие имаат непарен број непарни делители, што е случај кога најголемиот нивен непарен делител r е точен квадрат (делителите се групираат по парови со производ r, а бројот им е непарен точно кога некој од нив е пар сам со себе). Така, броевите кои не се обични се точните квадрати: $1^2, 2^2, 3^2, ..., 44^2$ и удвоените точни квадрати: $2\cdot 1^2, 2\cdot 2^2, 2\cdot 3^2, ..., 2\cdot 31^2$.

Според тоа, бројот на обичните броеви помали од 2012 е еднаков на

$$2011-31-44=1936.$$

25. Нека $n \ge 2$ е природен број и конечните непразни множества $A_1, A_2, ..., A_n$ се такви, што $|A_i \Delta A_j| = |i-j|$ за секои $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Определи ја најмалата можна вредност на $|A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$.

Решение. Да го означиме бараниот минимум со S_n. Ќе докажеме дека

$$S_{2k} = k^2 + 2 \text{ и } S_{2k+1} = k^2 + k + 2.$$

Прво да забележиме од принципот на исклучување следува точноста на следниве тврдења.

Тврдење 1. За секои две конечни множества A и B важи $|A| + |B| \ge |A \Delta B|$.

Тврдење 2. За секои две непразни конечни множества A и B од $|A \Delta B| = 1$ следува $|A| + |B| \ge 3$.

За $n = 2k$ од тврдењето 1 следува, дека

$$|A_i| + |A_{2k+1-i}| \ge |A_i \Delta A_{2k+1-i}| = 2k + 1 - 2i \text{, за } i = 1, 2, ..., k-1.$$

Освен тоа $|A_k \Delta A_{k+1}| = 1$ и од тврдењето 2 следува $|A_k| + |A_{k+1}| \ge 3$. Значи,

$$S_{2k} = |A_k| + |A_{k+1}| + \sum_{i=1}^{k-1} (|A_i| + |A_{2k+1-i}|) \ge 3 + \sum_{i=1}^{k-1} (2k + 1 - 2i) = k^2 + 2.$$

Аналогно, за $n = 2k + 1$ имаме

$$|A_i| + |A_{2k+2-i}| \ge |A_i \Delta A_{2k+2-i}| = 2k + 2 - 2i \text{, за } i = 1, 2, ..., k-1,$$

и $|A_k| + |A_{k+1}| + |A_{k+2}| \ge 3 + 1 = 4$. Значи,

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= |A_k| + |A_{k+1}| + |A_{k+2}| + \sum_{i=1}^{k-1} (|A_i| + |A_{2k+2-i}|) \\ &\ge 4 + \sum_{i=1}^{k-1} (2k + 2 - 2i) = k^2 + k + 2. \end{aligned}$$

Сега лесно се докажува, дека множествата

$$A_i = \{i, i+1, ..., k\},\ i = 1, 2, ..., k,\ \ A_{k+1} = \{k, k+1\}$$
$$A_{k+j} = \{k+1, k+2, ..., k+j-1\},\ j = 2, 3, ..., k+1,$$

се такви, што $|A_i \Delta A_j| = |i-j|$ за секои $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, при што важи

$$|A_1| + |A_2| + ... + |A_{2k}| = k^2 + 2 = [\tfrac{(2k)^2}{4}] + 2,$$

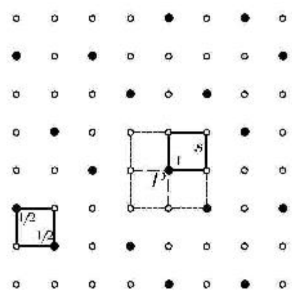
$$|A_1| + |A_2| + ... + |A_{2k+1}| = k^2 + k + 2 = [\tfrac{(2k+1)^2}{4}] + 2.$$

Значи, минималната можна вредност на S_n е $[\frac{n^2}{2}] + 2$.

26. Разгледуваме квадратна $n \times n$ решетка. Квадратна патека ја нарекуваме затворената патека (долж линиите на решетката) во форма на квадрат со страни паралелни на рабовите на решетката. Нека $M(n)$ е најмалиот број темиња

кои треба да се означат така што секоја квадратна патека минува најмалку низ една означена точка. Докажи дека

$$\tfrac{2}{7}(n-1)^2 \le M(n) \le \tfrac{2}{7}n^2 .$$



Решение. Нека претпоставиме дека се означени $M(n)$ точки така што секоја квадратна патека минува низ некоја означена точка. За произволна 2×2 патека s, на секоја означена точка на s ѝ доделуваме вредност $\frac{1}{k}$ каде k е бројот на означените точки на s. За секоја точка P со $f(P)$ да го означиме збирот на овие вредности доделени на точката P по сите патеки s кои минуваат низ P.

За секоја точка P на надворешните рабови на решетката важи $f(P)\le 2$. Исто така, ако точката P е во внатрешноста на решетката, таа припаѓа на четири квадратни патеки 2×2, а барем една од овие четири патеки содржи означена точка различна од P бидејќи квадратната патека 3×3 која ја уоквирува P содржи означена точка различна од P. Затоа важи $f(P)\le \frac{7}{2}$.

Од друга страна, збирот на вредностите $f(P)$ по сите означени точки P е еднаков на $(n-1)^2$ бидејќи секоја од $(n-1)^2$ можни патеки s допринесува на овој збир за 1. Според тоа,

$$\tfrac{7}{2}M(N)\ge (n-1)^2 \text{, т.е. } \tfrac{2}{7}(n-1)^2 \le M(n) .$$

Конечно, ако ги означиме сите точки (x,y) за кои $y-2x\equiv 2$ или $6(\mathrm{mod}\,7)$, условот на задачата е задоволен, а лесно се проверува дека за секој n се означени точно $[\frac{2}{7}n^2]$ точки.

3. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ КОНФИГУРАЦИИ

1. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и нека $k\in\{1,2,...,n\}$. Секоја подредена $k-$торка од видот

   $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})$, каде што $a_{i_p}\neq a_{i_t}$, за $p\neq t$ и $a_{i_p}\in A$, за $p=1,2,...,k$

   ја нарекуваме *варијација без повторување од* n *елементи од класа* k. Бројот на варијациите без повторување од n *елементи од класа* k го означуваме со V_n^k, $n=1,2,...;\ k=1,2,...,n$.

   а) Докажи, дека ако $k<n$, тогаш

   $$V_n^{k+1}=(n-k)V_n^k\,. \tag{1}$$

   б) Докажи, дека ако $n\in\mathbb{N}$, тогаш

   $$V_n^k=n(n-1)...(n-k+1)\text{, за } k=1,2,...,n\,. \tag{2}$$

   Решение. а) Од секоја варијација без повторување од n елементи од класа k, т.е. од секоја подредена $k-$ка од облик $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})$, со додавање на уште еден елемент

   $$a_{i_{k+1}}\neq a_{i_p},\ \text{за } p\neq k+1,\ \ p=1,2,...,k\,,$$

   кои вкупно ги има $n-k$, може да се добијат $n-k$ варијации без повторување од n елементи од класа $k+1$ од вид $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k},a_{i_{k+1}})$. Притоа се добиваат сите варијации од n елементи од класа $k+1$ и секоја од новодобиените варијациии се добива само по еднаш, па затоа од принципот на производ следува формулата (1).

   б) Очигледно е дека $V_n^1=n$. Нека за $k=i<n$ важи формулата (2), т.е.

   $$V_n^i=n(n-1)...(n-i+1)\,.$$

   Сега, од (1) и од претпоставката добиваме

   $$V_n^{i+1}=(n-i)V_n^i=n(n-1)...(n-i+1)(n-i)\,,$$

   т.е. формулата важи и за $k=i+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека формулата (2) важи за $k=1,2,...,n$.

2. Еден шаховски клуб има 12 шахисти. За натпревар треба да се изберат 4 шахисти и да се распоредат на таблите $T1,T2,T3$ и $T4$. На колку начини тоа може да се направи?

Решение. Бројот на начините на избор и распоредување на 4 од 12 шахисти и нивно распоредување на таблите $T1, T2, T3$ и $T4$ е еднаков на варијациите без повторување од 12 елементи од класа 4, т.е. тој е еднаков на

$$12\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 11880$$

3. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A=\{a_1,...,a_n\}$ и нека $k\in\mathbb{N}$. Секоја подредена k – торка од облик

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}) \text{, каде што } a_{i_p}\in A \text{, за } p=1,2,...,k$$

ја нарекуваме *варијација со повторување од* n *елементи од класа* k. Бројот на варијациите со повторување од n *елементи од класа* k го означуваме со $\overline{V}_n^k$, $n=1,2,...;$ $k=1,2,...,n$.

Докажи, дека ако $n,k\in\mathbb{N}$, тогаш $\overline{V}_n^k = n^k$.

Решение. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,...,a_n\}$. Множеството варијации со повторување од n елементи од класа k всушност е множеството

$$A\times A\times ...\times A = \{(b_1,b_2,...,b_k)\,|\, b_i\in A,\, i=1,2,...,k\},$$

па затоа од принципот на производ следува $\overline{V}_n^k = |A|^k = n^k$.

4. Нека A е множесвото од сите низи со должина 4, составени само од цифрите 0 и 1. Кој е најмалиот број низи кои треба да се изберат од A така, што произволна низа од A се разликува од некоја од избраните низи во најмногу една позиција?

Решение. Множеството A има $2^4 = 16$ елементи. Секоја низа со должина 4 покрива точно 5 низи од A кои се разликуваат во најмногу една позиција. Бидејќи $16 = 5\cdot 3+1$, бројот на низите е поголем или еднаков на 4 и како множеството $\{0000, 0111, 1111, 1000\}$ го има саканото својство, заклучуваме дека бараниот број е 4.

5. На математички натпревар учествувале 21 момче и 21 девојче. Секој од нив решил најмногу 6 задачи. За секое момче и за секое девојче постои барем една задача која и двајцата ја решиле. Докажи, дека постои задача која ја решиле барем три момчиња и барем три девојчиња.

Решение. За една задача ќе велиме дека е *тешка за момчињата* ако ја решиле најмногу две момчиња, а *тешка за девојчињата* ако ја решиле најмногу две девојчиња.

Ќе го oцениме бројот на паровите момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача тешка за момчињата. Да разгледаме произволно девојче. Според условот, меѓу шесте задачи кои ги решила, најмногу 5 се тешки за момчињата, т.е. овие задачи се решени од најмногу 2 момчиња. Според тоа, бројот на разгледуваните парови е помал или еднаков на $21\cdot 5\cdot 2=210$. Слично, има најмногу 210 парови момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача која е тешка за девојчињата. Меѓутоа, вкупниот број парови момче-девојче е $21^2=441$. Значи, во најмалку 21 пар задачата која и двајцата ја решиле не е тешка ниту за девојчињата ниту за момчињата. Јасно, оваа задача ја решиле најмалку три момчиња и најмалку три девојчиња.

6. Низа од четири парни цифри меѓу кои нема три еднакви се нарекува *допустлива*.

а) Определи го бројот на допустливите низи.

б) За секој природен број $n\geq 2$ со d_n да го означиме бројот на начините на кои може да се пополни табела со n редови и 4 колони со парни цифри така што секој ред е допустлива низа и низата 2,0,0,8 се среќава точно еднаш. Определи ги сите природни броеви n за кои $d_n \mid d_{n+1}$.

Решение. а) Бидејќи има 5 парни цифри, добиваме дека постојат $5^4=625$ низи од парни цифри. Меѓу нив 5 имаат четири еднакви цифри и $5\cdot 4^2=80$ имаат точно три еднакви цифри. Според тоа, бројот S на допустливите низи е еднаков на $625-5-80=540$.

б) Имаме n можности за ред пополнет со низата 2,0,0,8. Секој од останатите $n-1$ редови може да биде пополнет на $S-1$ начини. Според тоа,

$$d_n=n(S-1)^{n-1}=539^{n-1}n.$$

Значи,

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{539^n(n+1)}{539^{n-1}n}=539\frac{n+1}{n}$$

е природен број. Бидејќи $(n,n+1)=1$ добиваме дека $n\mid 539=7^2\cdot 11$, па затоа $n\in\{7,11,49,77,539\}$.

7. На еден натпревар учениците решавале пет задачи. Не постојат два ученика кои решиле исти задачи, но ако избереме било кои четири задачи, тогаш за секој ученик постои најмалку уште еден ученик кој ги решил токму истите тие четири избрани задачи. Колку ученици учествувале на натпреварот.

Решение. На секој ученик можеме да му придружиме низа од нули и единици со должина 5 така што единицата на $k-$тото значи дека ученикот ја решил $k-$тата задача, а нулата дека не ја решил $k-$тата задача. Бидејќи не постојат два ученика кои решиле исти задачи заклучуваме дека ваквото придружување е биекција. Сега доволно е да ги преброиме низите.

Јасно, на натпреварот учествувале најмногу $2^5=32$ ученика. Ќе докажеме дека имало точно 32 ученика. Нека $ABCDE$ е произволна низа од нули е единици. На натпреварот учествувал најмалку еден ученик и нека $abcde$ е низата од нули и единици која му соодветствува.

Ако $ABCDE = abcde$, тогаш доказот е завршен, бидејќи ученикот $abcde$ учествувал на натпреварот, а $ABCDE$ е произволна низа.

Нека $e \neq E$. Според условот на задачата за ученикот $abcde$ постои барем уште еден ученик за кој неговата низа започнува со $abcd$. Бидејќи $e \neq E$, на овој ученик му е придружена низата $abcdE$. Со други зборови на натпреварот учествувал и ученикот $abcdE$. Ако $ABCDE = abcdE$, тогаш доказот е завршен. Во спротивно да претпоставиме дека $d \neq D$. За ученикот $abcdE$ постои барем уште еден ученик чија низа започнува со abc и завршува со E. Бидејќи $d \neq D$, тоа е низата $abcDE$, т.е. на натпреварот учествувал и ученикот $abcDE$. Со аналогни размислувања се докажува дека на натпреварот учествувале и учесниците $abCDE, aBCDE$ и $ABCDE$, т.е. дека за низата $ABCDE$ постои ученик на кој истата му е придружена.

Конечно, од произволноста на низата $ABCDE$ следува дека на натпреварот учествувале 32 ученика.

8. Определи го бројот на подредените тројки множества (A, B, C) такви што

1) $A \cup B \cup C = \{1, 2, ..., n\}$,

2) $A \cap B \cap C = \varnothing$

3) $A \cap B \neq \varnothing$.

Решение. Ако за подредената тројка множества (A, B, C) важат дадените услови, тогаш секој од елементите $1, 2, ..., n$ припаѓа на едно од следниве по парови дисјунктни множества:

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \quad \overline{A} \cap B \cap \overline{C}, \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap C,$$
$$A \cap B \cap \overline{C}, \quad A \cap \overline{B} \cap C, \quad \overline{A} \cap B \cap C$$

и барем еден од елементите се наоѓа во множеството $A \cap B \cap \overline{C}$. Бројот на распоредувања на n елементи во 6 дисјунктни множества е еднаков на 6^n. Бројот на распоредувањата кај кои $A \cap B \cap \overline{C} = \varnothing$ е еднаков на 5^n. Сега, од принципот на исклучување следува дека бараниот број подредени тројки е еднаков на $6^n - 5^n$.

9. Нека A е множеството од сите низи со должина 2012, составени од броевите 0, 1 и 2. Нека $T \subset A$ е подмножеството со најмал број елементи кои го имаат следново својство: за секоја низа $a_1, a_2, ..., a_{2012}$ од A постои низа $b_1, b_2, ...,$ b_{2012} од A, за која $a_i \neq b_i$, за секој $i = 1, 2, ..., 2012$. Докажи дека

$$\frac{3^{2011}}{2^{2010}} < |T| \leq 3^{1006}.$$

Решение. Да го разгледаме множеството B составено од сите низи

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ..., x_{1006}, y_{1006},$$

каде $x_i y_i = 00,11$ или 22. Бидејќи имаме 1006 парови $x_i y_i$ и секој пар прима три вредности, добиваме дека бројот на овие низи е 3^{1006}, односно $|B| = 3^{1006}$. Од друга страна, бидејќи за секој пар $ab, a, b \in \{0,1,2\}$, постои $x_i y_i = 00,11$ или 22 за кој $a \neq x_i, b \neq y_i$, заклучуваме дека множеството B го задоволува условот на задачата. Затоа $|T| \leq |B| = 3^{1006}$.

Нека A_n е множеството од сите низи со должина n составено од 0, 1 и 2, а T_n е множество со најмал број елементи кое го задоволува условот на задачата. Ќе го докажеме неравенството $|T_n| \geq \frac{3}{2}|T_{n-1}|$. Со $t_i, i = 0,1,2$ да го означиме бројот на низите од T_n чиј прв елемент е еднаков на i. Бидејќи низите од A_n со прв елемент 2 се „покриваат" од низите од T_n со први елементи 0 или 1, добиваме $t_0 + t_1 \geq |T_{n-1}|$. Аналогно, $t_1 + t_2 \geq |T_{n-1}|$ и $t_0 + t_2 \geq |T_{n-1}|$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$|T_n| = t_0 + t_1 + t_2 \geq \frac{3}{2}|T_{n-1}|.$$

Од последното неравенство, ако искористиме дека $|T_1| = 2$, добиваме

$$|T_{2012}| \geq \frac{3}{2}|T_{2011}| \geq ... \geq (\frac{3}{2})^{2011}|T_1| = \frac{3^{2011}}{2^{2010}}.$$

10. Определи го бројот на подмножествата B на множеството $\{1,2,...,2005\}$ со својство: збирот на елементите на B при делење со 2048 дава остаток 2006.

Решение. Да го разгледаме множеството $\{1,2,2^2,...,2^{10}\}$. Бидејќи секој број од 0 до 2047 на единствен начин се претставува како збир на степени на бројот 2 заклучуваме, дека за секој $i, 0 \leq i \leq 2047$ постои единствено подмножество на $\{1,2,2^2,...,2^{10}\}$ чиј збир на елементи е еднаков на i (земаме дека збирот на елементите на празното множество е еднаков на 0).

Да разгледаме множество A со својство: за секој i бројот на подмножествата со збир на елементи кои при делење со 2048 даваат остаток i не зависи од i. Лесно се гледа дека за секој a истото својство важи и за множестото $A \cup \{a\}$. Бидејќи $\{1,2,2^2,...,2^{10}\} \subset \{1,2,3,...,2005\}$ добиваме дека бројот на подмножествата B на множеството $\{1,2,...,2005\}$ со збир на елементи кои даваат остаток $i, 0 \leq i \leq 2047$ при делење со 2048 е еднаков на

$$\frac{2^{2005}}{2048}=\frac{2^{2005}}{2^{11}}=2^{1994}.$$

Според тоа, бараниот број е 2^{1994}.

11. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Варијацијата без повторување од n елементи од класа n ја нарекуваме *пермутација без повторување од n елементи*. бројот на пермутациите без повторување од n елементи го означуваме со P_n.

Докажи, дека $P_n=n!$.

Решение. Според задача 1 добиваме

$$P_n=V_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot(n-n+1)=n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 1=n!.$$

12. Определи го бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,...,n\}$ во кои двојката се наоѓа (не задолжително непосредно) по единицата.

Решение. Бројот на пермутациите во кои двојката се наоѓа (не задолжително непосредно) по единицата е еднаков на бројот на пермутациите во кои двојката се наоѓа (не задолжително непосредно) пред единицата. Вкупниот број пермутации на множеството $\{1,2,...,n\}$ е еднаков на $n!$, па затоа бараниот број е еднаков на $\frac{1}{2}n!$.

13. Нека $n\geq k+2$. Определи го бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,...,n\}$ во кои меѓу единицата и двојката има точно k елементи.

Решение. Бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,...,n\}$ во кои 1 стои на местото со реден број i, а 2 на местото со реден број j, $i\neq j, i,j\in\{1,2,...,n\}$ е еднаков на $(n-2)!$. Понатаму, во пермутацијата на елементите на множеството $\{1,2,...,n\}$ меѓу елементите 1 и 2 има точно k елементи ако и само ако парот редни броеви на кои се наоѓаат елементите 1 и 2 е еден од паровите броеви: $(1,k+1),(2,k+2),...,(n-k-1,n)$. На секои од овие места броевите 1 и 2 можат да се распоредат на два начина, па затоа бараниот број пермутации е еднаков на $2(n-k-1)(n-2)!$.

14. На колку начини n лица можат да застанат во редица, а притоа две фиксирани лица да не бидат едно до друго?

Решение. Нека се воочени лицата a и b. Прво ќе го определиме бројот на распоредите (пермутациите) во кои лицата a и b се едно до друго. Во овој случај постојат две можности: лицето a да е лево од лицето b и лицето a да е десно од лицето b. Во двата случаи бројот на пермутациите е $(n-1)!$, бидејќи парот од двете лица може да се смета како еден елемент во пермутација од $n-1$ елементи. Според тоа, вкупниот број пермутации во кои лицата a и b се едно до друго е $2(n-1)!$. Конечно, бараниот број распоредувања е

$$n!-2(n-1)!=n(n-1)!-2(n-1)!=(n-1)!(n-2).$$

15. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација $(i_1,i_2,...,i_n)$ на броевите $1,2,...,n$ таква што ако околу тркалезна маса со n столици седнат n луѓе и за секој $k=1,2,...,n$, $k-$тиот човек се помести за i_k столици на десно, тогаш сите луѓе ќе седнат на различни столици.

Решение. Нека луѓето со броеви $1,2,...,n$ се поместиле за $i_1,i_2,...,i_n$ столици на десно. Тогаш $k-$тиот човек ќе седи на столицата со број $k+i_k$ ако $k+i_k\le n$ или на столицата $k+i_k-n$ ако $k+i_k>n$. Значи, постои број p со својство

$$(i_1+1)+(i_2+2)+...+(i_n+n)-pn=1+2+...+n,$$

т.е.

$$i_1+i_2+...+i_n\equiv 0(\bmod n).$$

Но, $i_1+i_2+...+i_n=\frac{n(n+1)}{2}$, па затоа $\frac{n(n+1)}{2}\equiv 0(\bmod n)$, што е можно ако и само ако $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$.

16. Нека $n>1$ е природен број, M е производот на сите природни делители на n и X е најголемиот природен број таков што X^2 е делител на M. Докажи, дека бројот на начините, на кои од делителите на бројот n можат да се отстранат три броја, така што производот на останатите делители да е еднаков на X^2, е број од видот на $\frac{3^s-1}{2}$, каде s е ненегативен цел број.

Решение. Јасно, бројот $\frac{M}{X^2}$ не е делив со квадрат на природен број поголем од 1. Навистина, ако p е прост број таков што $p^2\,|\,\frac{M}{X^2}$, тогаш $(pX)^2\,|\,M$, што противречи на максималноста на X. Според тоа, $\frac{M}{X^2}=p_1p_2...p_k$ за некои по парови различни прости броеви $p_i, i=1,2,...,k$. Значи, $X^2=\frac{M}{p_1p_2\cdots p_k}$, па затоа секое можно отстранување на три делители од низата $p_i, i=1,2,...,k$ соодветствува на низа со елементи 1, 2 и 3 и должина k (делителите се добиваат ако ги помножиме броевите p_i кои соодветствуваат на 1 за првиот, тие на 2 за вториот и тие на 3 за третиот). Трите низи со еднакви броеви соодветствуваат на еден ист делител, а секоја од останатите низи е броена 6 пати. Од претходно изнесеното следува дека бараниот број е $\frac{3^k-3}{6}=\frac{3^{k-1}-1}{2}$.

17. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $\mathbb{A}_n$ е множеството од сите пермутации без повторување $(a_1,a_2,...,a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што важи

$$k\,|\,2(a_1+a_2+...+a_k)\text{ , за секој } k\in\{1,2,...,n\}\,.$$

Определи го бројот на елементите на множеството $\mathbb{A}_n$.

Решение. Со F_n да го означиме бројот на елементите на множеството $\mathbb{A}_n$. Имаме $F_1=1, F_2=2$ и $F_3=6$. За $n>3$, да разгледаме произволна пермутација $(a_1,a_2,...,a_n)$ во $\mathbb{A}_n$. Бидејќи $n-1$ е делител на

$$2(a_1+a_2+...+a_{n-1})=n(n+1)-2a_n\equiv 2-2a_n(\operatorname{mod} n-1)\,,$$

следува дека a_n е еднаков на $1,\frac{n+1}{2}$ или n.

Нека $a_n=\frac{n+1}{2}$. Тогаш $n-2$ е делител на

$$2(a_1+a_2+...+a_{n-2})=n^2-1-2a_{n-1}\equiv 3-2a_{n-1}(\operatorname{mod} n-2)\,.$$

Затоа, мора да биде $2a_{n-1}-3=n-2$, т.е. $a_{n-1}=\frac{n+1}{2}=a_n$, што е противречност.

Ако $a_n=n$, тогаш пресликувањето $(a_1,a_2,...,a_n)\to(a_1,a_2,...,a_{n-1})$ е биекција во множеството $\mathbb{A}_{n-1}$, па вакви пермутации има F_{n-1}.

Ако $a_n=1$, тогаш $(a_1-1,a_2-1,...,a_{n-1}-1)$ е пермутација на $\{1,2,...,n-1\}$, која припаѓа на множеството $\mathbb{A}_{n-1}$, бидејќи

$$2((a_1-1)+(a_2-1)+...+(a_k-1))=2(a_1+a_2+...+a_k)-2k$$

е делив со k за $k=1,2,...,n-1$. Како и во претходниот случај вакви пермутации има F_{n-1}.

Според тоа, за $n>3$ важи $F_n=2F_{n-1}$ и како $F_3=6$, добиваме дека

$$F_n=3\cdot 2^{n-2}\text{ , за } n\geq 3\,.$$

18. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и нека $k_1,k_2,...,k_n$ се цели броеви. За секоја пермутација $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ нека

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i\,.$$

Докажи, дека постојат различни пермутации b и c такви што $n!$ е делител на бројот $S(b)-S(c)$.

Решение. Нека претпоставиме дека сите $n!$ броеви $S(a)$ се различни по модул $n!$. Тогаш збирот $\sum_a S(a)$ по сите пермутации е кунгруентна со

$$0+1+...+(n!-1)=\frac{(n!-1)n!}{2}\equiv\frac{n!}{2}(\text{mod } n!)$$

Од друга страна, секој од броевите k_i во збирот $\sum_a S(a)$ се јавува со коефициент

$$(n-1)!(1+2+...+n)=\frac{n+1}{2}n!,$$

а овој збир за непарен n е делив со $n!$. Затоа, $\sum_a S(a)\equiv 0(\text{mod } n!)$, што е противречност.

19. Нека $(a_1,a_2,...,a_n)$ е пермутација на броевите $1,2,...,n$, $n\ge 2$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|.$$

Решение. *Прв начин*. Да означиме

$$S=|a_n-a_1|+\sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k| \qquad (1)$$

и на реалната оска да ги разгледаме точките $A_1,A_2,...,A_n$ со координати $a_1,a_2,...,a_n$, соодветно. Тогаш збирот S е еднаков на должината на затворената искршена линија $A_1A_2...A_nA_1$. Ќе ја оцениме оваа должина ако го разгледаме покривањето на интервалите од видот $[k,k+1]$, каде $k\in\{1,2,...,n-1\}$.

Ако $k<\frac{n}{2}$, интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2k$ пати, бидејќи на располагање имаме најмногу k леви краеви на покривните отсечки, а секоја точка е крајна за две отсечки. Аналогно при $k\ge\frac{n}{2}$ интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2(n-k)$ пати. Според тоа, кога $n=2m$ имаме

$$S\le 2[1+2+...+m+(m-1)+...+2+1]=2m^2,$$

а кога $n=2m+1$ имаме

$$S\le 2[1+2+...+m+m+(m-1)+...+2+1]=2m(m+1).$$

Можеме да ги обединиме двете оценки со

$$S\le 2m(n-m), \text{ каде } m=[\tfrac{n}{2}].$$

Бидејќи $|a_n-a_1|\ge 1$ бараниот збир е помал или еднаков на $2m(n-m-1)$.

Не е тешко да се провери дека пермутацијата зададена со $a_{2k}=k$ и $a_{2k-1}=n-m-k$, за $k=1,2,...,m$, $a_n=m+1$, ако n е непарен број, дава збир $2m(n-m)-1$. Според тоа, бараната најголема вредност е $[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])-1$.

Втор начин. Да означиме $S=\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_{i+1}|$, каде $a_{n+1}=a_1$. Овој збир може да се запише во видот

$$S=\sum_{i=1}^{n}£_i(a_i-a_{i+1})=\sum_{i=1}^{n}c_ia_i \text{ , за некои } £_i\in\{-1,1\} \text{ и } c_i=£_i-£_{i-1},$$

при што $£_0=£_n$. За секој i важи $c_i\in\{-2,0,2\}$. Ги разгледуваме множествата $A=\{i\,|\,c_i=2\}$ и $B=\{i\,|\,c_i=-2\}$. Од $c_1+c_2+...+c_n=0$ следува $|A|=|B|=k$, за некој $k\le\frac{n}{2}$. Според тоа,

$$S=2\sum_{i\in A}x_i-\sum_{i\in B}x_i\le 2(n+(n-1)+...+(n-k+1))-2(1+2+...+k)=2k(n-k).$$

Изразот $2k(n-k)$ прима најголема вредност за $k=[\frac{n}{2}]$, па затоа

$$S\le 2k(n-k) \text{ , каде } k=[\tfrac{n}{2}].$$

Бидејќи $|a_n-a_1|\ge 1$ бараниот збир е помал или еднаков на $2m(n-m)-1$.
Равенство се достигнува, на пример, за пермутацијата

$$(a_1,a_2,...,a_n)=(m+1,1,m+2,2,m+3,3,...,m) \text{ , каде } m=n-[\tfrac{n}{2}].$$

Според тоа, бараната најголема вредност е $[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])-1$.

20. Определи го бројот на пермутациите $(a_1,a_2,...,a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ за кои изразот

$$|a_1-1|+|a_2-2|+...+|a_n-a| \qquad (1)$$

прима најголема можна вредност.

Решение. Ако во изразот (1) се ослободиме од апсолутните вредности, тогаш во добиениот израз ќе се појават броевите $1,1,2,2,...,n,n$, при што n од нив ќе бидат со знак $+$ и n ќе бидат со знак $-$. Добиенот збир е максимален ако и само ако првите n членови на низата $1,1,2,2,...,n,n$ се со знак $-$. Максималната вредност на збирот е $\frac{n^2-1}{2}$ ако n е непарен број, а $\frac{n^2}{2}$ ако n е парен број.

Ако $n=2k$, тогаш максимумот се достигнува ако и само ако

$$\{a_1,a_2,...,a_k\}=\{k+1,k+2,...,2k\} \text{ и } \{a_{k+1},a_{k+2},...,a_{2k}\}=\{1,2,...,k\}.$$

Бројот на пермутациите во овој случаје $(k!)^2$.

Ако $n=2k+1$, тогаш максимумот се достигнува ако и само ако

$$\{a_1,a_2,...,a_{k+1}\}=\{k+1,k+2,...,2k+1\} \text{ и } \{a_{k+2},a_{k+3},...,a_{2k+1}\}=\{1,2,...,k\}$$

или постои $x\in\{1,2,...,k\}$ таков што

$$x=a_{k+1},\ \{a_1,a_2,...,a_k\}=\{k+2,...,2k+1\} \text{ и }$$

$$\{a_{k+2}, a_{k+3}, ..., a_{2k+1}\} = \{1, 2, ..., k+1\} \setminus \{x\}$$

Бројот на пермутациите во овој случај е $k!(k+1)! + k(k!)^2 = (2k+1)(k!)^2$.

21. Определи го бројот S на сите пермутации ® на множеството $\{1, 2, 3, ..., n\}$ такви што производот

$$(®_1 - 1)(®_2 - 2)...(®_n - n)$$

е непарен број.

Решение. Производ на природни броеви е непарен број ако и само ако секој од множителите е непарен број, т.е. $(®_1 - 1)(®_2 - 2)...(®_n - n)$ е непарен број ако и само ако $®_1 - 1, ®_2 - 2, ..., ®_n - n$ се непарни броеви.

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. n е непарен број т.е. $n = 2k+1$. Нека ® е пермутација која го исполнува условот од задачата. Тогаш $®_1 - 1, ®_2 - 2, ..., ®_n - n$ се непарни броеви, па според тоа и нивниот збир е непарен број, т.е.

$$(®_1 - 1) + (®_2 - 2) + ... + (®_n - n) = 2s + 1.$$

Од друга страна $\{®_1, ®_2, ..., ®_n\} = \{1, 2, ..., n\}$, па затоа

$$\begin{aligned}(®_1 - 1) + (®_2 - 2) + ... + (®_n - n) &= (®_1 + ®_2 + ... + ®_n) - (1 + 2 + ... + n)\\ &= (1 + 2 + ... + n) - (1 + 2 + ... + n) = 0,\end{aligned}$$

што е противречност. Значи, кога n е непарен број таква пермутација не постои.

Случај 2. n е парен број, т.е. $n = 2k$. За да секој од множителите $®_1 - 1$, $®_2 - 2, ..., ®_n - n$ е непарен потребно и доволно е за секој i бројот $®_{2i-1}$ да е парен, а бројот $®_{2i}$ да е непарен. Да ги разгледаме пермутациите

$$\sim : \{2, 4, ..., 2k\} \to \{2, 4, ..., 2k\}, \quad\quad : \{1, 3, ..., 2k-1\} \to \{1, 3, ..., 2k-1\}. \quad (1)$$

Со помош на овие пермутации ќе определиме пермутација на

$$® : \{1, 2, ..., 2k\} \to \{1, 2, ..., 2k\}$$

на следниот начин:

$$®_{2i-1} = \sim_{2i}, \; ®_{2i} = \quad_{2i-1}, \quad (2)$$

за $i = 1, 2, ..., k$. Тогаш ® е пермутација на $\{1, 2, ..., 2k\}$ таква што производот $(®_1 - 1)(®_2 - 2)...(®_n - n)$ е непарен број. Обратно, секоја пермутација ® која го задоволува условот на задачата е определена со (2), каде $\sim$ и   се пермутации од видовите (1). Бидејќи

$$|S_A| = |\{\quad | \quad : \{1, 3, ..., 2k-1\} \to \{1, 3, ..., 2k-1\} \text{ е пермутација}\}| = k!$$

$$|S_B| = |\{\sim \,|\, \sim : \{2, 4, ..., 2k\} \to \{2, 4, ..., 2k\} \text{ е пермутација}\}| = k!$$

добиваме дека бројот на пермутациите кои го задоволуваат условот на задачата е

$$|S_A \times S_B| = |S_A| \cdot |S_B| = (k!)(k!) = (k!)^2 .$$

22. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Секое подмножество од k елементи, $k \leq n$ на множеството A го нарекуваме *комбинација без повторување од* n *елементи од класа* k. Бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k го означуваме со C_n^k, $n = 1, 2, 3, 4, ...$, $k = 1, 2, ..., n$. Во натамошните разгледувања ќе ја користиме и ознаката $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Докажи, дека

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}, \tag{1}$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \tag{2}$$

каде што $n = 1, 2, 3, 4, ...$, $k = 1, 2, ..., n$.

Решение. Нека $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е една комбинација без повторување од n елементи од класа k. Ако оваа комбинација ја пермутираме, ќе добиеме $P_k = k!$ пермутации, кои воедно се и сите варијации без повторување од n елементи од класа k кои се составени од елеменитите $a_1, a_2, ..., a_k$. Понатаму, од сите варијации без повторување на n елементи од класа k кои се составени од елеменитите $a_1, a_2, ..., a_k$ со занемарување на редоследот на елементите се добива единствената комбинација без повторување $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ од n елементи од класа k. Според тоа, бројот на варијациите без повторување V_n^k од n елементи од класа k е $P_k = k!$ пати поголем од бројот C_n^k на комбинациите без повторување на n елементи од класа k, па затоа важи формулата $V_n^k = C_n^k P_k$, која е еквивалентна на формулата (1).

Точноста на формулата (2) непосредно следува од задачите 1 и 3 и формулата (1).

Забелешка. Ако во броителот и именителот на десната страна на формулата (2) помножиме со $(n-k)!$, добиваме

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Понатаму, од претходната формула следува

$$C_n^{n-k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = C_n^k .$$

Да забележиме дека точноста на последното равенство следува и од фактот дека секое подмножество B од k елементи, $k \leq n$ на множеството A еднозначно определува подмножество $S \setminus B$ од $n-k$ елементи, $n-k \leq n$ на множеството A и обратно, што значи дека бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k е еднаков на бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа $n-k$.

23. Шаховски клуб има 8 шахисти и 6 шахистки. За претстојниот турнир клубот треба да го претставува екипа составена од 3 шахисти и 2 шахистки. На колку различни начини може да се избере екипата?

Решение. Од вкупно 8 шахисти изборот на 3 шахисти може да се направи на $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ начини. Слично, шахистките можат да се изберат на $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}$ $=15$ начини. Конечно, од принципот на производ следува дека изборот на екипата може да се направи на $56\cdot15=840$ начини.

24. На шаховски турнир учествувале мајстори и велемајстори. Секои двајца учесници на турнирот меѓусебно одиграле по една патија. Ако секој учесник на турнирот точно половина од своите поени ги освоил во партии кои ги играл против мајсторите, докажи дека вкупниот број на учесници на турнирот е точен квадрат.

Решение. Нека на турнирот учествувале x мајстори и y велемајстори. Бројот на поените кои се освоени во партиите во кои меѓусбно играле мајсторите е еднаков на $\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$, бројот на поените кои се освоени во партиите во кои меѓусебно играле велемајсторите е еднаков на $\binom{y}{2}=\frac{y(y-1)}{2}$ и бројот на поените во кои мајсторите играле против велемајсторите е еднаков на xy. Од условот на задачата следува дека $\frac{x(x-1)}{2}+\frac{y(y-1)}{2}=xy$, од каде добиваме $x+y=(x-y)^2$, што значи дека вкупниот број учесници на турнирот е точен квадрат.

25. Во група од n луѓе секој има по едно велигденско јајце. Тие ги разменуваат јајцата на следниов начин: при секоја размена двајца ги разменуваат јајцата кои ги имаат во моментот и секои двајца ги разменуваат јајцата барем еднаш. По неколку такви размени се покажало, дека секој го има истото јаце, кое го имал на почетокот. Определи го најмалиот број размени, ако:

а) $n=5$, б) $n=6$.

Решение. Луѓето ќе ги означуваме со $A, B, C, D, E, F, \ldots$, а јајцата, кои ги имаат на почетокот со соодветните мали букви. Значи, почетната состојба е опишана со $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, (Ff)$. Со XY ќе ја означуваме рамената на јајцата на X и Y. За две лица ќе велиме дека се соседи, ако нивните букви се соседни.

а) Бидејќи 5 луѓе формираат $\frac{5\cdot4}{2}=10$ парови, потребни се најмалку 10 размени. Ќе докажеме, дека 10 размени се доволни. Со последователните размени AB, BC и CA од почетната состојба доаѓаме до состојбата Aa, Bc, Cb, Dd, Ee. Понатаму, со последователните размени AD, DE и EA ја добиваме состојбата Aa, Bc, Cb, De, Ed. Сега последователно со размените BE и CD ја добиваме состојбата Aa, Bd, Ce, Db, Ec. Конечно, размените BD и CE ја добиваме состојбата Aa, Bb, Cc, Dd, Ee и секој го има истото јајце, кое го имал на почетокот.

б) Бидејќи 6 луѓе формираат $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ парови, потребни се најмалку 15 размени. Ќе докажеме дека бројот на размените мора да е парен број. Нека A, B, C, D, E, F се наредени во редица по овој редослед. Ќе велиме дека во даден момент две јајца x и y формираат инверзен пар, ако јајцето x на почетокот се наоѓало пред јајцето y (т.е. човекот кој го има јајцето x е лево од човекот кај го има јајцето y), а во тој момент y е пред x. Со T да го означиме бројот на инверзните парови. На почетокот $T=0$. Размената меѓу соседите го менува T за 1. Секоја размена е еквивалентна на непарен број размени меѓу соседи и затоа ја менува парноста на T. Бидејќи на крајот $T=0$, вкупниот број размени мора да е парен.

Најмал парен број кој е поголем од 15 е 16, што значи дека за $n=6$ се потребни барем 16 размени. Навистина, прво редоследно ги реализираме размените AB, BC, CA и ја добиваме состојбата Aa, Bc, Cb, Dd, Ee, Ff. Потоа со последователните размени AD, DE, EA ја добиваме состојбата Aa, Bc, Cb, De, Ed, Ff, па со размените FB, BE, EF ја добиваме состојбата Aa, Bd, Cb, De, Ec, Ff. Со последователните размени FC, CD, DF ја добиваме состојбата Aa, Bd, Ce, Db, Ec, Ff, по што со размените BD, CE, AF, AF ја добиваме состојбата Aa, Bd, Cc, Dd, Ee, Ff. Значи, доволни се 16 размени.

26. На колку начини од 6 луѓе може да се состават 5 трачлени делегации, така што некои две од 5-те делегации не се со ист состав?

Решение. Од 6 луѓе можат да се состават $\binom{6}{3}=20$ различни трачлени делегации. Од овие 20 делегации 5 делегации можеме да избереме на $\binom{20}{5}=15504$ начини.

27. Определи го бројот на подредените четворки цели броеви (a_1, a_2, a_3, a_4) такви, што $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, a_3 \geq 3, -10 \leq a_4 \leq 10$ и

$$a_1+a_2+a_3+a_4=2011.$$

Решение. Прво ќе го пресметаме бројот на четворките цели броеви чиј збир е

2011, за кои $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, a_3 \geq 3$ и $a_4 \geq -10$. Нека

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - 1, b_3 = a_3 - 2 \text{ и } b_4 = a_4 + 11.$$

Тогаш $b_1 \geq 1, b_2 \geq 1, b_3 \geq 1$, $b_4 \geq 1$ и

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2011 - 1 - 2 + 11 = 2019.$$

Бидејќи бројот на подредените четворки од горното равенство е еднаков на бројот на поставување на 3 цртички на празните места меѓу 2019 точки на права, заклучуваме дека бројот на подредените четворки (b_1, b_2, b_3, b_4) за кои се исполнети горните својства е еднаков на $\binom{2018}{3}$. Аналогно пресметуваме, дека бројот на подредените четворки (a_1, a_2, a_3, a_4) од цели броеви за кои се исполнети условите $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, a_3 \geq 3$ и $a_4 \geq 11$ е еднаков на $\binom{1998}{3}$.

Конечно, бараниот број четворки (a_1, a_2, a_3, a_4) е $\binom{2018}{3} - \binom{1998}{3}$.

28. Определи го најголемиот можен број на пермутации од n, $n > 1$ елементи такви што секои два елементи се соседни најмногу во една пермутација.

Решение. Нека S е множество од n елементи. Нека P е множество од m пермутации на множеството S такво што произволни два елемента на S се соседни најмногу во една пермутација од P. Секоја пермутација на множеството S содржи $n-1$ пар соседни елементи, а множеството S има $\frac{n(n-1)}{2}$ дволементни подмножества. Затоа мора да важи $m(n-1) \leq \frac{n(n-1)}{2}$, од каде добиваме $m \leq [\frac{n}{2}]$.

Останува да се докаже дека постои множество P со $[\frac{n}{2}]$ пермутации кое ги задоволува условите на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

29. За даден број ќе велиме дека е „шарен“ ако е запишан со еднаков број парни и непарни цифри. Да се определи бројот на сите четирицифрени „шарени“ броеви запишани со различни цифри?

Решение. Имаме пет парни цифри: 0, 2, 4, 6, 8 и пет непарни цифри: 1, 3, 5, 7, 9. Две цифри од петте парни цифри можеме да избереме на $C_5^2 = 10$ начини, т.е. ги имаме следниве можности

$$\{\{0,2\},\{0,4\},\{0,6\},\{0,8\},\{2,4\},\{2,6\},\{2,8\},\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\}\}.$$

На исто толку начини може да се изберат две од петте непарни цифри. За секои два пара (еден пар парни и еден пар непарни цифри) постојат вкупно $4! = 24$ начини за формирање на низа од четири цифри. Според тоа, вкупно имаме $10 \cdot 10 \cdot 24 = 2400$ четирицифрени низи, кои се состојат од две парни и две непарни цифри**.**

Останува да ги преброиме оние каде на прво место се наоѓа 0. Ако во некој пар составен од парни броеви се наоѓа 0 тогаш бројот на четирицифрени броеви кои започнуваат со 0 е $3!=6$. Бидејќи имаме четири парни пара, во кои се наоѓа 0, следува дека бројот на сите „шарени“ четирицифрени низи кои започнуваат со 0 е $4\cdot 10\cdot 6=240$.

Според тоа бројот на сите четирицифрени „шарени“ броеви запишани со различни цифри е $2400-240=2160$.

30. На секој ѕид на една коцка дадени се по n точки така што било кои три точки не се колинеарни и ниту една точка не лежи на рабовите на коцката.

а) Колку прави што не лежат на ѕидовите на коцката се определени со дадените точки?

к) Колку триаголници што не лежат на ѕидовите на коцката се определени со дадените точки?

в) Ако ѕидовите на коцката се обојат со различни бои, колку тетраедри со темиња во дадените точки имаат:

i) три истобојни темиња,

ii) две по две истобојни темиња.

Решение. а) Коцката има 6 ѕидови, што значи дека вкупно имаме $6n$ точки. Бидејќи било кои три точки кои лежат на еден ѕид не се колинеарни и не постојат три колинеарни точки кои лежат на различни ѕидови, со овие $6n$ точки се определени $\binom{6n}{2}$ прави. Бројот на правите кои лежат на еден ѕид е $\binom{n}{2}$, па затоа бараниот број е

$$\binom{6n}{2}-6\binom{n}{2}=15n^2 .$$

б) На сличен начин добиваме дека бројот на триаголниците определени со дадените $6n$ точки, а кои не лежат на еден ѕид на коцката е

$$\binom{6n}{3}-6\binom{n}{3}=5n^2(7n-3) .$$

в) За три темиња да бидат истобојни, тие мора да лежат на ист ѕид од коцката. Според тоа, бројот на основите на тетраедрите е еднаков на $6\binom{n}{3}$. Една од овие основи, заедно со било која од останатите $5n$ точки формира тетраедар. Според бараниот број тетраедри е

$$6\binom{n}{3}\cdot 5n=5n^2(n-1)(n-2) .$$

Аналогно како претходниот случај наоѓаме дека кога две по две темиња на тетраедарот се истобојни, тогаш бројот на тетраедрите е еднаков на

$$\binom{6}{2}\binom{n}{2}\binom{n}{2}=\frac{15}{4}n^2(n-1)^2 .$$

31. Даден е правилен $n-$аголник, $n\geq 6$. Колку триаголници има со темиња во темињата на $n-$аголникот, чии страни се дијагоналите на $n-$аголникот?

Решение. Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен $n-$аголник. Да ги разгледаме бараните триаголници за кои едно теме е A_1. Ова теме може да се поврзе со било кое теме од $n-$аголникот, освен со темињата A_2 и A_n. Такви две точки може да се изберат на $\binom{n-3}{2}$ начини. Од овој број треба да го одземеме бројот на триаголниците од видот $A_1A_kA_{k+1}$, $k=3,4,...,\ n-2$, кои ги има $n-4$ на број, па затоа A_1 е теме на $\binom{n-3}{2}-(n-4)$ такви триаголници. Ако постапката ја повториме за останатите темиња, секој триаголник ќе го броиме трипати, па затоа бараниот број триаголници е еднаков на

$$\frac{1}{3}n[\binom{n-3}{2}-(n-4)]=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

32. Во сенатот има 30 сенатори. Секој од сенаторите е скаран со точно шест други сенатори. На колку начини може да биде формирана трочлена комисија таква што секои два члена на комисијата се скарани меѓу себе или никои два члена на комисијата не се скарани.

Решение. Нека x е бројот на трочлените комисии за кои важи условот на задачата (таквите комисии ќе ги нарекуваме добри), а y е бројот на трочлените комисии за кои условот не важи. Тогаш

$$x+y=\binom{30}{3}=4060.$$

Да претпоставиме дека секој сенатор прави список од сите комисии чиј член е, но така што тој е скаран со секој од останатите два члена или не е скаран со ниту еден од останатите два члена. Тогаш, секој таков список содржи $\binom{23}{2}+\binom{6}{2}=268$ комисии. Според тоа, секоја добра комисија ќе биде запишана точно во три списоци, а секоја комисија која не е добра ќе биде запишана само во еден од тие списоци. Затоа важи

$$3x+y=30\cdot 268=8040.$$

Така, го добивме системот

$$\begin{cases} x+y=4060 \\ 3x+y=8040 \end{cases}$$

од каде наоѓаме $x=1990$.

33. Еден човек има 12 роднини – 5 мажи и 7 жени, а неговата сопруга исто така има 12 роднини – 5 жени и 7 мажи. Тие немаат заеднички роднини. Решиле секој на гости да повика по 6 роднини, но така што меѓу гостите да има 6 мажи и 6 жени. На колку начини тоа може да го направат?

Решение. Ако сопругот покани k мажи, тогаш од условот на задачата следува дека мора да покани $6-k$ жени, а истовремено сопругата мора да покани k

жени и $6-k$ мажи. Ова може да се направи на $\binom{5}{k}\binom{7}{6-k}\binom{7}{6-k}\binom{5}{k}$ начини. Можни вредности за k се $0,1,2,3,4,5$, па затоа вкупниот број начини на кои гостите може да бидат поканети е еднаков на

$$\sum_{k=1}^{5}(\binom{5}{k}\binom{7}{6-k})^2 = 267148 .$$

34. На колку начини кошаркарски тренер може да состави екипат од 5 кошаркари, во која двајца ќе играат на местото центар, двајца на местото бек и еден на местото крило, ако тренерот има на располагање 10 кошаркари, од кои тројца може да се само центри, тројца само бекови, еден само крило, двајца може дасе бек или крило, а еден крило или центар?

Решение. Бројот на различните состави на екипата го определуваме во зависност од тоа кој играч игра на местото на крило, при што со користење на принципите на збир и производ добиваме дека бараниот број е еднаков на

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2} + 2\binom{4}{2}\binom{4}{2} + \binom{5}{2}\binom{3}{2} = 162 .$$

35. На воениот совет на индијанските племиња учествувале поглавиците на Команчите, Сијуксите, Кајовите, Чеените, Шошоните и Апачите, и уште двајца воини на Апачите. Сите присутни биле рамноправни и зборувале само по еднаш, еден по еден, во произволен редослед, при што ниту еден од воините на Апачите не можел да земе збор пред својот поглавица. На колку различни начини може да се одвива разговорот меѓу нив.

Решение. Ако поглавицата на Апачите прв земе збор, тогаш воините на Апачите збор може да земат на $2\binom{7}{2}$ начини. Ако пак поглавицата на Апачите втор земе збор, тогаш воините на Апачите збор може да земат на $2\binom{6}{2}$ начини. Општо, ако поглавицата на Апачите земе збор k-ти по ред, тогаш воините на Апачите може да земат збор на $2\binom{8-k}{2}$ начини. Значи, поглавицата на Апачите и воините на Апачите збор може да земат на

$$2(\binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2})$$

начини. За секој начин на земање на збор на Апачите, останатите поглавици збор може да земат на $5!$ начини.

Значи, на воениот совет присутните збор може да земат на

$$2(\binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2})5! = 13440$$

начини.

36. На тениски турнир учествуваат 14 тенисери и секои два тенисера меѓу себе играат точно еден меч. Тројката играчи (a,b,c) ја нарекуваме триаголник

ако a го победил b, b го победил c и c го победил a. Определи го најголемиот можен број триаголници на овој турнир.

Решение. Имаме $\binom{14}{3}=364$ тројки. Ќе ги преброиме тројките кои не се триаголници. Со a_i да го означиме бројот на победите на i – тиот тенисер. Имаме $a_1+a_2+...+a_{14}=\binom{14}{2}=91$. Ако тројката тенисери не е триаголник, тогаш еден од тие тројца тенисери ги победил другите два. Така тројки кои не се триаголници, а во кои победник е i – тиот тенисер има $\binom{a_i}{2}$. Според тоа, имаме $S=\sum_i \binom{a_i}{2}$ тројки кои не се триаголници. Бројот на триаголниците е максимален, тогаш кога S е минимален, при услов $\sum_i a_i=91$. Бидејќи

$$\binom{a_i-1}{2}+\binom{a_j+1}{2}=\binom{a_i}{2}+\binom{a_j}{2}-(a_i-a_j-1),\text{ за } a_i-a_j>1,$$

збирот S е најмал кога сите a_i се разликуваат за најмногу 1, т.е. кога меѓу нив има по седум еднакви на 6 и 7. Тогаш $S=7\binom{6}{2}+7\binom{7}{2}=252$, а имаме $364-252=112$ триаголници.

Овој број навистина може да се достигне, на пример како што е прикажано во следнава табела:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0		1	1	1	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0		1	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0		1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1	1	1
10	1	1	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1	1
11	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1
12	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0		1	1
13	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0		1
14	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	

37. Десет луѓе купувале книги. Притоа
    1) Секој купил три различни книги и
    2) Секои двајца купиле најмалку една иста книга.

    Да ја разгледаме книгата купена најголем број пати. Определи ја најмалата вредност на овој број.

Решение. Нека биле купени шест различни книги и да ги означиме книгите со 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Десетте луѓе можеле да ги купат следниве тројки книги:

(1,2,3), (1,3,4), (1,4,5), (1,5,6), (1,62), (2,3,5), (3,4,6), (4,5,2) (5,6,3), (6,2,4).

Притоа секоја од книгите е купена точно од 5 луѓе.

Нека се купени n различни книги. Со m_i да го означиме бројот на луѓето кои ја купиле i – тата книга, $1 \le i \le n$. Ќе пишуваме $\{x, y, b\}$ ако x и y ја купиле книгата b. Било кои двајца купувачи припаѓаат најмалку на една множество, а i – тата книга припаѓа во точно $\binom{m_i}{2}$ множества. Затоа

$$\binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2} + ... + \binom{m_n}{2} \ge \binom{10}{2} = 45,$$

каде $m_1 + m_2 + ... + m_n = 30$. Ако бараниот број е еднаков на 4, тогаш

$$\binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2} + ... + \binom{m_n}{2} \le 7 \cdot \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 43,$$

што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека бараната најмала вредност е 5.

38. На кружница се обележени n точки. Кој е најголемиот можен број на остро-аголни триаголници со темиња во тие точки?

Решение. Ако постојат две точки кои се дијаметрално спротивни, тогаш едната од нив можеме да ја поместиме по кружницата на доволно мало растојание така што и двете точки да учествуваат само во остроаголни и тапоаголни триаголници, при што бројот на остроаголните триаголници не се намалува по преместувањето на едната од точките. Според тоа, можеме да сметаме дека имаме само тапоаголни и остроаголни триаголници.

Да разгледмае произволна точка A чиј центар е X. Тогаш точката A учествува во формирање на тапоаголен триаголник и не е теме на тапиот агол ако и само ако останатите две темиња се наоѓаат во иста полурамнина во однос на правата AX. Во случајов бројот на тапоаголните триаголници е еднаков на $\binom{a}{2} + \binom{b}{2}$, каде a и b се броевите на точките во една и иста полурамнина во однос на правата AX, соодветно. Имаме $a + b = n - 1$ и

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} = \frac{a^2+b^2-a-b}{2} = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a+b)}{4} = \frac{(n-1)^2+(2a-(n-1))^2-2(n-1)}{4}$$
$$= a^2 - (n-1)a + \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Ако $n = 2k + 1$, тогаш функцијата

$$a^2 - (n-1)a + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = a^2 - 2ka + k(2k-1)$$

има минимум за $a = k = \frac{n-1}{2}$, па затоа $b = \frac{n-1}{2}$ и во случајот минималниот број тапоаголни триаголници е еднаков на $\frac{n}{2}\binom{(n-1)/2}{2}$. Ако $n=2k$, тогаш најмалите целобројни вредности на функцијата

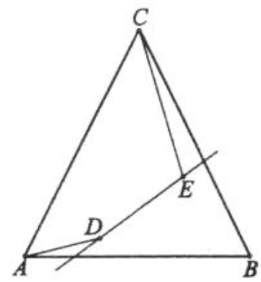
$$a^2-(n-1)a+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=a^2-(2k-1)a+(2k-1)(k-1)$$

се достигнуваат за $a=k=\frac{n}{2}$ и $a=k-1=\frac{n-2}{2}$. Притоа, $b=\frac{n-2}{2}$ и $b=\frac{n}{2}$, соодветно и во случајов минималниот број тапоаголни триаголници е еднаков на $\frac{n}{2}(\binom{(n-2)/2}{2}+\binom{n/2}{2})$. Останува од вкупниот број триаголници, кој е еднаков на $\binom{n}{3}$ да ја одземеме најдената оценка.

Пример за $n=2k+1$ е правилен $n-$аголник, а за $n=2k$ доволно е да разгледаме правилен $n-$аголник кај кој k последователни точки се ротирани за еднаков доволно мал агол во однос на центарот на кружницата.

39. Во рамнина се дадени $n,(n>4)$ точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Докажи дека постојат најмалку $\binom{n-3}{2}$ конвексни четириаголници кои имаат темиња во четири од дадените точки.

Решение. *Лема.* Во рамнина се дадени пет точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Тогаш постојат четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник.



Доказ. Ако конвексното затворање на дадените точки е петаголник, тогаш било кои четири точки се темиња на конвексен четириаголник. Ако конвексното затворање на дадените точки е четириаголник, тогаш тој е бараниот четириаголник. Нека конвексното затворање е триаголник и точките A,B,C од дадените се темиња на тој на триаголник. Две точки D и E од дадените, лежат во внатрешноста на тој триаголник, а правата DE сече две од страните на тој триаголник во внатрешни точки. Нека се тоа на пример AB и BC (цртеж десно). Тогаш точките A,C,D и E се темиња на конвексниот четириаголник. ■

Ги разгледуваме сите комбинации од по 5 точки. Нив ги има $\binom{n}{5}$. Секоја комбинација содржи подмножество од четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник. Секое теме на четириаголникот е вклучено во $n-4$ комбинации. Значи, постојат барем $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ конвексни четириаголници, кои припаѓаат на даденото множество точки. Останува да докажеме дека

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}\geq\binom{n-3}{2}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

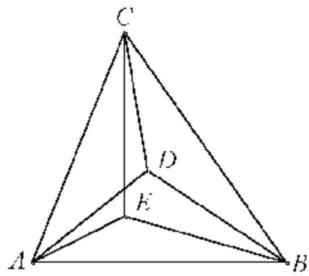
$$(n-5)(n-6)(n+8) \geq 0 .$$

кое е точно за секој $n > 4$. Знак за равенство важи ако и само ако $n = 5$ или $n = 6$.

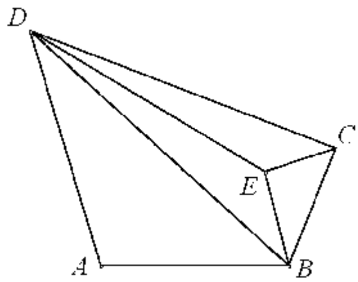
40. Во рамнина се дадени 100 точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Да ги разгледаме сите триаголници со темиња во дадените точки. Докажи дека најмногу 70% од овие триаголници се остроаголни.

Решение. *Лема.* Во рамнина се дадени пет точки, такви што било кои три се неколинеарни. Тогаш постојат три триаголници со темиња во тие точки кои не се остроаголни.

Доказ. Ги разгледуваме трите можни случаи.



a) Конвексната обвивка на точките е триаголникот ABC. Меѓу аглите BDA, CDB и ADC барем два не се остри. Слично се гледа дека меѓу триаголниците BEA, CEB и AEC барем два не се остроаголни. Значи, во овој случај постојат барем четири триаголници кои не се остроаголни.



b) Конвексната обвивка на дадените точки е четириаголник $ABCD$. Јасно, барем еден триаголник со темиња во точките A, B, C, D не е остроаголен. Нека точката E е во триаголникот BCD (таа не може да припаѓа на дијагонала на четириаголникот $ABCD$, бидејќи било кои три точки се неколинеарни). Тогаш барем два од триаголниците BED, BCE и CDE не се остроаголни. Значи и во овој случај постојат барем три триаголници кои не се остроаголни.

c) Нека конвексната обвивка на дадените точки е конвексен петаголник. Ако четири агли од овој петаголник се остри, тогаш збирот на аглите би бил помал од $4 \cdot 90^\circ + 180^\circ = 540^\circ$, што не е можно. Претпоставувме дека острите агли се наоѓаат во темињата A, B и C. Барем еден од аглите на конвексниот четириаголник $ACDE$ не е остар. Затоа постојат барем три темиња кај кои аглите не се остри. ■

Од 100 точки може да се изберат $3 \cdot \binom{100}{5}$ триаголници кои не се остроаголни.

Еден ист триаголник се појавува во $\binom{97}{2}$ петорки темиња. Затоа бројот на триаголниците кои не се остроаголни е поголем или еднаков на $\frac{3\cdot\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$. Но, бројот на сите триаголници е $\binom{100}{3}$, па затоа бројот на остроаголните триаголници е помал или еднаков на $\binom{100}{3}-\frac{3\cdot\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$. Конечно, односот на бројот на остроаголни триаголници и вкупниот број на триаголници не може да биде поголем од $1-\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}\binom{100}{3}}=0,7$, што значи најмногу 70% од овие триаголници се остроаголни.

41. Нека $k\leq n+1$. На колку начини може во низа да се наредат n нули и k единици така што никои две единици не се соседни?
Решение. n нули и k единици може да се наредат во низа така што никои две единици не се соседни на $\binom{n+1}{k}$ начини, бидејќи единиците може да се наоѓаат на произволни k од следните $n+1$ места: пред првата нула, меѓу првата и втората нула, итн. после $n-$тата нула.

42. На полицата се наоѓаат 12 книги. На колку начини може да се изберат 5 книги така што никои две книги не се соседни?
Решение. Ако од n книги избираме k книги меѓу кои нема соседни, тогаш тоа е еквивалентно со поставување во низа на $n-k$ нули и k единици така што никои две единици не се соседни. Според задача 43 тоа може да се направи на $\binom{n-k+1}{k}$ начини. За $n=12$ и $k=5$ добиваме дека бараниот број е еднаков на $\binom{12-5+1}{5}=\binom{8}{5}=56$.

43. Околу тркалезната маса на кралот Артур седат 12 витези. Секој витез е скаран со своите соседи. На колку начини може да се изберат 5 витези, но така што меѓу нив да нема два витези кои се скарани?
Решение. Нека L е еден од $n=12$ витези, S е множеството од сите комбинации без повторување од n елементи од класа $k=5$ кои не содржат меѓусебно скарани витези, S_1 е множеството елементи од S кои го содржат L и S_2 е множеството елементи од S кои не го содржат L. Елементите од S_1 не содржат ниту еден од витезите кои се соседни со L, а елементите од S_2 можат да ги содржат и двата негови соседи. Аналогно како во задача 42 добиваме

$$|S_1|=\binom{n-3-(k-1)+1}{k-1},\ |S_2|=\binom{n-1-k+1}{k},$$

па од принципот на збир следува

$$|S|=|S_1|+|S_2|=\binom{n-k-1}{k-1}+\binom{n-k}{k}.$$

Конечно, за $n=12$ и $k=5$ добиваме дека бараниот број избори е еднаков на

$$\binom{12-5-1}{5-1}+\binom{12-5}{5}=\binom{6}{4}+\binom{7}{5}=36.$$

44. Во компанијата Креативност работат научни работници. Во текот на осумчасовен работен ден тие ја посетуваат библиотеката (можно е и по неколку пати). Познато е дека за секој пар научници вкупното време во кое само еден од нив е во библиотеката не е помало од x часови ($x>4$). Определи го најголемиот можен број на научни работници (во зависност од x)?

Решение. Нека n е бројот на научниците. Според условот за секој пар научници вкупното време во кое само еден од нив е во библиотеката не е помало од x. Ако ги собереме овие времиња по сите парови ќе добиеме број $S\geq\frac{n(n-1)}{2}x$. Ќе го oцениме овој број.

Да ги забележиме моментите кога некој влегува или излегува од библиотеката. Со овие моменти работниот ден може да се раздели на m интервали со должини $t_1,t_2,...,t_m$. Нека во $i-$тиот интервал во библиотеката имало k_i научници. Овој интервал се брои за тие парови научници од кои само еден е во бифето. Бројот на овие парови е $k_i(n-k_i)$, па затоа придонесот на овој интервал во S е $t_ik_i(n-k_i)$. Понатаму, изразот $k(n-k)$ прима најголема вредност за $k=[\frac{n}{2}]$ и затоа неговиот придонес во S на надминува $t_i[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])$. Но, $t_1+t_2+...+t_m=8$, од каде следува

$$8[\tfrac{n}{2}](n-[\tfrac{n}{2}])\geq S\geq\frac{n(n-1)}{2}x.$$

Ќе разгледаме два случаја.

Случај 1. Нека $n=2l$. Тогаш имаме $8l^2\geq l(2l-1)x$, т.е. $x\geq(2x-8)l$, од каде добиваме $l\leq\frac{x}{2x-8}$, односно $n\leq 2[\frac{x}{2x-8}]$.

Случај 2. Нека $n=2l+1$. Тогаш $8l(2l+1)\geq l(2l+1)x$, т.е. $(2x-8)l\leq x-8$, од каде бобиваме $l\leq\frac{8-x}{2x-8}$, па затоа

$$n=2l+1\leq 2[\tfrac{8-x}{2x-8}]+1=2[\tfrac{x}{2x-8}-1]+1=2[\tfrac{x}{2x-8}]-1.$$

Според тоа, и во двата случаја важи $n\leq 2[\frac{x}{2x-8}]$.

Ќе покажеме дека, оваа оценка се достигнува. Нека ставиме $n=2l=2[\frac{x}{2x-8}]$.

Од $n=2l$ научници на $K=\binom{2l}{l}$ начини може да се изберат l научници. Осумчасовниот работен ден да го разделиме на K интервали, секој со должина $\frac{8}{K}$. На секој интервал да му придружиме група од l научници и нека во тоа време точно тие биле во библиотеката. Заради симетрија е јасно, дека за секои двајца научници времето во кое точно еден од нив бил во библиотеката е едно исто, на пример y. Тогаш сите неравенства во претходните разгледувања преминуваат во равенства и добиваме $8l(2l-1)=S=\frac{2l(2l-1)}{2}y$. Според тоа, $y=\frac{8l}{2l-1}\geq x$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $l\leq\frac{x}{2x-8}$, што и требаше да се докаже.

45. Околу тркалезна маса седат $n>2$ ученици. На почетокот секој ученик има точно по една бонбона. Во секој чекор секој ученик избира една од следниве две операции:
1) му дава една своја бонбона или на ученикот лево од себе или на ученикот десно од себе,
2) ги дели сите свои бонбони на две множества (не задолжително непразни) и едно множество му дава на ученикот лево, а друго на ученикот десно од себе.

Сите операции во еден чекор се извршуваат истовремено. За распоредот на бонбоните ќе велиме дека е *достижен* ако може да се добие во конечно многу чекори. Определи го бројот на достижните распореди.
(Два распореди се различни ако барем еден ученик во нив има различен број бонбони.)

Решение. Вкупниот број распореди (достижни и недостижни) е $\binom{2n-1}{n}$.

Лема. Во два чекори, секој ученик може да додаде бонбона (ако ја има) на ученик на две места лево или десно од себе, така што состојбата кај останатите ученици ќе остане непроменета.
Доказ. Да разгледаме три последователни ученици A, B и C одлево надесно, при што A има барем една бонбона. Нека сите ученици ја извршуваат операцијата 2). Тогаш секоја бонбона произволно се поместува за едно место налево или надесно. Првиот чекор може да се реализира така што сите бонбони ќе се поместат надесно, а вториот чекор може да се реализира така што сите бонбони ќе се вратат налево, освен една кај ученикот B која ќе се помести надесно кај ученикот C. Така една бонбона на ученикот A завршила кај ученикот C. Другата насока е аналогна. ■
Нека n е непарен број. Бидејќи растојанието меѓу секои два ученика во една од насоките е парно, со користење на лемата, секој ученик може да му додаде бонбона на произволен ученик во парен број чекори. Според тоа, сите распореди се достижни.
Нека сега n е парен број. Со едноставна индукција се покажува дека по секој чекор кај учениците на парни, односно непарни позиции се наоѓа барем по

една бонбона. Распоредите во кои сите бонбони се кај $\frac{n}{2}$ ученици на парни или $\frac{n}{2}$ ученици на непарни позиции се недостижни, а нив ги има $2\binom{\frac{3n}{2}-1}{n}$.
Останува да докажеме дека сите останати распореди се достижни.
Според лемата, доволно е да докажеме дека за секој $a=1,2,...,n-1$ може да се добие барем еден распоред во кој точно a бонбони се наоѓаат на парни позиции. За почеток, според лемата, сите бонбони може да се проследат на два соседни ученици *A* и *B*, каде *A* е на парна позиција. Нека во тој момент, без ограничување на општостша, *A* има $a' > a$ бонбони. Во првиот потез, *A* ќе додаде една бонбона на ученикот *B*, а *B* една бонбона на својот втор сосед *C*. Во вториот потез, *A* и *B* ќе разменат по една бонбона, а *C* ќе ја врати бонбоната на ученикот *B*. Сега *A* има $a'-1$ бонбона, а *B* ги има преостанатите $n-a'+1$ бонбони. Повторувајќи ја оваа постапка $a'-a$ пати ја постигнуваме целта.

Значи, достижни распореди има $\binom{2n-1}{n}$ ако n е непарен, и $\binom{2n-1}{n}-2\binom{\frac{3n}{2}-1}{n}$ ако n е парен.

46. Даден е природен број $n \le 2015$ кој не е делив со 5. Определи го бројот на различните $n-$ елементни подмножества на множеството $\{1,2,...,2015\}$ такви што збирот на нивните елементи е делив со 5.

Решение. За секој $i \in \{0,1,2,3,4\}$ со X_i да го означиме множеството од подмножества на $A=\{1,2,...,2015\}$ со збир на елементи кој при делење со 5 дава остаток i. Нека $|X_i| = x_i$. Ќе докажеме дека $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Нека $\pm : A \to A$ е циклична пермутација на елементите од A, т.е. $\pm(i) = i+1$, за секој $i=1,2,...,2014$ и $\pm(2015)=1$. На $X=\{a_1,a_2,...,a_n\} \in X_i$ му го придружуваме множеството $X' = \pm(X) = \{\pm(a_1), \pm(a_2),..., \pm(a_n)\}$. Од дефиницијата на $\pm$ следува дека збирот на елементите на X' е конгруентите со $i+n$ по модул 5. Бидејќи n не е делив со 5, имаме $i+n \equiv j (\mathrm{mod}\, 5)$, $j \in \{0,1,2,3,4\}$, каде $j \ne i$. Освен тоа, бројот j е ист за различните $X \in X_i$, па затоа $\pm(X) \in X_j$. Понатаму, сликите на различните множества се различни, па затоа ова пресликување е инјекција, што значи дека $x_i \le x_j$.

Со истото размислување за $\pm : X_j \to X_k$ добиваме дека $x_j \le x_k$, $k \ne j, k \ne i$ итн. при што циклусот се затвора во петтиот чекор. Според тоа,

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 .$$

Бидејќи $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \binom{2015}{n}$, заклучуваме дека $x_0 = \frac{1}{5}\binom{2015}{n}$.

47. Нека p е непарен прост број. Определи го бројот на сите подмножества A од множеството $\{1,2,3,...,2p\}$ такви што:

a) A има точно p елементи, и

b) збирот на сите елементи од множеството A е делив со p.

Решение. *Прв начин*. За произволно p-елементно подмножество A од $\{1,2,3,...,2p\}$, со $s(A)$ да го означиме збирот на елементите во A. Има вкупно $\binom{2p}{p}$ подмножества од $\{1,2,3,...,2p\}$ со по p елементи. За множествата $B=\{1,2,...,p\}$ и $C=\{p+1,p+2,...,2p\}$ важи $s(B)\equiv s(C)\equiv 0(\text{mod } p)$. Останатите $\binom{2p}{p}-2$ подмножества со p елементи ќе ги поделиме во групи од по p броеви на следниот начин:

Две подмножества A и A' се во иста група ако и само ако $A\cap C=A'\cap C$ и ако $A'\cap B$ е циклична пермутација од $A\cap B$ во однос на B. Тоа значи, ако $A\cap B$ има n елементи, $0<n<p$, тогаш за некој m, таков што $0<m<p$ важи

$$A'\cap B=\{x+m \mid x\in A\cap B,\ x+m\leq p\}\cup\{x+m-p \mid x\in A\cap B,\ x\leq p<x+m\}.$$

Сега $s(A')-s(A)\equiv mn\ (\text{mod } p)$ и mn мора да биде делив со p. Но, mn не е деливо со p, бидејќи p е прост број. Затоа точно едно подмножество A во секоја група го задоволува условот $s(A)\equiv 0\ (\text{mod } p)$. Затоа бројот на сите такви подмножества е еднаков на $\frac{1}{p}(\binom{2p}{p}-2)+2$.

Втор начин. Нека $\mu_k=\cos\frac{2k®}{p}+i\sin\frac{2k®}{p}$, за некој $k, 1k\leq p-1$. Ако го искористиме равенството

$$\prod_{i=1}^{2p}(x-\mu_k^i)=(x^p-1)^2=x^{2p}-2x^p+1,$$

тогаш со споредување на коефициентите пре x^p добиваме

$$\sum_{\{i_1,...,i_p\}\subset A}\mu_k^{i_1+i_2+...+i_p}=\sum_{i=0}^{p-1}a_i\mu_k^i=2,$$

каде a_i е бројот на подмножествата $\{i_1,i_2,...,i_p\}\subset A$ за кои

$$i_1+i_2+...+i_p\equiv i(\text{mod } p).$$

Го разгледуваме полиномот

$$q(x)=-2+\sum_{i=0}^{p-1}a_ix^i.$$

Бидејќи $q(\mu_k)=0$ за $k=1,2,...,p-1$, добиваме дека $1+x+...+x^{p-1}\mid q(x)$, па затоа

$$q(x) = c(1 + x + ... + x^{p-1})$$

за некоја константа c. Според тоа,

$$a_0 - 2 = a_1 = ... = a_{p-1},$$

па како

$$a_0 + a_1 + ... + a_{p-1} = \binom{2p}{p},$$

добиваме $a_0 = \frac{1}{p}(\binom{2p}{p} - 2) + 2$.

48. За пресликувањето $f : X \to X$ ќе велиме дека е идемпотентно ако

$$f(f(x)) = f(x), \text{ за секој } x \in X.$$

Ако $|X| = n$, определи го бројот на идемпотентните пресликувања $f : X \to X$.

Решение. Нека $|f(X)| = k$, $1 \le k \le n$. Бидејќи на множество $f(X)$ функцијата f се совпаѓа со идентичното пресликување, а на секој елемент од $X \setminus f(X)$ можеме да му ставиме во соодветствие произволен елемент од $f(X)$, од $|X \setminus f(X)| = n - k$ следува дека за секое множество $f(X)$, $|f(X)| = k$ функцијата f може да се избере на k^{n-k} начини. Понатаму, за секој $k \in \{1, 2, ..., n\}$ множеството $f(X)$, $|f(X)| = k$ може да се избере на $\binom{n}{k}$ начини, па затоа бројот на сите идемпотентни пресликувања $f : X \to X$ е еднаков на $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$.

49. Нека $\mathbb{F}$ е фамилија подмножества на множество од n елементи таква што ниту еден нејзин член не е подмножество на некој друг нејзин член. Докажи дека фамилијата $\mathbb{F}$ може да има најмногу $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ членови.

Решение. Нека $\mathbb{F}$ е фамилија со опишаното својство која има најголем можен број членови. Понатаму, нека k е најмалиот број елементи што ги има некој член на фамилијата $\mathbb{F}$ и l е бројот на членовите на фамилијата $\mathbb{F}$ кои имаат по k елементи. Ќе докажеме дека $k \ge \frac{n-1}{2}$.

Нека претпоставиме дека $k < \frac{n-1}{2}$. Со $\mathbb{F}_1$ да ја означиме фамилијата подмножества на даденото множество која ја добиваме кога од $\mathbb{F}$ ги исфрламе сите l членови кои имаат по k елементи, а потоа ги додаваме сите нивни надмножества кои имаат по $k+1$ елемент (ниту едно од нив не беше член на фамилијата $\mathbb{F}$, бидејќи во спротивно исфрленото множество од $\mathbb{F}$ ќе беше подмножество на новото множество во $\mathbb{F}_1$, што противречи на условот на задачата). Понатаму, бидејќи за секој исфрлен член има $n-k$ опишани подмножества, а секој додаден член се повторува најмногу $k+1$ пати, добиваме најмалку $\frac{l(n-k)}{k+1}$ нови членови. Но, $k<\frac{n-1}{2}$, па затоа $\frac{l(n-k)}{k+1}>\frac{n+1}{2(k+1)}l>l$, што значи дека фамилијата $\mathbf{F}_1$ има повеќе членови од фамилијата $\mathbf{F}$. Лесно се проверува дека и за фамилијата $\mathbf{F}_1$ важи дека ниту еден нејзин член не е подмножество на некој друг нејзин член. Последното противречи на претпоставката за максималноста на фамилијата $\mathbf{F}$, па затоа $k\geq\frac{n-1}{2}$.

На сличен начин можеме да докажеме дека најголемиот број елементи на некој член на фамилијата $\mathbf{F}$ може да биде $\frac{n+1}{2}$. Според тоа, фамилијата $\mathbf{F}$ може да содржи само подмножества кои имаат $\frac{n-1}{2},\frac{n}{2},\frac{n+1}{2}$ елементи.

Нека $n=2m$. Од досега изнесеното следува дека $\mathbf{F}$ има само членови со $\frac{n}{2}$ елементи. Од друга страна фамилијата од сите подмножества со m елементи од множество со $2m$ елементи ги задоволува условите на задачата, па во овој случај фамилијата има $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ членови.

Ако $n=2m+1$, на фамилијата $\mathbf{F}$ и припаѓаат само подмножества кои имаат m елементи или само подмножества кои имаат $m+1$ елемент. И во двата случаја бројот на членовие на фамилијата $\mathbf{F}$ е еднаков на $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$.

50. За множеството A од природни броеви помали од 2000000 ќе велиме дека е *добро* ако $2000\in A$ и $a\,|\,b$ за секои $a,b\in A$, $a<b$.

а) Колку најмногу елементи може да има едно добро множество?

б) Определи го бројот на добрите множества со максимален број елементи.

Решение. а) Нека $a_1<a_2<...<a_n<2000<a_{n+1}<...<a_m$ се елементите на едно добро множество. Бидејќи $a_{i+1}\geq 2a_i$, заклучуваме дека

$$2000000>a_m\geq 2^{m-n}2000\,,$$

што значи $m-n\leq 9$. Од друга страна, равенството $2000=2^4 5^3$, покажува дека $a_i=2^{k_i}5^{l_i}$, за $i\leq n-1$, каде $0\leq k_i\leq k_{i+1}\leq 4, 0\leq l_i\leq l_{i+1}\leq 3$ и $k_i+l_i=6$. Според тоа, $n\leq 8$, па затоа A има најмногу $8+9=17$ елементи. На пример

$$a_i=2^{i-1}, 1\leq i\leq 5,\ \ a_i=2^4 5^{i-5}, 6\leq i\leq 8,\ \ a_i=2^{i-4}5^3, 9\leq i\leq 17$$

докажува дека $m=17$ може да се реализира.

б) За едно добро множество со максимален број на елементи имаме $m=17$ и $n=8$, т.е. $a_8=2000$. Освен тоа, $k_i+l_i=i-1$, за $1\leq i\leq 7$, што покажува дека $a_1=1$ и подмножеството $\{a_2,...,a_7\}$ еднозначно се определува со броевите $1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 7$, за кои

$$l_{i_1} = 0,\ l_{i_1+1} = 1,\ l_{i_2} = 1,\ l_{i_2+1} = 2,\ l_{i_3} = 2 \text{ и } l_{i_3+1} = 3 .$$

Според тоа, за ова множество имаме $\binom{7}{3} = 35$ можности. Бидејќи

$$2^9 < 3 \cdot 2^8 < 1000 < 2^{10} ,$$

следува дека $a_i = 2^{i-4}5^3$ за $9 \le i \le 17$ или постои j таков што $9 \le j \le 17$ важи $a_i = 2^{i-4}5^3$ за $8 \le i < j$ и $a_i = 2^{i-5}5^3 3$ за $j \le i \le 17$. Значи, за подмножеството $\{a_9, ..., a_{17}\}$ има 10 можности. Конечно, бројот на добрите множества со максимален број елементи е еднаков на $35 \cdot 10 = 350$.

51. Нека $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ е фамилија од k елементни различни подмножества од множеството X. Докажи, дека $\min |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$ е еднаков на најмалиот број m таков што $n \le \binom{m}{k}$.

Решение. Јасно, $|X| > k$ бидејќи во спротивен случај имаме само едно k-елементно подмножество или немаме такво множество. Понатаму, за дадено множество X е за даден k можни вредности за n се $\{1, 2, ..., \binom{|X|}{k} - 1\}$. Затоа ќе сметаме дека овие услови се исполнети.

Нека m_0 е најмалиот природен број таков што е исполнет условот $n \le \binom{m}{k}$. За било која фамилија $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, таква што

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i ,\ |A_i| = k ,\ A_i \subset X .$$

за множеството Y е исполнето $n \le \binom{|Y|}{k}$ (заради условот $A_i \ne A_j, i \ne j$, $i, j = 1, 2, ..., n$) и од дефинцијата на m_0 имаме $m_0 \le |Y|$.

Нека $Y \subseteq X$ е множество кое го исполнува условот од задачата. Тогаш $|Y| = m_0$ и $\binom{m_0}{k} \ge n$, и постојат множества $B_1, B_2, ..., B_n$ такви што $Y = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Ако $m_0 > n + k - 1$, тогаш за $m_0 - 1 \ge n + k - 1$ имаме

$$\binom{m_0 - 1}{k} \ge \binom{n+k-1}{k} > n ,\ k \ge 1 .$$

Значи, $m_0 - 1$ е број за кој се исполнети условите на задачата и $m_0 - 1 < m_0$ што противречи на изборот на m_0.

52. Дадено е множество X со 2009 елементи и негови подмножества $A_1, A_2, ...,$ A_n секое од кои има барем 4 елементи. Познато е дека пресекот на било кои

две од подмножествата содржи најмногу два елемента. Докажи дека постои множество $B \subset X$ со 24 елементи, кое не содржи ниту едно од множествата $A_1, A_2, ..., A_n$.

Решение. Доволно е да докажеме дека тврдењето важи кога сите множества $A_1, A_2, ..., A_n$ имаат по 4 елементи.

Нека $B \subset X$ е множеството со најмногу елементи кое не содржи ниту едно од множествата $A_1, A_2, ..., A_n$. Ќе докажеме дека $m = |B| \geq 24$. Очигледно $m \geq 3$.

Од максималноста на B следува дека за секој елемент $x \in X \setminus B$ постои множество $A_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ кое се содржи во $B \cup \{x\}$, но не се содржи во B. Тоа значи дека A_i се состои од x и три елементи од B. Овие три елементи треба да се различни за секое множество A_i, бидејќи во спротивно ќе имаме две подмножества чиј пресек има три елементи. Според тоа, бројот на елементите на B не е поголем од бројот на тројките различни елемени на B, т.е. $2009 - m \leq \binom{m}{3}$, од каде добиваме

$$\frac{m(m^2-3m+8)}{6} \geq 2009 .$$

Останува да забележиме дека функцијата $f(m) = m(m^2 - 3m + 8)$ расте кога $m \geq 3$ и дека $f(23) < 6 \cdot 2009$

53. Нека $A_1, A_2, ..., A_m$ се триелементни подмножества на множеството A од n елементи такви што $|A_i \cap A_j| \leq 1$ за $i \neq j$. Докажи дека постои множество $X \subset A$ кое има најмалку $[\sqrt{2n}]$ елементи и кое не го содржи ниту едно од множествата A_i.

Решение. Нека X е најголемото такво множество и нека $|X| = k$. Со додавање на множеството X на било кој елемент $a \in A \setminus X$ бараното својство се нарушува, што значи дека постојат елементи $b, c \in X$ и постои i таков што $A_i = \{a, b, c\}$. Според тоа, секој пар $\{b, c\}$ елементи од X спречува додавање на најмногу еден елемент a на множеството X. Парови $\{b, c\}$ има $\frac{k(k-1)}{2}$, а елементи $a \in A \setminus X$ има $n - k$. Затоа важи $n - k \leq \frac{k(k-1)}{2}$, од каде добиваме $k \geq \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, па затоа $k \geq [\sqrt{2n}]$.

54. Нека $n \geq k \geq 3$ и F_k е фамилија k – елементни подмножества на множеството $X = \{1, 2, ..., n\}$ таква што секои две елементи на F_k се сечат во најмногу $k - 2$

елементи. Докажи дека постои множество $M_k \subset X$ со најмалку $[\log_2 n]+1$ елементи кое не содржи ниту едно од подмножествата од $\mathbb{F}_k$.

Решение. Нека $k \le \log_2 n$ (во спротивно тврдењето е тривијално). Да означиме $m=[\log_2 n]+1$. Бидејќи секое $(k-1)-$елементно подмножество од X лежи во најмногу едно подмножество од $\mathbb{F}_k$, а секое подмножество од $\mathbb{F}_k$ содржи k подмножества со $k-1$ елементи, добиваме дека $|\mathbb{F}_k| \le \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$.

Според тоа, вкупниот број парови (M,N) каде $N \subset M \subset X, |M|=m$ и $N \in \mathbb{F}_k$ е еднаков на

$$\binom{n-k}{m-k}|\mathbb{F}_k| \le \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n-k}{m-k} = \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{m}\binom{m}{k} .$$

Лесно се докажува дека овој број е помал од бројот на $m-$елементните подмножества M , т.е. од $\binom{n}{m}$. Значи, за барем еден M не постои множество $N \in \mathbb{F}_k$ кое се содржи во M , што и требаше да се докаже.

55. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,...,a_m\}$, $k_i \in \mathbb{N}$, за $i=1,...,m$ и

$$n = k_1 + k_2 + ... + k_m .$$

Подредената $n-$торка елементи на множеството A во која за секој $i \in \{1,2,...,m\}$ елементот a_i се јавува точно k_i пати, ја нарекуваме *пермутација од* n *елементи од тип* $(k_1,k_2,...,k_m)$ или *пермутација со повторување*. Бројот на пермутациите од n елементи од тип $(k_1,k_2,...,k_m)$ го означуваме со $P_n^{k_1,k_2,...,k_m}$.

Докажи, дека ако $k_i \in \mathbb{N}$, за $i=1,2,...,m$ и $n=k_1+k_2+...+k_m$, тогаш

$$P_n^{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}. \quad (1)$$

Решение. Од $n-$те места во подредената $n-$торка избираме k_1 места, што може да се направи на

$$C_n^{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_1, потоа од преостанатите $n-k_1$ места избираме k_2 места, што може да се направи на

$$C_{n-k_1}^{k_2} = \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_2 итн., во $(m-1)-$ от чекор од преостанатите $n-k_1-k_2-...-k_{m-2}$ места избираме k_{m-1}, [то може да се направи на

$$C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-2}}^{k_{m-1}} = \frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!(n-k_1-k_2-...-k_{m-2}-k_{m-1})!} = \frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!k_m!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_{m-1}, за да на крајот на преостанатите k_m места го ставиме елементот a_m. Од досега изнесеното и од принципот на производ следува дека

$$\begin{aligned} P_n^{k_1,k_2,...,k_m} &= C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-k_1-k_2}^{k_3} ... C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-2}}^{k_{m-1}} \\ &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \cdot ... \cdot \frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!k_m!} \\ &= \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}. \end{aligned}$$

56. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ ненегативни цели броеви. Докажи дека

$$a_1!a_2!...a_n! \leq (a_1 + a_2 + ... + a_n)!.$$

Решение. Бројот на пермутациите од $a_1 + a_2 + ... + a_n$ елементи од тип $(a_1, a_2, ..., a_n)$ е поголем или еднаков на еден. Според тоа, точно е неравенството $\frac{(a_1+a_2+...+a_n)!}{a_1!a_2!...a_n!} \geq 1$, кое е еквивалентно со бараното неравенство.

57. Докажи, дека за секој природен број n важи

$$\sum_{\substack{k_i \in \mathbb{N}_0,\, i=1,2,..,m \\ k_1+k_2+...+k_m=n}} \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} = m^n. \qquad (1)$$

Решение. Нека $A = \{1, 2, ..., m\}$. Со V да го означиме множеството од сите варијации со повторување од елементите на множеството A од класа n, а со $V(k_1, k_2, ..., k_m)$ да го означиме множеството пермутации од n елементи од тип $(k_1, k_2, ..., k_m)$. Множеството V е еднакво на унијата на дисјунктните множества $V(k_1, k_2, ..., k_m)$ по сите $m-$торки $(k_1, k_2, ..., k_m)$ ненегативни цели броеви за кои важи $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. Сега равенството (1) следува од задача 55 и принципот на збир.

58. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и нека за неговите елементи знаеме кој е прв, кој е втор итн., т.е. нека $a_1 < a_2 < ... < a_n$. За подредената $k-$торка $(b_1, b_2, ..., b_k)$, $b_i \in A$ ќе велиме дека е *комбинација со повторување од* n *елементи од класа* k ако $b_i \leq b_j$, за $i < j$. Бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k ќе го означуваме со $\overline{C}_n^k$.

Докажи, дека бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k е

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \qquad (1)$$

Решение. Да земеме една комбинација со повторување од n елементи од класа k и на истата да и ја придружиме низата од нули и единици формирана со следнава постапка: запишуваме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_1, потоа запишуваме една 0, па запишуваме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_2, па запишуваме една 0 итн., за на крајот да запишеме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_n, а во случај кога во комбинацијата не се јавува некој елемент a_i наместо единици запишуваме една нула. На овој начин на секоја комбинација ќе и соодветствува единствена низа составена од k единици и $n-1$ нула и обратно, на секоја ваква низа ќе и соодветствува единствена комбинација со повторување од n елементи од класа k.

Секоја од конструираните низи е со должина $n+k-1$ и истата е определена со распоредот на $n-1$ нула на $n+k-1$ место, односно со распоредот на k единици на $n+k-1$ место. Според тоа, бројот на сите низи од разгледуваниот вид е еднаков на $C_{n+k-1}^{n-1}=C_{n+k-1}^{k}$ и како тој е еднаков на бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k, добиваме дека важи формулата (1).

59. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Докажи, дека бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k во кои секој елемент на множеството A се појавува најмалку еднаш е еднаков на $\binom{k-1}{n-1}$.

Решение. Нека M е множеството комбинации со повторување од n елементи од класа k во кои секој елемент на множеството A се појавува најмалку еднаш, а V е множеството од подредени k – торки на множеството $A\cup\{0\}$. Дефинираме пресликување $f:M\to V$ со која на секоја комбинација со повторување од n елементи од класа k

$$u=\underbrace{a_1a_1...a_1}_{m_1}\underbrace{a_2a_2...a_2}_{m_2}...\underbrace{a_na_n...a_n}_{m_n}$$

и ја придружува подредената k – торка

$$v=\underbrace{a_1...a_1}_{m_1-1}0\underbrace{a_2...a_2}_{m_2-1}0...0\underbrace{a_{n-1}...a_{n-1}}_{m_{n-1}-1}0\underbrace{a_n...a_n}_{m_n}.$$

Очигледно функцијата f е инјекција, па затоа $|M|=|f(M)|$, каде

$$f(M)=\{v=f(u)\,|\,u\in M\}.$$

Секој елемент на $v\in f(M)$ содржи $n-1$ нула и притоа на k – тото место не се наоѓа нула. Според тоа, елемент на $f(M)$ се еднозначно определени со положбата на нулите, т.е. со комбинација без повторување од $k-1$ елементи од класа $n-1$. Затоа,

$$|M|=|f(M)|=\binom{k-1}{n-1}.$$

60. За природниот број чиј декаден запис е

$$a_N 10^N + a_{N-1}10^{N-1} + ... + 10a_1 + a_0,\ a_i \in \{0,1,2,...,9\}$$

ќе велиме дека е *монотон* ако $a_N \le a_{N-1} \le ... \le a_1 \le a_0$. Определи го бројот на сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри.

Решение. Нека A е множеството од сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри. Нека B е множеството од сите низи со должина 1993 од видот

$$\underbrace{00...0}_{a_0}\underbrace{11...1}_{a_1}\underbrace{22...2}_{a_2}...\underbrace{99...9}_{a_9}, \qquad (1)$$

каде $a_0 + a_1 + ... + a_9 = 1993$, со барем еден ненулти елемент (не е задолжително сите цифри да се појавуваат). Тогаш меѓу множествата A и B постои биекција, т.е. $|A|=|B|$. Низите во B заедно со низата од 1993 нули можат да бидат преброени на следниот начин: тие се еднакви на бројот на начините на кои можеме да поставиме девет прегради меѓу различните цифри, при што ако две прегради се соседни, тогаш соодветната цифра отсуствува. Овој број е еднаков на $\binom{1993+10-1}{10-1}$, што значи дека

$$|A|=|B|=\binom{2002}{9}-1.$$

61. Колку нули има во записите на броевите $1,2,3,...,10^9$.

Решение. k-цифрени броеви има $10^k - 10^{k-1} = 9\cdot 10^{k-1}$. Во нивниот запис има $9k\cdot 10^{k-1}$ цифри. Бројот на нулите во записите на сите k-цифрени броеви е еднаков на $\frac{9k\cdot 10^{k-1}-9\cdot 10^{k-1}}{10} = 9(k-1)\cdot 10^{k-2}$. Според тоа, бројот на нулите во записите на броевите $1,2,3,...,10^9$ е $\sum_{k=1}^{9} 9(k-1)\cdot 10^{k-2} + 9$.

62. На колку начини може да се потполни правоаголна таблица со m редици и n колони (вкупно mn полиња) со броевите $+1$ и -1 така што производот на броевите во секој ред и секоја колона да биде еднаков на 1?

Решение. Сите таблици кои го имаат саканото својство можат да се состават на следниов начин. Во сите полиња со исклучок на последниот ред и последната колона на произволен начин ќе ги запишеме броевите $+1$ и -1. Јасно, тоа може да се направи на $2^{(m-1)(n-1)}$ начини. Сега со p да го означиме производот на сите запишани броеви. Понатаму, во секој од првите $m-1$ редови, во пресекот со $n-$тата колона ќе запишеме $+1$ или -1 така да производот во секој ред да биде еднаков на 1. Сега во пресекот на секоја од првите $n-1$

колона со $m-$от ред ќе запишеме $+1$ или -1 така да производот на броевите во секоја колона да биде еднаков на 1.

Нека b е производот на броевите запишани во $m-$тата редица и a е производот на броевите запишани во $n-$тата колона. Бидејќи $pa=1$ и $pb=1$ добиваме $p^2ab=1$, т.е. $ab=1$. Значи, броевите a и b се со ист знак, па затоа ако во пресекот на $m-$тата редица и $n-$тата колона го запишеме бројот $a=b$, добиваме дека вака конструираната таблица ги има саканите својства. Според тоа, имаме $2^{(m-1)(n-1)}$ таблици со саканите својства.

63. Најди го бројот на подмножествата на множеството $\{1,2,...,2n\}$ во кои равенката $x+y=2n+1$ нема решение?

Решение. Елементите на множеството $\{1,2,...,2n\}$ ќе ги поделиме на n парови, така што збирот на броевите во секој пар е $2n+1$. При формирањето на подмножествата во кои равенката $x+y=2n+1$ нема решение, за секој од овие парови постојат три можности: ниту еден број не е во подмножеството, само помалиот број е во подмножеството или само поголемиот број е во подмножеството. Според тоа, бараниот број е 3^n.

64. Најди го бројот на пермутациите на цифрите $1,2,...,9$ такви што единицата не е на првото место, двојката не е на првите две места и тројката не е на првите три места.

Решение. Тројката може да се стави на едно од последните 6 места, двојката на едно од последните 7 места на кои не е тројката (6 можности) и единицата на едно од последните 8 места на кои не е ниту двојката ниту тројката (6 можности). Останатите 6 цифри се распоредуваат на 6 слободни места. Значи, бројот на бараните пермутации е $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6!=155520$.

65. Во изразот

$$x_1 : x_2 : x_3 : ... : x_n\,,\ \ n\geq 3$$

запишуваме загради. Определи го бројот на начините на кои тоа може да се направи така што добените изрази се различни како функции од $n-$променливи.

Решение. Ако на некој начин запишеме загради, тогаш по средувањето на добиениот израз истиот ќе го добие видот

$$\frac{x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}}{x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_k}}\,,$$

каде за индекасите важи $i_1<i_2<...<i_k$, $j_1<j_2<...<j_k$ и $i_r\neq j_s$ за секои r и s. Забележуваме дека $i_1=1$ и $j_1=2$. Тврдиме дека преостанатите индекси

можеме да ги разместиме по желба, што значи дека секој од останатите индекси може да биде и во броителот и во именителот. Бидејќи преостануваат $n-2$ броеви, добиваме дека бројот на различните изрази ќе биде еднаков на 2^{n-2}.

Доказот ќе го спроведеме со индукција по n.

За $n=3$ можеме да ги добиеме изразите

$$(x_1:x_2):x_3=\frac{x_1}{x_2x_3} \text{ и } x_1:(x_2:x_3)=\frac{x_1x_3}{x_2},$$

што значи дека нивниот број е еднаков на $2=2^{3-2}$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека за $n=k\geq 3$ бројот на различните изрази е еднаков на 2^{k-2}.

Да разгледаме израз со $n=k+1$ членови. Нека со првите k членови е добиен изразот A во кој x_1 е во броителот и x_2 е во именителот. Ако во овој израз на местото на x_k ставиме $x_k:x_{k+1}$, тогаш x_k ќе биде на истото место како и во изразот A, а x_{k+1} ќе биде во именителот ако x_k е во броителот и обратно. Ќе докажеме дека x_{k+1} може да се појави на истото место заедно со x_k. По поста-вувањето на заградите во изразот A можеме да најдеме комбинација од видот $B:x_k$, каде B е или членот x_{k-1} или посложен израз со еднаков број леви и десни загради. Овој израз го заменуваме со изразот

$$((B:x_k):x_{k+1}=B:(x_kx_{k+1}).$$

Забележуваме дека на овој начин ќе добиеме ист израз како и A, со тоа што наместо x_k ќе имаме x_kx_{k+1}. Според тоа, од секој израз со k членови добиваме два изрази со $k+1$ членови, па затоа бројот на изразите со $k+1$ членови е еднаков на $2\cdot 2^{k-2}=2^{(k+1)-2}$, т.е. тврдењето важи за $n=k+1$, па од принци-пот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n\geq 3$.

66. Нека $A(n,k)$ е бројот на $k-$торките $(a_1,a_2,...,a_k)$ од цели броеви, за кои важи

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+...+a_{k-1}\leq n\\ &a_1+a_2+...+a_{k-1}+a_k>n \qquad (1)\\ &1\leq a_i\leq n,\ \ i=1,2,...,k.\end{aligned}$$

За кој k вредноста на $A(12,k)$ е најголема?

Решение. Прво ќе го пресметаме бројот на $k-$торките $(a_1,a_2,...,a_k)$ од цели броеви $1\leq a_i\leq n$ за кои $a_1+a_2+...+a_k\leq n$. Очигледно збирот на левата страна може да прима вредности $k,k+1,...,n$, па затоа бројот на тие $k-$торки е еднаков на

$$\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+...+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}.$$

Според тоа, бројот на $k-$торките за кои се исполнети условите (1) е еднаков на

$$A(n,k)=n\binom{n}{k-1}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k}\left(\frac{nk}{n-k+1}-1\right).$$

Останува да определиме за кој број k бројот $A(12,k)=\binom{12}{k}\left(\frac{12k}{12-k+1}-1\right)$ е најголем. Бидејќи за $1\le k\le 6$ и двата множители растат, заклучуваме дека максимумот се достигнува за $6\le k\le 12$. Имаме $\frac{A(12,k+1)}{A(12,k)}=\frac{k(13-k)}{k^2-1}$. Последниот количник е поголем од 1 за $k=6$, а помал од 1 за $k=7,8,9,10,11,12$. Според тоа, бараната најголема вредност се достигнува за $k=7$.

67. Нека n е парен број и A е множеството од сите ненулти низи од 0 и 1 со должина n. Докажи дека елементите на A можат да се поделат на дисјунктни тројки така што за произволна тројка $(a_1a_2...a_n, b_1b_2...b_n, c_1c_2...c_n)$ бројот на единиците меѓу a_i, b_i, c_i, за секој $i=1,2,...,n$ е парен број.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=2$ имаме $A=\{11,10,01\}$, т.е. тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој парен број k. За $n=k+2$ ги разгледуваме тројките

$$(a_1a_2...a_k, b_1b_2...b_k, c_1c_2...c_k)$$

со должина k и од нив ги формираме тројките

$$(00a_1a_2...a_k, 00b_1b_2...b_k, 00c_1c_2...c_k),\ (01a_1a_2...a_k, 10b_1b_2...b_k, 11c_1c_2...c_k)$$

$$(10a_1a_2...a_k, 11b_1b_2...b_k, 01c_1c_2...c_k),\ (11a_1a_2...a_k, 01b_1b_2...b_k, 10c_1c_2...c_k),$$

кои исто така го имаат саканото својство. Непосредно се проверува дека на овој начин ги добиваме сите ненулти низи со должина $k+2$, со што тврдењето е докажано.

68. Нека $m,n\ge 2$ се природни броеви. mn момчиња се распоредени во m екипи, секоја по n момчиња. На секоја екипа ѝ е доделена различна боја и потоа секое момче добило крпа со боја од својата екипа. Сите момчиња седнале во круг околу оган, при што $n-$те момчиња од секоја екипа седат заедно (еден по друг).

Инструкторот сака од момчињата да трчаат во групи, при што во една трка групата се состои од барем двајца и сите нејзини членови имаат крпи од една иста боја. По трката сите членови на групата се враќаат на своите места и инструкторот наоѓа друга група за следната трка. Во никои две трки не учествува една иста група деца, без разлика на бојата на крпата.

Ако инструкторот во некој момент не може да најде група момчиња која ги исполнува горните услови, тој ќе нареди на секое момче да ја даде крпата на

својот лев сосед пред да се обиде да најде група за нова трка. Ова се повторува додека е можно да има групи кои ги исполнуваат горните услови.
Определи го бројот на можните трки.

Решение. Да забележиме дека во група момчиња во некој момент сите ќе имаат крпа од една боја (што значи дека ќе бидат избрани за трка) ако и само ако има најмногу $n-2$ момчиња меѓу најлевиот и најдесниот член на групата. Според тоа, бројот на можните трки е еднаков на бројот на начините да избереме едно момче и потоа да избереме барем едно од $n-1$ момчиња кои седат десно од него. Затоа бараниот број е еднаков на $mn(2^{n-1}-1)$.

69. Нека $X_1, X_2, ..., X_{100}$ се по парови различни непразни подмножества на множеството S. За секој $i \in \{1,2,...,99\}$ е познато дека множествата X_i и X_{i+1} се дисјунктни и дека нивната унија не е еднаква на S. Определи го најма-лиот можен број елементи на S.

Решение. Ќе докажеме дека $|S| \geq 8$.

Ќе направиме индуктивна конструкција на низа подмножества на множество $S=\{1,2,...,n\}$ за кое $|S|=n\geq 4$, која се состои од $2^{n-1}+1$ елементи и која ги има саканите својства. За $n=8$ низата има $2^7+1=129>100$ елементи, што ни е доволно. За $n=4$ ја имаме следнава низа:

$$\{3,4\},\{1\},\{2,3\},\{4\},\{1,2\},\{3\},\{1,4\},\{2\},\{1,3\}.$$

Сега го применуваме следниов индуктивен чекор за низа подмножества од n кон низа подмножества од $n+1$ елементи. Избираме низа од $2^{n-1}+1$ подмножества на множество со n елементи, го бришиме последниот елемент во низата и правиме копија на добиената низа, при што двете копии ги делиме една од друга со празното множество $\varnothing$. Сега на секое подмножество со непарен индекс во новата низа му го додаваме елементот $n+1$. На тој начин добиваме низа од $2\cdot 2^{n-1}+1=2^n+1$ подмножества која ги задоволува условите на задачата. Така за $|S|=8$ ја имаме бараната конструкција.

Ќе докажеме дека за $n=7$ саканата конструкција не е можна. Да ги разгледаме сите подмножества на S со најмалку 4 елементи. Тие може да се комбинираат единствено со 2-елементни и 1-елементни подмножества на S, кои вкупно се $\binom{7}{1}+\binom{7}{2}=28$. Значи, во низата може да имаме најмногу 30 подмножества со најмалку 4 елементи, Од друга страна, имаме $\binom{7}{3}=35$ подмножества со 3 елементи и 28 подмножества со 1 и 2 елементи. Затоа во низата може да имаме најмногу $28+35+30=93$ подмножества, а треба да имаме 100 подмножества. Ако $|S|\leq 6$, тогаш S има најмнаогу $2^6-1=63$ непразни подмножества, т.е. помалку од саканите 100.

70. Даден е конвексен $n-$аголник $A_1A_2...A_n$. Определи го бројот на $m-$аголниците со темиња меѓу $A_1, A_2,...A_n$, кои се такви, што меѓу секои две нивни соседни темиња има најмалку k темиња од $n-$аголникот.

Решение. Прво ќе го пресметаме бројот на $m-$аголниците со теме A_1. Нека $A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_m}$ е еден таков многуаголник. Тогаш се исполнети неравенствата

$$1 = i_1 < i_2 < ... < i_m,$$
$$i_2 \geq k+2,$$
$$i_3 - i_2 \geq k+1,$$
$$.....................$$
$$i_m - i_{m-1} \geq k+1,$$
$$i_m - i_1 \leq n-k.$$

Ја разгледуваме низата $t_1 = 1, t_2 = i_2 - k, t_3 = i_3 - 2k, t_m = i_m - (m-1)k$. Тогаш $1 = t_1 < t_2 < ... < t_m \leq n - mk$. Сега, е јасно дека бараниот број е $\frac{n}{m}\binom{n-mk-1}{m-1}$.

71. Дадено е множество T од природни броеви, секој од кои е поголем од 1. За едно подмножество S на T ќе велиме дека е *добро*, ако за секој $t \in T$ постои $s \in S$ таков, што $\text{NZD}(t,s) > 1$. Докажи, дека бројот на добрите подмножества на T е непарен.

Решение. За еден елемент на T ќе велиме дека е „непријател“ на S, ако тој е заемно прост со секој елемент на S. Значи, едно добро множество не може да има „непријатели“. За произволно множество S со $f(S)$ да го означиме множеството од сите „непријатели“ на S. Ако S е добро, тогаш $f(S) = \emptyset$. За секои две подмножества A и B подредениот пар (A,B) ќе го наречеме „лош“, ако за секој $a \in A$ и за секој $b \in B$ важи $\text{NZD}(a,b) = 1$. Бројот на тие парови е непарен, бидејќи единствен лош пар од видот (A,A) е $(\emptyset,\emptyset)$. Сега, за секое подмножество X на T бројот на лошите парови (X,S) е еднаков на $2^{|f(X)|}$. Бидејќи $2^{|f(X)|}$ е непарен само кога $|f(X)| = 0$, оттука следува тврдењето на задачата.

4. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. (*Принцип на Дирихле - елементарен случај*). Нека n е природен број. Ако $n+1$ предмети се распоредени на произволен начин во n кутии, тогаш барем во една кутија има два предмета. Докажи!

   Решение. Да претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по еден предмет. Бидејќи има само n кутии, добиваме дека во нив се распоредени најмногу $n \cdot 1 = n$ предмети, што и противречи на претпоставката дека се распоредени $n+1$ предмети.

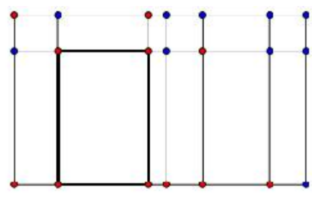
2. Во координатна рамнина се дадени пет точки $P_i, i=1,2,3,4,5$ со целобројни координати. Докажи дека постојат барем две точки P_i, P_j за $i \neq j$ такви што правата P_iP_j содржи точка со целобројни координати која е меѓу P_i и P_j.

   Решение. Нека дадените очки се $P_i(x_i, y_i), i=1,2,3,4,5$. Да ги поделиме овие точки во групи соред парноста на нивните координати. Имаме четири групи: (парна, парна), (парна, непарна), (непарна, парна) и (непарна, непарна). Значи, имаме пет точки и четири можности, па затоа од принципот на Дирихле следува дека постои група која содржи две точки P_i, P_j од дадените пет точки. Тогаш средината P на отсечката P_iP_j : $P(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$ има целобројни координати.

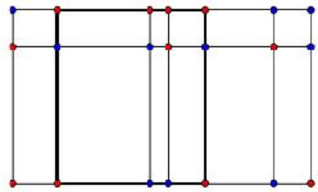
3. Три меѓусебно паралелни прави се сечат со седум на нив нормални прави во 21 точка. Некои од овие точки се обоени во црвено, а другите се обоено во сино. Докажи дека секогаш може да се изберат четири истобојни точки кои се темиња на правоаголник.

   Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека има повеќе црвени точки. Значи, меѓу пресечните 21 точка има најмалку 11 црвени.

   Ако постои колона со 3 црвени точки, тогаш преостанатите 8 црвени точки се распоредени во 6 колони. Од принципота на Дирихле следува дека постои колона со 2 црвени точки. Овие две црвени точки заедно со соодветните две од трите црвени точки во колната со 3 црвени точки се темиња на правоаголник.



Ако не постои колона со 3 црвени точки, тогаш 11 црвени точки се распоредени во 7 колони со по најмногу две црвени точки. Бидејќи $11 = 7 + 4$, заклучуваме дека имаме 4 колони со по 2 црвени точки. Во секоја од овие 4 колони две црвени точки може да се на 3 различни положби: прв и втор ред, втор и трет ред, трет и прв ред. Имаме 4 парови и три можности, па затоа од принципот на Дирихле два пара точки се еднакво распоредени. Јасно, овие четири точки се темиња на правоаголник.



4. Докажи дека за секој природен број n кој не е делив ниту со 2 ниту со 5, постои природен број N чии цифри се сите единици и кој е делив со n.

Решение. Да ги разгледаме броевите

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ ...,\ \underbrace{111...11}_{n+1}.$$

Од принципот на Дирихле следува дека во оваа низа постојат два броја кои при делењето со n даваат ист остаток, па затоа нивната разлика е делива со n. Според тоа, постои природен број

$$\underbrace{111...11}_{h}\underbrace{000...00}_{s} = \underbrace{111...11}_{h}\cdot 10^{s} = \underbrace{111...11}_{h}\cdot 2^{s}5^{s}$$

кој е делив со n. Но, n не е делив со 2 и со 5, па затоа бројот $N = \underbrace{111...11}_{h}$ е делив со n.

5. Дадени се произволни 2012 природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{2012}$. Докажи дека можеме да избереме неколку од нив така што збирот од нивните четврти степени е делив со 2012.

Решение. За $S_1 = a_1^4, S_2 = a_1^4 + a_2^4, ..., S_{2012} = a_1^4 + a_2^4 + ... + a_{2012}^4$ постојат две можности.

Барем еден од збировите $S_1, S_2, ..., S_{2012}$ е делив со 2012. Во случајов, ако S_i еделив со 2012, тогаш $a_1, a_2, ..., a_i$ се броевите кои го задоволуваат условот на задачата.

Ниту еден од броевите $S_1, S_2, ..., S_{2012}$ не е делив со 2012. Имаме 2012 броеви од кои ниту еден не е делив со 2012, па како при делење со 2012 имаме 2011 ненулти остатоци, од принципот на Дирихле следува дека најмалку два броја S_i и S_k, $k > i$ при делење со 2012 даваат ист остаток. Тоа значи

$$2012 \mid S_k - S_i = a_{i+1}^4 + a_{i+2}^4 + ... + a_k^4,$$

што и требаше да се докаже.

6. Докажи, дека постои степен на бројот 3 чиј запис во декаден броен систем завршува на 0001.

Решение. Нека $a_i = 3^i, i = 1, 2, \dots$. Постојат $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$ такви што $10^4 \mid 3^q - 3^p$, т.е. $10^4 \mid 3^p(3^{q-p} - 1)$. Но, $(10^4, 3^p) = 1$, па затоа $10^4 \mid 3^{q-p} - 1$, т.е. постои $n \in \mathbb{N}$ таков што $3^{q-p} = 10^4 n + 1$, што значи дека декадниот запис на 3^{q-p} завршува на цифрите 0001.

7. Определи го најмалиот природен број n таков што за произволни природни броеви $a_i, i = 1, 2, ..., n$ постојат $£_i \in \{-1, 0, 1\}$ кои не се сите еднакви на нула и важи $2017 \mid \sum_{i=1}^{n} £_i a_i$.

Решение. Нека $n = 11$. Ако избереме броеви $£_i \in \{0,1\}$, тогаш постојат $2^{11} - 1$ начини (исклучена е можноста сите $£_i$ да се нули) на кои можеме да собереме некои од тие броеви, земајќи го секој од нив по еднаш. Но, $2^{11} > 2017$, па од принципот на Дирихле следува дека меѓу добиените збирови постојат два кои при делење со 2017 даваат ист остаток. Нивната разлика е делива со 2017 и таа е од саканиот облик.
Бројот $n = 11$ е најмалиот број со ова својство. Навистина за $n = 10$ и броевите $a_i = 2^{i-1}, i = 1, 2, 3, ..., 10$ не постојат такви $£_i$ бидејќи сите претходно опишани збирови се различни и помали од 2017.

8. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се различни прости броеви,

$$M = \{m \mid m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{N}_0\}$$

и N е $2^n + 1$ елементно подмножество од M. Докажи, дека постојат два различни броја од N чиј производ е точен квадрат.

Решение. Бројот $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n} \in M$ е точен квадрат ако и само ако сите броеви a_i се парни. На секој број $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}$ од N му придружуваме подредена $n-$торка $(\sim_1, \sim_2, ..., \sim_n)$ од остатоците по модул 2 на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, т.е. $\sim_i = 0,1$, $\sim_i \equiv a_i \pmod 2$. Подредени $n-$торки од нули и единици има 2^n, па како N има $2^n + 1$ елементи, од принципот на Дирихле следува дека најмалку за два броја од N овие $n-$торки се совпаѓаат, т.е. постојат $m_1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}$, $m_2 = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_n^{b_n}$ такви што $a_i \equiv b_i \pmod 2$ за $i = 1, ..., n$. Последното значи дека бројот

$$m_1m_2 = p_1^{a_1+b_1} p_2^{a_2+b_2} ... p_n^{a_n+b_n}$$

е точен квадрат.

9. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се различни прости броеви,

$$M = \{m \mid m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n},\ a_i \in \mathbb{N}_0\}.$$

и N е подмножество од M такво што $|N| = n+1$. Докажи, дека постојат неколку различни броеви од N чиј производ е точен квадрат.

Решение. Нека $N = \{m_1, m_2, ..., m_{n+1}\}$. Да ги разгледаме сите производи од видот $m_{i_1} m_{i_2} ... m_{i_k}$, $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n+1$. Нивниот број е еднаков на 2^{n+1}, па од принципот на Дирихле следува дека постојат производи

$$m_{i_1} m_{i_2} ... m_{i_k} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n},$$

$$m_{j_1} m_{j_2} ... m_{j_l} = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_n^{b_n},$$

такви што $a_i \equiv b_i \pmod 2$ за $i = 1, 2, ..., n$, т.е. $(m_{i_1} m_{i_2} ... m_{i_k})(m_{j_1} m_{j_2} ... m_{j_l})$ е точен квадрат. Ако од последниот производ ги отстраниме броевите m_s кои истовремено учествуваат и во $m_{i_1} m_{i_2} ... m_{i_k}$ и во $m_{j_1} m_{j_2} ... m_{j_l}$, повторно добиваме точен квадрат, со што е докажано тврдењето на задачата.

10. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се природни броеви такви што $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n$.

а) Докажи, дека за $n = 2k$ и $a_n \ne n+1$ од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ може да се изберат неколку чиј збир е еднаков на n.

б) Докажи, дека за $n = 2k+1$ и $a_n \ne 2$ од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ може да се изберат неколку чиј збир е еднаков на n.

Решение. а) Нека $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку два од броевите $0, a_1 - a_n, S_1, S_2, ..., S_{n-1}$ даваат ист остаток при делење со n. Можни се следниве случаи:

1) $a_1 - a_n$ е делив со n. Тогаш $a_n = a_1 + kn$, па како $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n$ и $a_1 \ge 1$ добиваме дека $a_n \le 2n - (n-1) = n+1$. Освен тоа $a_n \ne n+1$, па затоа $a_n < n+1$. Значи, $a_1 + kn < n+1$, од што заради $a_1 \ge 1$ следува $k = 0$ и $a_1 = a_n$. Според тоа, $a_1 = a_2 = ... = a_n = 2$, па бидејќи $n = 2k$ добиваме $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$.

2) $n \mid S_j - S_i$. Ако $j > i$, тогаш $nk = S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j < 2n$, па затоа $k = 1$ и $a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j = n$.

3) S_i е делив со n и затоа $nk = S_i \le S_{n-1} = 2n - a_n < 2n$, т.е. $k = 1$, што значи дека $n = S_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$.

4) $a_n - a_1$ и S_i даваат ист остаток при делење со n. Тогаш, ако $i = 1$ добиваме дека $a_1 - (a_1 - a_n) = a_n$ е делив со n. Но, $1 \le a_n < n + 1$, па затоа $a_n = n$.

Ако $i > 1$, тогаш $S_i - (a_1 - a_n) = a_2 + a_3 + ... + a_i + a_n$ е делив со n и бидејќи

$$1 \le a_2 + a_3 + ... + a_i + a_n \le 2n - a_1 < 2n$$

добиваме $a_2 + a_3 + ... + a_i + a_n = n$.

б) Постапи аналогно како во решението на задачата под а).

11. Нека S е множество природни броеви кои се помали или еднакви на 15 и такво што збировите на елементите на било кои две непразни дисјунктни подмножества од S се различни. Докажи, дека S има најмногу 5 елементи.

Решение. Ќе докажеме дека не постојат две подмножества од S чии збирови на елементите се еднакви. Навистина, нека A и B се две подмножества чии збирови не елементите се еднакви. Тогаш множествата $A \setminus (A \cap B)$ и $B \setminus (A \cap B)$ се дисјунктни и имаат еднакви збирови на елементите, кои се добиваат со одземање на збирот на елементите на множеството $A \cap B$ од збировите на елементите на множествата A и B, што е противречност.

Нека претпоставиме дека постои множество $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ со шест елементи кое го задоволува условот на задачата. Ова множество има $2^6 - 1 = 63$ непразни подмножества, што значи дека имаме 63 различни збирови на елементите на неговите подмножества. Меѓутоа,

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 &\le a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &\le 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 75,\end{aligned}$$

што значи дека имаме $75 - 20 = 55$ можности за збировите на елементите на S. Сега тврдењето на задачата следува од принципот на Дирихле.

12. Дадени се 2^{51} подмножества од множеството S кое има 101 елемент. Докажи дека меѓу овие подмножества постојат три подмножества A, B и C такви што $C \subseteq A \cup B$.

Решение. Да ги разгледаме дадените подмножества и нивните унии по парови. Вакви множества има вкупно $\frac{2^{51}(2^{51}+1)}{2} > 2^{101}$, па од принципот на Дирихле следува дека некои две од овие множества се еднакви. Во секој од случаите $A \cup B = C$ и $A \cup B = C \cup D$ следува $C \subseteq A \cup B$.

13. Определи ја најмалата можна константа C таква што за било кои позитивни реални броеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (не задолжително различни) може да се изберат различни индекси i, j, k, l такви што

$$|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}| \leq C . \qquad (1)$$

Решение. *Одговор:* Најмалата можна константа C е $\frac{1}{2}$.

Прво ќе докажеме дека $C \leq \frac{1}{2}$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$. Да ги разгледаме дропките $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_5}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_4}{a_5}$, во овој редослед, секоја од кои е во интервалот $(0,1]$. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку три од овие дропки припаѓаат интервалот $(0, \frac{1}{2}]$ или на интервалот $(\frac{1}{2}, 1]$. Значи, постојат две соседни дропки кои припаѓаа на интервал со должина $\frac{1}{2}$. Бидејќи индексите кои учествуваат во секои две соседни дропки се различни, тоа се бараните индекси i, j, k, l, па затоа $C \leq \frac{1}{2}$.

Сега ќе покажеме дека C не може да е помала од $\frac{1}{2}$. Да ги разгледаме броевите $1, 2, 2, 2, n$ каде n е голем реален број. Дропките кои ги формираат некои два од овие броеви во растечки редослед се $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{1}$. Бидејќи индексите i, j, k, l треба да се различни, дропките $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{n}$ не може истовремено да се избрани. Значи, најмалата разлика која може да се добие на левата страна на (1) е $\frac{1}{2} - \frac{2}{n}$. Јасно, кога n се стреми кон бесконечност, оваа вредност се приближува кон 2, па затоа C не може да е помала од $\frac{1}{2}$.

Од претходните разгледувања заклучуваме дека $C = \frac{1}{2}$ е најмалата можна константа.

14. Во рамнината е дадено множество A од $n \geq 2$ точки, при што некои парови точки од A се поврзани со отсечки. Докажи, дека во A постојат најмалку две точки кои со отсечки се поврзани со еднаков број точки од A.

Решение. За произволна точка $x \in A$ со $v(x)$ да го означиме бројот на точките кои со x се поврзани со отсечка. Јасно, не постојат точки $a, b \in A$ такви што истовремено $v(a) = 0$ и $v(b) = n-1$. Значи, $v(x)$ прима најмногу $n-1$ вредност, па бидејќи имаме n точки од принципот на Дирихле следува дека постојат две точки $x, y, x \neq y$ такви што $v(x) = v(y)$.

15. На секоја планета од еден систем седи астроном и ја набљудува најблиската планета. Растојанијата меѓу планетите се меѓусебно различни. Докажи, дека ако бројот на планетите е непарен, тогаш постои планета која никој не ја набљудува.

Решение. Нека системот има $2k+1$ планета. Со A и B да ги означиме планетите кои се на најмало растојание. Тогаш астрономот од планетата A ја набљудува планетата B, а астрономот од планетата B ја набљудува планетата A.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. За $k=1$ во системот покрај планетите A и B има трета планета и неа никој не ја набљудува, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за систем со $2(k-1)+1=2k-1$ планета. Можни се два случаја.

1) Барем еден од астрономите кои не се на планетите A и B гледа во една од овие две планети, Тогаш останатите $2k-1$ планета ги набљудуваат најмногу $2k-2$ астрономи, па од принципот на Дирихле следува дека постои планета која никој не ја набљудува.
2) Ниту еден од останатите $2k-1$ астрономи не ја набљудува ниту планетата A, ниту планетата B. Но, тогаш останатите $2k-1$ планети формираат систем во кој според индуктивната претпоставка постои планета која никој не ја набљудува.

16. (*Теорема на Дирихле*). Нека $x\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека постојат $p,q\in\mathbb{Z}$ такви што $1\le q\le n$ и

$$|x-\frac{p}{q}|\le\frac{1}{nq}.$$

Решение. Да ги разгледаме броевите $kx-[kx], k=0,1,2,...,n$, кои припаѓаат на интервалот $[0,1]$. Интервалот $[0,1]$ го делиме на n интервали $\Delta_1,\Delta_2,...,$ Δ_n со должина $\frac{1}{n}$. Од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја $k\neq l$, $k,l\in\{0,1,2,...,n\}$ такви што $kx-[kx]$ и $lx-[lx]$ лежат во ист интервал, па затоа

$$|kx-[kx]-lx-[lx]|\le\frac{1}{n}, \text{ т.е. } |(k-l)x-([kx]-[lx])|\le\frac{1}{n}.$$

Нека $k>l, 0\le k,l\le n$. Ставаме $q=k-l$ и $p=[kx]-[lx]$. Тогаш p и q се цели броеви за кои важи $|qx-p|\le\frac{1}{n}$, т.е. важи $|x-\frac{p}{q}|\le\frac{1}{nq}$.

17. Нека се дадени реалните броеви $a_i, i=1,2,...,7$. Докажи, дека постојат a_k, a_m, $k\neq m$ такви што

$$0 \le \frac{a_k - a_m}{1 + a_k a_m} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Решение. Нека $\sim_i \in (-\frac{®}{2}, \frac{®}{2}),\ i = 1, 2, ..., 7$ се такви што $a_i = \mathrm{tg}\sim_i,\ i = 1, 2, ..., 7$. Интервалот $(-\frac{®}{2}, \frac{®}{2})$ го делиме на шест интервали со еднаква должина $\frac{®}{6}$. Од принципот на Дирихле следува дека во еден од овие интервали ќе припаѓаат два броја $\sim_k, \sim_m$, т.е. постојат $k, m, (k \ne m)$ такви што

$$0 \le \sim_k - \sim_m < \frac{®}{6}.$$

Функцијата tg е монотоно растечка на интервалот $(-\frac{®}{2}, \frac{®}{2})$, па затоа последователно важи

$$0 \le \mathrm{tg}(\sim_k - \sim_m) < \mathrm{tg}\frac{®}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$0 \le \frac{\mathrm{tg}\sim_k - \mathrm{tg}\sim_m}{1 + \mathrm{tg}\sim_k\ \mathrm{tg}\sim_m} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$0 \le \frac{a_k - a_m}{1 + a_k a_m} < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

што и требаше да се докаже.

18. (*Теорема на Кронекер*). Нека $\sim$ е ирационален број и $x, y\ (x < y)$ се реални броеви. Докажи, дека постојат цели броеви m и n такви што

$$x < m\sim + n < y.$$

Решение. Нека $x < y$ и ¢ $= y - x$. Интервалот $[0,1]$ го делиме на конечен број интервали $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$ чии должини се помали од ¢. Понатаму, ако $m \in \mathbb{Z}$, тогаш за $n = -[m\sim]$ важи

$$m\sim + n = m\sim - [m\sim] = \{m\sim\} \in [0,1].$$

Множеството $\mathbb{Z}$ е бесконечно, а множеството интервали $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$ е конечно, па затоа постојат цели броеви $m_1, m_2\ (m_1 \ne m_2)$ такви што броевите $m_1\sim + n_1$ и $m_2\sim + n_2$ припаѓаат на ист интервал Δ_t. Според тоа,

$$|(m_1 - m_2)\sim + n_1 - n_2| = |(m_1\sim + n_1) - (m_2\sim + n_2)| < ¢.$$

Од друга страна, ако претпоставиме дека $m_1\sim + n_1 = m_2\sim + n_2$, добиваме дека $\sim = \frac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} \in \mathbb{Q}$, што е противречност. Нека $m_1 - m_2 = m^*, n_1 - n_2 = n^*$. Да ги разгледаме броевите од видот $km^*\sim + kn^*, k \in \mathbb{Z}$. Јасно, постои $k_0 \in \mathbb{Z}$ таков што

$$k_0 m^*\sim + k_0 n^* \le x < (1 + k_0)m^*\sim + (1 + k_0)n^*$$

и притоа важи

$$(1 + k_0)m^*\sim + (1 + k_0)n^* < y,$$

т.е. бараните броеви се $(1+k_0)m^*$ и $(1+k_0)n^*$. (Во претходните разгледувања претпоставивме дека $m^*\sim +n^*>0$.)

19. Нека $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ се природни броеви такви што $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} \le 2n$. Докажи, дека постојат природни броеви a_i и a_j такви што $a_i \mid a_j$.

Решение. За произволен природен број a со $f(a)$ да го означиме најголемиот непарен делител на a, т.е. $a = 2^p f(a)$, каде $f(a)$ е непарен број. Дадените броеви се помали или еднакви на $2n$, па затоа од принципот на Дирихле следува дека постојат $i, j, 1 \le i < j \le n+1$ такви што $f(a_i) = f(a_j) = k$. Но, тогаш $a_i = 2^p k$ и $a_j = 2^q k$, каде $p < q$. Јасно, $a_i \mid a_j$.

20. Нека S е множество од n елементи и $M_i \subseteq S, M_i \ne \emptyset$, за $i = 1, 2, ..., n+1$. Докажи, дека постојат два различни избори на броеви

$$1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n+1 \text{ и } 1 \le j_1 < j_2 < ... < j_s \le n+1 \qquad (1)$$

такви што

$$M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup ... \cup M_{i_r} = M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup ... \cup M_{j_s} . \qquad (2)$$

Решение. Различни унии $M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup ... \cup M_{i_k}$ составени од множествата $M_1, M_2, ..., M_{n+1}$ добиваме само за непразни подмножества $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ на множеството $\{1, 2, ..., n+1\}$. Нивниот број е еднаков на $2^{n+1} - 1$. Но, бројот на непразните подмножества на множеството S е еднаков на $2^n - 1 < 2^{n+1} - 1$, па од принципот на Дирихле следува дека меѓу разгледуваните унии постојат две кои се еднакви на едно исто подмножество од S , што значи дека постојат два различни избори на броеви (1) за кои важи (2).

21. На игранка 20 момчиња и 20 девојчиња, сите со различни висини, формирале 20 парови за игра. Во секој пар разликата во висината меѓу секое девојче и секое момче е помала од $10\,cm$ (момчињата се повисоки од девојчињата). Ако паровите се формираат така што највисокото момче игра со највисокото девојче, второто по висина момче игра со второто по висина девојче итн. докажи, дека повторно во секој пар разликата во висината меѓу секое момче и секое девојче ќе биде помала од $10\,cm$.

Решение. Нека $a_1, a_2, ..., a_{20}$ се висините на момчињата, а $b_1, b_2, ..., b_{20}$ се висините на девојчињата, при што $a_1 > a_2 > ... > a_{20}$ и $b_1 > b_2 > ... > b_{20}$. Нека претпоставиме дека $a_k - b_k \ge 10$ и дека k е најмалиот број со ова својство. Тогаш, при првото формирање на паровите момчињата со висини

$a_1, a_2, ..., a_k$ можеле да играат само со девојчињата со висини $b_1, b_2, ..., b_{k-1}$, што е противречност, бидејќи според принципот на Дирихле во овој случај две момчиња мора да играат со едно девојче. .

22. Комисија составена од 3366 филмски критичари гласа за Оскар. Секој критичар гласа за еден глумец и една глумица. По гласањето се констатирало дека за секој природен број n помал или еднаков на 100 постои глумец или глумица кој добил/ла точно n гласови. Докажи, дека постојат двајца критичари кои гласале за ист глумец или глумица.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. За секој $i = 1, 2, ..., 100$ да фиксираме еден кандидат A_i кој добил i гласови.

Бројот на критичарите кои двата пати гласале за некој од кандидатите од множеството $A = \{A_{34}, A_{35}, ..., A_{100}\}$ е помал или еднаков на бројот парови глумец-глумица меѓу овие кандидати, а овој број е помал или еднаков на $33 \cdot 34 = 1122$.

Од друга страна, вкупно има $2 \cdot 3366 = 6732$ гласови кои критичарите ги доделиле. Од овие гласови кандидатите од множеството A добиле

$$34 + 35 + ... + 100 = 4489$$

гласови. Затоа има најмногу $6732 - 4489 = 2243$ критичари кои двата пати не гласале за кандидатите од множеството A. Според тоа, вкупниот број критичари е помал или еднаков на $1122 + 2243 = 3365$, што е противречност.

23. Докажи дека од секое множество од било кои десет различни двоцифрени природни броеви може да се одделат две дисјунктни подмножества такви што збировите на броевите во овие подмножества се еднакви.

Решение. Да забележиме дека доволно е да докажеме дека постојат две различни подмножества кои имаат еднаков збир на елементите. Во тој случај се исфрлат заедничките елементи.

Разгледуваме на почеток колку различни подмножества има множество со 10 елементи. Секој број може но не мора да биде во бараното множество. Празното множество мораме да го исфрлиме, па затоа бројот на сите множества е $2^{10} - 1 = 1023$. Секој број во групата може да има најголема вредност 99 па најголемиот збир не може да биде поголем од $99 \cdot 10 = 990$, т.е. најмногу може да има 990 различни збирови. Според принципот на Дирихле меѓу 1023 подмножества мора да има две кои имаат еднаков збир.

24. На почетокот на месец декември еден ученик почнал да се подготвува за натпревар по математика кој бил закажан за почетокот на март следната година. Ученикот секој ден решавал најмалку по една задача, но за да не се премори, во текот на една седмица решавал најмногу 12 задачи. Докажи, дека

во периодот на подготовките постојат неколку последователни деновиво кои ученикот решил точно 21 задача.

Решение. Со a_i да го означиме вкупниот број задачи кои ученикот ги решил од почетокот на подготовките до $i-$тиот ден, вклучувајќи го и тој ден. За низата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ важи $a_{i+1} \geq a_i + 1$, за $i = 1, 2, ...$. Од почетокот на месец декември до почетокот на месец март има најмалку 90 денови, па затоа оваа низа има најмалку 90 членови. Понатаму, секоја седмица ученикот решавал најмногу 12 задачи, па затоа $a_{77} \leq 12 \cdot 11 = 132$. Но, низата $a_1 + 21, a_2 + 21, ...$ $a_{77} + 21$ ги има истите својства како и низата $a_1, a_2, ..., a_{77}$, а двете низи заедно имаат 154 членови, кои можат да бидат некои од броевите

$$1, 2, 3, ..., 132, 133, ..., 153 = 132 + 21 .$$

Од принципот на Дирихле следува дека два члена од овие две низи се еднакви, а бидејќи двете низи се стрго монотоно растечки, добиваме дека постојат $p, q\ (p < q)$ такви што $a_p + 21 = a_q$. Последното значи, дека во деновите $p+1, p+2, ..., q$ ученикот решил точно 21 задача.

25. Дадено е множеството $S = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, ..., 100\}$. Определи го најголемиот можен број на елементи на множество $A \subset S$ за кое важи: секоја отсечка чии крајни точки се во A содржи најмалку една точка од множеството $S \setminus A$.

Решение. Нека $S_{kr}\{(2k-1, 2r-1), (2k-1, 2r), (2k, 2r-1), (2k, 2r)\}$. Множеството S е унија на дисјунктните множества S_{kr} , $k, r \in \{1, 2, ..., 50\}$. Од секое од множествата S_{kr} на множеството A може да му припаѓа најмногу една точка. Множеството $A_0 = \{(2k-1, 2r-1), k, r = 1, 2, ..., 50\}$ содржи по една точка од секое од множествата S_{kr} и го има саканото својство. Бидејќи $|A_0| = 2500$ заклучуваме дека бараниот број е 2500.

26. Во рамнината секоја точка со целобројни координати е означена со еден од броевите $1, 2, ..., n$. Докажи дека постои правоаголник чии темиња се означени со ист број.

Решение. Нека $S = \{(i, j) \mid i = 0, 1, ..., n^{n+1}, j = 0, 1, 2, ... n\}$. Секоја од правите $x = i$, $i \in \{0, 1, ..., n^{n+1}\}$ содржи $(n+1)-$торка точки од S . Бројот на овие прави е еднаков на $n^{n+1} + 1$. Бројот на различните означувања на $n+1$ точка со броевите $1, 2, ..., n$ е еднаков на n^{n+1} . Од принципот на Дирихле следува дека постојат $x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, ..., n^{n+1}\}$ такви што $x_1 < x_2$ и низите точки

$$(x_1, 0), (x_1, 1), ..., (x_1, n), (0, x_2), (x_2, 1), ..., (x_2, n)$$

се означени со иста $(n+1)$ – на варијација на броевите $1,2,\dots,n$. Повторно од принципот на Дирихле следува дека во првата низа две од точките се означени со ист број. На пример, нека тоа се точките (x_1,y_1) и (x_1,y_2), каде $0\le y_1<y_2\le n$. Тогаш точките (x_1,y_1), (x_2,y_1), (x_2,y_2) и (x_1,y_2) се темиња на правоаголник и сите се означени со ист број.

27. Некои парови на множество од n точки $A_1,A_2,\dots,A_n$ ($n\ge 4$) се меѓусебно поврзани со отсечки, така што секоја точка е поврзана со барем три од дадените точки. Докажи дека постојат различни точки $X_1,X_2,\dots,X_{2k}\in\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ за некој $k\ge 2$ така што точките X_i и X_{i+1} се поврзани за секој $i\ (1\le i\le 2k)$ каде $X_{2k+1}=X_1$.

Решение. Да го разгледаме најдолгиот пат $Y_1Y_2\dots Y_m$ со меѓусебно различни точки $Y_i\in\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$. Заради максималноста на патот, точката Y_1 е поврзана само со точката Y_2 и некои Y_i,Y_j, каде $2<i<j\le n$. Според принципот на Дирихле меѓу индексите $2,i,j$, два се со иста парност: да ги означиме со $k,l\ (k<l)$. Тогаш $Y_1Y_kY_{k+1}\dots Y_lY_1$ е кружен пат со парен број точки.

28. На тениски турнир учествувале 110 тенисери, при што секој играл со секој од останатите тенисери по еден меч (во тенисот нема нерешени резултати). Се покажало дека во секоја група од 55 тенисери има барем еден тенисер кој изгубил од не повеќе од четири од преостанатите 54 тенисери од таа група. Докажи дека на овој турнир има тенисер кој изгубил од не повеќе од четири од преостанатите 109 тенисери.

Решение. *Лема*. Даден е природен број $k\ge 55$. Ако во секој група од k тенисери има еден кој изгубил од не по веќе од 4 од преостанатите $k-1$ тенисери, тогаш во секоја група од $k+1$ тенисери има еден кој изгубил од не повеќе од 4 од преостанатите k тенисери.

Доказ. Да го претпоставиме спротивното. Тогаш постои множество тенисери $M=\{C_1,C_2,\dots,C_{k+1}\}$, такво што секој тенисер C_i изгубил од барем 5 од тенисерите во $M\setminus\{C_i\}$. Од условот на лемата следува дека постои тенисер C_j, кој изгубил од не повеќе од 4 тенисери во $M\setminus\{C_i\}$, т.е. C_j изгубил од точно 5 тенисери, при што C_i е меѓу нив. Сега, ако $j(i)$ е најмалиот можен индекс j за C_i, тогаш пресликувањето $f:M\to M$, $f(C_i)=C_{j(i)}$ е добро дефинирано. Имаме, $s=|f(M)|\ge\left\lceil\frac{k+1}{5}\right\rceil\ge 12$.

Од друга страна, од принципот на Дирихле следува дека барем еден од тенисерите од $f(M)$ изгубил од барем $\frac{\binom{s}{2}}{s}=\frac{s-1}{2}>5$ тенисери, што противречи на тоа дека секој тенисер во $f(M)$ зигубил од точно 5 други тенисери. Од добиената противречност следува тврдењето на лемата. ■

Сега индуктивно по $k\geq 55$ добиваме дека за произволни k тенисери постои еден кој изгубил од не повеќе од 4 од пресотанатите $k-1$ тенисер. Случајот $k=55$ е точен според условот на задачата, а индуктивниот чекор следува од лемата. Во случајов тврдењето важи и за $k=110$.

29. (*Принцип на Дирихле - општ случај*). Нека $kn+r$ предмети $r\geq 1$ се сместени во n кутии. Тогаш, барем во една кутија се сместени најмалку $k+1$ предмети. Докажи!

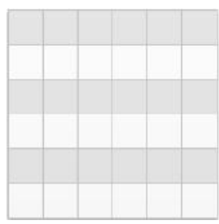
Решение. Да претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по k предмети. Бидејќи има само n кутии добиваме дека во нив се распоредени најмногу nk предмети, што и противречи на претпоставката дека се распоредени $kn+r>nk$ предмети.

30. Во квадрат со страна $1m$ на произволен начин се сместени 51 точка. Докажи дека меѓу овие 51 точка, постојат три точки кои можат да се покријат со круг чиј радиус е $\frac{1}{7}m$.

Решение. Квадратот да го поделиме на 25 еднакви квадрати со страна $0,2m$. Бидејќи $51=2\cdot 25+1$, според принципот на Дирихле, постои квадрат со страна $0,2m$ кој содржи барем 3 од дадените 51 точка. Земаме 3 точки кои лежат во еден квадрат со страна $0,2m$. Но, $\frac{2}{7}>0,2\sqrt{2}$, што значи дека дијагоналата на квадратот е помала од дијаметарот на круг со радиус $\frac{1}{7}m$, па затоа квадратот може да се покрие со круг со радиус $\frac{1}{7}m$, т.е. 3 од дадените 51 точка можат да се покријат со круг со радиус $\frac{1}{7}m$.

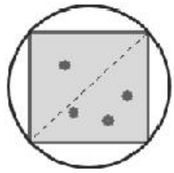
31. Во квадрат чии страни се со должина $1\,dm$ се наоѓаат 110 точки. Докажи дека постои круг со радиус $\frac{1}{8}dm$ во кој се наоѓаат најмалку 4 од избраните точки.

Решение. Дадениот квдрат со должина на страна $1\,dm$ да го поделиме на 36 складни квадрати со должина на страна $\frac{1}{6}dm$ (цртеж десно). Бидејќи $110=36\cdot 3+2$, од принципот н Дирихле следува дека меѓу квадратите постои барем еден еден квадрат во кој има најмалку 4



точки. Околу најдениот квадрат со должина на страна $\frac{1}{6}dm$ опишуваме кружница, за чиј радиус r важи

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{\sqrt{72}}<\frac{1}{8}dm\ .$$



Јасно, концентричниот круг со радиус $\frac{1}{8}dm$ е бараниот круг кој содржи 4 од избраните 110 точки.

32. Во координатна рамнина се дадени 20 точки со целобројни координати, такви што меѓу нив нема три колинеарни точки. Докажи дека постои триаголник чии темиња се дадените точки и чие тежиште исто така е очка со целобројни координати.

Решение. Во триаголник со темиња $A(x_A, y_A), B(x_B, y_b), C(x_C, y_C)$ координатите на тежиштето се $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3})$.

Според остатоците при делење со 3, точките со целобројни координати во размнината можеме да ги поделиме во 9 групи, при што остатоците на координатите може да бидат: (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1) и (2,2). Бидејќи $20=9\cdot 2+2$ од принципот на Дирихле следува дека постои група во која има најмалку три од означимените точки. Јасно, овие три точки се темиња на триаголник кај кој координатите на тежиштето се целобројни.

33. На еден меѓународен собир имало учесници од шест земји. Вкупниот број на учесници бил 1978, а секој учесник бил нумериран со број од 1 до 1978. Докажи дека постои барем еден учесник чиј број е еднаков на збирот на броевите на два члена од неговата земја, или е два пати поголем од бројот на некој член од неговата земја.

Решение. Бидејќи $1978=329\cdot 6+4$, од принципот на Дирихле следува дека од една од државите, да ја наречеме A, има барем 330 членови на собирот. Нека нивните броеви се

$$a_1<a_2<...<a_{330}\ .$$

Разгледуваме 329 разлики $a_{330}-a_i\ \ (i=1, 2,..., 329)$. Ако некоја од овие разлики е еднаква на бројот на некој од членовите на собирот од A, тогаш тврдењето од задачата е докажано.

Нека секоја разлика $a_{330}-a_i\ \ (i=1, 2,..., 329)$ не е еднаква на некој број на член на собирот од државата A. Тоа значи дека тие припаѓаат на членовите на останатите пет држави. Сега, бидејќи $329=65\cdot 5+4$, повторно од принципот на Дирихле следува дека меѓу горните разлики има 66 учесници на собирот, $b_1<b_2<...<b_{66}$ кои припаѓаат на иста држава, на пример B. Тогаш, или некоја од разликите $b_{66}-b_i\ \ (i=1, 2,..., 65)$ припаѓа на некоја од

државите A и B (во тој случај тврдењето е докажано) или ниту една не припаѓа на некоја од тие држави.

Да претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно. Продолжувајќи ја постапката, бидејќи $65 = 4 \cdot 16 + 1$ добиваме дека 17 од тие разлики припаѓаат на членови кои се од иста држава, на пример C, потоа бидејќи $16 = 3 \cdot 5 + 1$ следува дека од шеснаесетте нови разлики, шест од нив се во иста држава D; од петте наредни разлики три се во E. На крај, двете нови разлики мора да бидат во преостанатата држава F. (Да забележиме дека секоја разлика е од облик $a_p - a_q$). Нивната разлика не може да биде во ниту една држава A, B, C, D, E, F. (Таа не може да биде во F бидејќи разликата на два броја не може да биде еднаква на некој од тие броеви). Ова, меѓутоа, не е можно бидејќи секој природен број помал од 1978 мора да биде во некоја од шесте разгледувани држави. Затоа претпоставката не е точна, т.е. исполнето е тврдењето од задачата.

34. За секој цел број a, $a \neq 0$ со $v_2(a)$ да го означиме најголемиот ненегативен цел број k таков што $2^k \mid a$. Нека $n \in \mathbb{N}$. Определи го најголемиот можен број елементи на подмножествата A од множеството $\{1, 2, ..., 2^n\}$ со својство: за секои $x, y \in A$, $x \neq y$ бројот $v_2(x-y)$ е парен.

Решение. Со индукција по k ќе докажеме дека множеството A содржи најмногу 2^k различни елементи по модул 2^{2k}. Тврдењето е тривијално за $k = 0$. Нека $k > 0$. Според индуктивната претпоставка, елементите на множеството A даваат најмногу 2^{k-1} остатоци по модул 2^{2k-2}. Да претпоставиме дека елементите на A даваат повеќе од 2^k остатоци по модул 2^{2k}. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку три од овие остатоци се еднакви по модул 2^{2k-2}. Но, меѓу овие три остатоци два се разликуваат за $2^{2k-1} (\bmod 2^{2k})$, што противречи на условот на задачата.

Според тоа, $|A| \leq 2^{[\frac{n+1}{2}]}$. Пример на множество A со $2^{[\frac{n+1}{2}]}$ елементи е множеството на сите броеви од облик $\sum_{i \in B} 4^i$ за сите подмножества B на множеството $\{0, 1, ..., [\frac{n-1}{2}]\}$.

35. На меѓународна средба учествувале 1985 лица. Меѓу секои три лица има двајца кои зборуваат еден ист јазик. Докажи, дека ако секој учесник зборува на не повеќе од 5 јазици, тогаш има барем 200 лица кои знаат еден ист јазик.

Решение. Ќе докажеме дека има учесник кој се разбира со најмалку 992 од преостанатите учесници. Ако има учесник, кој се разбира со сите останати учесници, тогаш тој се разбира со $1984 > 992$ учесници. Нека претпоставиме дека два учесника A и B не се разбираат. Од условот на задачата следува дека секој од останатите 1983 учесници се разбира или со A или со B. Од принципот на Дирихле следува дека еден од нив (на пример A) се разбира со 992 учесници.

Учесникот A говори најмногу 5 јазици и $992 = 5 \cdot 198 + 2$, па од принципот на Дирихле заклучуваме дека барем 199 од учесниците со кои A се разбира на еден ист јазик. Овие 199 учесници заедно со A ја формираат бараната група од најмалку 200 лица кои говорат еден ист јазик.

36. Секој од 17 научници се допишува со секој преостанатите. Тие се допишуваат на три теми и секој пар се допишува само на една тема. Докажи дека постојат барем тројца научници кои меѓусебно се допишуваат на една иста тема.

Решение. Избираме еден научник, A. Бидејќи тој се допишува со 16 други научници, од принципот на Дирихле следува постојат барем 6 други научници кои со научникот A се допишуваат на иста тема.

Ако меѓу шесте научници, постојат двајца B и C, кои меѓу себе се допишуваат на таа иста тема, тогаш (A, B, C) е бараната тројка.

Ако од овие шест научници било кои двајца не се допишуваат на таа тема, тогаш тие меѓусебно се допишуваат на преостанатите две теми. Избираме еден од шестмината и нека тоа е D. Тој барем со тројца од преостанатите петмина се допишува на една иста тема. Ако барем двајца од нив, E и F, се допишуваат на таа тема, тогаш (D, E, F) е бараната тројка. Ако од таа тројка било кои двајца не се допишуваат на таа тема, тогаш тие се допишуваат меѓу себе на преостанатата трета тема.

Значи, секогаш постојат тројца научници кои се допишуваат на иста тема.

37. На правата се дадени $mn+1$ отсечка. Докажи, дека постојат $m+1$ отсечка кои имаат заедничка точка или $n+1$ отсечка кои се по порови дисјунктни.

Решение. Нека $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_{mn+1}, b_{mn+1}]$ се дадените интервали и нека D_1 е множеството од сите десни крајни точки на овие интервали, односно $D_1 = \{b_1, b_2, ..., b_{mn+1}\}$. Нека $x_1 = \min D_1$ и I_1 е еден од дадените интервали (може да се и повеќе) чија десна крајна точка е x_1. Со D_2 да го означиме множеството од сите десни крајни точки на дадените интервали кои не ја содржат точката x_1. Нека $x_2 = \min D_2$ и I_2 е еден од дадените интервали кои ја содржат точката x_2. Тогаш $x_1 < x_2$ и интервалите I_1 и I_2 се дисјунктни. Нека D_3 множеството од сите десни крајни точки на дадените интервали кои не ги содржат точките x_1 и x_2, $x_3 = \min D_3$ и I_3 е еден од дадените интервали кои ја содржат точката x_3. Тогаш $x_1 < x_2 < x_3$ и интервалите I_1, I_2 и I_3 се по парови дисјунктни. Продолжувајќи ја постапката добиваме низа броеви $x_1, x_2, ..., x_k$ и низа интервали $I_1, I_2, ..., I_k$ такви што

1) $x_1 < x_2 < ... < x_k$,

2) x_j е десна крајна точка на интервалот I_j за секој $j \in \{1, 2, ..., k\}$,

3) интервалите $I_1, I_2, ..., I_k$ се по парови дисјунктни,

4) секој од дадените $mn+1$ интервал содржи една од точките $x_1, x_2, ..., x_k$.

Ако $k \geq n+1$, тогаш доказот е завршен. Ако $k \leq n$, тогаш од принципот на Дирихле и од 4) следува дека некој од броевите $x_1, x_2, ..., x_k$ се содржат во најмалку $m+1$ од дадените интервали.

38. Нека $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ се подмножества на конечното множество M такви што $|A_j| > \frac{1}{2}|M|$, за $j = 1, 2, ..., 1066$. Докажи, дека постојат елементи $x_1, x_2, ..., x_{10}$ од M такви што секој A_j содржи најмалку еден елемент од $x_1, x_2, ..., x_{10}$.

Решение. Од $|A_j| > \frac{1}{2}|M|$, за $j = 1, 2, ..., 1066$ следува дека

$$|A_1| + |A_2| + ... + |A_{1066}| > 533|M|.$$

Од принципот на Дирихле заклучуваме дека постои $x_1 \in M$ кој се содржи најмалку во 534 од множествата $A_1, A_2, ..., A_{1066}$. Овие множества да ги означиме со $B_{533}, B_{534}, ..., B_{1066}$.

Аналогно докажуваме дека постојат елементи $x_2, x_3, ..., x_{10}$ за кои важи

$$x_2 \in B_{266} \cap B_{267} \cap ... \cap B_{532} \qquad x_3 \in B_{133} \cap B_{134} \cap ... \cap B_{265}$$
$$x_4 \in B_{66} \cap B_{67} \cap ... \cap B_{132} \qquad x_5 \in B_{33} \cap B_{34} \cap ... \cap B_{65}$$
$$x_6 \in B_{16} \cap B_{17} \cap ... \cap B_{32} \qquad x_7 \in B_8 \cap B_9 \cap ... \cap B_{15}$$
$$x_8 \in B_4 \cap B_5 \cap B_6 \cap B_7 \qquad x_9 \in B_2 \cap B_3, \quad x_{10} \in B_1,$$

каде $(B_1, B_2, ..., B_{1066})$ е некоја пермутација на множествата $A_1, A_2, ..., A_{1066}$. Значи, секое подмножество $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ содржи најмалку еден од елементите $x_1, x_2, ..., x_{10}$.

39. Дадени се множествата $A_1, A_2, ..., A_n$ чиј пресек е празен и за кои важи $|A_i| = 30$ за секој i и $|A_i \cap A_j| = 1$ за $i \neq j$. Определи ја најголемата можна вредност на n.

Решение. Нека претпоставиме дека $n \geq 29 \cdot 30 + 2 = 872$. Меѓу елементите $A_1 \cap A_i$, $i = 2, 3, ..., 872$ има најмногу 30 различни, па од принципот на Дирихле следува дека постои елемент $a \in A_1$ кој лежи барем во уште 30 множества A_i. Нека, без ограничување на општоста $a \in A_1, A_2, ..., A_{31}$. Да разгледаме некое множество A_k кое не го содржи a. Сите елементи $A_k \cap A_i$, $i = 1, 2, ..., 31$ се меѓусебно различни бидејќи $A_i \cap A_j = \{a\}$, за $1 \le i < j \le 31$. Последното не е можно, бидејќи A_k има 30 елементи.

Сега ќе конструираме пример од 871 множества со саканите својства. За целите броеви a, b, c да означиме

$$L_{a,b,c} = \{(x, y) \mid 0 \le x, y < 29, ax + by \equiv c (\text{mod } 2)\}.$$

Ако двата броја a, b не се деливи со 29, тогаш множеството $L_{a,b,c}$ се состои од 29 парови. Нека $a_0, a_1, ..., a_{28}, a_{29}, a_{30}$ се дополнителни елементи. Дефинираме

$$A_{i,j} = L_{1,i,j} \cup \{a_i\},\ 1 \le i \le 28,\ 0 \le j \le 28,$$
$$A_{29,j} = L_{0,1,j} \cup \{a_{29}\},\ A_{30,j} = L_{1,0,j} \cup \{a_{30}\},$$
$$A_{0,0} = \{a_1, a_2, ..., a_{30}\}.$$

Множествата $A_{0,0}$ и $A_{i,j}$, $1 \le i \le 30,\ 0 \le j \le 28$ ги задоволуваат условоите на задачата.

40. На едно тестирање учествувале $n, (n \ge 3)$ ученици. Тестот се состоел од 15 прашања и на секое прашање се понудени повеќе одговори од кои само еден е точен. На прашање се одговара со заокружување на точниот одговор. За секој точен одговор се добива по 1 бод, а за неточен одговор или неодговорено прашање не се добиваат бодови. По тестирањето се покажало дека збирот на освоените поени на било кои 12 ученици е поголем или еднаков на 36 и има најмалку три ученици, за кои постојат три прашања на кои овие ученици точно одговориле. Определи ја најмалата можна вредност на n.

Решение. Ќе докажеме дека бараната најмала вредност е $n = 911$.

Нека $n = 911$. Ако секој ученик одговорил точно на најмалку три прашања, тогаш за секој ученик ќе има $\binom{15}{3} = 455$ начини точно да одговорил на точно три прашања. Затоа од принципот на Дирихле следува, дека постојат барем три ученици, за кои постојат три прашања на кои овие ученици точно одговориле.

Ако постои ученик X со помалку од три точни одговори, тогаш бројот на учениците со помалку од четири точни одговори не е поголем од 10. Во спротивно, ако земеме 11 такви ученици, тие заедно со ученикот X вкупно ќе освојат помалку од 36 бодови, што противречи на условот на задачата. Според тоа, постојат повеќе од $911 - 11 = 900$ ученици кои освоиле најмалку 4 бодови. Бидејќи $900 \cdot \binom{4}{3} > 2 \cdot \binom{15}{3}$, заклучуваме дека постојат три ученици, за кои постојат три прашања на кои овие ученици дале точен одговор.

Ако на тестирањето учествувале 910 ученици, тогаш учениците ќе ги поделиме во $\binom{15}{3}=455$ групи од по 3 ученика. Во секоја група двајцата ученици одговараат точно само на трите прашања од соодветната група. Тоа значи, дека секоја група од 12 ученици ќе освои точно 36 бодови, но за секои три ученици не постојат три прашања на кои овие ученици точно одговориле.

41. Во рамнината се дадени две заемно нормални прави, три правоаголници чии страни се паралелни со дадените прави и еден триаголник. Унијата на правоаголниците го покрива работ на триаголникот, т.е. секоја точка од страните на триаголникот лежи во внатрешноста на еден правоаголник. Докажи, дека целиот триаголник лежи во внатрешноста на унијата на правоаголниците.

Решение. Нека T е произволна точка во внатрешноста на триаголникот. Низ T повлекуваме прави паралелни со дадените прави. Во пресекот на овие прави со страните на триаголникот добиваме четири точки. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку две од овие точки лежат во еден од трите правоаголници. Во овој правоаголник лежи и точката T (зошто?). Сега тврдењето на задачата следува од произволноста на точката T.

42. Во координатната рамнина се дадени 2000 правоаголници чии должини на страни се природни броеви помали или еднакви на 100. Правоаголниците се наоѓаат во првиот квадрант и имаат теме во кординатниот почеток. Докажи, дека меѓу дадените правоаголници постојат најмалку 40 правоаголници кои се подредени монотоно во однос на инклузијата на множества.

Решение. Да ги разгледаме следните 50 низи правоаголници:

1. $(1,1),(1,2),(1,3),...,(1,100),(2,100),(3,100),...,(100,100)$,
2. $(2,2),(2,3),(2,4),...,(2,99),(3,99),(4,99),...,(99,99)$,
3. $(3,3),(3,4),(3,5),...,(3,98),(4,98),(5,98),...,(98,98)$,

....

49. $(49,49),(49,50),(49,51),(49,52),(50,52),(51,52),(52,52)$,
50. $(50,50),(50,51),(51,51)$.

Секој правоаголни чии страни се природни броеви помали или еднакви на 100 е член на некоја од горните низи, а ниту еден од нив не е член на повеќе од една низа. Освен тоа, во секоја од запишаните низи правоаголниците се подредени монотоно во однос на инклузијата на множества. Бидејќи $2000>50\cdot 39$, од принципот на Дирихле следува дека меѓу дадените правоаголници постојат најмалку 40 кои се членови на една од низите, што значи дека тие се подредени монотоно во однос на инклузијата.

43. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем и пет точки A,B,C,D,E со целобројни координати. Докажи, дека меѓу триаголниците (дегене-

рирани или недегенерирани) со темиња во дадените точки има најмалку три со целобројна плоштина.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако темињата на $\triangle MNP$ имаат целобројни координати, тогаш неговата плоштина се менува за цел број ако координатите на темињата M, N, P ги промениме за парен број.

Доказ. Нека $M(a,b), N(,c,d)$ и $P(e,f)$. Ако

$$M_1(a+2k, b+2l),\ \ N_1(c+2m, d+2n) \text{ и } P_1(e+2p, f+2q),$$

тогаш

$$P_{\triangle M_1N_1P_1} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+2k & b+2l & 1 \\ c+2m & d+2n & 1 \\ e+2k & f+2q & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+2l & 1 \\ c & d+2n & 1 \\ e & f+2q & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} k & b+2l & 1 \\ m & d+2n & 1 \\ k & f+2q & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} a & l & 1 \\ c & n & 1 \\ e & q & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & b+2l & 1 \\ m & d+2n & 1 \\ k & f+2q & 1 \end{vmatrix}$$

$$= P_{\triangle MNP} + \begin{vmatrix} a & l & 1 \\ c & n & 1 \\ e & q & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & b+2l & 1 \\ m & d+2n & 1 \\ k & f+2q & 1 \end{vmatrix} = P_{\triangle MNP} + D,$$

каде $D \in \mathbb{Z}$. ■

Да се вратиме на задачата. Координатите на точките A, B, C, D, E се цели броеви, па затоа со парни промени на нивните координати истите можеме да ги пресликаме во точките

$$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1). \qquad (1)$$

Според принципот на Дирихле најмалку две од дадените точки ќе се пресликаат во една од точките (1). Но, тоа значи дека најмалку три од новодобиените триаголници се дегенирани триаголници со плоштина еднаква на 0. Сега, од лемата следува дека најмалку три триаголниците со темиња во дадените точки имаат целобројна плоштина.

44. Во просторот е даден правоаголен координатен систем Докажи, дека меѓу 19 точки со целобројни координати секогаш има 4 кои се темиња на тетраедар со целоброен волумен.

Решение. Аналогно како во претходната задача се докажува дека ако темињата на тетраедарот $MNPQ$ имаат целобројни координати, тогаш неговиот волумен се менува за цел број ако координатите на темињата M, N, P, Q ги промениме за цел број делив со 6. Според тоа, после соодветни транслации можеме да сметаме дека координатите на точките се еднакви на 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Да ја разгледаме првата координата на точките добиени со транслација на дадените точки. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку 4 од добиените точки имаат иста прва координата, што значи дека овие точки лежат во иста рамнина. Но, тоа значи најмалку еден од добиените тетраедри е дегенериран тетраедар со волумен еднаков на 0, т.е. дека меѓу дадените 19 точки постојат 4 кои се темиња на тетраедар со целоброен волумен.

45. Дадена е кружница со центар во координатниот почеток и радиус 2016. На кружницата и во нејзината внатрешност се избрани 540 точки со целобројни координати такви што меѓу нив нема три колинеарни точки. Докажи, дека постојат два триаголника чии темиња се во дадените точки и кои имаат еднакви плоштини.

Решение. Нека претпоставиме дека сите триаголници имаат различна плоштина. Имаме вкупно $\binom{540}{3} = \frac{540\cdot 539\cdot 538}{1\cdot 2\cdot 3} = 26098380$ триаголници. Плоштината на секој од овие триаголници ABC се пресметува со формулата

$$P = \frac{1}{2}\,|\,A_x(B_y - C_y) + B_x(C_y - A_y) + C_x(A_y - B_y)\,|,$$

па затоа плоштината на секој од разгледуваните триаголници е природен број поделен со 2. Според тоа, бидејќи имаме 26098380 триаголници најголемата плоштина ќе биде поголема од $\frac{26098380}{2} = 13049190$. Меѓутоа, плоштината на кругот е

$$2016^2 ® < 2016^2 \cdot 3,2 = 13005619,2 < 13049190,$$

што значи дека триаголникот со најголема плоштина нема да може да биде впишан во кругот. Конечно, од добиената противречност следува дека има најмалку два триаголника кои имаат еднакви плоштини.

46. Докажи дека ако една рамнинска фигура има плоштина поголема од 1, тогаш постојат две нејзини точки со координати (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такви што $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ се цели броеви.

Решение. Во секоја точка со целобројни координати повлекуваме прави паралелни со координатните оски, со што добиваме целобројна решетка која рамнината ја дели на квадрати со должина на страна еднаква на 1. Секој квадрат на оваа решетка, со помош на транслација од видот

$$x \to x - m, \quad y \to y - n\,, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

го пресликуваме во квадратот чии темиња се $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ и чија плоштина е еднаква на 1. Деловите од фигурата кои лежат во различните квадрати ќе се пресликаат на овој квадрат. Но разгледуваната фигура има плоштина поголема од 1, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку два од транслатираните делови ќе имаат заедничка точка (x_0, y_0). Во оваа точка се пресликани две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), т.е. важи

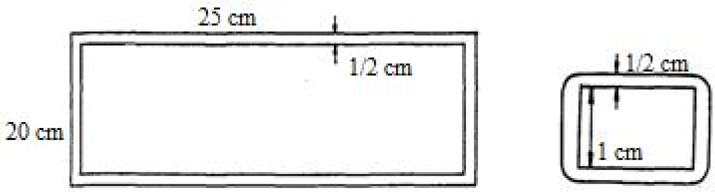
$$x_1 \to x_1 - m_1 = x_0, \quad y_1 \to y_1 - n_1 = y_0, \text{ и}$$

$$x_2 \to x_2 - m_2 = x_0,\quad y_2 \to y_2 - n_2 = y_0 .$$

Конечно, $x_2 - x_1 = m_2 - m_1 \in \mathbb{Z}$ и $y_2 - y_1 = n_2 - n_1 \in \mathbb{Z}$, што и требаше да се докаже.

47. Во правоаголник со страни $20cm$ и $25cm$ се сместени 120 квадрати со страна $1cm$ без притоа квадратите да се преклопуваат. Докажи, дека во правоаголникот може да се впише круг со дијаметар $1cm$ кој не сече ниту еден од квадратите.

Решение. Центарот на кругот со дијаметар $1cm$ сместен во правоаголникот мора да се наоѓа на растојание поголемо од $\frac{1}{2}cm$ од секоја од страните на правоаголникот, т.е. во внатрешноста на помалиот правоаголник прикажан на левиот цртеж долу. Плоштината на овој правоаголник е еднаква на $19 \cdot 24 = 456cm^2$.



Освен тоа, центарот на кругот мора да е на растојание поголемо од $\frac{1}{2}cm$ од секој квадрат, т.е. надвор од секоја фигура прикажана на десниот цртеж, чија плоштина е еднаква на $3+\frac{®}{4}cm^2$. Максималната можна плоштина која ја зафаќаат сите 120 вакви фигури, под услов да не се сечат, е еднаква на

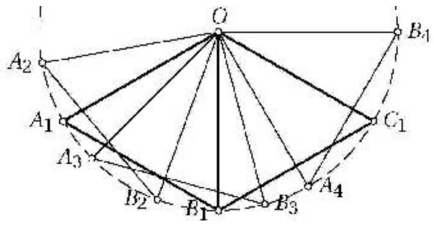
$$120(3+\frac{®}{4}) = 360 + 30® < 360 + 30 \cdot 3,2 = 456cm^2 .$$

Според тоа, овие фигури не го покриваат внатрешниот правоаголник, па затоа постои точка која не лежи во ниту една од фигурите. Јасно, кругот со центар во оваа точка и дијаметар $1cm$ лежи во правоаголникот и не сече ниту еден од квадратите.

48. Конечното множество $\mathbb{S}$ точки во рамнината го нарекуваме урамнотежено ако за секои две различни точки A и B од множеството $\mathbb{S}$ постои точка C во множеството $\mathbb{S}$ таква што $\overline{AC} = \overline{BC}$. Множеството $\mathbb{S}$ го нарекуваме бесцентрично ако за никои три точки A, B и C од множеството $\mathbb{S}$ не постои точка P во $\mathbb{S}$ таква што $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

а) Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ постои урамнотежено множество кое се состои од n точки.

б) Определи ги сите природни броеви $n \geq 3$ за кои постои урамнотежено бесцентрично множество.



Решение. а) Избираме различни точки $A_1,...,A_m,B_1,...,B_m,C_1$ на кружница k со центар O такви што триаголниците OA_iB_i $(i=1,2,...,m)$ и OB_1C_1 се рамнострани. Множествата

$\{O,A_1,...,A_m,B_1,...,B_m\}$ и

$\{O,A_1,...,A_m,B_1,...,B_m,C_1\}$

се урамнотежени и имаат $2m+1$ и $2m+2$, $m\in\mathbb{N}$ елементи.

б) Одговор: сите непарни броеви.

За непарен n множеството темиња на правилен n – аголник е урамнотежено и бесцентрично множество. Останува да докажеме дека за парен n такво множество $\mathbf{S}$ не постои.

Нека го претпоставиме спротивното. На секој од $\frac{n(n-1)}{2}$ подредени парови (A,B) точки од $\mathbf{S}$ му соодветствува точка P таква што $\overline{PA}=\overline{PB}$, па според принципот на Дирихле постои точка P на која и соодветствуваат најмалку $[\frac{n-1}{2}]=\frac{n}{2}$ парови точки од $\mathbf{S}$. Бидејќи ниту еден од ови парови не ја соржи точката P некои два пара имаат заедничка точка: нека се тоа (A,B) и (A,C). Тогаш $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$, што противречни на бесцентричноста на множеството $\mathbf{S}$.

49. Дадени се шест подредени тројки реални броеви. Докажи дека постојат барем две тројки (a,b,c) и (x,y,z) такви што

$$ax+by+cz\geq 0\,. \qquad (1)$$

Решение. Ако меѓу шесте подредени тројки се наоѓа тројката $(0,0,0)$, тогаш тврдењето е тривијално. Во спротивно, секоја тројка (p,q,r) определува ненулти вектор во однос на произволно избран Декартов правоаголен координатен систем, а бројот $ax+by+cz$ е скаларниот производ на векторите (a,b,c) и (x,y,z). Според тоа, условот (1) е еквивалентен со условот аголот меѓу векторите (a,b,c) и (x,y,z) да е помал или еднаков на 90°. Ќе докажеме дека аголот меѓу некои два од шесте вектори е помал или еднаков на 90°.

Избираме произволен вектор меѓу шесте вектори. Да претпоставиме дека тој гради тапи агли со останатите пет вектори. Тогаш овие вектори лежат во еден полупростор. Овој полупростор го делиме на четири правоаголни октанти. Според принципот на Дирихле два од петте вектори припаѓаат на ист октант.

Јасно, овие два вектори зафаќаат агол кој е помал или еднаков на 90°.

50. Дадени се природните броеви $n \geq 2$ и $k \geq \frac{5}{2}n - 1$. Докажи дека при секој избор на k различни точки со целобројни координати (x, y), $1 \leq x, y \leq n$ постои кружница која минува низ најмалку четири од тие точки.

Решение. Со a_i да го означиме бројот на избраните точки на правата $y = i$. Ако $a_i \geq 2$ и $x_1 < x_2 < ... < x_{a_i}$ се апсцисите на избраните точки на таа права, тогаш бидејќи

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_2 + x_4 < x_3 + x_4 < ... < x_{a_i - 1} + x_{a_i},$$

добиваме дека бројот на различните збирови на две апсциси на точки меѓу избраните од $y = i$ е најмалку $2a_i - 3$. Очигледно истото важи и за $a_i < 2$.

Од друга страна, бројот на вредностите кои може да се добијат како збир на два различни природни броја меѓу 1 и n е точно $2n - 3$ (тоа се броевите од 3 до $2n - 1$). Бидејќи

$$\sum_{i=1}^{n} (2a_i - 3) = 2k - 3n \geq 2n - 2 > 2n - 3,$$

од принципот на Дирихле следува дека постојат четири различни точки $(x_1, y_1), (x_1', y_1), (x_2, y_2), (x_2', y_2)$ такви што $x_1 + x_1' = x_2 + x_2'$ и $y_1 \neq y_2$. Останува да покажеме дека постои кружница која минува низ овие четири точки.

51. Даден е квадрат *ABCD* со должина на страна 4. Определи го најголемиот природен број *k* такав што, за секој распоред на *k* точки во внатрешноста на квадратот *ABCD*, секогаш постои квадрат со должина на страна 1, кој се содржи во квадратот *ABCD* (страните не мора да се паралелни со страните на квадратот *ABCD*) и во чија внатрешност нема ниту една од разгледуваните *k* точки.

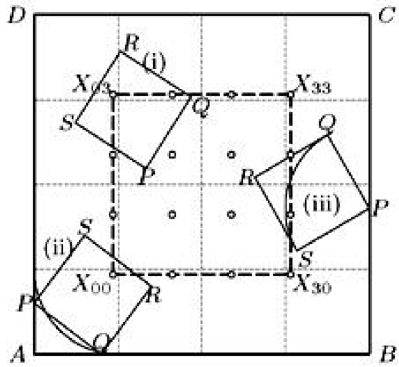
Решение. Одговорот е $k = 15$. Јасно, $k = 15$ ги задоволува условите на задачата. Навистина, да го поделиме квадратот *ABCD* на 16 единечни квадрати. Како и да распоредиме 15 точки во внатрешноста на квадратот *ABCD*, барем еден од овие единечни квадрати во внатрешноста нема да содржи ниту една од овие точки. Ќе докажеме дека $k < 16$. Во квадратот со темиња $A(-2, -2)$, $B(2, -2), C(2,\ 2), D(-2,\ 2)$ да означиме 16 точки $X_{ij}(-a + i \cdot \frac{2a}{3}, -a + j \cdot \frac{2a}{3})$, за $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, каде $1 < a < \frac{3}{2\sqrt{2}}$. За да докажеме дека секој единечен квадрат *PQRS* содржи некоја од означените точки ќе ја користиме следнава едноставна лема.

*Лема***.** Ако су *E* и *F* се точки на страните *BC* и *CD* на единечниот квадрат *ABCD* такви што $d(A, EF) = 1$, тогаш $\sqrt{8} - 2 \leq \overline{EF} \leq 1$.

Доказ. Кружницата $k(A,\overline{AB})$ ја допира отсечката EF во некоја точка G, и притоа важи $\overline{EF}=\overline{GE}+\overline{GF}=\overline{BE}+\overline{DF}$, па затоа $\overline{CE}+\overline{CF}+\overline{EF}=2$. Сега тврдењето следува од неравенството $\overline{EF}\le\overline{CE}+\overline{CF}\le\sqrt{2}\overline{EF}$.

Доволно е да ги разгледаме следниве три случаи.

i) Центарот O на квадратот $PQRS$ е во квадратот $X_{00}X_{03}X_{33}X_{30}$. Тогаш барем една од точките X_{ij} од O е на растојание помало или еднакво на $\frac{a\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{2}$ и таа лежи во внатрешноста на квадратот $PQRS$.



ii) Сите темиња P,Q,R,S се надвор од квадратот $X_{00}X_{03}X_{33}X_{30}$. Нека без ограничување на општоста $P\in AD$ и $Q\in AB$ и нека W е точката $(-1,-1)$. Според лемата важи $d(X_{00},\overline{PQ})<d(W,\overline{PQ})\le 1$, па затоа X_{00} е во внатрешноста на квадратот $PQRS$.

iii) Точно едно од темината, да кажеме R, е во квадратот $X_{00}X_{03}X_{33}X_{30}$. Нека без ограничување на општоста P лежи на страната BC. Бидејќи $d(P,\overline{X_{30}X_{33}})<1$, од лемата следува дека делот од правата $X_{30}X_{33}$ во внатрешноста на $PQRS$ има должина поголема од $\sqrt{8}-2>a$, па тој содржи барем една од означените точки.

52. Нека $P=\{(x,y)\,|\,x,y\in\{0,1,2,...,2015\}\}$ е множество точки во рамнината. Во рамнината се поставени хоризонтални и вертикални отсечки, секоја со единечна должина, така што крајните точки на овие отсечки припаѓаат на P, секоја точка од P е крајна точка на барем една отсечка и никои две отсечки немаат заедничка крајна точка.

Докажи дека постои хоризонтална или вертикална права која минува низ средините на барем 506 отсечки.

Решение. Бидејќи има 2016^2 точки во P, вкупно имаме $\frac{2016^2}{2}$ отсечки. Секоја вертикална отсечка има долен крај на правата $y=i$ за некој $i=0,1,...,2014$ и секоја хоризонтална отсечка има лев крај на правата $x=j$ за некој $j=0,1,2,...,2014$. Од принципот на Дирихле следува дека има најмалку $[\frac{2016^2}{2\cdot 2\cdot 2015}]=505$ паралелни отсечки чии леви (долни) краеви лежат на една иста права. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се вертикални отсечки и долниот крај е на правата $y = i*$.

Да претпоставиме дека овие отсечки се точно 505 и нека тие се $r_1, r_2, ..., r_{505}$. Да забележиме дека има точно $2016(2016 - i - 1)$ точки од P кои се над правата $y = i*$. Точно 505 од овие точки се горните краеви на $r_1, r_2, ..., r_{505}$, а другите може да се распоредат во парови краеви на отсечки над правата $y = i*$. Последното не е можно бидејќи $2016(2016 - i - 1) - 505$ е непарен број.

Според тоа има најмалку 506 вертикални отсечки со долен крај на правата $y = i*$. Сега е јасно дека правата $y = i* + \frac{1}{2}$ го задоволува условот на задачата.

53. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ со плоштина еднаква на 1 е избрана произволна точка, која е поврзана со неговите темиња. Потоа во еден од добиените три триаголници одново е избрана произволна точка и е поврзана со неговите темиња. Во секој чекор се избира произволна точка од внатрешноста на некој од до тој момент добиените триаголници и таа се поврзува со темињата на тој триаголник. Со n да го означиме бројот на избраните точки.

а) Докажи, дека $\triangle ABC$ е поделен на $2n + 1$ триаголници.

б) За секои два триаголника од поделбата кои имаат заедничка страна пресметан е збирот на нивните плоштини. Докажи, дека максималниот од добиените збирови е поголем или еднаков на $\frac{2}{2n+1}$.

Решение. а) Во секој чекор триаголникот од кој се избира точка се дели на три нови триаголници, т.е. вкупниот број триаголници се зголемува за 2. Бидејќи во почетокот имаме само еден триаголник, после n чекори вкупно ќе имаме $2n + 1$ триаголници.

б) Со индукција ќе докажеме дека ако извадиме произволен триаголник, тогаш останатите триаголници може да бидат групирани по парови така што триаголниците во секој пар имаат заедничка страна.

1) За $n = 1$ тврдењето е очигледно.

2) Нека тврдењето е точно за $n = k$. Ќе докажеме дека тоа е точно и за $n = k + 1$. Нека во $k + 1-$ от чекор сме додале точка O во $\triangle MNP$. Од добиената поделба да извадиме произволен $\triangle XYZ$. Ако $\triangle XYZ$ е некој од $\triangle OMN$, $\triangle OMP$ или $\triangle ONP$ (без ограничување на општоста можеме да сметаме дека тоа е $\triangle OMN$), тогаш да ја разгледаме конфигурацијата во $k -$ от чекор со извален $\triangle MNP$.

Согласно индуктивната претпоставка останатите триаголници можат да бидат групирани во парови со заедничка страна. Останува да го додадеме парот $(\triangle OMP, \triangle ONP)$. Ако $\triangle XYZ$ е различен од $\triangle OMN$, $\triangle OMP$ и $\triangle ONP$, тогаш ја разгледуваме конфигурацијата во $k -$ от чекор со извален $\triangle XYZ$.

Согласно индуктивната претпоставка останатите триаголници може да бидат групирани во парови со заедничка страна. Нека $\triangle MNP$ е во пар со $\triangle QMN$. Тогаш парот $(\triangle QMN, \triangle MNP)$ го заменуваме со паровите $(\triangle OMN,$ $\triangle QMN)$ и $(\triangle OMP, \triangle OPN)$. Значи и во овој случај тврдењето важи, со што доказот е завршен.

Бидејќи плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на 1, заклучуваме дека постои делбен триаголник со минимална плоштина која не е поголема од $\frac{1}{2n+1}$. Да ги разгледаме сите триаголници од поделбата без тој со минимална плоштина. Согласно претходно докажаното останатите триаголници може да се групираат во парови со заедничка страна. Бидејќи имаме n такви парови со вкупна плоштина поголема или еднаква на $1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$, добиваме дека максималниот збир на плоштините на два триаголника во еден пар е најмалку $\frac{1}{n}\frac{2n}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}$.

54. Во рамнината се дадени 2015 кружници со радиусу 1. Докажи дека меѓу нив постојат 27 кружници такви што или секој пар има заеднички точки или секој пар нема заеднички точки.

Решение. Нека претпоставиме дека не постојат 27 кружници такви што секои две од нив да имаат заеднички точки. За апсциса да избереме права која не е ниту паралелна, ниту нормална на која било отсечка чии крајни точки се центри на кружниците. Кружниците да ги нумерираме со $C_1, C_2, ..., C_{2015}$ по растечкиот редослед на апсцисите на нивните центри. Прво ќе докажеме дека за секој $2 \le i \le 2015$ меѓу $C_1, C_2, ..., C_i$ има најмногу 75 кружници кои имаат заедничка точка со C_i.

Заради направеното подредување кружниците $C_1, C_2, ..., C_{i-1}$ се лево од C_i. Нека $C_i^{'}$ е кружницата чиј цнтар е центарот на C_i и има радиус 2. Да ја разделиме левата (според апсцисата) полукружница на $C_i^{'}$ на три еднакви сектори. Од претпоставката следува дека во секој сектор се содржат најмногу 25 центри на кружниците $C_1, C_2, ..., C_{i-1}$. Според тоа, левата полукружница содржи најмногу 75 такви центри, па значи сече најмногу 75 од соодветните кружници.

Сега да ги обоиме дадените 2015 кружници во 76 бои. Да допуштиме дека можеме да ги обоиме $C_1, C_2, ..., C_{i-1}$ така што секои две кружници кои се сечат се обоени во различна боја. Бидејќи C_i сече најмногу 75 од кружниците $C_1, C_2, ..., C_{i-1}$ заклучуваме дека такво боење е можно.

На крајот, бидејќи $\frac{2015}{76} > 26$ од принципот на Дирихле следува дека постои множество на 27 еднобојни кружници. Јасно, меѓу нив нема две кружници кои имаат заеднички точки.

55. Секој ѕид на еден тетраедар може да се смести во кружница со радиус 1. Докажи дека овој тетраедар може да се смести во сфера со радиус $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Решение. Прво да забележиме дека ако триаголникот не е тапоаголен, тогаш најмалата кружница која го содржи е неговата опишана кружница, а за тапоаголен триаголник тоа е кружницата чиј дијаметар е неговата најголема страна.

Нека опишаната сфера t околу дадениот тетраедар $ABCD$ има центар O и радиус R . Да претпоставиме дека O лежи надвор од тетраедарот или на неговата граница. Ја разгледуваме најблиската до O точка X од тетраедарот. Можни се два случаја.

Случај 1. X припаѓа на внатрешноста на некој ѕид, на пример ABC . Тогаш X е центарот на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$, овој триаголник е остроаголен и затоа радиусот r на ω не е поголем од 1. Освен тоа, точките D и O лежат на различни страни од рамнината ABC и сверата со центар X и радиус r го содржи оној дел од t во кој лежи $ABCD$. Значи, оваа сфера го содржи и $ABCD$.

Случај 2. X лежи на некој раб, на пример AB . Тогаш проекцијата O' на точката O врз рамнината ABC лежи во $\triangle ABC$. Освен тоа X е најблиската до O' точка од сите точки на тој триаголник. Според тоа, O' и C се во различни полурамнини во однос на правата AB , $\measuredangle ACB$ е тап и точката C лежи во сфера со дијаметар AB (од претходните разгледувања следува дека радиусот на оваа сфера не е поголем од 1). Аналогно, D лежи во истата сфера, па значи таа го содржи $ABCD$.

И во двата случаја добивме дека тетраедарот може да се смести во сфера со радиус 1.

Останува да го разгледаме случајот кога O лежи во тетраедарот. Тогаш збирот на волумените на пирамидите $ABCO, ABDO, ACDO, BCDO$ е еднаков на V_{ABCD} , па затоа од принципот на Дирихле следува дека еден од тие волумени, на пример на $ABCO$ е помал или еднаков на $\frac{1}{4}V_{ABCD}$. Нека полуправата DO ја сече рамнината $ABCD$ во точката D'. Тогаш

$$\frac{1}{4} \geq \frac{V_{ABCO}}{V_{ABCD}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{DD'}}$$

и затоа $\overline{OD'} \leq \frac{1}{3}\overline{OD} = \frac{R}{3}$.

Да ја разгледаме најблиската до O точка X од границата на тетраедарот. Јасно, таа лежи во внатрешноста на некој од ѕидовите на тетраедарот и е центар на опишаната кружница k околу него. Од претходните разгледувања следува дека $\overline{XO} \leq \frac{R}{3}$. Тогаш радиусот на k е помал или еднаков на

$$\sqrt{R^2 - (\frac{R}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$$

и како тој не е поголем од 1 добиваме $\frac{2\sqrt{2}}{3} R \leq 1$, т.е. $R \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

5. ПРИНЦИП НА ВКЛУЧУВАЊЕ И ИСКЛУЧУВАЊЕ

1. (*Принцип на вклучување и исклучување за две множества*). Докажи, дека за произволни конечни множества A и B важи $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

Решение. Нека $M=A\cup B$. Тогаш од принципот на исклучување следува дека $|M|=|A|+|M\setminus A|$. Но, бидејќи $M\setminus A=B\setminus(A\cap B)$, т.е.

$$B=(M\setminus A)\cup(B\cap A) \text{ и } (M\setminus A)\cap(A\cap B)=\emptyset,$$

од принципот на збир следува дека $|B|=|M\setminus A|+|A\cap B|$. Според тоа,

$$|A\cup B|=|A|+|M\setminus A|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

2. Браќата Горјан и Андре собираат стрипови. Во својата колекција моментално имаат 67 стрипови, од кои Горјан прочитал 34, а Андреј прочитал 27. Колку стрипови се непрочитани, ако Горјан и Андреј прочитале 15 исти стрипови?

Решение. Нека A емножеството стрипови кои ги прочитал Горјан и B е множеството стрипови кои ги порочитал Андреј. Тогаш $|A|=34, |B|=27$ и $|A\cap B|=15$. Од принципот на вклучување и исклучување следува

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=34+27-15=46.$$

Според тоа, браќата прочитале 46 стрипови, а непрочитани остануваат $67-46=21$ стри.

3. Колку има природни броеви помали од 2011 кои се деливи со барем еден од броевите 2 и 7, но не се деливи со бројот 5?

Решение. Природни броеви помали од 2011 деливи со 2 има $[\frac{2010}{2}]=1005$, деливи со 7 има $[\frac{2010}{7}]=287$, а деливи со 14 има $[\frac{2010}{14}]=143$. Од формулата за вклучување и исклучување следува дека има $1005+287-143=1149$ природни броеви помали од 2011 кои се деливи со 2 или со 7. Од овие броеви треба да ги одземеме оние кои се деливи со 5, односно содржателите на 10 и 35. Меѓу нив има $[\frac{2010}{10}]=201$ содржатели на 10, $[\frac{2010}{35}]=57$ содржатели на 35 и $[\frac{2010}{70}]=28$ содржатели на 70, од формулата за вклучување и исклучување следува дека меѓу горните 1149 броеви има $201+57-28=230$ содржатели на бројот 5. Конечно, броеви помали од 2011 кои се деливи со 2 или со 7, но не се деливи со 5 има $1149-230=919$.

4. (*Обопштен принцип на вклучување и исклучување*). Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажи, дека за произволни конечни множества A_i, $i = 1, 2, ..., n$ важи

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \qquad (1)$$
$$+ ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Решение. Формулата (1) ќе ја докажеме со индукција по n. За $n = 1$ формулата (1) очигледно важи, а за $n = 2$ точноста на истата е докажана во задача 1. Нека претпоставиме дека (1) важи за некој природен број $m \ge 2$. Нека A_i, $i = 1, 2, ..., m+1$ се произволни конечни множества. Тогаш од претпоставката следува дека за множествата A_i, $i = 1, 2, ..., m$ важи равенството

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \qquad (2)$$
$$+ ... + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m|.$$

Бидејќи

$$|(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) \cap A_{m+1}| = |\bigcup_{j=1}^{m} (A_j \cap A_{m+1})|,$$

од индуктивната претпоставка применета на множествата $A_i \cap A_{m+1}$, $i = 1, 2, ..., m$ добиваме

$$|(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) \cap A_{m+1})| = \sum_{i=1}^{m} |A_i \cap A_{m+1})| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j \cap A_{m+1})| +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{m+1})| + ... + \qquad (3)$$
$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m \cap A_{m+1})|.$$

Сега од задача 1 применета на множествата $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ и $B = A_{m+1}$, користејќи ги (2) и (3) добиваме

$$|A_1 \cup ... \cup A_m \cup A_{m+1}| = |A_1 \cup ... \cup A_m| + |A_{m+1}| - |(A_1 \cup ... \cup A_m) \cap A_{m+1}|$$
$$= \sum_{i=1}^{m+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| +$$
$$+ ... + (-1)^{m} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m \cap A_{m+1}|.$$

т.е. (1) важи и за $n = m+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

5. За еден број ќе велиме дека е навидум прост ако е сложен и ако не е делив со 2, 3 и 5. Постојат 168 прости броеви помали од 1000. Определи го бројот навидум прости броеви кои се помали ос 1000.

Решение. Да ги разгледаме множествата

$$A=\{n \mid n\in\mathbb{N},\, n<1000 \text{ и } n \text{ се дели со } 2\},$$
$$B=\{n \mid n\in\mathbb{N},\, n<1000 \text{ и } n \text{ се дели со } 3\} \text{ и}$$
$$C=\{n \mid n\in\mathbb{N},\, n<1000 \text{ и } n \text{ се дели со } 5\}.$$

Ќе го определиме бројот на елементите на множеството $A\cup B\cup C$. Имаме

$$|A|=[\tfrac{999}{2}]=499,\ |B|=[\tfrac{9999}{3}]=333,\ |C|=[\tfrac{999}{5}]=199,$$
$$|A\cap B|=[\tfrac{999}{6}]=166,\ |A\cap C|=[\tfrac{999}{10}]=99,\ |B\cap C|=[\tfrac{999}{15}]=66,$$
$$|A\cap B\cap C|=[\tfrac{999}{30}]=33.$$

па затоа од обопштениот принцип на вклучување и исклучување следува

$$|A\cup B\cup C|=499+333+199-166-99-66+33=733.$$

Според тоа, имаме $999-733=266$ броеви кои не се деливи ниту со 2, ниту со 3 и ниту со 5. Понатаму, имаме $168-3=165$ прости броеви кои се различни од 2, 3 и 5. Меѓу преостанатите броеви е и бројот 1 кој не е ниту прост, ниту сложен. Затоа, вкупниот број навидум прости броеви кои се помали од 1000 е $266-165-1=100$

6. Колку има природни броеви кои се помали од 2011 и кои се деливи со 2, 3, 5 или 7?

Решение. Да ги разгледаме множествата

$$A=\{n \mid n\in\mathbb{N},\, n\le 2011 \text{ и } n \text{ се дели со } 2\},$$
$$B=\{n \mid n\in\mathbb{N},\, n\le 2011 \text{ и } n \text{ се дели со } 3\},$$
$$C=\{n \mid n\in\mathbb{N},\, n\le 2011 \text{ и } n \text{ се дели со } 5\} \text{ и}$$
$$D=\{n \mid n\in\mathbb{N},\, n\le 2011 \text{ и } n \text{ се дели со } 7\}.$$

Треба да го определиме бројот на елементите на множеството $A\cup B\cup C\cup D$. Имаме:

$$|A|=[\tfrac{2011}{2}]=1005,\ |B|=[\tfrac{2011}{3}]=670,\ |C|=[\tfrac{2011}{5}]=402,\ |D|=[\tfrac{2011}{7}]=287,$$
$$|A\cap B|=[\tfrac{2011}{6}]=336,\ |A\cap C|=[\tfrac{2011}{10}]=201,\ |A\cap D|=[\tfrac{2011}{14}]=143,$$
$$|B\cap C|=[\tfrac{2011}{15}]=134,\ |B\cap D|=[\tfrac{2011}{21}]=95,\ |C\cap D|=[\tfrac{2011}{35}]=57,$$
$$|A\cap B\cap C|=[\tfrac{2011}{30}]=67,\ |A\cap B\cap D|=[\tfrac{2011}{42}]=47,$$
$$|A\cap C\cap D|=[\tfrac{2011}{70}]=28,\ |B\cap C\cap D|=[\tfrac{2011}{105}]=19,$$
$$|A\cap B\cap C\cap D|=[\tfrac{2011}{210}]=9,$$

па затоа од задача 4 следува дека имаме

$$|A\cup B\cup C\cup D|=1005+670+402+287-336-201-143-134-95-57+$$
$$+67+47+28+19-9=1550,$$

броеви кои се деливи со 2, 3, 5 или 7.

7. Шест класа од четврта година $IV^a, IV^b, IV^v, IV^g, IV^d, IV^e$ треба да одат на матурска ексурзија, а можни дестинации се: Будимпешта, Виена, Прага и Варшава. На колку начини тоа може да го направат ако секој клас може да оди само во еден од наведените градови и секој град мора да биде посетен најмалку од еден клас?

Решение. *Прв начнн*. За бараниот распоред постојат две можности.

1) Во еден град ќе патуваат три класа, а во преостанатите три града ќе патува по еден клас. Во овој случај имаме по 4 можности за избор на градот во кој ќе патуваат три класа, а за секој од овие избори имаме $\frac{6!}{3!}$ распореди по класови.
2) Во два града ќе патуваат по два класа и во преостанатите два града по еден клас. Во овој случај имаме $\binom{4}{2}=6$ можности за избор на градовите во кои ќе патуваат по два класа, а за секој од тие избори постојат $\frac{6!}{2!2!}$ распореди по класови.

Сега, од принципот на збир следува дека вкупно имаме $4\cdot\frac{6!}{3!}+6\cdot\frac{6!}{2!2!}=1560$ можности.

Втор начин. Шест клсаа може да патуваат во четири града (секој во еден град, но не мора секој град да е посетен) на 4^6 начини, во три града на 3^6 начини, во два града на 2^6 начини, а во ниту град на еден начин. Сега, од принципот на вклучување и исклучување следува дака бараниот број можности е еднаков на $4^6-4\cdot3^6+6\cdot2^6-4\cdot1=1560$.

8. Определи го бројот на деветцифрените броеви запишани со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (секоја цифра е употребена само еднаш), во кои никои три последователни цифри не се ниту 123, ниту 246, ниту 678.

Решение. Вкупно има $9!$ деветцифрени броеви кои се запишани со цифрите од 1 до 9 и секоја цифра е употребена точно еднаш. Од овој број треба да ги одземеме бројот на броеви кои имаат три последователни цифри 123, 246 и 678. Броеви кои имаат три последователни цифри 123 има $7!$ (го пермутираме овој блок и преостанатите шест цифри). Аналогно, броевите кои имаат три последователни цифри 246 се $7!$ и броевите кои имаат три последователни цифри 678 се $7!$. Понатаму, не постои број кај кој 123 и 246 се последователни цифри. Броеви кај кои 123 и 678 се последователни цифри има $5!$ (ги пермутираме блоковите 123 и 678 и преостанатите три цифри). Броеви во кои последователни цифри се 246 и 678, т.е. во кои последователни цифри се 24678 има $5!$. Конечно, од принципот на вклучување и исклучување следува дека бараниот број броеви е $9!-3\cdot7!+2\cdot5!=34752$.

9. Нека $n \geq 2$ е природен број. Од квадратна $n \times n$ табла, поделенна на единечни полиња се отстранети две спротивни аголни полиња. На колку начини на таблата може да се постават n жетони така, што никои два жетони не се во ист ред или иста колона?

Решение. Да разгледаме стандардна (значи, онаа на која не и се отстранети аголните полиња) $n \times n$ табла. Двете аголни полиња кои треба да ги отстраниме да ги обоиме со црна боја, а сите преостанати со бела боја. Добар распоред е распоред на n жетони на стандардна табла во кој никои два жетона не се во ист ред или колона. Треба да го определиме бројот на различните добри распореди такви што никои два жетона не се на црните полиња. Прво, сите добри распореди се $n!$, бидејќи во секој од $n-$те редови треба да избереме единствена колона во која се наоѓа жетонот. Добри распореди во кои еден жетон е на едно црно поле има $(n-1)!$, бидејќи тој жетон е на аголното поле, а сите преостанати жетони се на остатокот од таблата, што е стандардна табла со димензии $(n-1)\times(n-1)$. Аналогно се добива дека бројот на добрите распореди во кои двете црни полиња се зафатени е $(n-2)!$. Конечно, од принципот на вклучување и исклучување следува дека бараниот број распореди е еднаков на $n!-2\cdot(n-1)!+(n-2)!=(n^2-3n+2)\cdot(n-2)!$.

10. Нека $S=\{1,2,3,...,280\}$. Определи го најмалиот природен број n, таков што во секое n елементно подмножество од множеството S постојат 5 броеви, такви што секои два се заемно прости.

Решение. Нека

$$A_1=\{k\in S: 2\,|\,k\},\ A_2=\{k\in S: 3\,|\,k\},\ A_3=\{k\in S: 5\,|\,k\},$$
$$A_4=\{k\in S: 7\,|\,k\} \text{ и } A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4.$$

Тогаш

$\lvert A_1\rvert=140,$	$\lvert A_2\rvert=93,$
$\lvert A_3\rvert=56,$	$\lvert A_4\rvert=40,$
$\lvert A_1\cap A_2\rvert=46,$	$\lvert A_1\cap A_3\rvert=28,$
$\lvert A_1\cap A_4\rvert=20,$	$\lvert A_2\cap A_3\rvert=18,$
$\lvert A_2\cap A_4\rvert=13,$	$\lvert A_1\cap A_2\cap A_3\rvert=9,$
$\lvert A_3\cap A_4\rvert=8,$	$\lvert A_1\cap A_2\cap A_4\rvert=6,$
$\lvert A_1\cap A_3\cap A_4\rvert=4,$	$\lvert A_2\cap A_3\cap A_4\rvert=2,$
$\lvert A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\rvert=1.$	

Од принципот на вклучување и исклучување, следува

$$\begin{aligned}|A|&=|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|\\&=140+93+56+40-46-28-20-18-13-8+9+6+4+2-1=216.\end{aligned}$$

За било кои 5 броеви од A постојат два од нив кои се содржани во исто множество A_j, за некој $j \in \{1,2,3,4\}$, па тие не се заемно прости. Од овде следува дека $n > 216$. Ќе докажеме дека $n = 217$.
Нека

$$B_1 = A \setminus \{2,3,5,7\},$$

$$B_2 = \{11^2, 11\cdot 13, 11\cdot 17, 11\cdot 19, 11\cdot 23, 13^2, 13\cdot 17, 13\cdot 19\}$$

$$P = S \setminus (B_1 \cup B_2).$$

Тогаш $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$ и P ги содржи 1 и сите прости броеви од S. Нека T е подмножество од S такво што $|T| = 217$. Јасно, треба да се разгледува само случајот кога $|T \cap P| \le 4$. Во овој случај $|T \cap (S \setminus P)| = |T \setminus (T \cap P)| \ge 217 - 4 = 213$, т.е. меѓу сите сложени броеви од S (ги има вкупно $|S \setminus P| = 220$) постојат најмногу 7 броеви кои не се во T. Нека:

$$M_1 = \{2\cdot 23, 3\cdot 19, 5\cdot 13, 7\cdot 13, 11^2\},$$

$$M_2 = \{2\cdot 29, 3\cdot 23, 5\cdot 19, 7\cdot 17, 11\cdot 13\},$$

$$M_3 = \{2\cdot 31, 3\cdot 29, 5\cdot 23, 7\cdot 19, 11\cdot 17\},$$

$$M_4 = \{2\cdot 37, 3\cdot 31, 5\cdot 29, 7\cdot 23, 11\cdot 19\},$$

$$M_5 = \{2\cdot 41, 3\cdot 37, 5\cdot 31, 7\cdot 29, 11\cdot 23\},$$

$$M_6 = \{2\cdot 43, 3\cdot 41, 5\cdot 37, 7\cdot 31, 13\cdot 17\},$$

$$M_7 = \{2\cdot 47, 3\cdot 43, 5\cdot 41, 7\cdot 37, 13\cdot 19\},$$

$$M_8 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}.$$

Сега $M_i \subset S \setminus P, i = 1,2,...,8$. Но, видовме дека постојат најмногу 7 сложени броеви кои не припаѓаат на T. Затоа според принципот на Дирихле постои барем еден индекс $i_0 \in \{1,2,...,8\}$, такво што $M_{i_0} \subset T$. Секои два броја од множеството M_{i_0} се заемно прости, што значи дека $n = 217$.

11. Множеството A има 6 елементи. Докажи дека во секоја фамилија од различни триелементни подмножества

$$\{A_1, A_2, ..., A_{11}\} \quad (|A_j| = 3,\ A_i \ne A_j,\ i \ne j,\ i, j = 1,2,...,11)$$

постојат три различни множества A_i, A_j, A_k кои се подмножества од исто четириелементно множество.

Решение. Бројот на триелементни подмножества од шестелементното множество A е еднаков на

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

За секое од множествата $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ можеме да формираме пар од множества, т.е. двоелементни множества $\{A_i, A \setminus A_i\}$, $i = 1, 2, ..., 11$. Јасно, множествата A_i и $A \setminus A_i$ се дисјунктни подмножества од A и двете се триелементни. Бројот на можни вакви парови $\{B, A \setminus B\}$ е десет. Бидејќи во фамилијата $\{A_i, A \setminus A_i\}$, $i = 1, 2, ..., 11$ имаме единаесет елементи, од принципот на Дирихле следува дека постои пар индекси $i, j \in \{1, 2, ..., 11\}$ таков што $i \neq j$ и $\{A_i, A \setminus A_i\} = \{A_j, A \setminus A_j\}$. Бидејќи $A_i \neq A_j$, добиваме дека $A_i = A \setminus A_j$.

Нека тоа не се множествата A_1 и A_2. Останатите девет множества $A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ со множествата A_1 и A_2 имаат пресек кој има еден или два елементи. Бидејќи имаме девет множества, од принципот на Дирихле следува дека пет од нив со едно од множествата A_1 и A_2 ќе имаат едноелементен пресек. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа е множеството A_2. Уште повеќе, според принципот на Дирихле, две од овие множества, на пример A_k и A_l, имаат ист пресек со A_2. Ако на пример $A_k \cap A_2 = \{a\}$ и $A_l \cap A_2 = \{a\}$, тогаш $|A_k \cap A_1| = 2$ и $|A_l \cap A_1| = 2$. Нека претпоставиме дека $A_2 = \{a, b, c\}$ и $A_1 = \{d, e, f\}$. Јасно, $A_k \cap A_l \cap A_1$ е едноелементно множество, бидејќи во спротивно ќе биде $A_k = A_l$, што противречи на претпоставката.
Од условот $A_k \cap A_l \cap A_1$ да е едноелементо множество, добиваме дека $A_k \cap A_l$ е двоелементно множество. Во спротивно, ако $A_k \cap A_l$ е едноелементно множество, тогаш тоа е елементот кој припаѓа и во A_1 и во A_2 што не е можно.
Сега, од принципот на вклучување и исклучување, добиваме дека

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_k \cup A_l| = \\ &\quad = |A_1| + |A_k| + |A_l| - |A_1 \cap A_k| - |A_1 \cap A_l| - |A_k \cap A_l| + |A_1 \cap A_k \cap A_l| \\ &\quad = 3 + 3 + 3 - 2 - 2 - 2 + 1 = 4.\end{aligned}$$

12. Дадени се конечни множества $A_1, A_2, ..., A_n$ такви што

$$|A_i \cap A_{i+1}| > \tfrac{n-2}{n-1} |A_{i+1}|,$$

за секој $i = 1, 2, ..., n$ ($A_{n+1} = A_1$). Докажи дека пресекот на овие множества е непразно множество.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека множеството A_1 има најмногу елементи. Да означиме $B_i = A_i \cap A_{i+1}$, за $i = 1, ..., n$. Бидејќи $B_n \cup B_{n-1} \subset A_n$, добиваме

$$|A_n|\geq|B_n\cup B_{n-1}|=|B_n|+|B_{n-1}|-|B_n\cap B_{n-1}|$$
$$>\tfrac{n-2}{n-1}|A_n|+\tfrac{n-2}{n-1}|A_1|-|B_n\cap B_{n-1}|.$$

Затоа

$$|B_n\cap B_{n-1}|>\tfrac{n-2}{n-1}|A_1|-\tfrac{1}{n-1}|A_n|>\tfrac{n-3}{n-1}|A_1|,$$

т.е. $|A_n\cap A_{n-1}\cap A_1|>\tfrac{n-3}{n-1}|A_1|$. Освен тоа, ако $C=A_n\cap A_{n-1}\cap A_1$, тогаш $A_{n-1}\supset C\cup B_{n-2}$ и

$$|A_{n-1}|\geq|B_{n-2}\cup C|=|B_{n-2}|+|C|-|B_{n-2}\cap C|$$
$$>\tfrac{n-2}{n-1}|A_{n-1}|+\tfrac{n-3}{n-1}|A_1|-|B_{n-2}\cap C|.$$

Така,

$$|B_{n-2}\cap C|>\tfrac{n-3}{n-1}|A_1|-\tfrac{1}{n-1}|A_{n-1}|\geq\tfrac{n-4}{n-1}|A_1|,$$

т.е. $|A_n\cap A_{n-1}\cap A_{n-2}\cap A_1|>\tfrac{n-4}{n-1}|A_1|$. Понатаму, со индукција лесно се докажува дека

$$|A_n\cap A_{n-1}\cap...\cap A_{n-k}\cap A_1|>\tfrac{n-k-2}{n-1}|A_1|,$$

за $k=1,2,...,n-2$. Во случајов за $k=n-2$ добиваме

$$|A_n\cap A_{n-1}\cap...\cap A_2\cap A_1|>0,$$

што и требаше да се докаже.

13. Нека $A_1,A_2,...,A_n$ е фамилија конечни подмножества на множеството U и нека $A_i^c=U\setminus A_i$, $i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$|A_1^c\cap A_2^c\cap...\cap A_n^c|=|U|-\sum_i|A_i|+\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|-\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+ \\ +...+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap...\cap A_n|. \tag{1}$$

Решение. Од де Морган-овите закони следува

$$A_1^c\cap A_2^c\cap...\cap A_n^c=(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)^c=U\setminus A_1\cup A_2\cup...\cup A_n,$$

па затоа од принципот на исклучување имаме

$$|A_1^c\cap A_2^c\cap...\cap A_n^c|=|U|-|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|.$$

Конечно, равенството (1) следува од последното равенство и принципот на вклучување и исклучување.

14. Определи го бројот на пермутациите $(a_i,a_2,...,a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои немаат фиксна точка, т.е. такви што $a_i\neq i$ за $i=1,2,...,n$.

Решение. Нека Ᵽ_n е множеството од сите пермутации $(a_i,a_2,...,a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$. Со A_j да го означиме множеството пермутации на множеството $\{1,2,...,n\}$ за кои важи $a_j = j$. Тогаш за $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_k \le n$ важи

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap ... \cap A_{j_k}| = (n-k)!,$$

бидејќи во пермутациите кои припаѓаат на множеството $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap ... \cap A_{j_k}$ елементите $j_1, j_2, ..., j_k$ се на своите места, а преостанатите $n-k$ елементи се појавуваат во сите можни распореди на преостанатите $n-k$ места. Понатаму, k броја $j_1, j_2, ..., j_k$ од множеството $\{1,2,...,n\}$ можеме да избереме на $\binom{n}{k}$ начини, па затоа имаме $\binom{n}{k}$ множества од типот $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap ... \cap A_{j_k}$. Според тоа,

$$\sum |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap ... \cap A_{j_k}| = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Сега, нека U е множеството од сите пермутации на симболите $1,2,3,...,n$. Имаме $|U| = n!$, па затоа од претходното равенство и од задача 13 следува

$$\begin{aligned} P_n(0) &= |\mathbf{P}_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)| \\ &= |\mathbf{P}_n| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + ... + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}). \end{aligned} \tag{1}$$

Забелешка. а) Ако го искористиме Тејлоровиот развој за

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!} + ...$$

со замена во (1) добиваме дека за бројот на пермутациите кои немаат фиксни точки е точна приближната формула $P_n(0) \approx n!e^{-1}$. Овде уште ќе споменеме дека во литературата пермутацијата на n симболи која нема фиксна точка уште се нарекува *деаранжман* на дадените n симболи.

б) Во натамошните разгледувања, ако не е поинаку кажано, под пермутација ќе подразбираме пермутација без повторување и за множеството пермутации без повторување ќе ја користиме ознаката $\mathbf{P}_n$.

15. Заборавен шанкер служи 10 гости со 10 различни коктели. На колку начини може да ги послужи коктелите така што ниту еден гостин да не ја добие својата порачка?

Решение. Јасно, станува збор за деаранжман над 10 објекти, па затоа нивниот број е

$$P_{10}(0) = 10!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}).$$

16. На колку начини полињата на табла со димензии 8×8 може да се обојат во 8 различни бои така, што во секој ред се појавуваат сите 8 бои и во секоја колона две соседни полиња не се обоени со иста боја?

Решение. Првиот ред може да се обои на $8!$ начини. Понатаму, бидејќи во секој ред мора да ги има сите 8 бои и полињата во секои два соседни реда мора да се различно обоени, добиваме дека во секој следен ред бројот на можните боења всушност е еднаков на бројот деаранжманите на боењето во претходниот ред, односно на

$$P_8(0)=8!(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}-\tfrac{1}{5!}+\tfrac{1}{6!}-\tfrac{1}{7!}+\tfrac{1}{8!})=14833\ .$$

Конечно, од принципот на производ следува дека бројот на сите можни боења на 8×8 табелата кои ги задоволуваат дадените услови е

$$8!(P_8(0))^7=8!(18833)^7\ .$$

17. Нека $\{1,2,...,n\}$ и $1\le k\le n$. Определи го бројот $P_n(k)$ на пермутации на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои имаат точно k фиксни точки.

Решение. k елементи од множеството $\{1,2,...,n\}$, кои ќе бидат на своето место може да се изберат на $\binom{n}{k}$ начини. Според задача 14 преостанатите $n-k$ елементи може да се распоредат на преостанатите $n-k$ места така што ниту еден од овие елементи нема да е на своето место на

$$P_{n-k}(0)=(n-k)!(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-...+(-1)^{n-k}\tfrac{1}{(n-k)!})$$

начини. Сега, од принципот на производ следува

$$\begin{aligned}P_n(k)&=\tbinom{n}{k}P_{n-k}(0)\\&=\tfrac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)!(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-...+(-1)^{n-k}\tfrac{1}{(n-k)!})\\&=\tfrac{n!}{k!}(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-...+(-1)^{n-k}\tfrac{1}{(n-k)!}).\end{aligned}$$

18. Нека $A_i,\ i=1,2,...,n$ се подмножества на конечното множество S и нека

$|S|=m$, $|S\setminus(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)|=m_0$, $|A_i|=m_1$, за секој $i=1,2,...,n$,

$|A_i\cap A_j|=m_2$, за секои $i\ne j$, $i,j\in\{1,2,...,n\}$,

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=m_3$, за секои $i\ne j\ne k\ne i$, $i,j,k\in\{1,2,...,n\}$,

....

$|A_1\cap A_2\cap...\cap A_n|=m_n$.

Докажи, дека

$$|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|=\tbinom{n}{1}m_1-\tbinom{n}{2}m_2+\tbinom{n}{3}m_3-...+(-1)^{n-1}\tbinom{n}{n}m_n\,,\quad (1)$$

$$m_0=m-\tbinom{n}{1}m_1+\tbinom{n}{2}m_2-\tbinom{n}{3}m_3-...+(-1)^{n}\tbinom{n}{n}m_n\,.\quad (2)$$

Решение. Формулата (1) непосредно следува од обопштениот принцип на вклучување и исклучување, а формулата (2) следува од формулата (1) и принципот на исклучување.

19. Нека $S=\{1,2,...,n\}$, $F=\{f \mid f:S\to S\}$ и $F_0\subset F$ е множеството функции $f:S\to S$ кои немаат неподвижна точка, т.е. $f(x)\neq x$, за секој $x\in S$. Определи го бројот на елементите на множеството F_0.

Решение. Нека $F(j)=\{f\in F \mid f(j)=j\},\ j\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш за секој $k\in\{1,2,...,n\}$ и за секоја комбинација $\{j_1,j_2,...,j_k\}$ од елементи на множеството $\{1,2,...,n\}$ точно е равенството

$$|F(j_1)\cap F(j_2)\cap ...\cap F(j_k)|=n^{n-k},$$

бидејќи бројот на функциите $f:S\to S$ за кои точките $j_1,j_2,...,j_k$ се неподвижни е еднаков на бројот на сите функции $g:T\to S$, каде $T=S\setminus\{j_1, j_2,...,j_k\}$, $|T|=n-k$. Сега од формулата (2) во задача 18 следува дека

$$|F_0|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}n^{n-k}=\sum_{j=n}^{0}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}n^j$$
$$=n^n-\binom{n}{1}n^{n-1}+\binom{n}{2}n^{n-2}+...+(-1)^n.$$

20. Нека $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}, Y=\{1,2,...,k\}$ и F е множеството од сите сурјекции од X на Y, т.е.

$$F=\{f:X\to Y \mid (\forall y\in Y)(\exists x\in X)\ f(x)=y\}.$$

Определи го бројот на елементите на множеството F.

Решение. Бидејќи во секој елемент од множеството Y може да се преслика било кој елемент од множеството X, добиваме дека за секој $i\in Y$ имаме n можности, па затоа бројот на сите функции $f:X\to Y$ е еднаков на бројот на варијациите со повторување на k елементи од класа n, т.е. е еднаков на k^n. Нека

$$F(y)=\{f:X\to Y \mid (\forall x\in X)\ f(x)\neq y\},\ y\in\{1,2,...,k\}.$$

Тогаш за секој $j\in\{1,2,...,k\}$ и за секоја комбинација $\{y_1,y_2,...,y_j\}$ на елементи од множеството $\{1,2,...,k\}$ точно е равенството

$$|F(y_1)\cap F(y_2)\cap ...\cap F(y_j)|=(k-j)^n. \qquad (*)$$

Имено, за секој y_i множеството $F(y_i)$ е множеството од сите функции кои го пресликуваат X во $Y\setminus\{y_i\}$. Затоа, пресекот $F(y_1)\cap F(y_2)\cap ...\cap F(y_j)$ е множеството од сите функции чии вредност не припаѓаат на множеството $\{y_1,y_2,...,y_j\}$. Според тоа, множеството $F(y_1)\cap F(y_2)\cap ...\cap F(y_j)$ е составено од сите функции кои примаат вредности од $Y\setminus\{y_1,y_2,...,y_j\}$. Сега, од $|Y\setminus\{y_1,y_2,...,y_j\}|=k-j$ следува точноста на равенството (*).

Понатаму, користејќи ги формулите (1) и (2) од задача 17 добиваме

$$|F(1)\cup F(2)\cup...\cup F(k)|=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^n,$$

$$|F|=k^n-|F(1)\cup F(2)\cup...\cup F(k)|=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

Забелешка. За $k>n$ множеството F е празно, па затоа за $k>n\geq 1$ важи

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n=0.$$

21. Колку има шестцифрени броеви во чиј запис учествуваат точно три различни цифри?

Решение. а) Нека $c_1\neq 0, c_2\neq 0, c_3\neq 0$ се меѓусебно различни цифри. Бројот на шестцифрените кои се запишуваат со цифрите c_1,c_2,c_3 е еднаков на 3^6. Бројот на шестцифрените броеви во чиј запис учествуваат две од цифрите c_1,c_2 и c_3 и ниту една друга цифра е еднаков на $\binom{3}{2}2^6$, а бројот на шестцифрените броеви во кои учествува една од цифрите c_1,c_2 и c_3 и ниту една друга цифра е еднаков на $\binom{3}{1}1^6$. Сега, од принципот за вклучување и исклучување следува дека бројот на шестцифрените броеви во кои учествуваат сите три цифри е еднаков на $3^6-\binom{3}{2}2^6+\binom{3}{1}1^6$. Понатаму, од 9 ненулти цифри, три различни цифри може да се изберат на $\binom{9}{3}$ начини. Значи, бројот на шестцифрените броеви во чиј запис учествуваат точно три ненулти цифри е еднаков на $\binom{9}{3}(3^6-\binom{3}{2}2^6+\binom{3}{1}1^6)=45360$. Со аналогни заклучувања добиваме дека бројот на шестцифрените броеви во кои учествуваат три различни цифри од кои едната е 0 е еднаков на $2\cdot\binom{9}{2}(3^5-\binom{2}{1}2^5+1^5)=12960$. Конечно, бараниот број броеви е еднаков на $45360+12960=58320$.

22. Колку има $n-$цифрени броеви во чиј запис учествуваат k различни ненулти цифри, каде $1\leq k\leq 9$?

Решение. Од множеството ненулти цифри, $\{1,2,...,9\}$ можеме да избереме k различни цифри $C=\{c_1,c_2,...,c_k\}$ на $\binom{9}{k}$ начини. Нека A е множеството $n-$цифрени броеви со цифри од множеството C, а $A_i\subset A$ е множеството $n-$цифрени броеви кои не ја содржат цифрата c_i. Бројот на $n-$цифрените брови во чии записи учествуваат само цифрите $C \setminus \{c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_j}\}$ (не мора сите) е еднаков на $(k-j)^n$, додека множеството $\{c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_j}\}$ од почетното множество од k цифри можеме да го избереме на $\binom{k}{j}$ начини. Множеството $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ ги содржи сите $n-$цифрените во кои барем една цифра од C не се појавува, а множеството $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)$ е множеството $n-$цифрени броеви во кои сите цифри од C се појавуваат. Сега, од принципот за вклучување и исклучување следува дека бараниот број броеви е

$$\binom{9}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n .$$

6. ГРУПАТА ПЕРМУТАЦИИ БЕЗ ПОВТОРУВАЊЕ

1. Нека е дадено множеството $\{1,2,...,n\}$. Докажи дека $(a_i, a_2,...,a_n)$ е пермутација без повторување на множеството $\mathbb{N}_n$ ако и само пресликувањето $a:\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ определено со $a(i)=a_i$ е биекција.

Решение. Непосредно следува од дефиницијата на пермутација без повторување дадена во задача 3.11. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Коментар. Како што рековме множеството пермутации без повторување на множеството $\{1,2,...,n\}$ ќе го означуваме со $Ᵽ_{\mathbb{N}}$, а за пермутацијата дефинирана со биекцијата $± :\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ ќе ги користиме и ознаките $± = \binom{1 \;\; 2 \;\; ... \;\; n}{±(1) \;\; ±(2) \;\; ... \;\; ±(n)} = \binom{1 \;\; 2 \;\; ... \;\; n}{±_1 \;\; ±_2 \;\; ... \;\; ±_n}$. Во задача 3.11 докажавме дека $|Ᵽ_n| = n!$.

Понатаму, лесно се докажува дека $(Ᵽ_n, \circ)$ е група. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

2. Ако $Ᵽ_n = \{±_1, ±_2, ..., ±_{n!}\}$ и ¨ е произволна пермутација од $Ᵽ_n$, тогаш

$$Ᵽ_n = \{±_1 ¨, ±_2 ¨, ..., ±_{n!} ¨\} = \{¨ ±_1, ¨ ±_2, ..., ¨ ±_{n!}\}.$$

Докажи!

Решение. Нека $¨ \circ ±_i = ¨ \circ ±_k$. Бидејќи $(Ᵽ_n, \circ)$ е група, добиваме дека постои $¨^{-1} \in Ᵽ_n$ таков што $¨^{-1} \circ ¨ = e$, каде e е идентичната пермутација на $\{1,2,...,n\}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} ±_i &= e \circ ±_i = (¨^{-1} \circ ¨) \circ ±_i \\ &= ¨^{-1} \circ (¨ \circ ±_i) = ¨^{-1} \circ (¨ \circ ±_k) \\ &= (¨^{-1} \circ ¨) \circ ±_k = e \circ ±_k = ±_k, \end{aligned}$$

па затоа $i = k$. Значи, сите пермутации во множеството $\{¨ ±_1, ¨ ±_2, ..., ¨ ±_{n!}\}$ се различни и како истото има $n!$ елементи добиваме дека

$$Ᵽ_n = \{¨ ±_1, ¨ ±_2, ..., ¨ ±_{n!}\}.$$

Аналогно се докажува дека $Ᵽ_n = \{±_1 ¨, ±_2 ¨, ..., ±_{n!} ¨\}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

3. Пермутацијата $± \in Ᵽ_n$ ја нарекуваме $k-$*циклус* ако постои $i \in \{1,2,...,n\}$ таков што

$$±^k(i) = i,\ ±^t(i) \neq i, \text{ за } t = 1,2,...,k-1 \text{ и } ±(j) = j, \text{ за } j \notin \{i, ±(i), ..., ±^{k-1}(i)\}.$$

Притоа ја прифаќаме ознаката $\pm = (i, \pm(i), ..., \pm^{k-1}(i))$. Јасно, идентичната пермутација e е 1-циклус. Понатаму, $2-$циклусот $\pm$ го нарекуваме *транс-позиција*.

а) Докажи, дека пермутацијата $\pm \in \mathrm{P}_n$ е $k-$циклус ако и само ако постои множество $K = \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ такво што

$$\pm(i_t) = i_{t+1}\text{, за } t = 1, 2, ..., k-1\text{, } \pm(i_k) = i_1 \text{ и } \pm(j) = j\text{, за } j \notin K.$$

б) Докажи, дека пермутацијата $\pm \in \mathrm{P}_n$ е транспозиција ако и само ако

$$\pm(i) = j,\ \pm(j) = \pm^2(i) = i \text{ и } \pm(p) = p\text{, за } p \neq i, j.$$

Решение. Непосредно следува од дефинициите на $k-$циклус и транспозиција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4. Нека $i \in \{1, 2, ..., n\}$ и нека $\pm \in \mathrm{P}_n$. Множеството

$$\pm[i] = \{\pm(i), \pm^2(i), ..., \pm^k(i)\},$$

каде k е најмалиот позитивен број таков што $\pm^k(i) = i$, го нарекуваме *орбита на i во однос на $\pm$*. Бројот k го нарекуваме *должина на орбитата* $\pm[i]$.

Докажи дека за секој $t \in \mathbb{N}$ важи $\pm^t(i) \in \pm[i]$ и $|\pm[i]| = k$.

Решение. За секој $t \in \mathbb{N}$ важи $t = kq + r$, каде $0 \leq r < k$. Затоа

$$\pm^t(i) = \pm^{kq+r}(i) = \pm^r(\pm^{kq}(i)) = \pm^r(i).$$

Понатаму, ако $p, q \in \{1, 2, ..., k\}$, $p < q$, тогаш ако на $\pm^p(i) = \pm^q(i)$ од двете страни p пати ја примениме инверзната пермутација $\pm^{-1}$, го добиваме равенството $\pm^{q-p}(i) = i$. Но, $0 < q - p < k$, па затоа последното равенство противречи на минималноста на k. Од добиената противречност следува $\pm^p(i) \neq \pm^q(i)$, за секои $p, q \in \{1, 2, ..., k\}$, $p < q$, т.е. $|\pm[i]| = k$.

5. а) Докажи, дека орбитите на пермутацијата $\pm \in \mathrm{P}_n$ се по парови заемно дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството $\{1, 2, ..., n\}$.

б) Докажи, дека секоја пермутација $\pm \in \mathrm{P}_n$ на единствен начин може да се претстави како композиција на дисјунктни циклуси.

в) Докажи, дека секоја пермутација е производ на транспозиции.

Решение. а) Секој елемент на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ припаѓа барем на една орбита, па затоа доволно е да докажеме, дека ако две орбити имаат непразен пресек, тогаш тие се еднакви.

Нека $p \in \pm[i] \cap \pm[j]$. Тогаш постојат s и t такви што

$$\pm^s(i) = p = \pm^t(j).$$

Ќе докажеме дека $i \in ±[j]$. Нека k е должината на $±[i]$. Ако $s = k$, тогаш $i = ±^{t}(j)$, па затоа $i \in ±[j]$. Ако $s < k$, тогаш

$$i = ±^{k}(i) = ±^{k-s}(±^{s}(i)) = ±^{k-s}(±^{t}(j)) = ±^{k-s+t}(i) \in ±[j].$$

Сега од задача 4 следува дека $±[i] \subseteq ±[j]$.

Аналогно се докажува дека $±[j] \subseteq ±[i]$, што значи дека $±[i] = ±[j]$

б) Нека $± \in Ρ_n$, $i_1 \in \{1, 2, ..., n\}$, k_1 е должината на орбитата на i_1 во однос на $±$ и $·_1$ е циклусот $(±(i_1), ..., ±^{k_1}(i_1))$. Ако $·_1 = ±$, тогаш тврдењето е докажано. Нека постои $i_2 \notin ±[i_1]$ и $·_2 = (±(i_2), ..., ±^{k_2}(i_2))$, каде k_2 е должината на орбитата $±[i_2]$. Од тврдењето под а) следува дека циклусите $·_1$ и $·_2$ се дисјунктни. Ако $± = ·_2 ·_1$, тогаш тврдењето е докажано. Во спротивен случај наоѓаме $i_3 \notin ±[i_1] \cup ±[i_2]$ и бидејќи множеството $\{1, 2, ..., n\}$ е конечно, добиваме дека постапката ќе заврши по конечен број од m чекори. Според тоа,

$$± = ·_m \cdots ·_2 ·_1. \qquad (1)$$

Единственоста на декомпозицијата (1) следува од тврдењето под а) и дефинициите во задачите 3 и 4.

в) Од тврдењето под б) следува дека доволно е да докажеме дека секој циклус $· = (i_1, i_2, ..., i_k)$ е производ на транспозиции. Лесно се проверува дека

$$· = (i_1, i_2, ..., i_k) = · = (i_1, i_k)(i_1, i_{k-1})...(i_3, i_1)(i_2, i_1).$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

6. Нека $± = ±_m ±_{m-1} ... ±_1 \in Ρ_n$ е декомпозицијата на $±$ на дисјунктни циклуси и $±_i$ е k_i − циклус, $i = 1, 2, ..., m$. Бројот

$$C(±) = \sum_{i=1}^{m}(k_i - 1)$$

го нарекуваме *Кошиев број за пермутацијата* $±$. За пермутацијата $±$ ќе велиме дека е *парна* ако $C(±)$ е парен број, а *непарна* ако $C(±)$ непарен број. Бројот

$$£(±) = (-1)^{C(±)} \qquad (1)$$

го нарекуваме *знак на пермутацијата* $±$.

Ако $± = ²_k ²_{k-1} ... ²_1$, каде $²_i$, $i = 1, 2, ..., k$ се транспозиции во S_n, тогаш

$$£(±) = (-1)^{k}. \qquad (2)$$

Докажи!

Решение. Ќе докажеме, дека ако пермутацијата $±$ ја помножиме со транспозиција $±$, тогаш $£(²±) = -£(±)$.

Прво, нека $\pm$ е циклус ¨ и да претпоставиме дека

$$\text{¨} = (i_1, i_2, ..., i_r, j_1, j_2, ..., j_s) \text{ и } \text{²} = (i_1, j_1) .$$

Тогаш

$$\text{²¨}(i_t) = \text{²}(i_{t+1}) = i_{t+1}, \text{ за } t = 1, 2, ..., r-1 ,$$
$$\text{²¨}(i_r) = \text{²}(j_1) = i_1 ,$$
$$\text{²¨}(j_t) = \text{²}(j_{t+1}) = j_{t+1}, \text{ за } t = 1, 2, ..., s-1 ,$$
$$\text{²¨}(j_s) = \text{²}(i_1) = j_1 .$$

Затоа

$$\text{²¨} = (i_1, i_2, ..., i_r)(j_1, j_2, ..., j_s)$$

и

$$C(\text{²¨}) = r + s - 2 = C(\text{¨}) - 1 ,$$

па од (1) следува $£(\text{²}\pm) = -£(\pm)$. Сега нека претпоставиме, дека само еден од елементите на транспозицијата припаѓа на циклусот, т.е. дека $\text{¨} = (i_1, i_2, ..., i_r)$ и $\text{²} = (i_1, j_1)$. Тогаш

$$\text{²¨} = (i_1, i_2, ..., i_r, j_1)$$

и

$$C(\text{²¨}) = r = C(\text{¨}) + 1 ,$$

па од (1) следува $£(\text{²}\pm) = -£(\pm)$. Ако ¨ и ² се дисјункни, тогаш од дефиниција на Кошиевиот број следува

$$C(\text{²¨}) = C(\text{²}) + C(\text{¨}) = C(\text{¨}) + 1 .$$

Да претпоставиме дека $\pm$ е производ на дисјунктни циклуси, $\pm = \text{¨}_1\text{¨}_2...\text{¨}_m$. Ако $\text{²} = (i_1, j_1)$ и i_1, j_1 припаѓаат во ист циклус ¨_t, тогаш тврдењето следува од претходните разгледувања. Ако

$$\text{²} = (i_1, j_1) ,\ \text{¨}_1 = (i_1, i_2, ..., i_r) \text{ и } \text{¨}_2 = (j_1, j_2, ..., j_s) ,$$

тогаш

$$\text{²¨}_1\text{¨}_2 = (i_1, i_2, ..., i_r, j_1, j_2, ..., j_s) ,$$

па затоа

$$C(\text{²}\pm) = C(\text{²¨}_1\text{¨}_2) + C(\text{¨}_3...\text{¨}_m) = C(\text{¨}_1\text{¨}_2) + 1 + C(\text{¨}_3...\text{¨}_m) = C(\pm) + 1$$

и од (1) следува $£(\text{²}\pm) = -£(\pm)$.

Нека $\pm = \text{²}_k\text{²}_{k-1}...\text{²}_1$, каде $\text{²}_i, i = 1, 2, ..., k$ се транспозиции во $Ᵽ_n$. Ако $k = 1$, тогаш $\pm$ е транспозиција, па затоа $C(\pm) = 1 = k$, што значи дека

$$£(\pm) = (-1)^{C(\pm)} = (-1)^k ,$$

т.е. важи формулата (2). Нека претпоставиме, дека формулата (2) важи за $k-1$ транспозиција, т.е. ако $\pm_1 = \text{²}_{k-1}\text{²}_{k-2}...\text{²}_1$, тогаш $£(\pm_1) = (-1)^{k-1}$. Сега, за $\pm = \text{²}_k\text{²}_{k-1}...\text{²}_1$ имаме $\pm = \text{²}_k\pm_1$, па затоа

$$C(\pm) = C(\text{²}_k \pm_1) = C(\pm_1) \pm 1,$$

што значи дека

$$\text{£}(\pm) = (-1)^{C(\pm)} = (-1)^{C(\pm_1)\pm 1} = (-1)^{k-1\pm 1} = (-1)^k$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека формулата (2) важи за секој природен број k.

7. Нека $n \geq 2$. Докажи дека бројот на парните пермутации во групата Ρ_n е еднаков на $\frac{n!}{2}$.

Решение. Нека $\pm_1, \pm_2, ..., \pm_k$ се сите различни парни пермутации во Ρ_n. Тогаш од решението на задача 6 следува дека пермутациите

$$(12)\pm_1, (12)\pm_2, ..., (12)\pm_k$$

се непарни и истите се различни. Според тоа, бројот на парните пермутации е помал или еднаков на бројот на непарните пермутации. Аналогно се докажува дека бројот на непарните пермутации m е помал или еднаков на бројот на непарните пермутации, па затоа $m = k$. Конечно, бројот на парните пермутации во група Ρ_n е еднаков на $\frac{n!}{2}$.

8. Докажи, дека ако $\pm, \text{¨} \in \text{Ρ}_n$, тогаш

$$\text{£}(\pm\text{¨}) = \text{£}(\pm)\text{£}(\text{¨}) \text{ и } \text{£}(\pm^{-1}) = \text{£}(\pm).$$

Решеие. Ако $\pm$ е производ на p транспозиции и ¨ е производ од k транспозиции, тогаш $\pm\text{¨}$ е производ на $p+k$ транспозиции и затоа

$$\text{£}(\pm\text{¨}) = (-1)^{p+k} = (-1)^p (-1)^k = \text{£}(\pm)\text{£}(\text{¨}).$$

Идентичната пермутација има $k = 0$ транспозиции, па затоа

$$1 = (-1)^0 = \text{£}(e) = \text{£}(\pm\pm^{-1}) = \text{£}(\pm)\text{£}(\pm^{-1}),$$

што значи $\text{£}(\pm^{-1}) = \text{£}(\pm)$.

9. Нека $\pm \in \text{Ρ}_n$ и $\pm(i) = i$, $i = 1, 2, ..., k$. Дефинираме пермутација $\text{¨} \in \text{Ρ}_{n-k}$ со

$$\text{¨}(t) = \pm(t+k) - k, \; t = 1, 2, ..., n-k.$$

Докажи дека $\text{£}(\pm) = \text{£}(\text{¨})$.

Решение. Нека

$$\pm = (1)(2)...(k)\text{²}_m \text{²}_{m-1} ... \text{²}_1$$

каде $\text{²}_1, \text{²}_2, ..., \text{²}_m$ се транспозиции над броевите $k+1, k+2, ..., n$. За секоја транспозиција $\text{²}_s = (i_s, j_s)$ имаме

$$\text{²}'_s = (i_s - k, j_s - k) \in S_{n-k},$$

па така за $i = k+1, k+2, \dots, n$ важи

$$²'_1(i-k) = ²_1(i) - k$$
$$²'_2²'_1(i-k) = ²'_2(²_1(i)-k) = ²_2²_1(i) - k \ ,$$
$$²'_m\dots²'_1(i-k) = ²_2\dots²_1(i) - k = ±(i) - k \ ,$$

и затоа $²'_m\dots²'_1 = ¨$. Сега, од задача 6 следува $£(¨) = (-1)^m = £(±)$.

10. Нека за броевите $~_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ и $\ _i$, $i = 1, 2, \dots, n-k$ важи

$$1 \le ~_1 < ~_2 < \dots < ~_k \le n, \ 1 \le \ _1 < \ _2 < \dots < \ _{n-k} \le n \text{ и}$$
$$\{~_i, i = 1, 2, \dots, k\} \cup \{\ _i, i = 1, 2, \dots, n-k\} = \{1, 2, \dots, n\} .$$

Докажи, дека ако $± \in P_n$ е определена со

$$±(i) = \begin{cases} ~_i, & i = 1, 2, \dots, k, \\ \ _{i-k}, & i = k+1, \dots, n, \end{cases}$$

тогаш

$$£(±) = (-1)^{s(~) + k(k+1)/2} ,$$

каде $s(~) = \sum_{t=1}^{k} ~_t$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. Ако $n = 1$, тогаш тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $n > 1$ и дека тврдењето важи за секоја пермутација од опишаниот вид во P_{n-1}. Можни се два случаја: или $\ _{n-k} = n$ или $~_k = n$. Ако $\ _{n-k} = n$, тогаш

$$± = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n-1 & n \\ ~_1 & ~_2 & \dots & ~_k & \ _1 & \dots & \ _{n-k-1} & n \end{pmatrix},$$

и дефинираме $² \in P_{n-1}$ таква што

$$²(i) = ±(i) \text{, за } i = 1, 2, \dots, n-1 .$$

Јасно, $²$ и $±$ имаат еднакви Кошиеви броеви и затоа $£(±) = £(²)$ и од индуктивната претпоставка следува дека

$$£(²) = (-1)^{s(~) + k(k+1)/2} .$$

Сега, нека претпоставиме дека $~_k = n$. Тогаш

$$± = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ ~_1 & ~_2 & \dots & ~_{k-1} & n & \ _1 & \dots & \ _{n-k} \end{pmatrix}.$$

Нека

$$¯ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n \\ ~_1 & ~_2 & \dots & ~_{k-1} & \ _1 & \ _2 & \dots & \ _{n-k} & n \end{pmatrix}.$$

Тогаш од индуктивната претпоставка следува

$$£(¯) = (-1)^{~_1 + ~_2 + \dots + ~_{k-1} + k(k-1)/2} .$$

Освен тоа

$$\tau^{-1}\alpha=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{k-1} & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-k} & n\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n\\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{k-1} & n & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-k}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n-1 & n\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & n & k & k+1 & \dots & n-2 & n-1\end{pmatrix}$$

$$=(n,n-1,n-2,\dots,k+1,k).$$

Но, $\beta_k=n$, па затоа

$$\varepsilon(\tau^{-1}\alpha)=(-1)^{n-k}=(-1)^{\beta_k-k}=(-1)^{\beta_k+k}.$$

Според тоа,

$$\varepsilon(\alpha)=\varepsilon(\tau\tau^{-1}\alpha)=\varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau^{-1}\alpha)$$

$$=(-1)^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{k-1}+(k-1)k/2}(-1)^{\beta_k+k}$$

$$=(-1)^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{k-1}+\beta_k+k+(k-1)k/2}$$

$$=(-1)^{s(\beta)+k(k+1)/2},$$

што и требаше да се докаже.

11. Нека

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n\end{pmatrix}\in P_n.$$

Докажи, дека ако $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$ се броевите $i_1,i_2,\dots,i_k$ подредени во растечки редослед и $\beta_{k+1},\beta_{k+2},\dots,\beta_n$ се броевите $i_{k+1},i_{k+2},\dots,i_n$ подредени во растечи редослед, тогаш

$$\varepsilon(\alpha)=(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+k(k+1)/2}\varepsilon(\gamma^{-1})\varepsilon(\delta^{-1}),$$

каде

$$\delta=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k & i_{k+1} & \dots & i_n\end{pmatrix}\in P_n$$

и

$$\gamma=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k & i_{k+1} & \dots & i_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k & \beta_{k+1} & \dots & \beta_n\end{pmatrix}\in P_n.$$

Решение. Од условот на задачата имаме

$$\gamma\delta\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n\\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k & \beta_{k+1} & \dots & \beta_n\end{pmatrix}=\mu,$$

т.е. $\alpha=\delta^{-1}\gamma^{-1}\mu$. За пермутацијата μ се исполнети условите од задача 10, па затоа

$$\varepsilon(\mu)=(-1)^{s(\beta)+k(k+1)/2},$$

Каде

$$s(\beta)=\sum_{t=1}^{k}\beta_t=\sum_{t=1}^{k}i_t.$$

Конечно, од последното равенство и од задача 8 следува

$$£(±) = £(¨^{-1})£(²^{-1})£(µ) = £(¨^{-1})£(²^{-1})(-1)^{i_1+i_2+...+i_k+k(k+1)/2} .$$

12. Нека $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_k \le n$ и $± \in S_k$. Дефинираме $¨ \in Ᵽ_n$ со:

$$¨(j_t) = j_{±(t)},\ t = 1,2,...,k \text{ и}$$

$$¨(i) = i,\ i \notin \{j_1, j_2,..., j_k\} .$$

Докажи дека $£(¨) = £(±)$.

Решение. Нека $± = ±_m ±_{m-1}..±_1$ е докомпозицијата на $±$ на транспозиции. Дефинираме транспозиции $¨_s \in Ᵽ_n$, $s = 1,2,..., m$:

$$¨_s(j_t) = j_{±_s(t)},\ t = 1,2,..., k,$$

$$¨_s(i) = i,\quad i \notin \{j_1, j_2,..., j_k\}.$$

Тогаш

$$¨_m...¨_1(j_t) = j_{±_m..±_1(t)} = j_{±(t)},\ t = 1,2,..., k,$$

$$¨_m...¨_1(i) = i,\quad i \notin \{j_1, j_2,..., j_k\}.$$

Така $¨_m...¨_1 = ¨$ и затоа $£(¨) = (-1)^m = £(±)$.

13. Нека A е множеството пермутации $\sim = (a_1, a_2,..., a_n)$ на $\{1,2,..., n\}$ со следново својство: не постои подмножество S на $\{1,2,..., n\}$ такво што $\sim(S) = S$. За секоја таква пермутација $\sim$ нека $d(\sim) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2$. Определи ја најмалата можна вредност на $d(\sim)$.

Решение. Секоја пермутација може да се претстави како производ од независни циклуси. Ако $\sim$ е една од разгледуваните пермутации, тогаш $\sim$ треба да може да се претстави само со еден циклус (во спротивно елементите од еден циклус ќе формираат множесто S , за кое $\sim(S) = S$). Оттука следува

$$\sum_{k=1}^{n} | a_k - k | \ge 2n - 2 . \qquad (1)$$

Сега, збирот $\sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2$ е најмал ако и само ако броевите $| a_k - k |$, за $k = 1,2,..., n$ се најмали можни. Но, според (1) збирот на овие броеви е поголем или еднаков на $2n - 2$, па затоа $\sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2$ е најмал ако и само ако $n - 2$ од броевите $| a_k - k |$ се еднакви на 2 и два од овие броеви се еднакви на 1. Според тоа, бараниот минимум е еднаков на $4n - 6$.

На пример, за $n = 7$ една пермутација за која се достигнува бараниот минимум е $\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}{2\ 4\ 1\ 6\ 3\ 7\ 5}$. Навистина, $\sum_{k=1}^{7}|a_k-k|=12$ и $\sum_{k=1}^{7}(a_k-k)^2=22$.

14. Нека n е природен број и T е множество точки (x,y) во рамнината такви што x и y се ненегативни цели броеви и $x+y<n$. Секоја точка на множеството T е обоена црвено или сино. Ако точката (x,y) е обоена црвено, такви се и сите точки (x',y') на множеството T за кои истовремено важи $x'\le x$ и $y'\le y$. Множеството од n сини точки се нарекува X – *множество* ако сите точки имаат различни x-координати, а множеството од n сини точки се нарекува Y – *множество* ако сите точки имаат различни y-координати. Докажи дека бројот на X – множествата е еднаков на бројот на Y -множествата.

Решение. Нека a_i е бројот на сини точки на правата $x=i$, а b_i е бројот на сини точки на правата $y=i$. Треба да докажеме дека $a_0a_1...a_{n-1}=b_0b_1...b_{n-1}$. Всушност ќе докажеме дека низата $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ е пермутација на низата $b_0,b_1,...,b_{n-1}$.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот на црвените точки. Основата на индукцијата (кога сите точки се сини) е тривијална. Сега да воочиме црвена точка (x,y) со најголем збир $x+y$. Тогаш $a_x=b_y=n-x-y-1$. Ако оваа точка ја пребоиме во сино, тогаш a_x и b_y ќе се намалат за 1. Според индуктивната претпоставка $a_0,...,a_x-1,...,a_{n-1}$ е пермутација на $b_0,...,b_x-1,$ $...,b_{n-1}$ и индуктивниот чекор одма следува.

15. Дадено е природен број n. Докажи дека бројот на пермутациите $\pm$ на множеството $\{1,2,...,4n\}$ такви што $i+\pm(\pm(i))=4n+1$ за секој $i=1,2,...,4n$ е еднаков на $\frac{(2n)!}{n!}$.

Решение. Фиксираме $i\in\{1,2,...,4n\}$. Елементот $j=\pm(i)$ е различен од i и $4n+1-i$ и може да се избере на $4n-2$ начина. Со изборот на i и j еднозначно се определени $\pm^2(i)=4n+1-i$ и $\pm^3(i)=4n+1-j$, додека $\pm^4(i)=i$. Понатаму, за произволен елемент $k\notin\{i,j,4n+1-i,4n+1-j\}$, бројот $l=\pm(k)$ може да се избере на $4n-6$ начини ($l\ne 4n+1-k$) со што се определени $\pm^2(k)$ и $\pm^3(k)$. Продолжувајќи на овој начин заклучуваме дека бараната пермутација може да се конструира на $(4n-2)(4n-6)\cdot...\cdot 6\cdot 2=\frac{(2n)!}{n!}$ начини.

16. Во рамнината се дадени десет точки означени со броевите 1, 2, ..., 10. Можеме да поставиме координатен систем во рамнината и да ги запишеме точките

во растечки редослед по првата координата (под услов овие координати да се различни). Определи го најголемиот можен број пермутации на броевите 1, 2, ..., 10 кои можеме да ги добиеме на овој начин.

Решение. Да го ротираме координатниот систем непрекинато во константна насока. Редоследот на проекциите на точките A и B на $x-$оската ќе се промени кога $y-$оската ќе помине низ положба паралелна на правата AB, што ќе се случи двапати при ротација за агол 2®. Бидејќи имаме $\binom{10}{2}=45$ прави определени со по две од дадените десет точки, добиваме дека има $2\cdot 45=90$ различни пермутации.

17. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација ± на броевите $1,2,...,n$ таква што $\sqrt{\pm(1)+\sqrt{\pm(2)+\sqrt{...+\sqrt{\pm(n)}}}}$ е рационален број.

Решение. Да означиме $a_i=\sqrt{\pm(i)+\sqrt{\pm(i+1)+\sqrt{...+\sqrt{\pm(n)}}}}$, за $1\le i\le n$ и $a_{n+1}=0$. Ако a_1 е рационален, со повеќекратно квадрирање добиваме дека и $a_2,...,a_n$ се рационални. Уште повеќе, a_n мора да биде цел број, па затоа и $a_{n-1},...,a_1$ се цели броеви.

Понатаму, од $a_n<\sqrt{n}+1$ следува дека $a_{n-1}<\sqrt{n+\sqrt{n}+1}<\sqrt{n}+1$, а потоа дека $a_{n-2}<\sqrt{n}+1$ итн. па затоа $a_i<\sqrt{n}+1$, за секој i. Нека $k^2<n\le(k+1)^2$. За некој j важи $\pm(j)=k^2+1$. Бидејќи $a_j>k$ имаме

$$a_j=\sqrt{k^2+1+a_{j+1}}\ge k+1\text{, т.е. } a_{j+1}\ge 2k\,.$$

Меѓутоа, $a_{j+1}<\sqrt{n}+1$, па затоа $2k<\sqrt{(k+1)^2+1}$, од што следува неравенството $3k^2<2k+2$, па затоа $k\le 1$, т.е. $n\le 4$.

Ако $n=4$, тогаш $\pm(4)=1$ или $\pm(4)=4$. Во првиот случај мора да биде $\pm(3)=3$ и $\pm(2)=2$, па останува $\pm(4)=1$, што не е решение. Во вториот случај се добива $\pm(3)=\pm(2)=2$, што не е можно. Слично и за $n=2$ немаме решение. За $n=1$ и $n=3$ решенија се $\sqrt{1}=1$ и $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1}}}=2$. Значи, $n\in\{1,3\}$.

18. Даден е природен број n, кој е делив со 4. Разгледуваме пермутација $(a_1,a_2,...,a_n)$ на броевите $(1,2,...,n)$ за која за секој j имаме $a_i+j=n+1$ каде $i=a_j$. Докажи, дека постојат $\frac{(\frac{n}{2})!}{(\frac{n}{4})!}$ такви пермутации.

Решение. Ако $a_t = t$, тогаш земаме $i = j = t$ и добиваме $a_i + j = a_t + t = 2t$ $= n+1$, што не е можно по модул 2. Ако $a_t = n+1-t$, тогаш избираме $i = n+1-t,\ j = t$ и добиваме $a_i + j = a_i + t = n+1$, односно $a_{n+1-t} = n+1-t$, што според погоре докажаното не е можно.

Нека $a_t = u$, каде $u \neq t$ и $u \neq n+1-t$. За $i = u,\ j = t$ добиваме $a_u = n+1-t$. За $i = n+1-t,\ j = u$ добиваме $a_{n+1-t} = n+1-u$, а за $i = n+1-u,\ j = n+1-t$ добиваме $a_{n+1-u} = t$.

Според тоа, $\{a_u, a_t, a_{n+1-u}, a_{n+1-t}\} = \{u, t, n+1-u, n+1-t\}$, што значи, дека изборот на вредноста на $a_k = u$ за некој u, за кој a_u не е определено, еднозначно ги определува вредностите на a_u, a_{n+1-u} и a_{n+1-k}.

За a_1 имаме $n-2$ вредности (без $a_1 = 1$ и $a_1 = n$). За следната непределена вредност на a_k имаме $n-6$ можност итн. Сега, според условот $n = 4m$, па затоа бараниот број е

$$\begin{aligned}(n-2)(n-6)(n-10)\cdot\ldots\cdot 10\cdot 6\cdot 2 &= (4m-2)(4m-6)(4m-10)\cdot\ldots\cdot 10\cdot 6\cdot 2\\ &= 2^m(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1\\ &= \frac{2^m(2m-1)(2m-3)\cdot\ldots 5\cdot 3\cdot 1\cdot m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{(2m)!}{m!} = \frac{(\frac{n}{2})!}{(\frac{n}{4})!}.\end{aligned}$$

19. Дадени се $2n$ различни точки во рамнината $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$. Докажи дека постои пермутација на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ таква што $A_i B_{±(i)}$ и $A_j B_{±(j)}$ немаат заедничка точка, кога $i \neq j$.

Решение. Со $₱_n$ ќе го означиме множеството од сите пермутации на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$. За секоја пермутација $¢ \in ₱_n$ можеме да го формираме збирот

$$S_{¢} = \overline{A_1 B_{¢(1)}} + \overline{A_2 B_{¢(2)}} + \ldots + \overline{A_n B_{¢(n)}}.$$

Бидејќи $|₱_n| = n!$ добиваме дека

$$\{S_{¢} \mid ¢ \in ₱_n\}$$

е конечно множеството реални броеви. Според тоа, постои

$$S = \min\{S_{¢} \mid ¢ \in ₱_n\},$$

и постои $± \in S_n$ таква што

$$S = S_{±} = \overline{A_1 B_{±(1)}} + \overline{A_2 B_{±(2)}} + \ldots + \overline{A_n B_{±(n)}}.$$

Ќе покажеме дека отсечките $A_iB_{\pm(i)}$ и $A_jB_{\pm(j)}$ за $i, j \in \{1,2,...,n\}$, $i \neq j$ немаат заедничка точка. За тоа ќе ја искористиме следнава лема.

Лема. Нека AB и CD се отсечки кои имаат заедничка точка. Тогаш

$$\overline{AB} + \overline{CD} > \overline{AC} + \overline{BD}.$$

Доказ. Нека $\{O\} = AB \cap CD$. Тогаш

$$\overline{AB} + \overline{CD} > \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{CO} + \overline{OD} = \overline{AO} + \overline{OC} + \overline{BO} + \overline{OD} > \overline{AC} + \overline{BD},$$

бидејќи според неравенството на триаголник

$$\overline{AO} + \overline{OC} > \overline{AC},\ \overline{BO} + \overline{OD} > \overline{BD}. \blacksquare$$

Нека претпоставиме дека

$$A_iB_{\pm(i)} \cap A_jB_{\pm(j)} = \{O\}$$

за некои $i, j \in \{1,2,...,n\}$, $i \neq j$. Тогаш според претходната лема

$$\overline{A_iB_{\pm(i)}} + \overline{A_jB_{\pm(j)}} > \overline{A_iB_{\pm(j)}} + \overline{A_jB_{\pm(i)}}.$$

Ќе ја разгледаме пермутацијата $\sim$ која се добива од $\pm$ кога $\pm(i)$ и $\pm(j)$ си ги сменат местата. Тогаш

$$\begin{aligned}S_{\pm} &= \overline{A_1B_{\pm(1)}} + \overline{A_2B_{\pm(2)}} + ... + \overline{A_{i-1}B_{\pm(i-1)}} + \overline{A_{i+1}B_{\pm(i+1)}} + ...\\ &\quad + \overline{A_{j-1}B_{\pm(j-1)}} + \overline{A_{j+1}B_{\pm(j+1)}} + ... + \overline{A_nB_{\pm(n)}} + \overline{A_iB_{\pm(i)}} + \overline{A_jB_{\pm(j)}}\\ &> \overline{A_1B_{\pm(1)}} + \overline{A_2B_{\pm(2)}} + ... + \overline{A_{i-1}B_{\pm(i-1)}} + \overline{A_{i+1}B_{\pm(i+1)}} + ...\\ &\quad + \overline{A_{j-1}B_{\pm(j-1)}} + \overline{A_{j+1}B_{\pm(j+1)}} + ... + \overline{A_nB_{\pm(n)}} + \overline{A_iB_{\pm(j)}} + \overline{A_jB_{\pm(i)}}\\ &= \overline{A_1B_{\sim(1)}} + \overline{A_2B_{\sim(2)}} + ... + \overline{A_{i-1}B_{\sim(i-1)}} + \overline{A_{i+1}B_{\sim(i+1)}} + ...\\ &\quad + \overline{A_{j-1}B_{\sim(j-1)}} + \overline{A_{j+1}B_{\sim(j+1)}} + ... + \overline{A_nB_{\sim(n)}} + \overline{A_iB_{\sim(i)}} + \overline{A_jB_{\sim(j)}}\\ &= S_{\sim}\end{aligned}$$

Последното неравенство е во контрадикција со минималноста на $S_{\pm}$. Значи, $A_iB_{\pm(i)} \cap A_jB_{\pm(j)} = \emptyset$ кога $i \neq j$.

20. Нека $n \in \mathbb{N}$. За пермутацијата $\{x_1,...x_{2n}\}$ на множеството $\{1,...,2n\}$ ќе велиме дека го има својството P ако $|x_i - x_{i+1}| = n$, за некој $i \in \{1,2,...,2n-1\}$.

Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот на пермутации кои го имаат својството P е поголем од бројот на пермутации кои го немаат тоа својство.

Решение. Соседните броеви x_i, x_{i+1} од некоја пермутација ги нарекуваме близнаци ако $|x_i - x_{i+1}| = n$. Со A го означуваме множеството од сите пермутации кои немаат близнаци, а со B множеството од сите пермутации кои имаат барем еден пар близнаци. Дефинираме пресликување $f : A \to B$ кое на секоја пермутација $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ од A и ја придружува пермутацијата

$(x_2,...,x_{k-1},x_1,x_k,...,x_{2n})$ од B, така што x_1 и x_k се близнаци. Вака дефинираното пресликување е добро дефинирано бидејќи ако x_1 не е близнак со x_2, ќе постои единствено x_k, $k>2$ таков што x_1 е близнак со x_k. Тогаш $(x_2,...,x_{k-1},x_1,x_k,...,x_{2n})\in B$. Ова пресликување е инјекција, но не е сурјекција бидејќи во $f(A)$ нема пермутација со повеќе од еден пар близнаци. Значи, множеството B има повеќе елементи од множеството A.

21. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви кои ги задоволуваат условите

$$|x_1+x_2+...+x_n|=1,\ \ |x_i|\le \tfrac{n+1}{2} \text{ за } i=1,2,...,n.$$

Докажи дека постои пермутација $y_1,y_2,...,y_n$ на $x_1,x_2,...,x_n$ така што

$$|y_1+2y_2+...+ny_n|\le \tfrac{n+1}{2}.$$

Решение. За секоја пермутација $® =(y_1,y_2,...,y_n)$ од $(x_1,x_2,...,x_n)$ со $S(®)$ ќе го означиме збирот $y_1+2y_2+...+ny_n$. Нека $r=\frac{n+1}{2}$. Треба да докажеме дека $S(®)\le r$ барем за една пермутација $®$.

Нека $®_0=(x_1,x_2,...,x_n)$, а $\tilde{®}=(x_n,x_{n-1},...,x_1)$. Ако $|S(®_0)|\le r$ или $|S(\tilde{®})|\le r$, тогаш тврдењето е точно. Затоа, нека претпоставиме дека $|S(®_0)|>r$ и $|S(\tilde{®})|>r$. Забележуваме дека

$$\begin{aligned}S(®_0)+S(\tilde{®})&=(x_1+2x_2+...+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+...+nx_1)\\&=(n+1)(x_1+...+x_n)\end{aligned}$$

па

$$|S(®_0)+S(\tilde{®})|=n+1=2r.$$

Бидејќи секој од броевите $S(®_0)$ и $S(\tilde{®})$ по апсолутна вредност е поголем од r, следува дека тие мора да бидат со спротивен знак. Еден од нив е поголем од r, а другиот е помал од $-r$.

Почнувајќи од пермутацијата $®_0$ можеме да ја добиеме секоја пермутација со последоватено транспозиции на соседни елементи. Специјално, постои низа од пермутации $®_0,®_1,...,®_m$ така што $®_m=\tilde{®}$ и, за секој $i\in\{0,1,2,...,m-1\}$ пермутацијата $®_{i+1}$ се добива од $®_i$ со транспозиции на последователни чле-нови. Тоа значи дека ако $®_i=(y_1,...,y_n)$ и $®_{i+1}=(z_1,...z_n)$, тогаш постои индекс $k\in\{0,1,...,n-1\}$ таков што

$$z_k=y_{k+1},\ z_{k+1}=y_k,\ \ z_j=y_j \text{ за } j\ne k,k+1.$$

Бидејќи броевите x_i по апсолутна вредност не се поголеми од r, добиваме

$$\begin{aligned}|S(®_{i+1})-S(®_i)|&=|kz_k+(k+1)z_{k+1}-ky_k-(k+1)y_{k+1}|\\&=|y_k-y_{k+1}|\le|y_k|+|y_{k+1}|\le 2r.\end{aligned}$$

Тоа значи дека разликата меѓу два соседни члена од низата $S(®_0), S(®_1), \ldots,$ $S(®_m)$ не е поголема од $2r$.

Броевите $S(®_0)$ и $S(®_m)$, разгледувани како броеви на реалната права, лежат надвор од интервалот $[-r, r]$ и тоа од негови различни страни. Оттука следува дека барем еден од броевите $S(®_i)$ се наоѓа во тој интервал. Затоа $|S(®_i)| \leq r$ за некоја пермутација $®_i$.

22. Потврди го или негирај го тврдењето: за секоја пермутација $a_1, a_2, \ldots, a_{2002}$ на броевите $1, 2, \ldots, 2002$ постојат природни броеви m и n со еднаква парност, за кои $1 \leq m < n \leq 2002$ и $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$.

Решение. Со индукција ќе докажеме дека тврдењето не е точно, т.е. дека за секој природен број $k \geq 3$ постои пермутација $a_1, a_2, \ldots, a_k$ на броевите $1, 2, \ldots, k$ за која равенството $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ не е исполнето за ниту едни m и n, $1 \leq m < n \leq k$.

За $k = 3$ и $k = 4$ тоа се пермутациите $1, 3, 2$ и $1, 3, 2, 4$, соодветно. Нека тврдењето е точно за сите броеви помали од k. Да ја направиме следната почетна пермутација: во првиот блок (позиции од 1 до $[\frac{k+1}{2}]$) да се непарните броеви, потоа во вториот блок се броевите кои се деливи со 2, но не се деливи со 4 итн. (на пример, за $k = 12$ ги имаме следниве четири блока: 1, 3, 5, 6, 9, 11; 2, 6, 10; 4, 12; 8).

Ако a_m и a_n се во различни блокови, да означиме $a_m = 2^s b, a_n = 2^t c$, каде $t > s > 0$ (за $s = 0$ лесно се добива противречност). Тогаш

$$\frac{a_m + a_n}{2} = 2^{s-1}(b + 2^{t-s} c)$$

се наоѓа во $s-$тиот блок, а $a_{\frac{m+n}{2}}$ е меѓу a_m и a_n, т.е. во некој од блоковите $s+1, \ldots, t+1$. Според тоа, равенството $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ не е можно за броеви од различни блокови, независно од подредувањето на броевите во блоковите.

Останува да покажеме како можеме да ги подредиме броевите во фиксиран блок така што равенството $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ да не е исполнето за ниту едни a_m и a_n од тој блок. Да го разгледаме $(r+1)-$виот блок $2^r, 3 \cdot 2^r, \ldots,$ $(2d-1)2^r$, каде $2d - 1 \leq k$. Согласно со индуктивната претпоставка постои пермутација $b_1, b_2, \ldots, b_d$ на броевите $1, 2, \ldots, d$ со саканото својство. Да ставиме $c_i = 2b_i - 1$, за $i = 1, 2, \ldots, d$ и да го подредиме разгледуваниот блок во видот $2^r c_1, 2^r c_2, ..., 2^r c_d$. Тогаш $\frac{c_m+c_n}{2} = b_m + b_n - 1 \neq b_{\frac{m+n}{2}} - 1 = c_{\frac{m+n}{2}}$, со што доказот е завршен.

23. Нека n е природен број, а $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ е пермутација. Множествата A, B, C и D се дефинирани како што следува

$$A = \{i \mid i > f(i)\},$$

$$B = \{(i,j) \mid i < j \leq f(j) < f(i) \text{ или } f(j) < f(i) < i < j\},$$

$$C = \{(i,j) \mid i < j \leq f(i) < f(j) \text{ или } f(i) < f(j) < i < j\} \text{ и}$$

$$D = \{(i,j) \mid i < j \text{ и } f(i) > f(j)\}.$$

Докажи, дека $|A| + 2|B| + |C| = |D|$.

Решение. Ќе спроведеме индукција по $|D|$. Ако $|D| = 0$, тогаш пермутацијата е идентична, па затоа $|A| = |B| = |C| = 0$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за сите пермутации со $|D| < k$, $k \in \mathbb{N}$. Нека f е пермутација, за која $|D_f| = k$ (индексот ќе го користиме за да укажеме за која функција е соодветното множество) и i е таков што $f(i) > f(i+1)$.

Да ја разгледаме функцијата $g:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$, определена со равенствата $g(j) = j$, за $j \notin \{i, i+1\}$, $g(i) = f(i+1)$ и $g(i+1) = f(i)$. Тогаш g е пермутација, за која $|D_g| = k-1$ и од индуктивната претпоставка следува дека

$$|A_g| + 2|B_g| + |C_g| = |D_g| = k-1.$$

За да го комплетираме доказот, ќе ги определиме множествата (и соодветно бројот на нивните елементи) A_g, B_g, C_g во зависност од A_f, B_f, C_f. Можни се пет различни случаи.

Прв случај. Ако $f(i+1) > i$ и $f(i) > i+1$, тогаш

$$(|A_f|, |B_f|, |C_f|) = (|A_g|, |B_g| + 1, |C_g| - 1).$$

Втор случај. Ако $f(i+1) = i$ и $f(i) > i$, тогаш заради својството

$$|\{j \mid j < i, i+1 < f(j)\}| = |\{j \mid f(j) < i, i+1 < j\}|$$

имаме

$$(|A_f|, |B_f|, |C_f|) = (|A_g| + 1, |B_g|, |C_g|).$$

Трет случај. Ако $f(i+1) < i$ и $f(i) > i$, тогаш

$$(|A_f|, |B_f|, |C_f|) = (|A_g|, |B_g|, |C_g| + 1).$$

Четврт случај. Ако $f(i+1) < i$ и $f(i) = i$, тогаш заради својството

$$|\{j \mid j < i, i+1 < f(j)\}| = |\{j \mid f(j) < i, i+1 < j\}|$$

имаме

$$(|A_f|,|B_f|,|C_f|)=(|A_g|-1,|B_g|+1,|C_g|).$$

Петти случај. Ако $f(i+1)<i$ и $f(i)<i$, тогаш

$$(|A_f|,|B_f|,|C_f|)=(|A_g|,|B_g|+1,|C_g|-1).$$

Во сите случаи, заради индуктивната претпоставка добиваме

$$|A_f|+2|B_f|+|C_f|=|D_f|.$$

24. За полиномите $A(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ и $B(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, ($a_n b_m \neq 0$) ќе велиме дека се *слични* ако се исполнети следниве услови

1) $n=m$,
2) Постои пермутација ® на множеството $\{0,1,2,...n\}$ таква што $b_i=a_{®(i)}$, за секој $i\in\{0,1,2,...,n\}$.

Нека $P(x)$ и $Q(x)$ се слични полиноми со целобројни коефициенти. Ако $P(16)=3^{2012}$, која е најмалата можна вредност на $|Q(3^{2012})|$?

Решение. Бидејќи $3^{2012}\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, важи

$$Q(3^{2012})\equiv Q(1)=P(1)\equiv P(16)\equiv 1(\mathrm{mod}\,5),$$

па затоа $|Q(3^{2012})|\geq 1$. Ќе конструираме полиноми P и Q кои ги исполнуваат условите на задачата и за кои $|Q(3^{2012})|=1$. Полиномите ќе ги побараме во облик $P(x)=ax^2+bx+c$ и $Q(x)=cx^2+ax+b$.

За $m=16$ и $n=3^{2012}$ системот

$$\begin{cases} am^2+bm+c=n, \\ cn^2+an+b=1, \end{cases}$$

треба да има барем едено целобројно решение (a,b,c). Од првата равенка имаме $c=n-am^2-bm$ и ако замениме во втората равенка добиваме

$$n^2(n-am^2-bm)+an+b=1, \text{ т.е. } n(m^2n-1)a+(mn^2-1)b=n^3-1.$$

Доволно е последната равенка да има целобројно решение (a,b), а тоа е можно ако $(n(m^2n-1),(mn^2-1))\,|\,n^3-1$. Ќе покажеме дека последниот услов е исполнет. Навистина, ако $d\,|\,n(m^2n-1)$ и $d\,|\,(mn^2-1)$, тогаш

$$d\,|\,n(m^2n-1)-m(mn^2-1)=m-n,$$

а оттука следува дека $d\,|\,mn^2-1+n^2(m-n)=n^3-1$.

25. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ се позитивни цели броеви такви што збировите $a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_4, ..., a_{n-1} + a_n$ се пермутација на збировите $b_1 + b_2, b_1 + b_3, b_1 + b_4, ..., b_{n-1} + b_n$. Докажи дека бројот n е степен на бројот 2.

Решение. Даги разгледаме полиномите

$$P(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + ... + x^{a_n} \text{ и } Q(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + ... + x^{b_n}.$$

Имаме

$$\begin{aligned} P^2(x) - Q^2(x) &= \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2\sum_{1\le i<j\le n} x^{a_i+a_j} - (\sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2\sum_{1\le i<j\le n} x^{b_i+b_j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} - \sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} = \sum_{i=1}^{n} (x^{a_i})^2 - \sum_{i=1}^{n} (x^{b_i})^2 \\ &= P(x^2) - Q(x^2). \end{aligned}$$

Бидејќи $P(1) = Q(1) = n$, добиваме дека 1 е нула од ред $k\ (k \ge 1)$ на полиномот $P(x) - Q(x)$. Според тоа, $P(x) - Q(x) = (x-1)^k R(x)$ за некој полином $R(x)$. Затоа

$$P(x) + Q(x) = \frac{P^2(x) - Q^2(x)}{P(x) - Q(x)} = \frac{P(x^2) - Q(x^2)}{P(x) - Q(x)} = \frac{(x^2-1)^k H(x^2)}{(x-1)^k H(x)} = \frac{H(x^2)}{H(x)}(x+1)^k.$$

Сега, за $x = 1$ добиваме

$$2n = P(1) + Q(1) = (1+1)^k \frac{H(1)}{H(1)} = 2^k,$$

од каде следува $n = 2^{k-1}$, што и требаше да се докаже.

26. Определи го бројот на пермутациите на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ кои може да се претстават како композиција на точно четири дисјунктни циклуси, при што секоја фиксна точка ќе ја сметаме за циклус со должина 1.

Решение. Во решението на оваа задача, а и до крајот на овој параграф циклусот ќе го означуваме со набројување на елементите во средна заграда, при што истите ги одделуваме со запирки. Од условот на здачата следува и имаме следниве пермутации на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ претставени како декомпозиција на точно четири дисјунктни циклуси:

$$[1,2][3][4][5],\quad [1,3][2][4][5],\quad [1,4][2][3][5],\quad [1,5][2][3][4],\quad [1][2,3][4][5],$$
$$[1][2,4][3][5],\quad [1][2,5][3][4],\quad [1][2][3,4][5],\quad [1][2][3,5][4],\quad [1][2][3][4,5].$$

Според тоа, бараниот број пермутации е еднаков на 10.

27. Определи ја пермутацијата на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ чие разбивање во дисјункни циклуси е

$$[1,6][2,4,5][3].$$

Решение. Ако го искористиме првиот циклус $[1,6]$, за бараната пермутација добиваме $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&&&&&1\end{pmatrix}$. Сега, од вториот циклус $[2,4,5]$ имаме $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&&5&2&1\end{pmatrix}$ и конечно, од третиот циклус $[3]$ ја добиваме пермутацијата $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&5&2&1\end{pmatrix}$.

28. Бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,...,n\}$ со k дисјунктни циклуси, при што фиксната точка се смета за циклус со должина еден (*тривијален циклус*), го нарекуваме *Стирлингов број од прв вид*, во ознака $s_{n,k}$ ($s(n,k)$ или $\left[{n \atop k}\right]$).

Ако $0 \le n < k$, тогаш треба да имаме повеќе циклуси отколку што имаме елементи, што не е можно бидејќи наједноставниот циклус е фиксната точка и истиот има должина еден. Затоа $s_{n,k} = s(n,k) = \left[{n \atop k}\right] = 0$ за $0 \le n < k$. Ако $n = k$, тогаш треба да имаме n циклуси, а тоа е можно ако секоја точка е фиксна, т.е. е циклус со должина еден. Јасно, тоа е идентичната пермутација, од каде заклучуваме дека $s_{n,n} = s(n,n) = \left[{n \atop n}\right] = 1$, $n \in \mathbb{N}$. По договор земаме дека $s_{0,0} = s(0,0) = \left[{0 \atop 0}\right] = 1$. Во следните разгледувања ќе ја користиме ознаката $s_{n,k}$.

Докажи дека за секои $n,k \in \mathbb{N}$ важи

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}. \qquad (1)$$

Решение. Да го разгледаме множеството $\{1,2,...,n\}$ и во него да го фиксираме елементот x. Можни се два случаја и тоа:

- елементот x сам за себе формира тривијален циклус и бидејќи дадена пермутација треба да има k циклуси, тоа значи дека преостанатите $k-1$ циклуси можеме да ги формираме на $s_{n-1,k-1}$ начини,
- елементот x учествува во некој од $k-$те циклуси кој има должина поголема или еднаква на 2. Тогаш од преостанатите $n-1$ елементи k циклуси можеме да формираме на $s_{n-1,k}$ начини. Понатаму, елементот x можеме да го ставиме во било кој циклус зад секој од преостанатите $n-1$ елементи, па затоа во овој случај имаме $(n-1)s_{n-1,k}$ за добивање на k циклуси.

Конечно, од принципот на збир следува формулата (1).

29. Користејќи ја рекурзијата (1) од претходната задача пресметај ги Стирлинговите броеви од прв вид за $0 \le n,k \le 10$.

Решение. Имаме:

n	$s_{n,0}$	$s_{n,1}$	$s_{n,2}$	$s_{n,3}$	$s_{n,4}$	$s_{n,5}$	$s_{n,6}$	$s_{n,7}$	$s_{n,8}$	$s_{n,9}$	$s_{n,10}$
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	2	3	1							
4	0	6	11	6	1						
5	0	24	50	35	10	1					
6	0	120	274	225	85	15	1				
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1

30. Имаме 8 монистра и 3 идентични врвки. На колку начини можеме да направиме 3 гердани, ако секој гердан мора да содржи најмалку едно монистро?

Решение. Составување на гердан од монистра е составување на еден циклус со барем еден елемент. Имаме 8 монистра и 3 идентични врвки, па затоа треба да определиме колку пермутации имаме за множество од 8 елементи кои се разбиваат на три дисјунктни циклуси. Јасно, тоа е Стирлинговиот број $s_{8,3}=13132$.

31. Пермутацијата $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&5&6&1&4\end{pmatrix}$ на множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ претстави ја како композиција на k дисјунктни циклуси. Определи го k и бројот на пермутациите на множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ со k дисјунктни циклуси.

Решение. Имаме: $1\to 2\to 3\to 5\to 1$ и $4\to 6\to 4$, па затоа имаме $k=2$ циклуси, при што важи $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&5&6&1&4\end{pmatrix}=[1,2,3,5][4,6]$. Јасно, бараниот број пермутации е $s_{6,2}=274$.

7. БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ, ЊУТНОВА БИНОМНА ФОРМУЛА

1. (*Паскалово правило*). Докажи, дека за секој $k \geq 1$ и за секој $i \in \{1, 2, ..., k\}$ важи

$$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i} .$$

Решение. Нека $k \geq 1$. Тогаш, за секој $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ имаме

$$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!} + \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!}\left[\frac{1}{k-i+1} + \frac{1}{i}\right]$$

$$= \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} \cdot \frac{i+k-i+1}{i(k+1-i)} = \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} = \binom{k+1}{i}$$

што и требаше да се докаже.

2. Докажи, дека

$$\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{M} \binom{n-1-k}{m-k} \text{, каде } M = \min\{m, n-1\} .$$

Решение. Со последователна примена на Паскаловото правило добиваме

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m-2}$$

$$= \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-3}{m-2} + \binom{n-3}{m-3} = ... = \sum_{k=0}^{M} \binom{n-1-k}{m-k},$$

каде $M = \min\{m, n-1\}$.

3. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k} ,$$

каде $0 \leq k \leq m \leq n$.

Решение. Имаме

$$\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k} = \frac{n!}{(m-k)!(n-m+k)!} \cdot \frac{(n-m+k)!}{k!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-(m-k))!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

и

$$\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k} = \frac{n!}{(m-k)!(n-m+k)!} \cdot \frac{(n-m+k)!}{k!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \binom{n}{m}\binom{m}{k}.$$

4. Нека i, j, n се цели броеви такви што $0 < i < j < n$. Дали е точно точно, дека биномните коефициенти $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{j}$ имаат заеднички делител поголем од 1?

Решение. Заради равенството $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ без граничување на општоста можеме да сметаме дека $2i \le n$ и $2j \le n$. Нека претпоставиме дека $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{j}$ се заемно прости. Тогаш од равенството

$$\binom{n}{i}\binom{n-j}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}$$

следува $\binom{n}{i}$ е делител на $\binom{n-j}{i}$, што не е можно бидејќи $n > n-j \ge i > 0$. Конечно, од добиената противречност следува дека $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{j}$ имаат заеднички делител поголем од 1, т.е. даденото тврдење е точно.

5. Докажи, дека за секои $a, b \in \mathbb{R}$ и секој $n \in \mathbb{N}$ точна е формулата

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n . \qquad (1)$$

Решение. За $n = 1$ имаме $(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$, т.е. формулата (1) е точна.

Нека претпоставиме дека формулата (1) е точна за $n = k$, т.е. дека важи

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + ... + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + ... + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k .$$

Тогаш, од индуктивната претпоставка и задача 1 за $n = k+1$ имаме

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b)\\ &= [\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + ... + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + ... + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k](a+b)\\ &= a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i + ... + \binom{k}{k}ab^k +\\ &\quad + \binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k}{i-1}a^{k+1-i}b^i + ... + \binom{k}{k-1}ab^k + b^{k+1}\\ &= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + ... + \binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i + ... + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}\end{aligned}$$

т.е. формулата (1) важи и за $n = k+1$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека формулата (1) е точна за секои $a, b \in \mathbb{R}$ и секој $n \in \mathbb{N}$.

Формулата (1) во литературата е позната како *биномна формула* или *Њутнова биномна формула*, а коефициентите $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ како *биномни коефициенти*.

6. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \qquad (1)$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n\binom{n}{n} = 0 \qquad (2)$$

Решение. Ако во Њутновата биномна формула ставиме $a=b=1$, го добиваме равенството (1), а за $a=1, b=-1$ го добиваме равенството (2).

7. Нека A е конечно множество и $\mathbb{P}(A)$ е неговото партитивно множество. Докажи, дека ако $|A|=n$, тогаш $|\mathbb{P}(A)|=2^n$.

Решение. Ако $B\in\mathbb{P}(A)$, тогаш $|B|=k$, каде $k\in\{0,1,2,...,n\}$. Од $|A|=n$ следува дека за секој $k\in\{0,1,2,...,n\}$ бројот на k – елементните подмножества е еднаков на $\binom{n}{k}$. Сега од претходно кажаното и задача 5 следува

$$|\mathbb{P}(A)|=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n .$$

8. Докажи, дека за секој $n\geq 0$ важи

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}=4^n .$$

Решение. Нека $A=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}$, $B=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}$. Тогаш од Њутновата биномна формула и од задача 6 следува

$$A+B=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=2^{2n+1},$$

$$A-B=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}=0.$$

Според тоа, $A=B=\frac{1}{2}\cdot 2^{2n+1}=2^{2n}=4^n$.

9. Докажи, дека за секој $n\geq 1$ важи

а) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=2^{n-1}n$

б) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0$,

в) $\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}=2^{n-2}n(n+1)$.

Решение. а) Ако го искористиме идентитетот $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ и Њутновата биномна формула последователно добиваме

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=2^{n-1}n .$$

б) Ако го искористиме идентитетот $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ и задача 6 последователно добиваме

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1}=-n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}=n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}=0$$

в) Ако го искористиме идентитетот $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$, Њутновата биномна формула и задачата под а) последователно добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}&=n\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}=n(\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1})\\&=n(\sum_{i=0}^{n-1}i\binom{n-1}{i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i})=n((n-1)2^{n-2}+2^{n-1})\\&=2^{n-2}n(n+1).\end{aligned}$$

10. Пресметај го збирот

а) $S=\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+...+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$

б) $S=\frac{1}{2}\binom{n}{0}+\frac{1}{3}\binom{n}{1}+\frac{1}{4}\binom{n}{2}+...+\frac{1}{n+2}\binom{n}{n}$.

Решение. а) Од дефиницијата на биномните коефициенти и од задача 6 следува:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

б) Од својствата на биномните коефициенти, задача 6 и задача 9 а) последователно добиваме

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n+2}{k+2}\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=-1}^{n}(k+1)\binom{n+2}{k+2}\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}(\sum_{k=-1}^{n}(k+2)\binom{n+2}{k+2}-\sum_{k=-1}^{n}\binom{n+2}{k+2})\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}(\sum_{k=1}^{n+2}k\binom{n+2}{k}-\sum_{k=1}^{n+2}\binom{n+2}{k})\\&=\frac{(n+2)2^{n+1}-2^{n+2}+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

11. Пресметај го збирот

$$S=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...+\binom{n}{2[\frac{n}{2}]}.$$

Решение. Од задача 6 следува

$$\begin{aligned}2S &= 2(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{2[\frac{n}{2}]})\\ &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}+(\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n})\\ &= 2^n-0=2^n,\end{aligned}$$

па затоа $S=2^{n-1}$.

12. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}=\binom{2n}{n}^2.$$

Решение. Според задача 6 имаме

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} &= \frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k=0}^{n}(\frac{n!}{k!(n-k)!})^2\\ &= \binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\cdot\binom{2n}{n}.\\ &= \binom{2n}{n}^2.\end{aligned}$$

13. Нека $n\ge k$. Пресметај го збирот

$$\binom{n}{k}\binom{k}{k}-\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k}+\binom{n}{k+2}\binom{k+2}{k}+\ldots+(-1)^{n-k}\binom{n}{n}\binom{n}{k}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n}{k+i}\binom{k+i}{k} &= \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{n!}{(k+i)!(n-k-i)!}\frac{(k+i)!}{k!i!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{(n-k)!}{(n-k-i)!i!}\\ &= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n-k}{i}\\ &= \binom{n}{k}(1-1)^{n-k}=0.\end{aligned}$$

14. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Решение. Ако го искористиме идентитетот $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$, тогаш од задача 6 следува

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}=\frac{1}{n+1}[\binom{n+1}{0}-\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k}\binom{n+1}{k}]$$
$$=\frac{1}{n+1}(1-0)=\frac{1}{n+1}.$$

15. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи идентитетот

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Решение. Идентитетот ќе го докажеме со индукција по n. Да означиме

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}.$$

Јасно, идентитетот (1) важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека за $n-1$ важи

$$x_{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}.$$

Тогаш, ако ги искористиме Паскаловото правило и задача 6 добиваме

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}]+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$=x_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{n}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$=x_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$=x_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$$
$$=x_{n-1}+\frac{1}{n}(1-(1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}))$$
$$=x_{n-1}+\frac{1}{n}(1-0)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}.$$

16. Докажи, дека

$$n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Решение. Од равенството $\binom{n}{i+1}=\frac{n}{i+1}\binom{n-1}{i}$ и од задача 15 непосредно добиваме

$$n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i+1}\binom{n}{i+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

17. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{2k}=\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2[\frac{n}{2}]}\ .$$

Решение. Нека i е имагинарната единица. Тогаш

$$(1+i)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2[\frac{n}{2}]}+i(\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...)\ ,$$

па затоа

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2[\frac{n}{2}]}=\mathrm{Re}(1+i)^n=\mathrm{Re}(\sqrt{2}(\cos\frac{®}{4}+i\sin\frac{®}{4}))^n$$

$$=\mathrm{Re}(2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n®}{4}+i\sin\frac{n®}{4}))=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n®}{4}.$$

18. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}\ .$$

Решение. Според задача 6 имаме

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}=0\ ,$$

па затоа

$$0=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}+(-1)^n\binom{2n}{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}+(-1)^n\binom{2n}{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^{2n-k}\binom{2n}{2n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}+(-1)^n\binom{2n}{n}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k},$$

од каде наоѓаме

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}=\frac{(-1)^{n+1}}{2}\binom{2n}{n}\ .$$

19. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1}=2^{4n-2}\ .$$

Решение. Од својствата на биномните коефициенти и од Њутновата биномна формула следува

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4n-4k-1}$$

$$=\frac{1}{2}(\binom{4n}{1}+\binom{4n}{5}+...+\binom{4n}{4n-7}+\binom{4n}{4n-3})+\frac{1}{2}(\binom{4n}{4n-1}+\binom{4n}{4n-5}+...+\binom{4n}{7}+\binom{4n}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1}\binom{4n}{2i+1}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1}\left(\binom{4n-1}{2i+1}+\binom{4n-1}{2i}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4n-1}\binom{4n-1}{i}=\frac{1}{2}(1+1)^{4n-1}=2^{4n-2}.$$

20. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n+1}{1}+\frac{1}{2^2}\binom{n+2}{2}+...+\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}=2^n. \qquad (1)$$

Решение. Нека

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\binom{n+k}{k},\ n\in\mathbb{N}.$$

Тогаш $x_1=2$ и

$$x_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}\binom{n+1+k}{k}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}\binom{n+k}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}\binom{n+k}{k-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\binom{n+k}{k}+\frac{1}{2^{n+1}}\binom{2n+1}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{2^{k-1}}\binom{n+k}{k-1}-\frac{1}{2^{n+2}}\binom{2n+2}{n+1}$$
$$=x_n+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}\binom{n+1+k}{k}+\frac{1}{2^{n+2}}\left(2\binom{2n+1}{n+1}-\binom{2n+2}{n+1}\right)$$
$$=x_n+\frac{1}{2}x_{n+1},$$

па затоа $x_{n+1}=2x_n$. Конечно, од $x_1=2$, $x_{n+1}=2x_n$ за $n\in\mathbb{N}$ и принципот на математичка индукција следува идентитетот (1).

21. Нека $S_n(k)=\sum_{i=1}^{n}i^k$. Докажи, дека

$$(n+1)^m=1+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}S_n(k).$$

Решение. Наведениот идентит се добива со собирање на равенствата

$$(i+1)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{k}i^k,\ \ i=1,2,...,n.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

22. Докажи, дека

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^{-1}=\frac{n+1}{n+2}(1+(-1)^n).$$

Решение. Ги воведуваме ознаките

$$A(n,k)=(-1)^k\binom{n}{k}^{-1}=(-1)^k\frac{k!(n-k)!}{n!},\ \ 0\le k\le n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Тогаш за $0 \le k \le n$ важи

$$A(n+1,k+1) - A(n+1,k) = -\tfrac{n+2}{n+1} A(n,k)\,,$$

па затоа

$$\sum_{k=0}^{n} A(n,k) = -\tfrac{n+1}{n+2}(A(n+1,n+1) - A(n+1,0)) = \tfrac{n+1}{n+2}(1+(-1)^n)\,.$$

23. Докажи, дека

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tfrac{1}{x+k}\tbinom{n}{k} = \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}\,,\ x \notin \{0,-1,-2,...,-n\}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Решение. Ја воведуваме ознаката

$$S(n,x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tfrac{1}{x+k}\tbinom{n}{k}\,,\ x \notin \{0,-1,-2,...,-n\}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Со математичка индукција по n ќе докажеме дека

$$S(n,x) = \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}\,.$$

За $n = 1$ и $x \notin \{0,-1\}$ важи $S(1,x) = \frac{1}{x(x+1)}$. Нека претпоставиме дека за $n \in \mathbb{N}$ и $x \notin \{0,-1,-2,...,-n+1\}$ важи

$$S(n-1,x) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)...(x+n-1)}\,.$$

Тогаш за $x \notin \{0,-1,-2,...,-n\}$ важи

$$\begin{aligned} S(n,x) &= \tfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \tfrac{1}{x+k}\tbinom{n}{k} + (-1)^n \tfrac{1}{x+n} \\ &= \tfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \tfrac{1}{x+k}(\tbinom{n-1}{k} + \tbinom{n-1}{k-1}) + (-1)^n \tfrac{1}{x+n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \tfrac{1}{x+k}\tbinom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \tfrac{1}{x+k}\tbinom{n-1}{k-1} \\ &= S(n-1,x) - S(n-1,x+1) \\ &= \frac{(n-1)!}{(x+1)...(x+n-1)}(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x+n}) \\ &= \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}. \end{aligned}$$

24. Пресметај го збирот:

а) $S_1 = \frac{3}{1}\binom{n}{0} + \frac{3^2}{2}\binom{n}{1} + \frac{3^3}{3}\binom{n}{2} + ... + \frac{3^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}\,,$

б) $S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\binom{n}{0} + \frac{1}{2\cdot 3}\binom{n}{1} + \frac{1}{3\cdot 4}\binom{n}{2} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\binom{n}{n}\,.$

Решение. Ако во идентитетот

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = (1+x)^n$$

интегрираме по x во граници од 0 до a, добиваме

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a^j}{j+1} = \int_0^a (1+x)^n dx = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^a = \frac{(1+a)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

т.е.

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a^j}{j+1} = \frac{(1+a)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \ . \qquad (1)$$

а) Ако во (1) ставиме $a=3$ добиваме

$$S_1 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{3^j}{j+1} = \frac{(1+3)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{4^{n+1}-1}{n+1} \ .$$

б) Ако во (1) интегрираме по a во граници од 0 до 1 добиваме

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{1\cdot 2}\binom{n}{0} + \frac{1}{2\cdot 3}\binom{n}{1} + \frac{1}{3\cdot 4}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\binom{n}{n} \\ &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 ((1+a)^{n+1}-1)da = \frac{1}{n+1}\left(\frac{(1+a)^{n+2}}{n+2} - a\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{2^{n+2}}{n+2} - 1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Забелешка. Ако во (1) ставиме $a=1$, тогаш го добиваме идентитетот од задача 11 а).

25. Пресметај го збирот:

$$1^2 + 2^2\binom{n}{1} + 3^2\binom{n}{2} + \dots + (n+1)^2\binom{n}{n} \ .$$

Решение. *Прв начин*. Според задаите 6 и 9 а) и в) добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} (k^2+2k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} + 2\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= 2^{n-2}n(n+1) + 2n\cdot 2^{n-1} + 2^n \\ &= 2^{n-2}(n(n+1)+4n+4) \\ &= 2^{n-2}(n^n+5n+4). \end{aligned}$$

Втор начин. Нека

$$f(x) = 1^2 + 2^2\binom{n}{1}x + 3^2\binom{n}{2}x^2 + \dots + (n+1)^2\binom{n}{n}x^n \ .$$

Ако фукцијата $f(x)$ ја интегрираме во граници од 0 до t добиваме

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = t + 2\binom{n}{1}t^2 + 3\binom{n}{2}t^3 + \dots + (n+1)\binom{n}{n}t^{n+1} \ .$$

Да ја разгледаме функцијата

$$g(t)=\frac{F(t)}{t}=1+2\binom{n}{1}t+3\binom{n}{2}t^2+...+(n+1)\binom{n}{n}t^n .$$

Ако $g(t)$ ја интегрираме од 0 до x добиваме

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt=x+\binom{n}{1}x^2+\binom{n}{2}x^3+...+\binom{n}{n}x^{n+1}=x(1+x)^n .$$

Според тоа,

$$g(x)=G'(x)=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1},$$

$$F(x)=xg(x)=x(1+x)^n+nx^2(1+x)^{n-1},$$

$$f(x)=F'(x)=(1+x)^n+3nx(1+x)^{n-1}+n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}.$$

Конечно,

$$\begin{aligned}1^2+2^2\binom{n}{1}+3^2\binom{n}{2}+...+(n+1)^2\binom{n}{n}= f(1)&=2^n+3n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}\\ &=2^{n-2}(4+6n+n(n-1))\\ &=2^{n-2}(n^2+5n+4).\end{aligned}$$

26. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $n_1,n_2,...,n_k\in\mathbb{N}$ се такви што $n_1+n_2+...+n_k=n+1$. Докажи, дека

$$P_{n+1}^{n_1,n_2,...,n_k}=\sum_{i=1}^{k}P_n^{n_1,...,n_{i-1},n_i,n_{i+1},...,n_k} .$$

Решение. Имаме $n_1+n_2+...+n_k=n+1$, па затоа

$$\begin{aligned}P_{n+1}^{n_1,n_2,...,n_k}&=\frac{(n+1)!}{n_1!n_2!...n_k!}=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}(n+1)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}\sum_{i=1}^{k}n_i\\ &=\sum_{i=1}^{k}\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}n_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{n!}{n_1!...n_{i-1}!(n_i-1)!n_{i+1}!...n_k!}\\ &=\sum_{i=1}^{k}P_n^{n_1,...,n_{i-1},n_i,n_{i+1},...,n_k}.\end{aligned}$$

27. Докажи, дека за секои $a_1,a_2,...,a_k\in\mathbb{R}$ и секој $n\in\mathbb{N}$ точна е формулата

$$(a_1+a_2+...+a_k)^n=\sum_{\substack{n_1,n_2,...,n_k\geq 0\\ n_1+n_2+...+n_k=n}}\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_k^{n_k}. \qquad (1)$$

Формулата (1) во литературата е позната како *полиномна формула* или *Њутнова полономна формула*

Решение. Формулата ќе ја докажеме со индукција по n. За $n=0$ имаме

$$(a_1+a_2+...+a_k)^0=1=\sum_{n_1=n_2=...=n_k=0}\frac{0!}{0!0!...0!}a_1^0a_2^0...a_k^0,$$

т.е. точна е формулата (1). Нека претпоставиме дека формулата (1) важи за некој $n\geq 0$. Тогаш од претпоставката и од претходната задача следува

$$(a_1+a_2+...+a_k)^{n+1}=(a_1+a_2+...+a_k)^n(a_1+a_2+...+a_k)$$
$$=\Big(\sum_{\substack{n_1,n_2,...,n_k\ge 0\\ n_1+n_2+...+n_k=n}} P_n^{n_1,n_2,...,n_k} a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_k^{n_k}\Big)\sum_{i=1}^k a_i$$
$$=\sum_{i=1}^k \sum_{\substack{n_1,n_2,...,n_k\ge 0\\ n_1+n_2+...+n_k=n}} P_n^{n_1,n_2,...,n_k} a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_{i-1}^{n_{i-1}}a_i^{n_i+1}a_{i+1}^{n_{i+1}}...a_k^{n_k}$$
$$=\sum_{i=1}^k \sum_{\substack{n_1,n_2,...,n_k\ge 0\\ n_1+n_2+...+n_k=n+1}} P_n^{n_1,n_2,...,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},...,n_k} a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_i^{n_i}...a_k^{n_k}$$
$$=\sum_{\substack{n_1,n_2,...,n_k\ge 0\\ n_1+n_2+...+n_k=n+1}} \Big(\sum_{i=1}^k P_n^{n_1,n_2,...,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},...,n_k}\Big)a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_k^{n_k}$$
$$=\sum_{\substack{n_1,n_2,...,n_k\ge 0\\ n_1+n_2+...+n_k=n+1}} P_{n+1}^{n_1,n_2,...,n_k} a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_k^{n_k},$$

т.е. формулата (1) важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n\in\mathbb{N}_0$.

28. Колку најмногу подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ може да се изберат такви што секои две подмножества имаат непразен пресек?

Решение. Од задача 7 следува дека ако имаме повеќе од 2^{n-1} подмножество, тогаш постои множество $A\subseteq\{1,2,...,n\}$ такво што A и $\overline{A}$ се меѓу избраните множества, што не е можно.

Од друга страна, може да се изберат точно 2^{n-1} подмножества. На пример, сите подмножествата кои го содржат бројот 1.

29. Дали за секој природен број n постојат 2^{n-1} подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што секои две имаат непразен пресек, но пресекот на сите подменожества е празно множество?

Решение. Да. Ако n е непарен број, доволно е да ги земеме сите подмножества кои имаат повеќе од $\frac{n}{2}$ елементи. Ако n е парен број, довоно е да ги земеме сите подмножества кои имаат повеќе од $\frac{n}{2}$ елементи и сите подмножества со точно $\frac{n}{2}$ елементи кои го содржат бројот 1.

30. Нека S е n – елементно множество и $\mathcal{F}$ е фамилија од 2^{n-1} подмножества на S такви што секои три множества од $\mathcal{F}$ имаат непразен пресек.

Докажи, дека пресекот на сите множества од $\mathcal{F}$ е непразно множество.

Решение. Нека $X \subseteq S$ и нека $X^c = S \setminus X$. Бидејќи $X \cap X^c = \varnothing$ заклучуваме дека најмногу едно од множествата X и X^c може да е во $\mathcal{F}$. Уште повеќе, бидејќи $\mathcal{F}$ ги содржи точно половината подмножества на S , добиваме дека за секој $X \subseteq S$ точно едно од множествата X и X^c е во $\mathcal{F}$.

Нека $A, B \in \mathcal{F}$ и да претпоставиме дека $(A \cap B)^c \in \mathcal{F}$. Тогаш трите множества A, B и $(A \cap B)^c$ се во $\mathcal{F}$, но нивниот пресек е празно множество, што е противречност. Според тоа, ако $A, B \in \mathcal{F}$, тогаш $A \cap B \in \mathcal{F}$. Значи, фамилијата $\mathcal{F}$ е затворена во однос на пресекот, што значи дека пресекот на сите множества од $\mathcal{F}$ не е празно множество.

31. Нека S е множество со $n \geq 2$ елементи и $A_1, A_2, ..., A_m$ $(m \geq 2)$ се подмножества од S со следново својство: за секои два различни елементи x и y од S постои подмножество A_i кое содржи точно еден од овие два елементи. Докажи дека $2^m \geq n$.

Решение. *Прв начин*. Нека $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $x_i \in A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_{k(i)}}$. Од условот следува дека ако $i \neq j$, тогаш

$$\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_{k(i)}}\} \neq \{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{j_{k(j)}}\} .$$

Бројот на сите подмножества на множеството $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ е еднаков на 2^m и овој број не е помал од бројот на елементите на S .

Втор начин. На секој елемент a од множеството S му придружуваме низа од нули и единици $[a] = (x_1, ..., x_k)$, каде $x_i = 1$ ако $a \in A_i$ и $x_i = 0$ ако $a \notin A_i$. Според условот на задачата сите низи $[a]$ се различни. Но, низи со должина m има 2^m , па затоа $2^m \geq n$.

32. За две подмножества X и Y на множеството $A = \{1, 2, ..., 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ќе велиме дека се соседни ако $|X \cap Y| = 1$ и $X \cup Y = A$. Докажи, дека може да се изберат најмногу $2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n} - 1$ подмножества на A меѓу кои нема соседни множества.

Решение. Да забележиме дека ако X и Y се соседни и $|X| = k, k = 1, 2, ..., n$, тогаш $|Y| = 2n + 1 - k$. Ќе докажеме, дека за секој $k = 1, 2, ..., n$ од сите множества множества со k и $2n + 1 - k$ елементи може да бидат избрани најмногу $\binom{2n}{k}$ множества меѓу кои нема соседни.

Нека p и q е бројот на мноествата со k и $2n + 1 - k$ елементи, соодветно.

Бидејќи секое множество со k елементи има точно k сосоедни множества со $2n+1-k$ елементи и секое множество со $2n+1-k$ елементи има точно $2n+1-k$ соседни множества со k елементи, добиваме дека

$$[\frac{kp}{2n+1-k}]+q\le\binom{2n}{2n-k+1}.$$

Аналогно

$$[\frac{(2n+1-k)q}{k}]+p\le\binom{2n}{k}.$$

Ако допуштиме дека $\binom{2n}{k}<p+q$, по собирањето на последните три неравенства добиваме

$$\frac{kp}{2n+1-k}+\frac{(2n+1-k)q}{k}\le\binom{2n}{2n-k+1}.$$

Ако земеме предвид дека $2n+k-1>k$ и $\binom{2n}{k}<p+q$ добиваме

$$\begin{aligned}\binom{2n}{2n-k+1}&\ge\frac{kp}{2n+1-k}+\frac{(2n+1-k)q}{k}\\&=(p+q)\frac{k}{2n+1-k}+q(\frac{2n+1-k}{k}-\frac{k}{2n+1-k})\\&>\binom{2n}{k}\frac{k}{2n+1-k}=\binom{2n}{2n-k+1},\end{aligned}$$

што е противречност.

Значи, $p+q\le\binom{2n}{k}$. Ако добиените неравенства ги собереме за $k=1,2,...,n$ добиваме дека имаме најмногу

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+...+\binom{2n}{n}=2^{2n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}-1$$

подмножества на A меѓу кои нема соседни множества.

33. Во летна школа се предаваат 9 предмети на 512 ученици, кои се сметени во 256 двокреветни соби. Учениците кои се наоѓаат во иста соба ги нарекуваме соседи. Познато е дека за секои два ученика множеството од предмети кои им се интересни се различни (во случајов, точно на еден ученик не му е ништо интересно). Докажи, дека е можно сите ученици да бидат подредени во круг така што секои два соседи да седат еден до друг, а за секои двајца кои не се соседи и се еден до друг за едниот ученик се интересни сите предмети кои се интересни и за другиот ученик и точно уште еден предмет.

Решение. Тврдењето, со индукција по n, ќе го докажеме во општ случај, т.е. за $n\ge2$ предмети и 2^n ученици, произволно поделени на 2^{n-1} парови соседи. Бидејќи од n предмети може да се формираат точно 2^n подмножества, заклучуваме дека предметите содржани во едно подмножество се интересни точно за еден ученик.

За $n=2$ непосредно се проверува дека тврдењето е точно. Нека $n>2$ и да разгледаме произволни два соседа, при што избираме предмет за кој тие имаат различен интерес (на пример, математика), и да ги поделиме учениците на две групи од по 2^{n-1} ученици – во групата A се учениците на кои математиката им е интересна, а во групата B се останатите ученици.

Да ја преселиме групата A во друг хотел со 2^{n-2} соби. Притоа, учениците кои претходно биле соседи ќе ги оставиме да бидат соседи и во новиот хотел. Останатите (согледај дека такви има и нивниот број е парен) ќе ги сместиме произволно и овие парови ќе ги наречеме нови. Согласно индуктивната претпоставка групата A може да биде распоредена во круг K на саканиот начин. Нека $(x_1, x_2),...,(x_{2k-1}, x_{2k})$ се сите нови парови во K, распоредени во насока на движење на стрелката на часовникот (x_{2i-1} е пред x_{2i} и сметаме дека $x_{2k+1} = x_1$). Со $x_i^{'}$ да го означиме претходниот сосед на x_i. Јасно, $x_i^{'} \in B$ и паровите $(x_2^{'}, x_3^{'}),...(x_{2k-2}^{'}, x_{2k-1}^{'}),(x_{2k}^{'}, x_1^{'})$ да ги наречеме нови во групата B. Јасно, новите парови, заедно со старите даваат разбивање на групата B на парови соседи.

Да ја примениме индуктивната претпоставка за групата B со ова разбивање, распоредувајќи ја во круг на саканиот начин. Сега во тој круг да ги ставиме меѓу секои двајца од новиот пар $(x_{2i}^{'}, x_{2i+1}^{'})$ учениците од кругот K од x_{2i} до x_{2i+1} заклучно. Не е тешко да се види дека добиениот круг ги има саканите својства.

34. Нека X е множество и $X_{\sim}, \sim \in A$ е фамилија подмножества од X. За фамилијата $X_{\sim}, \sim \in A$ ќе велиме дека е *покривка* на множеството X ако $\bigcup_{\sim \in A} X_{\sim} = X$. Со $A(n)$ да го означиме бројот на покривните на множеството $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Докажи, дека

$$A(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}-1} . \tag{1}$$

Решение. Множеството X има $2^n - 1$ непразни подмножества, па затоа бројот на фамилиите непразни подмножества на X е еднаков на 2^{2^n-1}. Ако со A_i ја означиме фамилијата непразни подмножества на X кои не го содржат x_i, за $i = 1, 2, ..., n$, тогаш

$$A(n) = 2^{2^n-1} - | A_1 \cup ... \cup A_n | . \tag{2}$$

Понатаму, од принципот на вклучување и исклучување имаме

$$| A_1 \cup ... \cup A_n | = \sum_i | A_i | - \sum_{i \neq j} | A_i \cap A_j | + ... \tag{3}$$

Меѓутоа, ако $| K | = k$, тогаш

$$|\bigcap_{i\in K} A_i| = 2^{2^{n-k}-1}$$

и K може да се избере на $\binom{n}{k}$ начини. Конечно, од последното и од равенствата (2) и (3) следува равенството (1).

35. Мравка се наоѓа во координатниот почеток O. Секоја секунда таа минува пат од $1cm$ во некоја од насоките исток, запад, север или југ. По m секунди мравката повторно се вратила во точката O. Ако бројот на можните маршрути на мравката е делив со 2015, определи ја најмалата можна вредност на m.
Решение. Со буквите И, З, С и Ј ги кодираме насоките исток, запад, север и југ, соодветно. Јасно колку што имаме букви С треба да имаме и букви Ј и нека се по k, а колку што имаме букви И треба да имаме букви З и нека се по $n-k$, каде $m=2n$. Бројот на овие кодови е еднаков на

$$\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} = \binom{2n}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Според тоа, вкупниот број на маршрути е еднаков на

$$\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}^2.$$

Останува да го определиме најмалиот n за кој $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ е делив со $2015 = 5\cdot 13\cdot 31$. Заради деливоста со 31 потребно е $n \ge 16$. Вредностите $n = 16,17,18,19$ не се можни, бидејќи за овие вредности степените на 13 во броителот и именителот на $\frac{(2n)!}{n!n!}$ се еднакви. За $n = 20$ степените на 5, 13 и 31 во броителот на $\frac{(2n)!}{n!n!}$ се поголеми од соодветните степени во именителот, па затоа најмалата можна вредност на m е $m = 2n = 40$.

36. Дадени се броевите n и r $(1 \le r \le n)$. Ги формираме сите подмножества од $\{1,2,...,n\}$ со r елементи и за секое подмножество го наоѓаме најмалиот елемент. Со $f(n,r)$ ја означуваме аритметичката средина на сите така добиени броеви. Докажи дека

$$f(n,r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

Решение. Бројот на сите $r-$ подмножества од множеството $\{1,2,...,n\}$ е $\binom{n}{r}$. Едно од тие подмножества е $\{n-r+1, n-r+2,...,n\}$ и најмалиот елемент во него е $n-r+1$. Овој број е поголем од сите најмали броеви на другите подмножества. Бројот $k\,(=1,2,...,n-r+1)$ е минимален елемент во $\binom{n-k}{r-1}$ $r-$ подмножествата од множеството $\{1,2,...,n\}$, па затоа

$$f(n,r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{r}} \left(\sum_{k=1}^{n-r+1} \binom{n-k}{r-1} + \sum_{k=2}^{n-r+1} \binom{n-k}{r-1} + \ldots + \binom{n-k}{r-1} \right).$$

Користејќи го равенството

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m+i}{m} = \binom{m+k+1}{m+1},$$

добиваме

$$f(n,r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \left(\binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \ldots + \binom{r}{r} \right) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \binom{n+1}{r+1} = \frac{n+1}{r+1}.$$

37. Множеството M е добиено од множеството $\mathbb{R}$ со бришење на конечен број реални броеви. Докажи, дека за секој природен број n постои полином $f(x)$ таков што $\deg f = n$, коефициентите на f припаѓаат на множеството M и сите n корени на f припаѓаат на множеството M.

Решение. Од условот на задачата следува дека множеството

$$T = \{|x| \in \mathbb{R}, x \notin M\}$$

е конечно и нека $\sim = \max_{x \in T} x$. За секој реален број $k > \max\{|\sim|, 1\}$ важи $-k \notin T$, па затоа $-k \in M$. Ќе докажеме, дека полиномот $f(x) = k(x+k)^n$ ги има саканите својства. Од $k > 1$ следува дека $\deg f = n$ и коефициентот пред x^m е еднаков на

$$k\binom{n}{m}k^{n-m} \geq k.$$

Оттука следува, дека сите коефициенти на $f(x)$ не припаѓаат на T, па затоа тие припаѓаат на множеството M. Од друга страна корените на полиномот $f(x)$ се $-k$ со кратност n, па затоа и тие припаѓаат на множеството M.

38. Еден зад друг во круг се застанати n ученици, чии висини се $h_1 < h_2 < \ldots < h_n$. Ако ученикот со висина h_k е веднаш зад ученикот со висина h_{k-2} или по-мала, тогаш двајцата ученици можат да ги заменат местата. Докажи, дека се можни најмногу $\binom{n}{3}$ такви замени, т.е. дека после најмногу $\binom{n}{3}$ замени ќе се добие распоред после кој повеќе не се можни замени.

Решение. Со h_i да го означиме ученикот со висина h_i. Со индукција по j ќе докажеме дека за $1 \leq i < j \leq n$ ученикот h_j може да го замени местото со ученик h_i после најмногу $j-i-1$ замени. Базата на индукцијата следува од фактот дека h_i не може да го замени местото со h_{i+1}.

За докажување на индуктивниот чекор да забележиме дека h_i, h_{j-1} и h_j може да бидат распоредени или во тој редослед или во редослед h_i, h_j и h_{j-1}. Бидејќи h_{j-1} и h_j не може да ги заменат местата, единствен начин да се промени редоследот на овие три ученици е h_i да го замени местото или со h_{j-1} или со h_j. Значи, секои две замени на h_i со h_j треба да бидат разделени со замени на h_i со h_{j-1}. Бидејќе имаме најмногу $j-i-2$ замени од последниот вид, добиваме дека имаме најмногу $j-i-1$ замени од првиот вид. Според тоа вкупниот број на замени е најмногу

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i-1)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}j=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-i}{2}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\binom{n-i+1}{3}-\binom{n-i}{3}\right)=\binom{n}{3}.$$

39. Во Декартов правоаголен координатен систем од точката $(0,0)$ тргнуваат 2^n ученици, половината од нив одат на исток, а половината на север. Кога ќе дојдат до точка со целобројни координати секоја група повторно се дели на два дела, половината движењето го продолжува на исток, а половината на север. Опишаната поделба се случува во секоја точка со целобројни координати. Опиши ја положбата на учениците кога ќе се помине пат со должина n.

Решение. Патот кој го поминал секој ученик е искршена линија, која се состои од n единечни отсечки. Според тоа, секој ученик ќе се најде во некоја од точките $B_k(k,n-k)$, каде $k\in\{0,1,2,...,n\}$. Сите овие точки припаѓаат на правата $y=-x+n$. Нека S е множеството од сите искршени линии со должина n со почеток во $(0,0)$ и крај во некоја од точките B_i, $i=0,1,2,...,n$. Меѓу множеството S и множеството од сите варијации од 0 и 1 од класа n постои биекција, па затоа $|S|=2^n$. Бидејќи имаме 2^n ученици, заклучуваме дека по секој пат од S ќе помине по еден ученик. Помеѓу множеството S_k на оние патишта од S чија крајна точка е $B_k(k,n-k)$ и множествто од сите варијации на 0 и 1 кои содржат точно k нули, постои биекција. Оттука следува дека $|S_k|=\binom{n}{k}$. Според тоа, на крајот од движењето во точките B_i, $i=0,1,2,...,n$ ќе има $\binom{n}{i}$, $i=0,1,2,...,n$ ученици, соодветно.

40. Нека $n\geq 3$ природен број. На кружницата се земени n точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Даден е жетон, кој од една од дадените точки во еден чекор се поместува во насока на движењето на стрелката на часовникот во соседната точка или во точката по соседната точка (т.е. имаме $2n$ дозволени чекори). Со a_n да го означиме бројот на начините, на кој кружницата,

без повторување на чекор, може да биде обиколена двапати со почеток и крај во фиксирана точка од дадените.

Докажи, дека $a_{n-1}+a_n = 2^n$ за секој $n\geq 4$.

Решение. Ќе докажеме, дека $a_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$. Тоа е доволно, бидејќи

$$a_{n-1}+a_n = \frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}+\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3} = 2^n.$$

Лема. За секој природен број n точно е равенството

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}2^k = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}.$$

Доказ. Ќе користиме индукција по n. Случаите $n=1$ и $n=2$ лесно се проверуваат. Нека $n=2m+1\geq 3$ е непарен број. Ако ја искористиме индуктивната претпоставка за $n=2m$ и $n=2m-1$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1-k}{k}2^k &= 1+\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-k}{k}2^k+\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-k}{k-1}2^k\\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{2m-k}{k}2^k+2\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m-1-k}{k}2^k\\ &= \frac{2^{2m+1}+1}{3}+\frac{2(2^{2m+1}-1)}{3}=\frac{2^{2m+2}-1}{3}.\end{aligned}$$

Индуктивниот чекор за $n=2m+2\geq 3$ се докажува аналогно, со што лемата е докажана. ■

Ќе го определиме бројот на начините кружницата да се обиколи двапати, организирајќи го броењето околу точките, кои се двапати посетени. Јасно е, дека две такви точки не можат да бидат соседни и дека има точно два начина (низи од чекори) да се стигне од една таква точка до следната таква точка (чекорите се само со должина 2 освен можда во краевите).

За $k\geq 1$ такви точки, меѓу кои нема соседни и без точката A, имаме 2^k начина за обиколување на кружницата без повторување на чекорите. Половината од тие можности води до двократно повторување на една и иста маршрута, па затоа бројот на начините е еднаков на 2^{k-1}. Имаме $\binom{n-k}{k}$ начини за избор на k точки (меѓу кои нема соседни и без точката A), што значи дека вкупниот број на начините е еднаков на

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}2^{k-1} = \frac{1}{2}[-1+\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}2^k] = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{6}-\frac{1}{2}.$$

Ако A е од точките кои се двапати посетени, тогаш имаме $\binom{n-k-1}{k-1}$ начини за избор, при што сега имаме 2^k начина за обиколување на кружницата без повторување на чекорите, што значи дека вкупниот број на начините е еднаков на

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k-1}{k-1}2^k = 2\sum_{k=0}^{[\frac{n-2}{2}]}\binom{n-k}{k}2^k = \frac{2(2^{n+1}+(-1)^n)}{3}.$$

На крајот, ако n е непарен имаме еден дополнителен начин двапати да ја обиколиме кружницата без двапати да посетиме ниту една точка (со чекор со должина 2), кој начин го запишуваме како $\frac{1-(-1)^n}{2}$.

Конечо, добиваме

$$\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{6}-\frac{1}{2}+\frac{2(2^{n+1}+(-1)^n)}{3}+\frac{1-(-1)^n}{2}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3},$$

со што задачата е решена.

41. Да ги разгледаме сите природни броеви чии записи во систем со основа 2 имаат 2013 цифри и содржат повеќе нули отколку единици. Нека n е бројот на тие броеви, а s е нивниот збир. Докажи дека записот на бројот $n+s$ во систем со основа 2 содржи повеќе нули отколку единици.

Решение. Почетната цифра на секој од разгледуваните броеви е 1 и бидејќи бројот на нулите е поголем од бројот на единиците, следува дека бројот на нулите е природен број кој припаѓа на интервалот $[1007, 2012]$. Според тоа,

$$n=\binom{2012}{1007}+\binom{2012}{1008}+...+\binom{2012}{2011}+\binom{2012}{2012}=\frac{2^{2012}-\binom{2012}{1006}}{2}$$
$$=2^{2011}-\frac{1}{2}\binom{2012}{1006}=2^{2011}-\binom{2011}{1005}.$$

За да го определиме s ќе го разгледаме бројот на единици во фиксирано место. Почетната цифра на сите броеви е единица. Да разгледаме произволно место на останатите. Без почетната цифра и разгледуваната цифра, на останатите 2011 места треба да имаме барем 1007 нули. Според тоа, тој број е еднаков на

$$\binom{2011}{1007}+\binom{2011}{1008}+...+\binom{2011}{2010}+\binom{2011}{2011}=2^{2010}-\binom{2011}{1006}=2^{2010}-\binom{2011}{1005}.$$

Затоа,

$$s=2^{2012}n+(2^{2010}-\binom{2011}{1005})\sum_{i=0}^{2012}2^i=2^{2012}n+(2^{2010}-\binom{2011}{1005})(2^{2012}-1),$$

од каде добиваме

$$n+s=2^{2011}-\binom{2011}{1005}+2^{2012}(2^{2011}-\binom{2011}{1005})+(2^{2010}-\binom{2011}{1005})(2^{2012}-1)$$
$$=2^{4023}+2^{4022}+2^{2010}-2^{2013}\binom{2011}{1005}$$
$$=2^{2013}(2^{2010}+2^{2009}-\binom{2011}{1005})+2^{2010}.$$

Бидејќи $n+s<2^{4024}$, бинарниот запис на $n+s$ има најмногу 4024 цифри, а од

$$n+s=2^{2013}(2^{2010}+2^{2009}-\binom{2011}{1005})+2^{2010}$$

следува дека последните 2012 од 2013 цифри се нули. Ако допуштиме, дека во бинарниот запис на $n+s$ има повеќе нули од единици, тогаш првите 2012 цифри треба да се единици. Број со такво својство е бројот

$$2^{2013}(1+2+...+2^{2010})+2^{2010}$$

и овој број е поголем од $n+s$, што е противречност.

8. ДВОЈНО ПРЕБРОЈУВАЊЕ

1. Нека се дадени множествата $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и $B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ и нека $S\subseteq A\times B$. Понатаму, нека $x_i=|\{(x,y)\in S \mid x=a_i\}|$, за секој $i=1,2,...,n$ и $y_j=|\{(x,y)\in S \mid y=b_j\}|$, за секој $j=1,2,...,m$. Докажи дека

$$|S|=\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{j=1}^{m} y_j\ . \tag{1}$$

Решение. Множествата $A_i=\{(x,y)\in S \mid x=a_i\}$, $i=1,2,...,n$ се по парови дисјунктни и важи $S=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Сега, од принципот на збир следува

$$|S|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|=\sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Аналогно се докажува дека $|S|=\sum_{j=1}^{m} y_j$, па затоа е точно равенството (1).

Коментар. Според задача 1, ако елементите на дадено множество X точно ги преброиме на два начина, тогаш мора да добиеме ист резултат. Оваа постапка во литературата е позната како *метод на двојно пребројување*.

2. Во едно друштво, третина од сите пензионери се шахисти, а четвртина од сите шахисти се пензионери. Дали во ова друштво има повеќе шахисти или пензионери?

Решение. Нека во друштвото има s шахисти и p пензионери. Да го определиме бројот на пензионери-шахисти. Од една страна, овој број е еднаков на третина од пензионерите, т.е. на $\frac{1}{3}p$, а од друга на четвртина од бројот на шахистите, т.е. на $\frac{1}{4}c$. Оттука добиваме $\frac{1}{3}p=\frac{1}{4}c$, т.е. $c=\frac{4}{3}p>p$, што значи дека во друштвото има повеќе шахисти од пензионери.

3. Во внатрешноста на n – аголник ($n\geq 3$) се дадени m точки, меѓу кои никои три не се колинеарни. Овие точки и темињата на n – аголникот се поврзани со отсечки кои не се сечат во внатрешни точки и го делат многуаголникот на триаголници. Определи го бројот на добиенте триаголници.

Решение. Нека k е бројот на добиените триаголници. Збирот на аглите на сите триаголници е еднаков на $k\cdot 180^\circ$. Секоја од избраните m внатрешни точки е теме на неколку триаголници. Збирот на сите агли на триаголниците чие едно теме е таа точка е еднаков на 360°. Бидејќи имаме m точки, заклучуваме дека збирот на овие агли во добиената конфигурација е еднаков на $m \cdot 360^\circ$. Збирот на преостанатите агли во најдената конфигурација е еднаков на збирот на аглите на $n-$аголникот, т.е. на $(n-2)\cdot 180^\circ$. Според тоа, збирот на сите агли е $m \cdot 360^\circ + (n-2)\cdot 180^\circ$. Конечно, од задача 1 следува

$$k \cdot 180^\circ = m \cdot 360^\circ + (n-2)\cdot 180^\circ,$$

од каде наоѓаме $k = 2m + n - 2$.

4. На едн натпревар 200 ученици решавале 6 задачи. Секоја задача ја решиле најмалку 120 ученици. Докажи дека постојат два ученика така што секоја задача ја решил барем еден од нив.

Решение. Да го препоставиме спротивното, дека за секои два ученика постои задача која ниту еден од нив не ја решил. Ги броиме тројките (u_1, u_2, z), каде u_1, u_2 се ученици кои не ја решиле задачата z. Од една страна, бројот на ваквите тројки е поголем или еднаков на бројот на сите парови ученици, што значи на $200 \cdot 199 = 39800$. Од друга страна, за секоја задача z, постојат најмногу 80 ученици кои не ја решиле, што значи најмногу $80 \cdot 79$ тројки. Според тоа, имаме најмногу $6 \cdot 80 \cdot 79 = 37920$ тројки од разгледуваниот вид, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

5. Сите ѕидови на еден полиедар се триаголници. Темињата на полиедарот се обоени во три бои. Докажи дека бројот на ѕидовите на кои се појавуваат сите три бои е парен.

Решение. За работ на полиедарот ќе велиме дека е разнобоен ако неговите крајни точки се разнобојни. Нека a_i е бројот на триаголниците во кои се појавуваат точно i бои, таков триаголник содржи k_i разнобојни рабови, каде $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 3$. Понатаму, бидејќи секој разнобоен раб припаѓа на точно на два триаголника (ѕида), ако вкупниот број на разнобојните рабови го помножиме со 2 го добиваме бројот $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 2a_2 + 3a_3$. Според тоа, $2a_2 + 3a_3 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$, од каде следува дека $a_3 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$, што и требаше да се докаже.

6. Докажи, дека

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Нека $m,n,k\in\mathbb{N}$ се такви што $k\le m+n$. Земаме две множества A и B такви што $|A|=m, |B|=n$ и $A\cap B=\varnothing$. Тогаш $|A\cup B|=m+n$, па затоа бројот на начините за избор на k елементи од множеството $A\cup B$ е еднаков на $\binom{m+n}{k}$.

Ќе го преброиме на друг начин бројот на начините на избор на k елементи од множеството $A\cup B$. Може да се случи да извадиме: 0 елементи од A, k од B; 1 елемент A, $k-1$ од B; ...; $k-1$ елемент од A, 1 од B; k елементи од A, 0 од B. Од принципот на производ следува дека бројот на начините на избор на i елементи од A и $k-i$ елементи од B е еднаков на $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$, па затоа од принципот на збир следува дека бројот на начините за избор на k елементи од множеството $A\cup B$ е еднаков на

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+...+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0},$$

што значи дека точно е равенството (1).

Втор начин. Д го разгледаме равенството

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n},$$

во кое на двете страни имаме еднакви полиноми. Од Њутновата биномна формула следува дека во полиномот на десната страна коефициентот пред x^k е еднаков на $\binom{m+n}{k}$. Понатаму, повторно од Њутновата биномна формула имаме

$$(1+x)^m(1+x)^n=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\cdot\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j,$$

па ако ги помножиме полиномите на десната страна во последното равенство и земеме предвид дека коефициентот пред x^k е еднаков на збирот од производите на коефициените пред x^i и x^{k-i}, за $i=0,1,2,...,k$ добиваме дека коефициентот пред x^k е еднаков на $\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+...+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$. Конечно, равенството (1) следува од претходните разгледувања и фактот дека два полиноми се еднакви ако имаат еднакви коефициенти пред соодветните степени.

7. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+...+\binom{n}{n}^2.$$

Решение. *Прв начин*. Определувајќи го коефициентот пред x^n во развоите на полиномите на двете страни на равенството

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$$

и користејќи го равенството $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, за $k=0,1,2,....,n$ добиваме

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+...+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+...+\binom{n}{n}^2. \qquad (1)$$

Втор начин. Нека имаме група имаме n момчиња и n девојчиња. Тогаш n деца можеме да избереме на $\binom{2n}{n}$. Од друга страна, при изборот на n деца може да има k момчиња и $n-k$ девојчиња и тоа може да се направи на $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ начини, каде $k=0,1,2,...,n$. Според тоа, точни се равенствата (1).

Забелешка. Бараното равенство следува од докажаното равенство во претходната задача за $m=n=k$.

8. Докажи, дека за секои природни броеви m,n,k точни се равенствата

$$\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\binom{n-1}{j-1}=\binom{n+m-1}{n}, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{k-1+j}{j}\binom{m+n-k-1-j}{n-j}=\binom{n+m-1}{n}. \qquad (2)$$

Решение. Нека S е множеството комбинации со повторување на елементите на множеството $A, |A|=m$ од класа n. За $j=1,2,...,m$ со S_j да го означиме подмножеството од множеството S кои ги содржи само оние комбинации со повторување во кои се појавуваат точно j различни елементи на множеството A. Според тоа $|S|=\binom{n+m-1}{n}$ и $|S_j|=\binom{m}{j}\binom{n-1}{j-1}$, $j=1,2,...,m$. Но, множествата S_j, $j=1,2,...,m$ се по парови дисјунктни и како $S=\bigcup_{j=1}^{m}S_j$, добиваме дека од претходните разгледувања и принципот на збир следува равенството (1).

Нека A и B се дисјунктни множества такви што $|A|=k, |B|=m-k$ и нека S е множеството од сите комбинации со повторување на множеството $A\cup B$ од класа n. За $j=1,2,...,m$ со S_j да го означиме подмножеството од множеството S кои ги содржи само оние комбинации со повторување во кои j пати се појавува елемент од множеството A, а $n-j$ пати се појавува елемент од множеството B. Тогаш

$$|S|=\binom{n+m-1}{n} \text{ и } |S_j|=\binom{k+j-1}{j}\binom{n-j+m-k-1}{n-j}, \quad j=1,2,...,m,$$

Но, множествата S_j, $j=1,2,...,m$ се по парови дисјунктни и како $S=\bigcup_{j=1}^{m}S_j$, добиваме дека од претходните разгледувања и принципот на збир следува равенството (2).

9. Докажи, дека за секој природен број n важи

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\cdot 2^{2n-2k}=\binom{4n}{2n}. \qquad (1)$$

Решение. Нека се дадени $2n$ црни и $2n$ бели топчиња означени со броевите од 1 до $2n$ и нека од сите $4n$ топчиња одеднаш се извлекуваат $2n$ топчиња. Со S да го означиме множеството од сите можни избори. Тогаш $|S|=\binom{4n}{2n}$. Нека S_k е множеството од сите избори такви што меѓу избраните топчиња има точно k парови кои се означени со ист број. Тогаш важи

$$|S_k|=\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{2n-2k}\cdot 2^{2n-2k}=\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\cdot\frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k)!}\cdot 2^{2n-2k}$$

$$=\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\cdot\frac{(2k)!}{k!k!}\cdot 2^{2n-2k}=\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\cdot 2^{2n-2k}.$$

Но, множествата S_k, $k=0,1,...,n$ се по парови дисјунктни и како $S=\bigcup_{k=0}^{n} S_k$, добиваме дека од претходните разгледувања и принципот на збир следува

$$\binom{4n}{2n}=|S|=\sum_{k=0}^{n}|S_k|=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\cdot 2^{2n-2k},$$

т.е. точно е равенството (1).

10. Интервалот $(0,20)$ е покриен со 13 отворени подинтервали такви што ниту еден од нив не е подмножество на унијата на преостанатите интервали. Докажи дека барем една од овие интервали има должина која е помала или еднаква на 3.

Решение. Нека претпоставиме дека должините на сите интервали се поголеми од 3. Подинтервалите да ги означиме со $I_1,I_2,...,I_{13}$. Формираме табела 19×13 во која редовите соодветствуваат на броевите 1, 2, ..., 19, а колоните на подинтервалите $I_1,I_2,...,I_{13}$. Во пресекот на $i-$тиот ред и $j-$тата колона ставаме 1 ако $i\in I_j$, а 0 во спротивно.

Ако некои три подинтервали имаат заедничка точка, тогаш едниот од нив е подмножество на другите два (провери!), што противречи на условот на задачата. Според тоа, секоја целобројна точка од 1 до 19 се наоѓа во најмногу два подинтервали, што значи дека во секој ред може да има најмногу две единици. Затоа во табелата може да има најмногу $2\cdot 19=38$ единици. Од друга страна, секој подинтервал содржи најмалку 3 целобројни точки, т.е. во секоја колона мора да има најмалку 3 единици, т.е. во табелата мора да има најмалку $3\cdot 13=39$ единици, што епротивречност. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

11. Нека $n \geq 4$ е парен број. Полињата на $n \times n$ табла се обоени во $\frac{n^2}{2}$ бои, по две во секоја боја. Докажи дека може да се постават n топови на полиња во n различни бои таков што никои два топа меѓусебно не се напаѓаат.

Решение. Првиот топ на таблата може да го поставиме произволно, т.е. на n^2 начини. Потоа, ако ги избришеме редот и колоната во кој сме го поставиле првиот топ, добиваме дека вториот топ може да го поставиме на $(n-1)^2$ начини. Продолжувајќи ја постапката, од принципот на производ следува дека вкупно имаме $n!^2$ распореди на n топови така што никои два меѓусебно не се напаѓаат.

За секоја боја B, бројот на начините на кои топовите може да се постават без меѓусебно да се напаѓаат така што два топа се на полиња обоени со бојата B е помал или еднаков на $n(n-1)\cdot(n-2)!^2$. Значи, бројот на распоредите на топовите кои меѓусебно не се напаѓаат и барем два топа се на истобојни полиња е помал или еднаков на $\frac{n^2}{2}\cdot n(n-1)\cdot(n-2)!^2$. Но,

$$n!^2 > \frac{n^2}{2}\cdot n(n-1)\cdot(n-2)!^2,$$

што значи дека постои барем еден распоред на топовите на полиња со различни бои таков што никои два топа меѓусебно не се напаѓаат.

12. Во прва година на едно училиште се запишале 90 ученици, секој од кои се познава со најмалку 30 други ученици. Докажи дека учениците може да се поделат во три класа од по 30 ученици така што секој ученик има најмалку еден познаник во својот клас.

Решение. Со A, B и C да ги означиме класовите. Класот A може да се формира на $\binom{90}{30}$ начини, а потоа класот B може да се формира на $\binom{60}{30}$ начини. Сега, од принципот на произво следува дека трите класа може да се формираат на $\binom{90}{30}\binom{60}{30}$ начини.

Сега да определиме бројот на начините на кои класовите може да се формираат така што некој ученик ќе нема ниту еден познаник во своето одделение. За секој ученик X, бројот на начините X нема ниту еден познаник во својот клас е помал или еднаков на $\binom{59}{29}\binom{60}{30}$. Вкупно имаме 90 ученици, што значи дека бројот на распоредите кои не ги исполнуваат условите на задачата е помал или еднаков на од $N = 90\binom{59}{29}\binom{60}{30}$. Но,

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{90}\cdot\left(\frac{90}{59}\cdot\frac{89}{58}\cdot\ldots\cdot\frac{61}{30}\right) > \frac{1}{90}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{30} > 1, \text{ т.е. } M > N,$$

од што следува дека постои најмалку еден распоред на учениците кој ги задоволува условите на задачата.

13. На еден универзитет има 10001 студент. Некои студенти формирале клубови (еден студент може да биде член во повеќе клубови). Некои клубови се групирале во здруженија (еден клуб може да биде во повеќе здруженија). Вкупно има k здруженија. Притоа се исполнети следниве услови:

i) Секој пар студенти припаѓа на точно еден клуб.

ii) За секој студент и секое здружение важи дека тој студент членува во точно еден клуб од тоа здружение.

iii) Секој клуб има непарен број студенти и клуб со $2m+1$ студент се наоѓа во точно m здруженија.

Определи ги сите можни вредности на k.

Решение. За подредената тројка (a,K,Z) ќе велиме дека прифатлива, ако a е студент, K е клуб и Z е здружение, при што $a\in K$, $K\in Z$.

Од една страна, за секој студент a и секое здружение Z според условот *ii*) постои точно еден клуб K таков што тројката (a,K,Z) е прифатлива. Затоа имаме $10001k$ прифатливи тројки.

Од друга страна, за секој клуб K нека со $|K|$ го означиме бројот на членовите на тој клуб. Според условот *iii*) K се наоѓа во точно $\frac{|K|-1}{2}$ здруженија. Значи, постојат точно $\frac{|K|(|K|-1)}{2}$ прифатливи тројки со K како втора координата. Нека G е множеството од сите клубови. Тоа значи дека имаме $\sum\limits_{K\in G}\frac{|K|(|K|-1)}{2}$ прифатливи тројки. Според условот *i*) овој број е еднаков на бројот парови од студенти, т.е. е еднаков на $10001\cdot 5000$. Затоа имаме

$$10001k=\sum_{K\in G}\frac{|K|(|K|-1)}{2}=10001\cdot 5000\,,$$

што значи дека $k=5000$.

14. Во квадратна $n\times n$ табла најмалку $n(\sqrt{n}+\frac{1}{2})$ полиња се обоени. Докажи дека постојат четири обоени полиња чии сентри се темиња на правоаголник.

Решение. Нека претпоставиме дека такви полиња не постојат. Да го определиме бројот N на парови обоени полиња кои се наоѓаат во ист ред. За секој пар колони K_1,K_2 постои најмногу еден ред во чии пресеци со двете колони се наоѓаат обоени полиња (ако постојат два такви реда, тогаш нивните пресеци со K_1 и K_2 определуваат правоаголник). Имаме $\binom{n}{2}$ парови колони, па затоа $N\le\binom{n}{2}$.

Сега броиме по редови. Ако во i – тиот ред има a_i обоени полиња, тогаш

$$a_1+a_2+...+a_n=M\ge n(\sqrt{n}+\tfrac{1}{2})\,.$$

Во i – тиот ред има $\binom{a_i}{2}$ парови обоени полиња, па затоа $N=\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2}$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\begin{aligned}\binom{n}{2} \geq N &= \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-a_i}{2} \geq \frac{1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\\ &= \frac{M(M-n)}{2n} \geq \frac{1}{2n}\cdot n(\sqrt{n}+\tfrac{1}{2})\cdot n(\sqrt{n}-\tfrac{1}{2})\\ &= \frac{n(4n-1)}{8} > \binom{n}{2},\end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

15. Нека $\boldsymbol{F}=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ е фамилија подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ која ги задоволува следниве услови:
    i) секои две различни множества од $\boldsymbol{F}$ имаат точно еден заеднички елемент,
    ii) секој елемент на $\{1,2,...,n\}$ се содржи во точно k множества од $\boldsymbol{F}$.

    Дали може n да е еднаков на 2023?

    Решение. На два начина ќе ги преброиме подредените тројки (x,A_i,A_j) каде x е елемент на подмножествата A_i и A_j ($i\neq j$). Секој елемент x се содржи во точно k множества од $\boldsymbol{F}$, па подмножествата A_i и A_j можеме да ги избереме на $k(k-1)$ начини. Според тоа, имаме $nk(k-1)$ тројки (x,A_i,A_j).

    Од друга страна, за секои две подмножества A_i и A_j елементот x е еднозначно определен, па затоа имаме $n(n-1)$ тројки (x,A_i,A_j).

    Според тоа, $nk(k-1)=n(n-1)$, од каде добиваме $n=k^2-k+1$. Но равенката $2023=k^2-k+1$ нема решение во множеството природни броеви, па затоа n не може да е еднаков на 2023.

16. Нека $S_n=\{1,2,...,n\}$. Со $P_n(k)$ го означуваме бројот на пермутации на множеството S_n кои имаат точно k фиксни точки ($k\geq 0, n\geq 1$). Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=n!$$

Решение. На секоја пермутација од множеството S_n ѝ придружуваме $n-$ торка $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ при што $a_i=1$ ако i е фиксна точка за таа пермутација и $a_i=0$ ако i не е фиксна точка. Од дефиницијата на бројот $P_n(k)$ следува дека постојат точно $P_n(k)$ $n-$ торки во кои има точно k координати кои се еднакви на 1. Според тоа, збирот $\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)$ е еднаков на бројот на единиците во сите можни $n!$ пермутации. Да фиксираме произволен број i, $1 \leq i \leq n$. Меѓу сите $n!$ пермутации, бројот на оние за кои $a_i = 1$ е $(n-1)!$. Затоа вкупниот број на сите единици во сите $n!$ пермутации изнаесува $n(n-1)!$, т.е. $\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$.

17. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и S е множество од n точки од рамнината такви што:
   a) било кои три точки од S не се колинеарни,
   b) за секоја точка P од S постојат најмалку k различни точки од S кои се еднакво оддалечени од P.

   Докажи дека
$$0 < k < \tfrac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. $k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$. Разгледуваме точка P од S. Постојат барем k точки од S, кои се еднакво оддалечени од P, па затоа постојат барем $\binom{k}{2}$ парови точки A, B за кои важи $\overline{AP} = \overline{BP}$. Бидејќи ова важи за секоја точка P од S, постојат барем $n\binom{k}{2}$ парови точки A, B такви што на симетралата на отсечката AB се наоѓа барем една точка од S. Притоа еден пар точки (A, B), односно (B, A) може да биде броен повеќе пати, по еднаш за секоја точка $Q \in S$ таква што $\overline{AQ} = \overline{BQ}$.

Од претпоставката $k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ добиваме
$$\begin{aligned} n \cdot \binom{k}{2} &= n\frac{k(k-1)}{2} \geq \tfrac{n}{2}(\sqrt{2n} + \tfrac{1}{2})(\sqrt{2n} - \tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{n}{2}(2n - \tfrac{1}{4}) = n(n - \tfrac{1}{8}) \\ &> n(n-1) = 2\binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Меѓу точките од S има точно $\binom{n}{2}$ различни парови, па затоа ќе постои еден пар точки A, B кој што е броен барем три пати, односно постојат различни точки $P_1, P_2, ..., P_m$, $m > 2$ такви што $\overline{AP_i} = \overline{BP_i}$, $i = 1, 2, ..., m$. Тие лежат на симетралата на отсечката AB. Овие точки $P_1, P_2, ..., P_m$, $m > 2$ се колинеарни што противречи на условот а) на задачата.

18. На еден натпревар учествувале a натпреварувачи, кои биле оценувани од b судии, каде $b \geq 3$ е непарен број. Секој судија го оценува секој натпреварувач со „положил“ или „не положил“. Нека k е број, таков што оценките на

било кои двајца судии се совпаѓаат кај најмалку k натпреварувачи. Докажи дека $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Решение. За секој $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ нека i - тиот натпреварувач добил x_i оценки „положил“ и y_i оценки „не положил“. Тогаш $x_i + y_i = b$ и бројот на парови од судии кои го оцениле исто овој натпреварувач е

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} = \frac{1}{2}(2x_i^2 - 2bx_i + b^2 - b)$$

Функцијата $2x^2 - 2bx + b^2 - b$ е парабола и таа прима најмала вредност во темето $x = \frac{b}{2}$. Но b е непарен природен број, па затоа $\frac{b}{2}$ не е цел број, а x_i е цел број. Затоа изразот $2x_i^2 - 2bx_i + b^2 - b$ го достигнува својот минимум во природните броеви $\frac{b-1}{2}$ или $\frac{b+1}{2}$. Значи,

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \geq \binom{\frac{b-1}{2}}{2} + \binom{b-\frac{b-1}{2}}{2} = \frac{\frac{b-1}{2}(\frac{b-1}{2}-1)}{2} + \frac{\frac{b+1}{2}(\frac{b+1}{2}-1)}{2} = \frac{1}{4}(b-1)^2 .$$

Сега, ако ги собереме горните неравенства за $i = 1, 2, \dots, a$ добиваме дека бројот на поклопувањата на паровите судии кај сите a натпреварувачи е еднаков на

$$\sum_{i=1}^{a} \left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right) \geq \frac{a(b-1)^2}{4} .$$

Бидејќи секој од $\binom{b}{2}$ паровите судии се сложуваат кај најмалку k натпреварувачи, вкупниот број на поклопување е најмалку $k\binom{b}{2}$. Конечно, го добиваме неравенството

$$k\binom{b}{2} \geq \sum_{i=1}^{a} \left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right) \geq \frac{a(b-1)^2}{4} ,$$

кое е еквивалентно со неравенството кое што требаше да се докаже.

19. Нека $\mathbf{F}$ е множество, чии елементи се подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ и кои ги имаат следниве својства:

1) Ако $A \in \mathbf{F}$, тогаш $|A| = 3$.

2) Ако $A, B \in \mathbf{F}$ и $A \neq B$, тогаш $|A \cap B| \leq 1$.

Нека $f(n)$ е максималната вредност на $|\mathbf{F}|$ за сите такви множества $\mathbf{F}$. Докажи дека за $n \geq 3$ важи

$$\frac{n^2-4n}{6} \leq f(n) \leq \frac{n^2-n}{6} .$$

Решение. Нека $\mathbf{F}$ е произволна фамилија од триелементни подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ која ги има саканите својства. Секој $A \in \mathbf{F}$ има $\binom{3}{2} = 3$ двоелементни подмножества, при што заради 2) за $A, B \in \mathbf{F}$, $A \neq B$

не е можно да содржат едно исто двоелементно подмножество, што значи дека различните A и B генерираат различни двоелементни подмножества. Тоа значи, дека множествата од $\mathbb{F}$ заедно содржат $3|\mathbb{F}|$ различни двоелементни подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Значи,

$$3|\mathbb{F}|\le \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}, \text{ т.е. } f(n)\le \frac{n^2-n}{6}.$$

За левото неравенство е потребна конкретна конструкција на множество со најмалку $\frac{n^2-4n}{6}$ елементи за кои се исполнети условите 1) и 2). Нека $\mathbb{F}_0$ е множеството од оние триелементни подмножества $\{a,b,c\}$ на $\{1,2,...,n\}$ за кои важи $a+b+c=n$ или $a+b+c=2n$. Секои две такви множества имаат најмногу еден заеднички елемент. Навистина, нека $a+b+c_1\in\{n,2n\}$ и $a+b+c_2\in\{n,2n\}$. Ако $c_1\ne c_2$, тогаш $|c_1-c_2|=2n-n=n$, што не е можно бидејќи $c_1,c_2\in\{1,2,...,n\}$. Значи, за множеството $\mathbb{F}_0$ се исполнети условите 1) и 2), па затоа $f(n)\ge|\mathbb{F}_0|$. Останува оддолу да го оцениме $\mathbb{F}_0$. Нека $a,b,c\in\mathbb{F}_0$. За бројот a имаме n можности, а при фиксирано a за b имаме најмалку $n-4$ можности (единствени ограничувања за b се $1\le b\le n$, $b\ne a$, $b\ne\frac{n-a}{2}$, $b\ne\frac{2n-a}{2}$, $b\ne n-2a$). Всушност бираме подредени тројки (a,b,c) за кои $\{a,b,c\}\in\mathbb{F}_0$. Но, тројката (a,b,c) има $3!=6$ пермутации и затоа секој елемент на $\mathbb{F}_0$ се брои шест пати. Според тоа, $6|\mathbb{F}_0|\ge n(n-4)$, од каде следува дека $f(n)\ge|\mathbb{F}_0|\ge\frac{n^2-4n}{6}$.

20. На еден математички натпревар учениците решавале 6 задачи. Се покажало дека секој пар задачи бил решен од повеќе од $\frac{2}{5}$ од учениците и дека не постои ученик кој ги решил сите 6 задачи. Докажи, дека постојат најмалку два ученика такви што секој од нив решил точно 5 задачи.

Решение. Нека имало n ученици, од кои a_i решиле точно i задачи, што значи дека $a_0+...+a_5=n$. Ќе го определиме бројот N на парови (C,P), каде C е ученик кој го решил парот задачи P. Секој од 15-те парови задачи го решиле барем $\frac{2n+1}{5}$ ученици, па затоа $N\ge 15\cdot\frac{2n+1}{5}=6n+3$. Од друга страна, a_i ученици решиле $\frac{i(i-1)}{2}$ парови, па затоа

$$\begin{aligned}6n+3\le N&\le a_2+3a_3+6a_4+10a_5\\&=6n+4a_5-(3a_3+5a_2+6a_1+6a_0)\\&\le 6n+4.\end{aligned}$$

Според тоа, $a_5\ge 1$.

Да претпоставиме дека $a_5 = 1$. Тогаш мора да важи $N = 6n + 4$, што е можно само ако 14 парови задачи решиле точно $\frac{2n+1}{5}$ ученици, а преостанатиот пар (да го наречеме *посебен*) $\frac{2n+1}{5} + 1$ ученици. Притоа $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, т.е. победникот решил 5 задачи (да кажеме дека не ја решил задачата *t*), а сите останати решиле по 4 задачи.

Сега да го определиме бројот M_p на парови (C, P) во кои *P* содржи дадена задача *p*. Нека b_p е бројот на учениците кои ја решиле *p*. Тогаш $M_t = 3b_t$ (секој од b_t ученици решил три пара задачи кои ја содржат *t*) и $M_p = 3b_p + 1$ за $p \neq t$ (победникот решил четири такви пара). Од друга страна, секој од петте парови кои ја вклучуваат *p* го решиле $\frac{2n+1}{5}$ или $\frac{2n+1}{5} + 1$ ученици, па затоа $M_p = 2n + 2$ ако посебниот пар ја содржи *p*, односно $M_p = 2n + 1$ во спротивно. Значи $M_t = 3b_t = 2n + 1$ или $2n + 2$, па затоа $2n + 1 \equiv 0$ или $2 (\mathrm{mod}\, 3)$. Но, ако $p \neq t$ е задача која не е во посебниот пар, имаме $M_p = 3b_p + 1 = 2n + 1$, па е $2n + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, што е контрадикција.

21. Во група од n луѓе секој познава точно k членови на групата. Секои двајца кои се познаваат имаат точно l заеднички познаници, а секои двајца кои не се познаваат имаат точно m заеднички познаници. Определи ја врската меѓу k, l, m, n.

Решение. На два начина ќе ги преброиме тројките (a, b, c) во кои a ги познава b и c, но b не го познава c.

Лицето a може да се избере на n начини, а лицето b на k начини. Меѓу познаниците на a, еден е b, и l познаници на a го познаваат b, а преостанатите $k - l - 1$ не го познаваат b, т.е. за c имаме $k - l - 1$ можност. Според тоа, вкупниот број тројки (a, b, c) е еднаков на $nk(k - l - 1)$.

Од друга страна, b може да се избере на n начини, c на $n - k - 1$ налини (толку ималуѓе кои не го познаваат b), а a како заеднички познаник на b и c на m начини. Оттука добиваме дека вкупниот број тројки (a, b, c) е еднаков на $nm(n - k - 1)$.

Конечно, $nk(k - l - 1) = nm(n - k - 1)$, т.е. $k(k - l - 1) = m(n - k - 1)$.

22. Нека n е природен број и S е множеството од сите точки (x, y), каде x и y се природни броеви и $x \leq n, y \leq n$. Нека $\mathbf{T}$ е множеството од сите квадрати со темиња од S. Со a_k, $k \geq 0$ да го означиме бројот на паровите

точки од S, кои се темиња на точно k квадрати од $\mathbf{T}$. Докажи дека $a_0 = a_2 + 2a_3$.

Решение. Бидејќи $a_k = 0$, за $k > 3$, бројот на паровите различни точки од S е еднаков на $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \binom{n^2}{2}$. Бројот на квадратите од $\mathbf{T}$, чии страни се паралелни со координатните оски и имаат должина k е еднаков на $(n-k)^2$. Секој од тие квадрати содржи $k-1$ квадрати чии темиња лежат на неговите страни и чии страни се паралелни со координатните оски. Според тоа, бројот на сите квадрати од $\mathbf{T}$ е еднаков на

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)j^2 = n\sum_{j=1}^{n-1} j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} j^3 = n\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Од друга страна, ако земеме предвид дека темињата на секој квадрат генерираат 6 парови точки од S, добиваме дека бројот на сите квадрати од $\mathbf{T}$ е еднаков на $\frac{a_1+2a_2+3a_3}{6}$. Според тоа,

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \frac{n^2(n^2-1)}{2} = \binom{n^2}{2} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3,$$

од каде следува дека $a_0 = a_2 + 2a_3$.

23. Нека n е природен број. На една конференција учествуваат $15n$ луѓе кои комуницираат на 5 јазици. Се покажало дека на секој пар различни јазици може да разговараат точно $6n$ учесници, а на секоја тројка различни јазици може да разговараат точно $3n$ учесници. Докажи дека секои двајца учесници на конеференцијата може да се разберат на некој од овие јазици, како и дека постои јазик кој го говорат најмалку $10n$ учесници на конференцијата.

Решение. Со a_i да го означиме бројот на учесниците на конференцијата кои го говорат i јазици од споменатите 5 јазици ($0 \le i \le 5$). Точно е равенството $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15n$. Бидејќи човекот кој говори i јазици знае $\binom{i}{2}$ парови јазици, добиваме $\binom{2}{2}a_2 + \binom{3}{2}a_3 + \binom{4}{2}a_4 + \binom{5}{2}a_5 = \binom{5}{2}6n$, што значи дека $a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 = 60n$. Слично, разгледувајќи ги тројките јазици, наоѓаме $\binom{3}{3}a_3 + \binom{4}{3}a_4 + \binom{5}{3}a_5 = \binom{5}{3}3n$, т.е. $a_3 + 4a_4 + 10a_5 = 30n$. Ако од добиените равенки ги елиминираме a_3 и a_4, добиваме $2a_0 + 2a_1 + a_2 + 2a_5 = 0$, па затоа $a_0 = a_1 = a_2 = a_5 = 0$. Сега, добиваме $a_3 = 10n$ и $a_4 = 5n$, од каде следува првото тврдење.

Нека b_i гоозначиме бројот на учесниците кои го говорат $i-$тиот јазик. Тогаш

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 50n,$$

па затоа $b_i \geq 10n$ за некој i.

24. Нека $A_1, A_2, ..., A_k$ се подмножества од множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што $|A_i \cap A_j| = 1$ за секои $i \neq j$. Докажи дека $k \leq n$.

Решение. Да претпоставиме дека $k > n$. На парот (i, j) за $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ му придружуваме број $a_{ij} = 0$ ако $i \in A_j$ и $a_{ij} = \frac{|A_j|}{n-|A_j|}$ во спротивно.

За фиксирано j важи $\sum_i a_{ij} = |A_i|$, па затоа $\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_j |A_j|$.

Сега, нека n_i е бројот на подмножествата кои го содржат i. Ако $i \notin A_j$, тогаш секое од овие n_i множества го сече A_j точно во една точка различна од i, при што сите овие точки се различни. Според тоа, A_j содржи најмалку n_i елементи, односно $n_i \leq |A_j|$, па од претпоставката $k > n$ следува неравенството $\frac{n_i}{k-n_i} < \frac{|A_j|}{n-|A_j|}$. Затоа за фиксиран i во збирот $\sum_j a_{ij}$ има $k - n_i$ ненулти собироци кои се поголеми од $\frac{n_i}{k-n_i}$, па е $\sum_j a_{ij} > n_i$. Оттука добиваме

$$\sum_{i,j} a_{ij} > \sum_i n_i = \sum_j |A_j|,$$

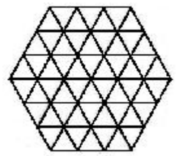
што епротивречност.

25. Нека за природниот број n постои пресликување $f:\{0,1\}^n \to \{1,2,...,n\}$ со следново својство: ако низите $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ се разликуваат во точно две места, тогаш $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$. Докажи дека $n = 2^k$ за некој k.

Решение. Да ги определиме сите парови $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ такви што $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се разликуваат во точно едно место и $f(\mathbf{y}) = 1$.

Бидејќи за секој $\mathbf{y}$ за кој важи $f(\mathbf{y}) = 1$ низата $\mathbf{x}$ може да се избере на n начини, бројот парови $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ е делив со n. Од друга страна, за секој $\mathbf{x}$ и $i = 1,2,...,n$, да ја разгледаме низата $\mathbf{x}^i$ која од $\mathbf{x}$ се разликува само на $i-$тото место. Според условот на задачата, сите $f(\mathbf{x}^i)$ се различни за $i = 1,2,...,n$, па затоа $f(\mathbf{x}^i) = 1$ за точно едно i. Според тоа, за секој $\mathbf{x}$, низата $\mathbf{y}$ може да се избере точно на еден начин, па затоа бројот на паровите е еднаков на 2^n. Значи, $n \mid 2^n$, што значи $n = 2^k$ за некој k.

26. Правилен шестаголник со должина на страна 3 е поделен на 54 рамнострани триаголници со должина на страна 1 (цртеж десно). Добиените 37 темиња на триаголниците се означени со броевите 1, 2, ..., 37 во произволен редослед. За единичниот триаголник ќе велиме дека е „часовен“ ако трите броја со кои се означени неговите темиња се распоредени во растечки редослед во насока на движењето на стрелката на часовникот. Докажи дека има најмалку 19 часовни триаголници.



Решение. Добиената конфигурација содржи 90 страни на малите триаголници, од кои 18 се на работ на шестаголникот, а 72 се внатре во него. Да ги разгледаме паровите (T,a), каде T е триаголник и a е една од неговите страни, кои се вкупно $3\cdot 54=162$. За парот (T,a) ќе велиме дека е „добар“ ако движејќи се по a од помалиот кон поголемиот број значи движење во насока на движењето на стрелката на часовниот во триаголникот T, во спротивно ќе велиме дека парот (T,a) е „лош“. Ако страната a е внатре во триаголникот и припаѓа на триаголниците T_1,T_2, тогаш точно еден од паровите (T_1,a) и (T_2,a) е добар, што дава 72 добри парови. Понатаму, најмалку уште еден од паровите (T,a) каде a е на работ на шестаголникот е добар (Зошто?). Значи, имаме најмалку 73 добри парови.
Но, ако триаголникот е часовен, тој определува точно два добри парови, а во спротивно определува точо еден добар пар. Според тоа, ако имаме k часовни триаголници, тогаш бројот на добрите парови е $2k+(54-k)=54+k\geq 73$, од каде добиваме $k\geq 19$.

27. Нека $n\geq 3$ е даден природен број. Секое поле од табла $n\times n$ е обоено со една од $[\frac{(n+2)^2}{3}]$ бои, при што секоја боја е употребена најмалку еднаш. Докажи дека постои правоаголник 1×3 или 3×1 кој се сотои од три полиња кои се обоени со три различни бои.

Решение. Секој 1×3 правоаголник е определен со изборот на горното лево теме, а тој избор може да се направи на $n(n-2)$ начини. Значи, бројот на 1×3 правоаголниците е $n(n-2)$. Од причина на симетрија и бројот на 3×1 е $n(n-2)$, т.е. имаме $2n(n-2)$ правоаголници 1×3 или 3×1. Ќе ги преброиме правоаголниците во кои иста боја се појавува најмалку два пати.
Со t_B да го означиме бројот на полињата обоени со бојата B, а со p_B бројот на правоаголниците 1×3 или 3×1 кои содржат најмалку две полиња обоени со бојата B. Со индукциа се докажува дека во колона или ред кој

содржи $s > 0$ полиња обоени со бојата B, има најмногу $\frac{3s}{2} - 1$ такви правоаголници (Докажи!). Со собирање по сите редови и колони во кои се појавува бојата B добиваме дека $p_B \leq 3t_B - u - v$, каде u и v се соодветно броевите на редовите и колоните кои ја содржат бојата B. За $u + v \geq 3$ важи $p_B \leq 3(t_B - 1)$, а ова важи и за $u + v = 2$ бидејќи тогаш $t_B = 1$ и $p_B = 0$.

Ако $B_1, B_2, ..., B_r$ се дадените бои ($r = [\frac{(n+2)^2}{3}]$), имаме $t_{B_1} + t_{B_2} + ... + t_{B_r} = n^2$, па од претходно изнесеното следува

$$
\begin{aligned}
p_{B_1} + p_{B_2} + ... + p_{B_r} &\leq 3(t_{B_1} - 1) + 3(t_{B_2} - 1) + ... + 3(t_{B_r} - 1) \\
&= 3n^2 - 3r \leq 3n^2 - (n+2)^2 + 1 \\
&= 2n^2 - 4n - 3 < 2n(n-2).
\end{aligned}
$$

Според тоа, постои правоаголник во кој ниту една боја не се појавува два или повеќе пати.

9. ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

1. Нека $a_1 = 2, a_2 = 3$, $a_{2n} = a_{2n-1} + 2a_{2n-2}$ и $a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n-1}$, за $n \in \mathbb{N}$. Определи ја формулата за a_n.

Решение. Ако ги собереме $a_{2n} = a_{2n-1} + 2a_{2n-2}$ и $a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n-1}$ добиваме

$$a_{2n+1} = 2a_{2n-1} + 2a_{2n-2} = 2a_{2n-1} + 2(a_{2n-1} - a_{2n-3}) = 4a_{2n-1} - 2a_{2n-3},$$

т.е.

$$a_{2n+1} = 4a_{2n-1} - 2a_{2n-3}. \qquad (1)$$

Ако ги собереме $a_{2n} = a_{2n-1} + 2a_{2n-2}$ и $a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n-1}$, добиваме

$$2a_{2n} = a_{2n+1} + 2a_{2n-2}$$

и како $a_{2n+2} = a_{2n+1} + 2a_{2n}$ ако ги одземеме последните равенства добиваме

$$a_{2n+2} = 4a_{2n} - 2a_{2n-2}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$a_n = 4a_{n-2} - 2a_{n-4}, \text{ за } n \geq 5 \text{ и } a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 11.$$

2. Колку има стоцифрени природни броеви во чиј декаден запис се појавуваат само непарни цифри такви што разликата на секои две соседни цифри е еднаква на 2?

Решение. Со $x_k(n)$ да го означиме бројот на $n-$цифрените броеви чија прва цифра е k и секои две соседни цифри се разликуваат за 2. Секој таков број се добива со додавање од лево на цифрата k на $(n-1)-$цифрен број со прва цифра $k-2$ или $k+2$ (ако тоа навистина се цифри), па имаме

$$x_k(n) = x_{k-2}(n-1) + x_{k+2}(n-1),$$

при што дефинираме

$$x_{-1}(n) = x_{11}(n) = 0 \text{ и } x_1(1) = x_3(1) = x_5(1) = x_7(1) = x_9(1) = 1.$$

Со индукција лесно се докажува дека $x_1(n) = x_9(n)$ и $x_3(n) = x_7(n)$, за секој n. Да означиме $a_n = x_1(n), b_n = x_3(n), c_n = x_5(n)$. Од претходно изнесеното следува

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1 \text{ и } a_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = a_n + c_n,\ c_{n+1} = 2b_n.$$

Оттука следува

$$a_{n+1} = b_n = a_{n-1} + 2b_{n-2} = 3a_{n-1}$$

и слично

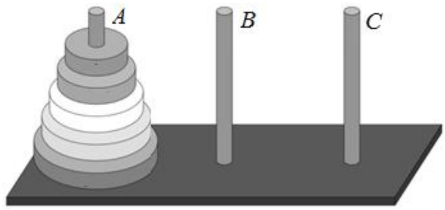
$$b_{n+1} = 3b_{n-1} \text{ и } c_{n+1} = 3c_{n-1}.$$

Сега од $a_2 = 1$ и $b_2 = c_2 = 2$ следува $a_{100} = 3^{49}$ и $b_{100} = c_{100} = 2 \cdot 3^{49}$.

Конечно, стоцифрени броеви со саканото својство има

$$2a_{100} + 2b_{100} + c_{100} = 8 \cdot 3^{49}.$$

3. (*Ханојски кули*). На еден од три стапа A, B, C, на пример A, се наоѓаат n дискови со различна големина ставени така што секој диск (освен најдолниот) е помал од дискот под него (види цртеж). Сите дискови треба да ги префрлиме на стапот B така што таме ќе се наоѓаат во иста полжба. Притоа дисковите се пренесуваат од стап на стап така што секој пат се пренесува само еден диск и никогаш поголем диск не се става над помал диск. Во пренесувањето може да се користи стапот C. Најди формула за потребниот најмал број преноси дисковите од A да се наредат на B и определи го тој број.



Решение. Нека a_n е потребниот најмал број за преместување на дисковите од стапот A на стапот B, Очигледно $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$. Нека $n \geq 2$. Сега, за од A да го извадиме $n-$тиот (најдолниот) диск, претходно мораме да ги преместиме останатите $n-1$ дискови на B и C. Бидејќи $n-$тиот диск не смее да се стави над некој помал диск, односно мора да биде ставен прв на стапот B, претходно мора првите $n-1$ дискови да ги преместиме на стапот C. За тоа се потребни a_{n-1} преместувања. Потоа можеме $n-$тиот диск да го ставиме на стапот B, со што имаме $a_{n-1}+1$ преместувања. Сега треба преостанатите $n-1$ дискови од стапот C да ги пренесеме на стапот B за што ни се потребни $a(n-1)$ преместувања. Според тоа, важи

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1.$$

Сега, последователно добиваме:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 1 + 2 = 2^2(2a_{n-3} + 1) + 1 + 2 \\ &= 2^3 a_{n-3} + 1 + 2 + 2^2 = \dots = 2^n a_0 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1. \end{aligned}$$

4. Нека се дадени првите k членови $x_0, \dots, x_{k-1}$ на низата $\{x_n\}$. Функционалната врска

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n), \qquad (1)$$

со која секој член на низата $\{x_n\}$ се изразува со помош на k претходни, се нарекува *диференцна (рекурзивна) равенка од* k *– ти ред.*

За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е *решение на диференцната равенка* (1) ако нејзините членови ја задоволуваат функционалната врска (1). Релацијата со која се добиваат сите низи кои се решенија на диференцната равенка (1) ја нарекуваме *општо решение на диференцната равенка* (1).

Првите k членови $x_0,...,x_{k-1}$ на низата $\{x_n\}$ ги нарекуваме *почетни услови на диференцната равенка* (1).

Нека $P,Q:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Диференцната равенка од видот

$$x_{n+1}+[P(n)-1]x_n=Q(n)\,, \tag{2}$$

со почетен услов x_0, ја нарекуваме *линеарна диференцна равенка од прв ред.* Ако, $Q(n)=0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш диференцната равенка ја нарекуваме *хомогена,* а во спротивно ја нарекуваме *нехомогена.*

Докажи, дека ако $P(n)\neq 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш општото решение на хомогената линеарна диференцна равенка

$$x_{n+1}+[P(n)-1]x_n=0\,, \tag{3}$$

е дадено со

$$x_n=C\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)]\,, \tag{4}$$

каде C е произволна константа.

Решение. Ако $x_0=0$, тогаш од (3) следува дека $x_n=0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, па затоа општото решение на (3) може да се запише во видот (4), при $C=0$.

Нека претпоставиме дека $x_0\neq 0$. Тогаш, од условот на задачата и од (3) следува дека $x_n\neq 0$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Ако во (3) последователно за n земеме вредности $0,1,...,k-1$ ги добиваме равенствата

$$\begin{aligned} x_1&=[1-P(0)]x_0\\ x_2&=[1-P(1)]x_1\\ &\dots\dots\dots\dots\\ x_k&=[1-P(k-1)]x_{k-1}\end{aligned} \tag{5}$$

Ако од првото равенство го замениме x_1 во второто, а потоа x_2 во третото итн. го добиваме равенството

$$x_k=x_0\prod_{i=0}^{k-1}[1-P(i)]\,,$$

кое е од видот (4), за $C=x_0$.

5. Реши ја диференцната равенка

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}\,,\ a_0 = a_1 = 1\,.$$

Решение. Ќе докажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи равенството

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}\,. \tag{1}$$

За $n=1$ имаме $a_1 = \frac{a_0}{1}$, т.е. точно е равенството (1). Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $a_k = \frac{a_{k-1}}{k}$. Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$k(k+1)a_{k+1} = k(k-1)a_k - k(k-2)a_k\,,$$

т.е. $(k+1)a_{k+1} = a_k$ од каде добиваме $a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$, па од принципот на математичка индукција следува дека равенството (1) важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Конечно, од задача 4 следува дека $a_n = \frac{1}{n!}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Забелешка. Формулата $a_n = \frac{1}{n!}$ може да се докаже и со помош на индукција користејќи го равенството (1).

6. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1} - x_n = R(n)\,. \tag{1}$$

Решение. Ако во (1) последователно ставиме $n = 0,1,2,...,k-1$ добиваме

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= R(0),\\ x_2 - x_1 &= R(1),\\ &\dots\dots\dots\\ x_k - x_{k-1} &= R(k-1) \end{aligned} \tag{2}$$

Со собирање на левите и десните страни на равенствата (2) добиваме

$$x_k = x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} R(i)\,,$$

што значи дека општото решение на равенката (1) е дадено со

$$x_n = C + \sum_{i=0}^{n-1} R(i)\,.$$

7. Реши ја диференцната равенка

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2nx_{n-1}+1}$$

со почетен услов $x_1 = \frac{1}{2}$.

Решение. Од условот на задачата следува $x_i > 0$, па затоа

$$x_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{x_{n-1}}}\,. \tag{1}$$

Ја воведуваме замената $y_n = \frac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$ и од (1) добиваме

$$y_n - y_{n-1} = 2n .$$

Бидејќи $y_1 = 2$ од задача 6 следува дека $y_n = n(n+1)$, што значи дека $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

8. Докажи, дека ако $P(n) \neq 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш општото решение на нехомогената линеарна диференцна равенка

$$x_{n+1} + [P(n)-1]x_n = Q(n), \qquad (1)$$

е дадено со

$$x_n = \Big(C + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q(j)}{\prod_{i=0}^{j}[1-P(i)]}\Big)\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)], \qquad (2)$$

каде C е произволна константа.

Решение. Нека ставиме $x_n = y_n \prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)],\ n = 0,1,\dots$. Со замена во (1) ја добиваме диференцната равенка

$$y_{n+1}\prod_{i=0}^{n}[1-P(i)] + y_n[P(n)-1]\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)] = Q(n),$$

која е еквивалентна на равенката

$$y_{n+1} - y_n = \frac{Q(n)}{\prod_{i=0}^{n}[1-P(i)]} .$$

Од задача 6 следува дека општото решение на последната равенка е дадено со

$$y_n = C + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q(j)}{\prod_{i=0}^{j}[1-P(i)]} .$$

Конечно, ако замениме во $x_n = y_n \prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)]$ добиваме дека општото решение на равенката (1) е дадено со (2).

9. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1} - ax_n = Q(n),\ a \in \mathbb{R} \text{ и } Q:\mathbb{N} \to \mathbb{R} .$$

Решение. Од задача 8 следува дека општото решение на дадената диференцна равенка е

$$x_n = \Big(C + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q(j)}{a^{j+1}}\Big)a^n = Ca^n + \sum_{j=0}^{n-1} Q(j)a^{n-j-1},\ C \in \mathbb{R} .$$

10. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+1} = \frac{1}{16}(1+4a_n + \sqrt{1+24a_n}),$$

со почетен услов $a_1 = 1$.

Решение. Бидејќи $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, можеме да земеме $b_n^2 = 1+24a_n$ каде $b_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Притоа, $b_1 = 5$ и важи $a_n = \frac{b_n^2-1}{24}$, па затоа

$$\frac{b_{n+1}^2-1}{3} = \frac{1}{2}(1+\frac{b_n^2-1}{6}+b_n), \text{ т.е. } b_{n+1}^2 = \frac{b_n^2+6b_n+9}{4} = (\frac{b_n+3}{2})^2.$$

Според тоа, $b_{n+1} = \frac{b_n+3}{2}$ и $b_1 = 5$. Понатаму,

$$b_{n+1} = \frac{b_n+3}{2} = \frac{\frac{b_{n-1}+3}{2}+3}{2} = \frac{b_{n-1}+3+3\cdot 2}{2^2} = \frac{\frac{b_{n-2}+3}{2}+3+3\cdot 2}{2^2} = \frac{b_{n-2}+3+3\cdot 2+3\cdot 2^2}{2^3}$$

$$= \dots = \frac{b_1+3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\dots+3\cdot 2^{n-1}}{2^n} = \frac{5+3(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})}{2^n} = \frac{3\cdot 2^n+2}{2^n}$$

т.е.

$$b_n = \frac{2+3\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}}, \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

Конечно,

$$a_n = \frac{1}{24}((\frac{2+3\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}})^2 - 1), \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

11. Нека $P, Q, R : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Диференцната равенка од видот

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = R(n), \tag{1}$$

со почетен услов x_0, ја нарекуваме *линеарна диференцна равенка од втор ред*. Ако, $R(n) = 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш диференцната равенка ја нарекуваме *хомогена*, а во спротивно ја нарекуваме *нехомогена*.
Нека е дадена линеарната хомогена диференцна равенка од втор ред

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = 0, \tag{2}$$

Докажи, дека ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две нејзини решенија, тогаш, за секои $A, B \in \mathbb{C}$ низата $\{A\cdot a_n + B\cdot b_n\}$ е решение на (2).

Решение. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две решенија на равенката (2) и $A, B \in \mathbb{C}$. Имаме,

$$\begin{aligned}(Aa_{n+2} + Bb_{n+2}) + P(n)(Aa_{n+1} + Bb_{n+1}) + Q(n)(Aa_n + Bb_n) =\\ = A[a_{n+2} + P(n)a_{n+1} + Q(n)a_n] + B[b_{n+2} + P(n)b_{n+1} + Q(n)b_n]\\ = A\cdot 0 + B\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

што значи дека $\{A\cdot a_n + B\cdot b_n\}$ е решение на (2).

12. За решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на линеарната хомогена диференцна равенка

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = 0 \tag{1}$$

ќе велиме дека се *пропорционални* ако постои $A\in\mathbb{C}$ таков што $a_n = Ab_n$, за секој $n\geq 0$. Во спротивен случај ќе велиме дека решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се *непропорционални*. Докажи, дека

а) Решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на хомогената равенка (1) се пропорционални ако и само ако $a_0 : b_0 = a_1 : b_1$.

б) Решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на хомогената равенка (1) се непропорционални ако и само ако $a_0 : b_0 \neq a_1 : b_1$.

Решение. а) Ако решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се пропорционални, тогаш $a_0 = Ab_0$ и $a_1 = Ab_1$, па затоа $a_0 : b_0 = A = a_1 : b_1$.

Обратно, нека $a_0 : b_0 = a_1 : b_1 = A$. Тогаш, $a_0 = Ab_0$ и $a_1 = Ab_1$. Нека претпоставиме дека за $a_n = Ab_n$ и $a_{n+1} = Ab_{n+1}$. Тогаш, од (1) следува

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -P(n)a_{n+1} - Q(n)a_n \\ &= -P(n)Ab_{n+1} - Q(n)Ab_n \\ &= A[-P(n)b_{n+1} - Q(n)b_n] = Ab_{n+2}. \end{aligned}$$

Сега, од принципот на математичка индукција следува дека $a_k = Ab_k$, за секој $k\geq 0$, т.е. решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се пропорционални.

б) Непосредно следува од а). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

13. Докажи, дека ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две непропорционални решенија на хомогената равенка

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = 0, \qquad (1)$$

тогаш за секое решение $\{x_n\}$ на (1) постојат единствени $A, B\in\mathbb{C}$ такви што $x_k = Aa_k + Bb_k$, за секој $k\geq 0$.

Решение. Секое решение $\{x_n\}$ на (1) еднозначно е определено со своите први два члена x_0 и x_1. Нека, $x_0 = a$ и $x_1 = b$. Јасно, ако константите A и B ги определиме така што

$$\begin{cases} Aa_0 + Bb_0 = a \\ Aa_1 + Bb_1 = b \end{cases}, \qquad (2)$$

тогаш за секој $k\geq 0$ ќе важи $x_k = Aa_k + Bb_k$. Бидејќи решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални, од задача 12 б) следува дека $a_0 : b_0 \neq a_1 : b_1$, што значи дека системот (2) има единствено решение, т.е. постојат единствени $A, B\in\mathbb{C}$ такви што $x_k = Aa_k + Bb_k$, за секој $k\geq 0$.

14. Нека е дадена нехомогената диференцна равенка од втор ред

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = R(n), \qquad (1)$$

Докажи, дека ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две непропорционални решенија на соодветната хомогена равенка

$$x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n = 0\,, \qquad (2)$$

а $\{x_n\}$ е решение на нехомогената равенка (1), тогаш за секое решение $\{y_n\}$ на (1) постојат $A, B \in \mathbb{C}$ такви што $y_k = Aa_k + Bb_k + x_k$, за секој $k \geq 0$.

Решение. Нека $\{x_n\}$ е едно решение на нехомогената равенка (1) и $\{y_n\}$ е произволно нејзино решение. Тогаш за низата $z_n = y_n - x_n$ важи

$$\begin{aligned} z_{n+2} + P(n)z_{n+1} + Q(n)z_n &= y_{n+2} - x_{n+2} + P(n)(y_{n+1} - x_{n+1}) + Q(n)(y_n - x_n) \\ &= y_{n+2} + P(n)y_{n+1} + Q(n)y_n - (x_{n+2} + P(n)x_{n+1} + Q(n)x_n) \\ &= R(n) - R(n) = 0, \end{aligned}$$

што значи дека таа е решение на хомогената равенка (2). Сега од задача 13 следува дека постојат $A, B \in \mathbb{C}$ такви што $y_k - x_k = z_k = Aa_k + Bb_k$, за секој $k \geq 0$, т.е. $y_k = Aa_k + Bb_k + x_k$, за секој $k \geq 0$.

15. Диференцната равенка

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad b, c \in \mathbb{R}\,, \qquad (1)$$

ја нарекуваме *хомогена диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред*. Квадратната равенка

$$r^2 + br + c = 0 \qquad (2)$$

придруженана равенката (1) ја нарекуваме *карактеристична равенка* за равенката (13).

Нека ~ и се различни решенија на карактеристичната равенка (2) за равенката (1). Докажи, дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определени со $a_n = \sim^n$ и $b_n = \ ^n$, $n = 0,1,2,\ldots$ се непропорционални решенија на равенката (1).

Решение. Бидејќи ~ е решение на карактеристичната равенка (2) за равенката (1), имаме $\sim^2 + b\sim + c = 0$, па затоа

$$a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = \sim^{n+2} + b\sim^{n+1} + c\sim^n = \sim^n(\sim^2 + b\sim + c) = \sim^n \cdot 0 = 0\,,$$

што значи дека низата $\{a_n\}$ определена со $a_n = \sim^n$, $n = 0,1,2,\ldots$ е решение на равенката (1).

Аналогно се докажува дека и низата $\{b_n\}$ е решение на (1).

Бидејќи $a_0 : b_0 = 1:1 \neq \sim : \ \ = a_1 : b_1$, од задача 12 б) следува дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на равенката (1).

16. Нека ~ е двоен корен на карактеристичната равенка

$$r^2 + br + c = 0 \qquad (1)$$

за равенката

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad b, c \in \mathbb{R}\ , \tag{2}$$

Докажи, дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определени со $a_n = \sim^n$ и $b_n = n\sim^n$, $n = 0,1,2,...$ се непропорционални решенија на равенката (2).

Решение. Доказот за низата $\{a_n\}$ е аналоген на доказот од задача 15. Бидејќи $\sim$ е двоен корен, од Виетовите правила следува дека $2\sim = -b$. Според тоа,

$$\begin{aligned} b_{n+2} + bb_{n+1} + cb_n &= (n+2)\sim^{n+2} + b(n+1)\sim^{n+1} + cn\sim^n \\ &= n\sim^n(\sim^2 + b\sim + c) + \sim^{n+1}(2\sim + b) \\ &= n\sim^n \cdot 0 + \sim^{n+1} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

што значи дека низата определена со $b_n = n\sim^n$, $n = 0,1,2,...$ е решение на равенката (2).

Бидејќи $b_0 : a_0 = 0:1 \neq \sim : \sim = b_1 : a_1$, од задача 12 б) следува дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на равенката (2).

17. Реши ги диференцните равенки

а) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$.

б) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

в) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

Решение. а) Корените на карактеристичната равенка $r^2 - 3r + 2 = 0$ се 2 и 1 и тие се различни. Низите $\{2^n\}$ и $\{1\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е $x_n = A \cdot 2^n + B$, $n = 0,1,2,...$. Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A \cdot 2^0 + B = 0 \\ A \cdot 2^1 + B = 1 \end{cases}$$

чие решение е $A = 1$ и $B = -1$. Според тоа, решението на дадената равенка е

$$x_n = 2^n - 1,\ n = 0,1,2,... .$$

б) Карактеристичната равенка е $r^2 - 4r + 4 = 0$ и таа има двоен корен 2. Низите $\{2^n\}$ и $\{n2^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot n2^n$, $n = 0,1,2,...$. Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 = 1 \\ A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 = 4 \end{cases}$$

чие решение е $A=1$ и $B=1$. Според тоа, решението на дадената равенка е

$$x_n = 2^n + n2^n = 2^n(n+1),\ n=0,1,2,\dots .$$

в) Карактеристичната равенка е $r^2-2r+2=0$ и таа има коњугирано комплексни корени $1-i$ и $1+i$. Низите $\{(1-i)^n\}$ и $\{(1+i)^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е

$$x_n = A(1-i)^n + B(1+i)^n,\ n=0,1,2,\dots .$$

Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A(1-i)^0 + B(1+i)^0 = 1 \\ A(1-i)^1 + B(1+i)^1 = 4 \end{cases}$$

чие решение е $A=\frac{1+3i}{2}$ и $B=\frac{1-3i}{2}$. Според тоа, решението на дадената равенка е

$$x_n = \tfrac{1+3i}{2}(1-i)^n - \tfrac{1-3i}{2}(1+i)^n,\ n=0,1,2,\dots .$$

18. Низата $\{x_n\}$ е решение на диференцната равенка

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n,\ x_1=6,\ x_2=34 .$$

Докажи, дека ниту еден член на $\{x_n\}$ не е делив со 5.

Решение. *Прв начин.* Карактеристичната равека на дадената диференцна равенка е $r^2-6r+1=0$ и нејзини решенија се $a=3+2\sqrt{2}$ и $b=3-2\sqrt{2}$. Низите $\{(3+\sqrt{2})^n\}$ и $\{(3-\sqrt{2})^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение е дадено со $x_n = A(3+\sqrt{2})^n + B(3-\sqrt{2})^n$. Останува од почетните услови да ги определиме константите A и B, а потоа да докажеме дека $5\nmid x_n$ за $n\in\mathbb{N}$.

Втор начин. Од

$$x_{n+3} = 6x_{n+2} - x_{n+1} = 5x_{n+2} + 6x_{n+1} - x_n - x_{n+1} = 5(x_{n+2}+x_{n+1}) - x_n$$

следува дека x_{n+3} е делив со 5 ако и само ако x_n е делив со 5. Меѓутоа $x_1=6,\ x_2=34$ и $x_3=19$ не се делив со 5, па затоа $5\nmid x_n$ за $n\in\mathbb{N}$.

19. Дадена е низата $a_0=a_1=1,\ a_{n+1}=14a_n-a_{n-1}$. Докажи дека $2a_n-1$ е точен квадрат.

Решение. Карактеристичната равенка на дадената диференцна равенка е $t^2-14t+1=0$ и нејзините корени се $7\pm4\sqrt{3}=(2\pm\sqrt{3})^2$. Сега, ако се искористат почетните услови добиваме $a_n=\frac{1}{4}((2+\sqrt{3})^{2n-1}+(2-\sqrt{3})^{2n-1})$.

Од друга страна, карактеристичната равенка на диференцната равенка

$b_0=-1, b_1=1, b_{n+1}=4b_n-b_{n-1}$ е $t^2-4t+1=0$ и нејзините корени се $2\pm\sqrt{3}$. Сега, ако ги искористиме почетните услови добиваме дека решението на оваа равенка е $b_n=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n$.

Понатаму,

$$\begin{aligned} b_n^2 &= (\tfrac{-1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n-\tfrac{1+\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n)^2 \\ &= \tfrac{4-2\sqrt{3}}{4}(2+\sqrt{3})^{2n}-1+\tfrac{4+2\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})^{2n} \\ &= \tfrac{1}{2}((2+\sqrt{3})^{2n-1}+(2-\sqrt{3})^{2n-1})-1 \\ &= 2a_n-1, \end{aligned}$$

што значи дека $2a_n-1$ е точен квадрат за за секој n.

20. Реши го системот диференцни равенки

$$\begin{cases} x_{n+1}=px_n+qy_n \\ y_{n+1}=rx_n+sy_n. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. За дадениот систем можни се два случаи.

а) Ако $q=r=0$, тогаш системот (1) го добива видот

$$\begin{cases} x_{n+1}=px_n \\ y_{n+1}=sy_n \end{cases}$$

и во овој случај решенијата ги наоѓаме одделно решавајќи ги дадените равенки.

б) Нека претпоставиме дека $q\neq 0$ или $r\neq 0$, на пример $q\neq 0$. Од првата равенка на системот (1) наоѓаме

$$qy_n=x_{n+1}-px_n \text{ и } qy_{n+1}=x_{n+2}-px_{n+1}. \tag{2}$$

Втората равенка ја множиме со q и добиваме $qy_{n+1}=qrx_n+qsy_n$. Ако во последната равенка од (2) замениме за qy_{n+1} и qy_n ја добиваме равенката

$$x_{n+2}-px_{n+1}=qrx_n+s(x_{n+1}-px_n),$$

која е еквивалентна на хомогената линеарна диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред:

$$x_{n+2}-(p+s)x_{n+1}+(ps-qr)x_{n+1}=0. \tag{3}$$

Со тоа, проблемот на наоѓање на низата $\{x_n\}$ го сведовме на решавање на хомогена линеарна диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред. Низата $\{y_n\}$ може да се определи од релацијата

$$y_n=\frac{x_{n+1}-px_n}{q}.$$

21. Реши ги системите диференцни равенки:

a) $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 5x_n - y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0 = 0,\ y_0 = 6$.

b) $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0 = 2,\ y_0 = 1$.

Решение. а) Според задача 20 последователно наоѓаме

$$y_n = x_{n+1} - 3x_n,\ y_{n+1} = x_{n+2} - 3x_{n+1}.$$

Со замена во $y_{n+1} = 5x_n - y_n$ ја добиваме равенката

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} = 5x_n - x_{n+1} + 3x_n$$

која е еквивалентна на равенката

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 8x_n = 0.$$

Карактеристичната равенка на последната равенка е $t^2 - 2t - 8 = 0$ и нејзини решенија се 4 и -2. Според тоа,

$$x_n = A \cdot 4^n + B \cdot (-2)^n.$$

Од $x_0 = 0,\ y_0 = 6$ и $x_1 = 3x_0 + y_0$ наоѓаме $x_1 = 6$. Значи коефициентите A и B го задоволуваат системот равенки

$$\begin{cases} A \cdot 4^0 + B \cdot (-2)^0 = 0 \\ A \cdot 4^1 + B \cdot (-2)^1 = 6 \end{cases}$$

чии решенија се $A = 1,\ B = -1$, па затоа $x_n = 4^n - (-2)^n$. За низата $\{y_n\}$ имаме

$$y_n = x_{n+1} - 3x_n = 4^{n+1} - (-2)^{n+1} - 3[4^n - (-2)^n] = 4^n + 5(-2)^n.$$

б) Според задача 20 последователно наоѓаме

$$y_n = 2x_n - x_{n+1},\ y_{n+1} = 2x_{n+1} - x_{n+2}.$$

Со замена во $y_{n+1} = x_n + 4y_n$ ја добиваме равенката

$$2x_{n+1} - x_{n+2} = x_n + 4(2x_n - x_{n+1})$$

која е еквивалентна на равенката

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0.$$

Карактеристичната равенка на последната равенка е $t^2 - 6t + 9 = 0$ и таа има двоен корен 3. Според тоа,

$$x_n = A \cdot 3^n + Bn \cdot 3^n.$$

Од $x_0 = 2,\ y_0 = 1$ и $x_1 = 2x_0 - y_0$ наоѓаме $x_1 = 3$. Значи коефициентите A и B го задоволуваат системот равенки

$$\begin{cases} A \cdot 3^0 + B \cdot 0 \cdot 3^0 = 2 \\ A \cdot 3^1 + B \cdot 1 \cdot 3^1 = 3 \end{cases}$$

чии решенија се $A = 2,\ B = -1$, па затоа $x_n = 3^n(2 - n)$. За низата $\{y_n\}$ имаме

$$y_n = 2x_n - x_{n+1} = 2\cdot 3^n(2-n) - 3^{n+1}[2-(n+1)] = 3^n(1+n)\,.$$

22. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1} = \frac{px_n+q}{rx_n+s}\,. \qquad (1)$$

Решение. Секое решение на равенката (1) е определено со првиот член. Нека $x_0 = a$. Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} y_{n+1} = py_n + qz_n \\ z_{n+1} = ry_n + sz_n \end{cases} \qquad (2)$$

кој ги задоволува условите $y_0 = a$ и $z_0 = 1$. Нека, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ е решение на системот (2). Ставаме $x_n = \frac{y_n}{z_n}$. Тогаш $x_0 = \frac{y_0}{z_0} = a$ и

$$x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{py_n+qz_n}{ry_n+sz_n} = \frac{p\frac{y_n}{z_n}+q}{r\frac{y_n}{z_n}+s} = \frac{px_n+q}{rx_n+s}\,,$$

т.е. вака најдената низа е решение на диференцната равенка (1).

23. Реши ја диференцната равенка:

а) $x_{n+1} = \frac{x_n-2}{x_n+4}$, при почетен услов $x_0 = 0$, и

б) $x_{n+1} = \frac{x_n-1}{x_n+3}$, при почетен услов $x_0 = 1$.

Решение. а) Согласно задача 22 го решаваме системот

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = y_n + 4z_n, \end{cases}$$

кој ги задоволува почетните услови $y_0 = 0, z_0 = 1$. Со елиминација на z_n и z_{n+1} ја добиваме равенката $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$, чија карактеристична равенка е $t^2 - 5t + 6 = 0$ и истата има решенија 2 и 3. Затоа, $y_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n$. Ако се искористат почетните услови наоѓаме $A = 2$ и $B = -2$, што значи $y_n = 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n$. За низата $\{z_n\}$ наоѓаме $z_n = \frac{y_n - y_{n+1}}{2} = -2^n + 2\cdot 3^n$. Конечно, $x_n = \frac{2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n}{-2^n + 2\cdot 3^n}$.

б) Согласно задача 22 го решаваме системот

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - z_n \\ z_{n+1} = y_n + 3z_n \end{cases},$$

кој ги задоволува почетните услови $y_0 = 1, z_0 = 1$. Со елиминација на z_n и z_{n+1} ја добиваме равенката $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$, чија карактеристична равенка е $t^2-4t+4=0$ и истата има двоен корен 2. Затоа, $y_n = A\cdot 2^n + Bn\cdot 2^n$. Ако се искористат почетните услови наоѓаме $A=1$ и $B=-1$, што значи $y_n = 2^n - n2^n$. За низата $\{z_n\}$ наоѓаме $z_n = y_n - y_{n+1} = 2^n + n2^n$.

Конечно, $x_n = \frac{2^n-n2^n}{2^n+n2^n} = \frac{1-n}{1+n}$.

24. Докажи, дека решенијата на нехомогената диференцна равенка

$$x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n = f(n) \qquad (1)$$

каде $b,c\in\mathbb{R}$ и $f(n)\not\equiv 0$ се дадени со

$$y_n = Aa_n + Bb_n + \sum_{t=0}^{n-1}\frac{a_{t+1}b_n-b_{t+1}a_n}{a_{t+1}b_{t+2}-b_{t+1}a_{t+2}}f(t).$$

каде $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на хомогената равенка

$$x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n = 0. \qquad (2)$$

Решение. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на хомогената равенка (2). Непосредно се проверува дека $x_n = \sum_{t=0}^{n-1}\frac{a_{t+1}b_n-b_{t+1}a_n}{a_{t+1}b_{t+2}-b_{t+1}a_{t+2}}f(t)$ е едно решение на равенката (1). Сега тврдењето на задачата следува од задача 14 Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

25. Нека $\{x_n\}$ е решение на равенката

$$x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n = f(n). \qquad (1)$$

Докажи, дека

а) Ако $f(n)$ е полином од $k-$ти степен, тогаш

- $x_n = \sum_{i=0}^{k}A_i n^i$, ако 1 не е корен на карактеристичната равенка,
- $x_n = \sum_{i=0}^{k}A_i n^{i+1}$, ако 1 е еден од различните корени на карактеристичната равенка,
- $x_n = \sum_{i=0}^{k}A_i n^{i+2}$, ако 1 е двоен корен на карактеристичната равенка.

б) Ако $f(n)=P_k(n)e^{\sim n}$, каде P_k е полином од $k-$ти степен, тогаш

- $x_n = e^{\sim n}\sum_{i=0}^{k}A_i n^i$, ако $\sim$ не е корен на карактеристичната равенка,
- $x_n = e^{\sim n}\sum_{i=0}^{k}A_i n^{i+1}$, ако $\sim$ е еден од различните корени на карактеристичната равенка,

- $x_n = e^{\sim n}\sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+2}$, ако $\sim$ е двоен корен на карактеристичната равенка.

в) Ако $f(n) = P_k(n)a^n$, каде P_k е полином од $k-$ти степен, тогаш

- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^i$, ако a не е корен на карактеристичната равенка,
- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+1}$, ако a е еден од различните корени на карактеристичната равенка,
- $x_n = a^n \sum_{i=0}^{k} A_i n^{i+2}$, ако a е двоен корен на карактеристичната равенка,

каде коефициентите A_i, $i = 0,1,2,...,k$ треба дополнително да се определат.

Решение. Точноста на тврдењата се проверува со замена во равенката (1), при што коефициентите A_i, $i = 0,1,2,...,k$ кои се јавуваат во решенијата се неопределени и истите ги определуваме со замена на решението во равенката (1) и примена на фактот дека два полиноми се еднакви ако и само ако им се еднакви коефициентите пред соодветните степени. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

26. Реши ја нехомогената диференцна равенка:

а) $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = n-1$, и б) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n^2$.

Решение. а) Општото решение на соодветната хомогена диференцна равенка е дадено со: $A(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n + B(-1)^n(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n$. Бидејќи десната страна на равенката е полином од прва степен и 1 не е корен на карактеристичната равенка $r^2 + r - 1 = 0$ добиваме дека $x_n = A_0 + A_1 n$. Со замена во равенката добиваме

$$A_1(n+2) + A_0 + A_1(n+1) + A_0 - A_1 n - A_0 = n-1$$

од каде по средувањето наоѓаме

$$(A_1 - 1)n + (3A_1 + A_0 + 1) = 0 ,$$

т.е.

$$A_1 - 1 = 0 \text{ и } 3A_1 + A_0 + 1 = 0 .$$

Според тоа, $A_1 = 1$, $A_0 = -4$, па затоа општото решение на равенката е

$$y_n = A(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n + B(-1)^n(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n + n - 4 .$$

б) Општото решение на соодветната хомогена диференцна равенка е дадено со: $A + Bn$. Бидејќи десната страна на равенката е полином од втора степен и 1 е двоен корен на карактеристичната равенка $r^2 - 2r + 1 = 0$ добиваме дека

$$x_n = A_0 n^2 + A_1 n^3 + A_2 n^4 .$$

Аналогно како во задачата под а) наоѓаме $A_2 = \frac{1}{12}$, $A_1 = -\frac{1}{3}$, $A_0 = \frac{5}{12}$, па затоа општото решение на равенката е

$$y_n = A + Bn + \frac{5}{12}n^2 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{12}.$$

27. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$, со почетен услов $x_0 = a$

Решение. Ако $c = 0$, тогаш дадената равенка има облик $x_{n+1} = 2x_n$, т.е. таа е линеарна и нејзиното решение е $x_n = 2^n a$.

Нека $c \neq 0$. Равенката последователно ја трансформираме:

$$cx_{n+1} = cx_n(2 - cx_n) \quad \Leftrightarrow$$
$$cx_{n+1} = (1 - (1 - cx_n))(1 + (1 - cx_n)) \quad \Leftrightarrow$$
$$cx_{n+1} = 1 - (1 - cx_n)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$1 - cx_{n+1} = (1 - cx_n)^2.$$

Од последната равенка, со помош на математичка индукција наоѓаме

$$1 - cx_n = (1 - ca)^{2^n},$$

од каде следува $x_n = \frac{1 - (1 - ca)^{2^n}}{c}$.

28. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$, со почетен услов $x_0 = a$.

Решение. Забележуваме дека дека

$$x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2}\frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{x_n} \text{ и } x_{n+1} + \sqrt{c} = \frac{1}{2}\frac{(x_n + \sqrt{c})^2}{x_n}.$$

Според тоа,

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{c}}{x_{n+1} + \sqrt{c}} = \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{(x_n + \sqrt{c})^2} = \left(\frac{x_n - \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}}\right)^2,$$

па од принципот на математичка индукција следува

$$\frac{x_n - \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}} = \left(\frac{a - \sqrt{c}}{a + \sqrt{c}}\right)^{2^n},$$

од каде го наоѓаме x_n.

29. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, со почетен услов $x_0 = a$

Решение. Нека c е број кој ја задоволува релацијата $\frac{c + c^{-1}}{2} = a$. Лесно се проверува дека низата $\{x_n\}$ зададена со

$$x_n = \frac{c^{2^n} + c^{-2^n}}{2}$$

е бараното решение. Навистина,

$$x_{n+1}=\frac{c^{2^{n+1}}+c^{-2^{n+1}}}{2}=\frac{(c^{2^n}+c^{-2^n})^2-2}{2}$$
$$=2\frac{(c^{2^n}+c^{-2^n})^2}{4}-1=2(\frac{c^{2^n}+c^{-2^n}}{2})^2-1$$
$$=2x_n^2-1$$

и

$$x_0=\frac{c^{2^0}+c^{-2^0}}{2}=\frac{c+c^{-1}}{2}=a\ .$$

30. Низата $\{x_n\}$ е решение на диференцната равенка $x_{n+1}=\frac{x_n-1}{x_n+1}$, кое го задоволува условот $x_{1998}=3$. Определи го x_1?

Решение. Со непосредна проверка наоѓаме дека

$$x_1=\frac{x_0-1}{x_0+1},\ x_2=-\frac{1}{x_0},\ x_3=-\frac{x_0+1}{x_0-1}\ \text{ и }\ x_4=x_0,$$

што значи дека низата е периодична со период 4. Од $1998=4\cdot 499+2$ наоѓаме дека $x_2=3$, па како $x_2=\frac{x_1-1}{x_1+1}$ добиваме $3=\frac{x_1-1}{x_1+1}$, од каде наоѓаме $x_1=-2$.

31. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1}=x_n^2-2$, со почетен услов $x_1=a_1$.

Решение. Нека a и b се реални броеви такви што $ab=1$. Имаме

$$a^{2^{n+1}}+b^{2^{n+1}}=(a^{2^n}+b^{2^n})^2-2\ ,$$

што значи дека низата $x_n=a^{2^n}+b^{2^n}$, каде a и b се реални броеви такви што $ab=1$ е решение на диференцната равенка $x_{n+1}=x_n^2-2$. Од друга страна $a_1=a^2+b^2$, па затоа

$$a+b=\sqrt{a_1^2+2},\ a-b=\sqrt{a_1^2-2}\ ,$$

т.е. $a=\frac{\sqrt{a_1^2+2}+\sqrt{a_1^2-2}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{a_1^2+2}-\sqrt{a_1^2-2}}{2}$, со што задачата е решена.

32. Реши го системот диференцни равенки

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},\quad y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$$

со почетни услови $x_0=a$ и $y_0=b$.

Решение. Со множење на дадените равенки добиваме

$$x_{n+1}y_{n+1}=x_ny_n\ .$$

Од последната релација и од принципот на математичка индукција следува дека

$$x_n y_n = ab \text{, за секој } n \in \mathbb{N} .$$

Го елиминираме y_n од еквивалентниот систем равенки

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad x_n y_n = ab$$

и го добиваме системот:

$$x_n y_n = ab \, , \; x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{ab}{x_n}) .$$

Сега, втората равенка ја решаваме како во задача 28 и наоѓаме

$$\frac{x_n - \sqrt{ab}}{x_n + \sqrt{ab}} = (\frac{a-\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}})^{2^n} ,$$

а од реалацијата $x_n y_n = ab$ го наоѓаме y_n.

33. Реши ја диференцната равенка

$$a_n = \frac{4n-2}{n} a_{n-1} , \tag{1}$$

со почетен услов $a_1 = 1$.

Решение. Од (1) и $a_1 = 1$ последователно добиваме

$$a_n = \frac{4n-2}{n} a_{n-1} = \frac{4n-2}{n} \cdot \frac{4(n-1)-2}{n-1} a_{n-1} = \frac{2^2 (2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} a_{n-2}$$

$$= \frac{2^3 (2n-1)(2n-3)(2n-5)}{n(n-1)(n-2)} a_{n-3} = ... = \frac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot ... \cdot 5 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot 2 \cdot 1} a_1$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot ... \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2^{n-1}(n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdot ... \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \binom{2n-1}{n}.$$

34. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1} = x_n^2 + (x_n - 1)^2, \, n \geq 0 ,$$

со почетен услов $x_0 = 3$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$x_{n+1} = 2x_n^2 + 2x_n + 1$$

$$x_{n+1} = 2(x_n - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$$

$$2x_{n+1} - 1 = (2x_n - 1)^2.$$

Сега со индукција лесно се добива дека

$$2x_n - 1 = (2x_0 - 1)^{2^n} ,$$

од каде наоѓаме

$$x_n = \frac{1}{2}(3^{2^n} + 1) .$$

35. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+1}=\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+...+\frac{a_n^2}{a_{n-1}}, \qquad (1)$$

со почетни услови $a_1=1, a_2=1$.

Решение. Од (1) и почетните услови $a_1=1, a_2=1=0!$ лесно се добива:

$a_3=1=1!, \quad a_4=2=2!, \quad a_5=6=3!, \quad a_6=24=4!, \quad a_7=120=5!$,

па затоа логично е да претпоставиме дека општото решение на равенката (1) е

$$a_n=(n-2)!, \ n\geq 2. \qquad (2)$$

Погоре видовме дека за $n=2$ и $n=3$ важи (2). Нека претоставиме дека (2) важи за некои природни броеви $n-1$ и n, $n\geq 2$. Тогаш

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_2}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}})+\frac{a_n^2}{a_{n-1}}=a_n+\frac{a_n^2}{a_{n-1}} \\ &= (n-2)!+\frac{(n-2)!\cdot(n-2)!}{(n-3)!}=(n-2)!+(n-2)!\cdot(n-2) \\ &= (n-2)!(1+n-2)=(n-1)!, \end{aligned}$$

т.е. (2) важи и за $n+1$, па од принципот на матемтичка индукција следува дека важи за секој природен број $n\geq 2$, со што задачата е решена.

36. Реши ја диференцната равенка

$$a_n=2+a_0a_1...a_{n-1},$$

со почетен услов $a_0=3$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$a_n-2=a_0a_1...a_{n-2}a_{n-1}. \qquad (1)$$

Сега, ако во (1) наместо n ставиме $n-1$, добиваме $a_{n-1}-2=a_0a_1...a_{n-2}$. Со замена во (1) наоѓаме

$$a_n-2=(a_{n-1}-2)a_{n-1},$$

од каде следува

$$a_n-1=(a_{n-1}-1)^2.$$

Сега, од последното равенство следува

$$a_n-1=(a_{n-1}-1)^2=(a_{n-2}-1)^4=(a_{n-3}-1)^8=...=(a_{n-k}-1)^{2^k}=...=(a_0-1)^{2^n}$$

и ако земеме предвид дека $a_0=3$, добиваме $a_n=2^{2^n}+1$.

37. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1}=3x_n+\sqrt{8x_n^2+1}, \ n\geq 1 \qquad (1)$$

со почетен услов $x_1=1$.

Решение. Јасно, $x_n>0$, $x_{n+1}>x_n$ и $x_2=6$. Сега од (1) последователно добиваме

$$x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{8x_n^2 + 1}$$
$$(x_{n+1} - 3x_n)^2 = 8x_n^2 + 1$$
$$x_{n+1}^2 - 6x_n x_{n+1} + x_n^2 = 1$$

и аналогно

$$x_{n+2}^2 - 6x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+1}^2 = 1 .$$

Ако ги одземеме последните две равенства добиваме

$$x_{n+2}^2 - x_n^2 - 6x_{n+1}(x_{n+2} - x_n) = 0$$
$$(x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n) = 0.$$

Но, $x_{n+2} > x_n$, па затоа

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0 ,$$

со почетни услови $x_1 = 1$ и $x_2 = 6$. Карактеристичната равека на последната диференцна равенка е $r^2 - 6r + 1 = 0$ и нејзини решенија се $a = 3 + 2\sqrt{2}$ и $b = 3 - 2\sqrt{2}$. Низите $\{(3+\sqrt{2})^n\}$ и $\{(3-\sqrt{2})^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение е дадено со

$$x_n = A(3+\sqrt{2})^n + B(3-\sqrt{2})^n .$$

Останува од почетните услови да ги определиме константите A и B.

38. Куварот на едно зимско одмаралиште прави мени за ручек за следните n денови. Секој ден за ручекот има понуда од две јадења од следнава листа: риба со компир-салата, подварок, месо со сос од печурки и мусака. Мусаката е секогаш на менито два дена по ред, а подварокот и месото со сос од печурки не се во ист дена на менито. На колку начини може да се состави менито?

Решение. Со a_n да го означиме бројот на начините за составување на менито за n дена. Анализата ќе ја направи според менито за првиот ден.

1) Ако првиот ден на менито е мусаката, тогаш таа е на менито и вториот дена, а второто јадење за секој ден имаме по 3 можности. Менито за преостанатите $n-2$ дена можеме да го составиме на a_{n-2} начина, па во овој случај вкупно имаме $3 \cdot 3 \cdot a_{n-2} = 9a_{n-2}$ начина.
2) Ако првиот ден нема мусака на менито, тогаш можнстите се: подварок и риба со компир-салата, или месо со сос од печурки и риба со компир-салата, а за преостанатите $n-1$ денови менито може да се организира на a_{n-1} начини, па во овој случај имаме $2a_{n-1}$ начини.

Така ја добиваме следнава диференцна равенка

$$a_n = 2a_{n-1} + 9a_{n-2} , \tag{1}$$

со почетни услови $a_0 = 1$ и $a_1 = 2$.

Карактристичната равенка на (1) е $t^2-2t-9=0$, нејзните решенија се $t_1=1+\sqrt{10}$, $t_2=1-\sqrt{10}$, а општото решение е

$$a_n = A(1+\sqrt{10})^n + B(1-\sqrt{10})^n .$$

Конечно, од почетните услови добиваме

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{10}}(1+\sqrt{10})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{10}}(1-\sqrt{10})^{n+1} .$$

39. Во просторија се наоѓаат n кутии со висини $1,2,...,n$ кои во некој редослед треба да се наредат покрај ѕид. Мачорот Дивко може да скокне од една кутија на следната ако следната кутија е пониска (не е важно колку) од кутијата на која моментално се наоѓа или е за најмногу 1 повисока од кутијата на која моментално се наоѓа. На колку начини може кутиите да се наредат така што Дивко може да тргне од првата кутија во низата и редоследно да скокне на секоја следна кутија?

Решение. За распоредот на кутиите ќе велиме дека е добар ако Дивко може да тргне од првата кутија во низата и редоследно да скокнена секоја следна кутија. Нека a_n е бројот на добрите распореди на n кутии. Ако за момент ја занемариме кутијата со висина n, ни преостанува низа од $n-1$ кутии кој можеме да го подредиме на a_{n-1} начини. Во однос на сите овие добри низи, кутијата со висина n можеме да ја сместиме само на две места: на почетокот на низата или по кутијата со висина $n-1$. Сега, од принципот на производ следува дека $a_n = 2a_{n-1}$, за $n \ge 2$. Оттука добиваме

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} = ... = 2^{n-1} a_1$$

и како $a_1 = 1$, добиваме $a_n = 2^{n-1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

40. Дадени се 12 кутии и доволен број црвени, сини и бели топчиња. Треба да ставиме по едно топче во секоја кутија така што за секое топче барем едно од соседните е истобојно. На колку начини тоа може да се направи?

Решение. Со a_n да го означиме бројот на распоредите во n кутии. Заради пократко запишување топчето во k – тата кутија ќе го нарекуваме k топче. Ако има n кутии, тогаш топчињата $n-1$ и n мора да се со иста боја. Разликуваме два случаја:

1) Топчињата $n-2$ и $n-1$ се со иста боја. Тогаш распоредот на топчињата од 1 до $n-1$ ги задоволува условите, а бојата на топчето n е еднозначно определена. Вакви распореди има a_{n-1} ,
2) Топчето $n-2$ не е со иста боја како топчето $n-1$, но е со иста боја како топчето $n-3$. Тогаш распоредот на топчињата од 1 до $n-2$ ги задоволува условите, а бојата на топчињата $n-1$ и n можеме да ја избереме

на два начина (тие се истобојни и со различна боја од топчето $n-2$). Затоа вакви распореди има $2a_{n-2}$.

Од претходните разгледувања следува дека $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, за $n > 3$. Притоа важи $a_2 = a_3 = 3$. Оттука непосредно пресметуваме $a_{12} = 2049$ или во општ случај $a_n = 2^{n-1} + (-1)^n$.

41. Секоја низа од буквите во македонската азбука ќе ја наречеме збор. Ќе велиме дека еден збор е *убав*, ако во него не се среќава ЏЏ, т.е. нема две соседни букви Џ. Определи ја функцијата $f(n)$, чија вредност е бројот на убавите зборови со должиња n.

Решение. Јасно, $f(0)=1$, $f(1)=31$ и $f(2)=960$ (има $31\cdot 31=961$ зборови со должина 2, од кои треба да се отстрани ЏЏ). За $k>2$ секој убав збор со k букви може да се добие од буква различна од Џ по која се запишува убав збор со $k-1$ буква, или од буквата Џ по која прво се запишува буква различна од Џ, а по неа убав збор со $k-2$ букви. Оттука добиваме дека

$$f(k) = 30f(k-1) + 30f(k-2).$$

Карактеристичната равенка на добиената диференцна равенка е

$$t^2 - 30t - 30 = 0$$

и нејзини решенија се $t_{1,2} = 15 \pm \sqrt{255}$. Според тоа,

$$f(n) = A(15+\sqrt{255})^n + B(15-\sqrt{255})^n,$$

при што од почетните услови добиваме

$$A + B = 1 \text{ и } A(15+\sqrt{255}) + B(15-\sqrt{255}) = 31.$$

Решенијата на последниот систем се $A = \frac{255+16\sqrt{255}}{510}$, $B = \frac{255-16\sqrt{255}}{510}$, што значи дека

$$f(n) = \frac{255+16\sqrt{255}}{510}(15+\sqrt{255})^n + \frac{255-16\sqrt{255}}{510}(15-\sqrt{255})^n.$$

42. Определи го бројот на сите зборови со должина n составени од буквите a,b,c,d такви што буквата a никогаш не е соседна со буквата b.

Решение. Со x_n да го означиме бројот на зборовите со должина n составени од буквите a,b,c,d во кои буквите a и b не се соседни и кои завршуваат на буквата a или b, а со y_n бројот на зборовите со должина n кои се составени од буквите a,b,c,d во кои буквите a и b не се соседни и кои завршуваат набуквата c или d. Тогаш го добиваме следниов систем диференцни равенки

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}, \\ y_n = 2x_{n-1} + 2y_{n-1}. \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $y_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{2}$, па ако замениме во втората равенка, по средувањето ја добиваме хомогената диференцна равенка

$$x_{n+1} - 3x_n - 2x_{n-1} = 0 .$$

Со едноставно пребројување наоѓаме дека почетните услови на последната равенка се $x_1 = 2, x_2 = 6$. Решението на оваа диференцна равенка е

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{17}}(\frac{3+\sqrt{17}}{2})^n - \frac{2}{\sqrt{17}}(\frac{3-\sqrt{17}}{2})^n .$$

Сега, со замена во $y_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{2}$ наоѓаме

$$y_n = \frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}(\frac{3+\sqrt{17}}{2})^n + \frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}(\frac{3-\sqrt{17}}{2})^n .$$

Конечно, бараниот број броеви е еднаков на

$$x_n + y_n = \frac{\sqrt{17}+5}{2\sqrt{17}}(\frac{3+\sqrt{17}}{2})^n + \frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{17}}(\frac{3-\sqrt{17}}{2})^n .$$

43. Во редот пред универзитетската библиотека стојат студенти, студентки и професори. За редот ќе врлиме дека е *поднослив* ако во него не стојат две студентки една до друга (бидејќи ако две стидентки се најдат една до друга одма почнуваат да зборуваат). Определи го бројот на подносливи редови со должина n .

Решение. Ако студентите ги означиме со буквата a , студентките со буквата b и професорите со буквата c , тогаш задачата се сведува на пребројување на сите зборови со должина n над азбука $\{a,b,c\}$ во која не се појавува подзбор bb . Ваквите зборови ќе ги наречеме подносливи.

Да го означиме бројот на сите подносливи зборови со должина n со a_n . Во зависност од почетната буква на зборот ги разликуваме следниве случаи:

1) Зборот почнува со буквата a и тогаш остатокот од зборот е подноослив збор со должина a_{n-1} .
2) Зборот почнува со буквата b , по што следната бука е или a или c , а остатокот од зборот е подноослив збор со должина a_{n-2} . Такви зборови имаме $2a_{n-2}$.
3) Зборот почнува со буквата c и тогаш остатокот од зборот е подноослив збор со должина a_{n-1} .

Сега, од принципот на збир следува дека

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} ,$$

со почетни услови $a_0 = 1, a_1 = 3$. Карактеристичната равенка е $t^2 - 2t - 2 = 0$, чии решенија се $t_1 = 1+\sqrt{3},\ t_2 = 1-\sqrt{3}$. Значи, општото решение е

$$a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n .$$

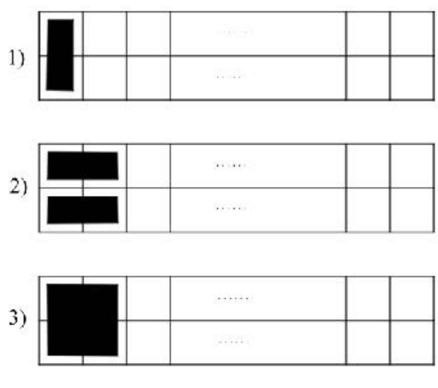
Конечно, од почетните услови наоѓаме

$$a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n - \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n .$$

44. Правоаголна табла со димензија $2\times n$ е поделена на $2n$ единечни квадрат. Располагаме со доволен број плочки со големина 2×1 и 2×2. На колку начини таблата $2\times n$ може да се покрие со овие плочки? (Плочките не смее да се преклопуваат или да излегуваат надвор од таблата.)

Решение. Нека a_n е бројот на начините на покривање на таблата $2\times n$ на опишаниот начин. Според поставувањето на првата плочка на почетокот на таблата можни се следниве три случаи (види ги цртежите долу):

1) Првата плочка е од видот 2×1 и се поставува вертикално, па остатокот од таблата може да се покрие на a_{n-1} начини.
2) Првата плочка е од видот 2×1 и се поставува хоризонтално. Тогаш следната исто така мора да е 2×1 плочка која се поставува хоризонтално, па остатокот од таблата може да се покрие на a_{n-2} начини.
3) Првата плочка е од видот 2×2 , па остатокот од таблата може да се покрие на a_{n-2} начини.



Сега, од принципот на збир следува

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} ,$$

со почетни услови $a_1 = 1, a_2 = 3$.

Карактеристичната равенка е

$t^2 - t - 2 = 0$,

чии решенија се $t_1 = -1,\ t_2 = 2$. Значи, општото решение е

$$a_n = A\cdot(-1)^n + B\cdot 2^n .$$

Конечно, од почетните услови наоѓаме $a_n = \frac{1}{3}\cdot(-1)^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n$.

45. Нека

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}^i(\varnothing)$$

каде $\mathbb{P}(X)$ е множеството од сите подмножества на множеството X, а

$\mathbb{P}^i(X)$ го означува изразот $\mathbb{P}(\mathbb{P}(...\mathbb{P}(X)...))$, каде $\mathbb{P}$ е применето i пати.

За даден природен број n, броиме колку постојат $n-$елементни подмножества A на множеството U за кои важи $A \subseteq \mathbb{P}(A)$. Дали е можно резултатот да се состои од цифрите 0, 1, 2 и 8 во некој редослед?

Решение. Нека $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\} \in U$ е множество такво што $A \subseteq \mathbb{P}(A)$. Притоа неговите елементи $A_1, A_2, ..., A_n$ можеме да ги нумерираме така што $A_i \not\subset A_j$ секогаш кога $i > j$. За секој $j = 1, 2, ..., n$ важи $A_j \in \mathbb{P}(A)$, т.е. $A_j \subset A$, што значи дека A_j е множество чии елементи се некои од множествата A_i за $i < j$. Со други зборови $A_1 = \varnothing$ и за $j \geq 2$ важи

$$A_j = \{A_i \mid i \in M_j\} \text{ за некое множество } M_j \subset \{1, 2, ..., j-1\},$$

при што множествата $M_2, ..., M_n$ се меѓусебно различни.

Нека $a_j = \sum_{i \in M_j} 2^{i-1}$. Бројот $a_j < 2^{j-1}$ еднозначно определува множество M_j.

Бидејќи од $A_i \subset A_j$ следува $a_i < a_j$ можеме да сметаме дека $a_2 < a_3 < ... < a_n$. Со тоа сме конструирале биекција меѓу множествата A и низите $a_2 < a_3 < ... < a_n$ такви што $a_j < 2^{j-1}$ за секој j.

Со $f(n)$ да го означиме бројот на сите вакви низи $a_2 < a_3 < ... < a_n$, а со $f(n,k)$ бројот на оние низи во кои $a_n = k$. Тогаш $f(n,k) = 0$ за $k \geq 2^{n-1}$,

$$f(n,k) = \sum_{i=1}^{k-1} f(n-1,i) \text{ за } k < 2^{n-1} \text{ и } f(n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(n,k).$$

Сега лесно се пресметува дека $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 9$, $f(5) = 88$ и $f(6) = 1802$, што значи дека одговорот на прашањето е потврден.

46. На кружница, со лицето кон центарот на кружницата, се наредени n ученици со различни имиња. Имињата на учениците се напишани на n картички и картичките се распределени меѓу учениците на произволен начин, секој ученик има по една картичка. Учениците ја повторуваат следната операција: ученик, кој ја има картичката со неговото име ја напушта кружницата, по што секој од преостанатите ученици ја дава својата картичка на ученикот десно од него.

Определи го бројот на почетните распоределби на картичките, при кои по 4 опишани операции сите ученици го напуштиле кругот.

Решение. За пермутација ® на множеството $A = \{x_1 < x_2 < ... < x_n\}$ дефинираме пермутација ®' со:

$$®' = x_2 x_3 ... x_1 \circ ®.$$

За секоја пермутација ® дефинираме $U(®)$ како број на паровите $(x, ®(x))$, за кои $x < ®(x)$. Тогаш $U(®') = U(®) - 1$.

Со $S_0 = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ да го означиме множеството ученици, а со $T_0 = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ да го означиме множеството картички со имињата. Распределбата на картичките е биекција $²_0 : T_0 \to S_0$. За поедностано запишување ќе ставиме $²_0(i) = j$ кога $²_0(t_i) = s_j$ и тогаш $²_0$ може да се разгледува како пермутација на $1, 2, ..., n$. Ако F_1 е множеството од фиксни точки на $²_0$, дефинираме

$$S_1 = S_0 \setminus \{s_i \mid i \in F_1\} \text{ и } T_1 = T_0 \setminus \{t_i \mid i \in F_1\}.$$

Тогаш $²_1 : T_1 \to S_1$ е состојбата по напуштањето на учениците, кои ги држат картичките со своите имиња, бидејќи очигледно важи $U(²_0) = U(²_1)$.

Бидејќи од пермутацијата ® по предавањето на картичките надесно се добива пермутацијата ®', важи

$$U(²_1') = U(²_1) - 1 = U(²_0) - 1.$$

Според тоа, по еднократната примена на дозволената операција вредноста на U се намалува за 1. Тоа значи, дека за да по најмногу 4 операции сите ученици го напуштат кругот потребно и доволно е почетната пермутација $²_0$ да е таква што $U(²_0) \le 3$. Значи, бараниот број е еднаков на

$$n! - |\{²_0 \mid U(²_0) \le 3\}|.$$

Нека $B(n,k)$ е множеството пермутации ® на n броеви, за кои $U(®) \le k$ и $b(n,k) = |B(n,k)|$. Ако ги разгледаме својствата на $®(n)$ лесно се добива следнава рекурзија

$$b(n,k) = (k+1)b(n-1,k) + (n-k-1)b(n-1,k-1), \quad n \ge 2,$$

при што $b(n,0) = 1$ и $b(n,k) = 0$, за $k \ge n$. За $k = 1$ добиваме

$$b(n,1) = 2b(n-1,1) + (n-2), \quad b(1,1) = 1.$$

Од горната рекурзија наоѓаме $b(n,1) = 2^n - n$. За $k = 2$ добиваме

$$b(n,2) = 3b(n-1,2) + (n-3)(2^{n-1} - n + 1), \qquad b(1,2) = 1.$$

Од оваа рекурзија наоѓаме $b(n,2) = 3^n - n2^n + \binom{n}{2}$. Според тоа, за $k = 3$ добиваме

$$b(n,3) = 4b(n-1,3) + (n-4)(3^{n-1} - (n-1)2^{n-1} + \binom{n-1}{2}), \quad b(1,3) = 1.$$

Оттука наоѓаме $b(n,3) = 4^n + n3^n + \binom{n}{2}2^n - \binom{n}{3}$. Конечно, бараниот број е

$$n! - b(n,3) = n! - 4^n - n3^n - \binom{n}{2}2^n + \binom{n}{3}.$$

47. Нека A и E се две спротивни темиња на правилен осумаголник. На темето A се наоѓа жаба. Од секое теме на осумаголникот, освен од темето E, жабата може да скокне на соседно теме. Кога ќе дојде на темето E жабата останува на него. Со a_n да го означиме бројот на начините на кои жабата може да дојде од темето A на темето E скокнувајќи точно n пати. Докажи дека $a_{2n-1}=0,\quad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),\quad n=1,2,3,...$ каде $x=2+\sqrt{2}$ и $y=2-\sqrt{2}$.

(Жабата може да дојде од темето A во темето E скокнувајќи точно n пати ако скока по низа од темиња $(P_0,P_1,P_2,...,P_n)$ така што се исполнети условите:

(i) $P_0=A, P_n=E$;

(ii) за секој $i, 0\le i\le n-1$, $P_i\ne E$;

(iii) за секој $i, 0\le i\le n-1$, P_i и P_{i+1} се соседни темиња на осумаголникот.)

Рдшение. Ги означуваме последователно темињата на осумаголникот со броевите $-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ така што темето A е означено со бројот 0, а темето E со бројот 4. Во секој скок жабата ја менува парноста на темето на кое се наоѓа. За пат од 0 до 4 и требаат парен број скокови. Значи $a_{2n-1}=0$ за $n=1,2,...$.

Нека u_{2n} е бројот на патиштата со должина $2n$ (т.е. бројот на патиштата кои се состојат од $2n$ скокови) од точката 0 до точката 0, кои не минуваат низ точката 4; ν_{2n} е бројот на патишта со должина $2n$ од 0 до 2, кои не минуваат низ 4. Тогаш, и бројот на патишта со должина $2n$ од 0 до -2 кои не минуваат низ 4 е еднаков на ν_{2n}.

Секој пат со должина $2n+2$ од точката 0 до точката 4 кој ги задоволува условите на задачата се состои од некој пат со должина $2n$ од 0 до 2 (или од 0 до -2), а такви патишта има $2\nu_{2n}$ и пат со должина 2 од 2 (односно -2) до 4, таков пат е само еден. Затоа

$$a_{2n+2}=2\nu_{2n},\ \text{за}\ n=1,2,... \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека

$$u_{2n+2}=u_{2n}+2\nu_{2n}\ \text{за}\ n=1,2,... \qquad (2)$$

Имено, секој пат со должина $2n+2$ од точката 0 до точката 0 кој не минува низ 4 се состои од:

- некој пат со должина $2n$ од точката 0 до точката 0 кој не минува низ 4 (такви патишта има u_{2n}) и пат со должина 2 од 0 до 0 (такви патишта се $(0,1,0)$ и $(0,-1,0)$) или
- некој пат со должина $2n$ од 0 до 2 (или до -2) кој не минува низ 4 (такви патишта има $2\nu_{2n}$) и пат со должина 2 од 2 (односно -2) до 0 (таков е само еден пат).

На сличен начин се докажува дека

$$v_{2n+2} = u_{2n} + 2v_{2n} \text{ за } n = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме

$$v_{2n+4} = u_{2n+2} + 2v_{2n+2} = 2u_{2n} + 2v_{2n} + 2v_{2n+2}$$
$$= 2(v_{2n+2} - 2v_{2n}) + 2v_{2n} + 2v_{2n+2} = 4v_{2n+2} - 2v_{2n} .$$

Од последното равенство и од (1) добиваме

$$a_{2n+4} - 4a_{2n+2} + 2a_{2n} = 0 \text{ за } n = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Ако ставиме $y_n = a_{2n}$ ја добиваме диференцната равенка

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 2y_n = 0 \qquad (5)$$

со почетни услови $y_1 = a_2 = 0$ (бидејќи нема патишта со должина 2 од 0 до 4) и $y_2 = a_4 = 2$ (бидејќи постојат два пата со должина 4 од 0 до 4: $(0,1,2,3,4)$ и $(0,-1,-2,-3,-4)$).

Карактеристичната равенка на диференцната равенка (5) е

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 ,$$

и нејзини решенија се $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$ и $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$. Според тоа, општо решение на диференцната равенка (5) е дадено со

$$y_n = C_1(2 + \sqrt{2})^n + C_2(2 - \sqrt{2})^n ,$$

каде константите се одредуваат од почетните услови, при што добиваме $C_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ и $C_2 = -\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, па затоа

$$a_{2n} = y_n = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1}] ,\ n = 1, 2, \ldots .$$

48. За даден природен број n нека T е множеството од првите $2n$ природни броеви. Определи го бројот на подмножествата S на T такви што не постојат $a, b \in S$ за кои $|a - b| \in \{1, n\}$.

(Празното множество го има горното својство.)

Решение. Со d_n да го означиме бараниот број. Ја разгледуваме следнава табела од 2 реда и n колони:

1	2	...	$n-1$	n
$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$	$2n$

Првото поле од вториот ред и последното поле од првиот ред ќе ги наречеме специјални. Понатаму, два броја $a, b \in S$ го задоволуваат условот $|a - b| \in \{1, n\}$ ако и само ако се наоѓаат во соседни полиња (имаат заедничка страна) или кога се во специјални полиња.

Според тоа, d_n е бројот на начините на кои од дадената табела може да се изберат неколку полиња (вклучувајќи 0 полиња) така што нема полиња со заедничка страна и двете специјални полиња не се избрани истовремено.
Ги воведуваме следниве ознаки:

- k_n е бројот на начините на кои од табелата $2\times n$ може да се изберат неколку полиња, без полиња со заедничка страна,
- s_n е бројот на начините на кои од табелата $2\times n$ може да се изберат неколку полиња, без полиња со заедничка страна, при што двете специјални полиња се избрани.

Јасно, $d_n = k_n - s_n$. За наоѓање на рекурентните врски за k_n и s_n ќе ги користиме следниве ознаки:

- t_n е бројот на начините на кои може да се изберат неколку полиња, без полиња со заедничка страна од табелата $2\times n$ од која е отстрането полето означено со *,

		...		*
		...		

- h_n е бројот на начините на кои може да се изберат неколку полиња, без полиња со заедничка страна од табелата $2\times n$ од која е отстрането полето означено со *.

		...		
*		...		

За k_n и t_n лесно се добиваат релациите $k_n = k_{n-1} + 2t_{n-1}$ и $t_n = k_{n-1} + t_{n-1}$, од каде ја добиваме рекурентната формула $k_n = 2k_{n-1} + k_{n-2}$. Со непосредно броење се добива дека $k_1 = 3, k_2 = 7$. Карактеристината равенка на претходната диференцна равенка е $x^2 - 2x - 1 = 0$ и нејзини решенија се $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Според тоа, $k_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$, па ако ги искористиме почетните услови добиваме

$$k_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}. \quad (1)$$

Освен тоа, за $n \geq 3$ имаме $h_n = k_{n-2} + 2t_{n-2} + h_{n-2} = k_{n-1} + h_{n-2}$. Ако искористиме дека $k_n = 2k_{n-1} + k_{n-2}$ добиваме

$$2h_n - k_n = 2(k_{n-1} + h_{n-2}) - (2k_{n-1} + k_{n-2}) = 2h_{n-2} - k_{n-2} = \dots .$$

Оттука и од $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ и $s_n = h_{n-2}$ добиваме $2h_n - k_n = (-1)^n$, па затоа $s_n = h_{n-2} = \frac{k_{n-2} + (-1)^{n-2}}{2}$. Конечно, $d_1 = 3, d_2 = 6$ и $d_n = \frac{2k_n - k_{n-2} + (-1)^{n-2}}{2}$, $n \geq 3$ каде k_n е зададена со (1).

10. ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ

1. Нека е дадена низата реални броеви $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Формалниот степенски ред

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k , \tag{1}$$

го нарекуваме *генераторна функција за низата* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. За две генераторни функции $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ ќе велиме дека се *еднакви* ако им се еднакви соодветните коефициенти, односно $a_n = b_n$, за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Определи ја генераторната функција на биномните коефициенти од $n =$ ти ред $\binom{n}{k}$, $k = 0,1,2,...,n$,

Решение. Од $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ следува дека бараната генераторна функција е $G(x) = (1+x)^n$.

Забелешка. а) Од математичката анализа е познато дека ако постои реален број K таков што $|a_n| \leq K^n$ за секој $n \geq 1$, тогаш степенскиот ред (1) конвергира за секој $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. Уште повеќе, функцијата $G(x)$ има изводи од секој ред во точката $x_0 = 0$ и притоа важи $a_i = \frac{G^{(i)}(0)}{i!}$. Во нашите натамошни разгледувања нема да се задржуваме на проверката дали добиените степенски редови конвергираат во некоја околина на точката $x_0 = 0$. Обично тоа лесно може да се направи. Освен тоа, во многу случаеви оваа проверка може да се избегне на следниов начин: кога со помош на генераторни функции ќе го најдеме решението на проблемот, тоа решение може да се провери со помош на некој друг метод, на пример, со помош на математичка индукција. Уште повеќе, постои постои посебна теорија на таканаречени *формални степенски редови* која овозможува несметано да се работи дури и со степенски редови кои некогаш не конвергираат (освен во точката $x_0 = 0$). Значи, конвергенцијата не ни е важно прашање при примената на генераторните функции.

б) Ако низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ има само конечно многу ненулти членови, тогаш генераторната функција е обичен полином, како што е случај во задачата под а).

в) Генераторната функција $(1+x)^n$ всушност е генераторна функција за бројот на комбинациите без повторување од класа k од n елементи.

2. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $B(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $C(x)=A(x)+B(x)$ е генераторна функција на низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $c_i=a_i+b_i$, $i=0,1,2,3,...$.
Функцијата $C(x)$ ја нарекуваме *збир на генераторните функции* A и B.

Решение. Навистина, ако функциите $A(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $B(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ се генераторни соодветно за низите $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$, тогаш со формално собирање на степенските редови добиваме

$$C(x)=A(x)+B(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k,$$

па затоа $C(x)$ е генераторна функција на низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $c_i=a_i+b_i$, $i=0,1,2,3,...$.

3. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и c е константа. Докажи дека $F(x)=cA(x)$ е генераторна функција на низата $\{ca_i\}_{i=0}^{\infty}$.
Функцијата F ја нарекуваме *производ на генераторната функција* A *со константата* c.

Решение. Навистина, ако функцијата $A(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ е генераторна за низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, тогаш со формално множење на степенскиот ред со константата c добиваме

$$F(x)=cA(x)=c\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty} ca_k x^k,$$

што значи дека $F(x)=cA(x)$ е генераторна функција на низата $\{ca_i\}_{i=1}^{\infty}$.

4. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $B(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\sim,\quad\in\mathbb{R}$. Докажи, дека

$$G(x)=\sim A(x)+\quad B(x)$$

е генераторна функција на низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $c_i=\sim a_i+\quad b_i$, $i=0,1,2,3,...$.
Решение. Доказот непосредно следува од задачите 2 и 3.

5. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $x^n A(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $b_k = 0, k = 0,1,2,...,n-1$ и $b_k = a_{k-n}, k \geq n$.

Решение. Навистина,

$$x^n A(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n} x^k$$

каде во последната сума собирањето може да се прошири на сите $k \geq 0$, ако земеме $a_k = 0$, за сите негативни вредности на $k-n$.

6. Определи ја генераторната функција на низата

а) $a_k = 1$, $k = 0,1,2,3,...$.

б) $a_k = (-1)^k$, $k = 0,1,2,3,...$

Решение. а) Нека $A(x)$ е генераторна функција за низата $a_k = 1$, $k = 0,1,2,...$. Тогаш $xA(x)$ е генераторна функција за низата $a_0 = 0$, $a_k = 1$, $k = 1,2,...$. Значи,

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ и } xA(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k ,$$

па затоа $A(x) - xA(x) = 1$, т.е. $(1-x)A(x) = 1$, од што следува дека

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = A(x) = \frac{1}{1-x} .$$

б) Нека $A(x)$ е генераторна функција за низата $a_k = (-1)^k$, $k = 0,1,2,3,...$. Тогаш $xA(x)$ е генераторна функција на низата $a_0 = 0$, $a_k = (-1)^{k+1}$, $k = 1,2,...$. Значи,

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \text{ и } xA(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k ,$$

па затоа $A(x) + xA(x) = 1$, т.е. $(1+x)A(x) = 1$, од што следува

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = A(x) = \frac{1}{1+x} .$$

7. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи дека

$$\frac{A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2-...-a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}$$

е генераторна функција на низата $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...$.

Решение. Доказот е аналоген на доказот во задача 5. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8. Нека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи дека $A(cx)$ е генераторна функција на низата $\{c^i a_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Решение. Нека

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{1}$$

е генератотна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Тогаш, ако во (1) ставиме $x=cz$, добиваме

$$A(cz)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (cz)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^k a_k z^k ,$$

па затоа дека функцијата $A(cx)$ е генераторна функција на низата $\{c^i a_i\}_{i=0}^{\infty}$.

9. а) Нека $A(x)$ е генераторна функција за низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $B(x)$ е генераторна функција за низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $C(x)=A(x)B(x)$ е генераторна функција за низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ каде

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 , \tag{1}$$

Функцијата $C(x)$ ја нарекуваме *производ на генераторните функции* A и B.

б) Нека

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...$$

е генераторна функција таква што $A(0)=a_0\neq 0$. Докажи, дека постои единствена генераторна функција

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+...$$

таква што $A(x)B(x)=1$. Притоа пишуваме $B(x)=\frac{1}{A(x)}$.

Решение. а) Тврдењето непосредно следува од равенството

$$C(x)=A(x)B(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+...)(b_0+b_1x+b_2x^2+...)$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+...$$

б) Да ја разгледаме низата $c_0=1, c_i=0, i=1,2,...$, на која и соодветствува генераторната функција $C(x)=1$. Членовите на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ на која и соодветствува генераторната функција $B(x)$ ќе ги определиме индуктивно користејќи го равенството $C(x)=A(x)B(x)$. За $n=0$, со замена во равенството (1) добиваме $a_0b_0 = 1$ и како $a_0 \neq 0$ добиваме $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Нека претпоставиме дека сме ги определиле $b_i, i = 0,1,2,...,k-1$. Тогаш за $n = k$ од (1) добиваме

$$0 = c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + ... + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$$

и како $a_0 \neq 0$ од последното равенство наоѓаме единствен

$$b_k = -\frac{a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + ... + a_{k-1}b_1 + a_kb_0}{a_0}.$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека постои единствена генераторна функција $B(x)$ таква што $A(x)B(x) = 1$.

10. Нека е дадена низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Определи ја генераторната функција на парцијалните суми на редот $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Решение. Нека $A(x)$ е генераторна функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Според задача 6 генераторната функција на низата $b_i = 1$, $i = 0,1,2,...$ е $B(x) = \frac{1}{1-x}$. Сега од задача 9 а) следува дека

$$\frac{1}{1-x}A(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + ...,$$

т.е. $\frac{1}{1-x}A(x)$ е генераторна функција за парцијалните суми на редот $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

11. Нека $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ и $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ се две генераторни функции. За степенскиот редот

$$(B \circ A)(x) = B(A(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A(x))^n$$

ќе велиме дека е *композиција на генераторните функции* A и B.

Меѓутоа, редот $B \circ A$ не е секогаш добро дефиниран. Имено, ако $B(x)$ не е полином и ако $A(0) = a_0 \neq 0$, тогаш при пресметување на коефициентот пред x^n во $(B \circ A)(x)$ ќе се појави бесконечен збир, кој не е можно да се пресмета. Ако $a_0 = 0$, тогаш лесно се гледа дека

$$B(A(x)) = b_0 + b_1a_1x + (b_1a_2 + b_2a_1^2)x^2 + (b_1a_3 + 2b_2a_1a_2 + b_3a_1^3)x^3 + ... \qquad (1)$$

Според тоа, композицијата $B \circ A$ е добро дефинирана ако $A(0) = a_0 = 0$ или ако $B(x)$ е полином.

За формалниот степенски ред $B(x)$ ќе велиме дека е *композициска инверзија* на редот $A(x)$ ако $(B \circ A)(x) = (A \circ B)(x) = x$.

Докажи, ако за редовите $A(x)$ и $B(x)$ важи $(B \circ A)(x) = (A \circ B)(x) = x$, тогаш

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \; B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

при што $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$.

Решение. Нека за редовите $A(x)$ и $B(x)$ важи

$$(B \circ A)(x) = (A \circ B)(x) = x .$$

За да композициите $B \circ A$ и $A \circ B$ се дефинирани мора да важи $a_0 = 0$ и $b_0 = 0$. Понатаму, од (1) добиваме

$$x = B(A(x)) = b_1 a_1 x + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) x^2 + (b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3) x^3 + \dots , \qquad (2)$$

што значи $b_1 a_1 = 1$, па затоа $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$.

12. За секоја генераторна функција од видот $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $a_1 \neq 0$ постои единствена композициска инверзија која е од видот $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Докажи!

Решение. Доказот непосредно следува од равенството (2) во претходната задача, од кое следува дека коефициентите пред $x^k, k \geq 2$ се еднакви на нула. Сега, бидејќи $b_1 = \frac{1}{a_1}$, коефициентите $b_k, k \geq 2$ се еднозначно определени и истите можеме последователно да ги најдеме.

13. Нека $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е формален степенски ред. *Формален извод* за овој ред е редот $A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. За пресметување на вака дефинираниот извод на формални степенски редови важат истите правила како и за пресметувањето на изводите на обичните функции:

1) $(\alpha A(x))' = \alpha A'(x)$,

2) $(A(x) + B(x))' = A'(x) + B'(x)$,

3) $(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$,

4) $\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)}$

Докажи, дека ако $A(x)$ е генераторна функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогаш $xA'(x)$ е генераторна функција за низата $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $x(xA'(x))'$ е генераторна функција за низата $\{n^2 a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Решение. Генераторната функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, а генераторната функција на низата $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ е $A^*(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n$. Сега, бидејќи $xA'(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$, од дефиницијата на еднаквост на генераторни функции следува $A^*(x)=xA'(x)$, што и требаше да се докаже.

Понатаму, $(xA'(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_nx^{n-1}$, па затоа $x(xA'(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}n^2a_nx^n$ Сега, аналогно како погоре заклучуваме дека $x(xA'(x))'$ е генераторна функција за низата $\{n^2a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

14. Определи ги генераторната функции на низата

а) $\{n+1\}_{n=0}^{\infty}$,

б) $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$.

Решение. а) Во задача 6 докажавме дека генераторната функција на низата $a_k=1$, $k=0,1,2,...$ е $A(x)=\frac{1}{1-x}$. Сега, од дефиницијата формален извод на ред следува дека генераторната функција на низата $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n+1\}_{n=0}^{\infty}$ е функцијата

$$1+2x+3x^2+...=A'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

б) Според задачите 6 и 13 генераторната функција на низата $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$ е

$$x(xA'(x))'=x(\frac{x}{(1-x)^2})'=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

15. Нека $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ е формален степенски ред. *Формален определен интеграл* за овој ред е редот $\int_0^x A(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$. Според тоа, ако функцијата $A(x)$ е генераторна за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогаш функцијата $\int_0^x A(t)dt$ е генераторна за низата $0,a_0,\frac{a_1}{2},\frac{a_2}{3},...$.

Определи ја генераторната функција за низата $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...$.

Решение. Според задача 6 функцијата $A(x)=\frac{1}{1-x}$ е генераторна за низата $a_k=1$, $k=1,2,...$. Сега, од дефиницијата на формален определн интеграл следува дека

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+...=\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$$

е генераторна функција на низата $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...$

16. Броевите $H_0=0$ и $H_k=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}$, за $k=1,2,...$. ги нарекуваме *хармониски броеви* и тие се еднакви на парцијалните суми на хармонискиот ред $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$.

а) Докажи, дека за секој природен број m важи

$$H_{2^m}\geq 1+\frac{m}{2}. \qquad (1)$$

б) Определи ја генераторната функција на низата хармониски броеви.

Решение. а) Очигледно тврдењето важи за $m=1$. Нека претпоставиме дека (1) важи за некој $m\geq 1$. Тогаш

$$\begin{aligned}H_{2^{m+1}}&=H_{2^m}+\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\frac{1}{2^m+3}+...+\frac{1}{2^{m+1}}\\&\geq H_{2^m}+2^m\frac{1}{2^{m+1}}=H_{2^m}+\frac{1}{2}\\&\geq 1+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{m+1}{2}.\end{aligned}$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (2) важи за секој природен број m.

б) Во задача 10 докажавме дека генераторната функција за низата парцијални суми на редот $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ е функцијата $\frac{1}{1-x}A(x)$, каде $A(x)$ е генераторната функција на низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Понатаму, во задача 15 докажавме дека генераторната функција на низата $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...$ е $A(x)=-\ln(1-x)$. Според тоа, генераторната функција на низата парцијални суми на дивергентниот ред $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$, т.е. на низата хармониски броеви е дадена со

$$\sum_{k=0}^{\infty}H_kx^k=-\frac{1}{1-x}\ln(1-x).$$

17. Определи ја генераторната функција на низата $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $n=0,1,2,...$.

Решение. Имаме

$$A(x)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}x+\frac{1}{3\cdot 4}x^2+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^n+\ldots .$$

Последното равенство го множиме со x^2, па од задача 15 добиваме

$$(x^2A(x))' = x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots=-\ln(1-x) .$$

Конечно, од последното равенство наоѓаме

$$A(x)=-x^{-2}\int_0^x \ln(1-t)dt = x^{-2}[(1-x)\ln(1-x)+x] .$$

18. Докажи, дека за секој $m\geq 1$ важи

$$\frac{1}{(1-ax)^m}=1+\binom{m}{1}ax+\binom{m+1}{2}a^2x^2+\binom{m+2}{3}a^3x^3+\ldots+\binom{m+n-1}{n}a^nx^n+\ldots \qquad (1)$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по m.

За $m=1$ од задачите 6 и 7 следува

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-ax}&=1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots+a^nx^n+\ldots\\&=1+\binom{1}{1}ax+\binom{1+1}{2}a^2x^2+\binom{1+2}{3}a^3x^3+\ldots+\binom{1+n-1}{n}a^nx^n+\ldots\end{aligned}$$

т.е. важи равенството (1).

Нека претпоставиме дека (1) важи за $m=k$, т.е. дека

$$\frac{1}{(1-ax)^k}=1+\binom{k}{1}ax+\binom{k+1}{2}a^2x^2+\binom{k+2}{3}a^3x^3+\ldots+\binom{k+n-1}{n}a^nx^n+\ldots . \qquad (2)$$

Сакаме да докажеме дека

$$\frac{1}{(1-ax)^{k+1}}=1+\binom{k+1}{1}ax+\binom{k+2}{2}a^2x^2+\binom{k+3}{3}a^3x^3+\ldots+\binom{k+n}{n}a^nx^n+\ldots . \qquad (3)$$

Од $\frac{1}{(1-ax)^k}=(1-ax)\frac{1}{(1-ax)^{k+1}}$ следува дека (3) важи ако и само ако при множење на (3) со $1-ax$ се добива генераторната функција $\frac{1}{(1-ax)^k}$, т.е. се добива (2). Ако го искористиме Паскаловото равенство $\binom{k+n-1}{n}+\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{k+n}{n}$ кое е еквивалентно на равенството $\binom{k+n}{n}-\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{k+n-1}{n}$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-ax)^k}&=\frac{1}{(1-ax)^{k+1}}(1-ax)\\&=(1-ax)[1+\binom{k+1}{1}ax+\binom{k+2}{2}a^2x^2+\binom{k+3}{3}a^3x^3+\ldots+\binom{k+n}{n}a^nx^n+\ldots]\\&=1+\binom{k+1}{1}ax+\binom{k+2}{2}a^2x^2+\binom{k+3}{3}a^3x^3+\ldots+\binom{k+n}{n}a^nx^n+\ldots\\&\qquad -ax-\binom{k+1}{1}a^2x^2-\binom{k+2}{2}a^3x^3-\ldots-\binom{k+n-1}{n}a^nx^n-\ldots\\&=1+\binom{k}{1}ax+\binom{k+1}{2}a^2x^2+\binom{k+2}{3}a^3x^3+\ldots+\binom{k+n-1}{n}a^nx^n+\ldots,\end{aligned}$$

а тоа е равенството (2).

Конечно, од претходно изнесеното следува дека твр-дењето важи за $m = k+1$, па од принципот на математичка индукција сле-дува дека важи за секој $m \geq 1$.

Забелешка. Ако во (1) земеме $a = 1$ ја добиваме генераторната фунција

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+2}{3}x^3 + \ldots + \binom{m+n-1}{n}x^n + \ldots$$

која всушност е генераторна функција за бројот на комбинациите со повторување од класа k од m елементи.

19. Реши ја диференцната равенка

$$a_0 = 5, \quad a_k = a_{k-1} + 3, \text{ за } k \geq 1 . \quad (1)$$

Решение. Нека

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (2)$$

е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ако (2) го помножиме со x добиваме

$$xA(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} . \quad (3)$$

Понатаму, во (1) имаме константа 3, па затоа ја наоѓаме генераторната функција на низата $b_n = 3, n \geq 0$ и тоа е функцијата

$$\frac{3}{1-x} = 3\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} 3x^i . \quad (4)$$

Од равенствата (2), (3) и (4) наоѓаме

$$A(x) - xA(x) - \frac{3}{1-x} = a_0 - 3 + (a_1 - a_0 - 3)x + (a_2 - a_1 - 3)x^2 + \ldots + (a_n - a_{n-1} - 3)x^n + \ldots$$
$$= a_0 - 3 = 5 - 3 = 2$$

и ако последната равенка ја решиме по $A(x)$ и ја искористиме задача 14 добиваме

$$A(x) = \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} = 3(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots) + 2(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots)$$
$$= 5 + 8x + 11x^2 + 14x^3 + \ldots + (3n+5)x^n + \ldots,$$

што значи $a_n = 3n + 5$, за $n \geq 0$.

20. Реши ја диференцната равенка

$$a_0 = 0 \text{ и } a_{n+1} = 2a_n + 1 , \; n \geq 0 . \quad (1)$$

Решение. Нека $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ е генераторна функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Бидејќи во диференцната равенка коефициентот пред a_n е 2 со множење со

$2x$ наоѓаме $2xA(x)=\sum_{k=0}^{\infty}2a_k x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}2a_{k-1}x^k$, па затоа аналогно како во задача 19 наоѓаме

$$\begin{aligned}A(x)-2xA(x)-\tfrac{1}{1-x}&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty}2a_{k-1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}x^k\\&=a_0-1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-2a_{k-1}-1)x^k\\&=a_0-1=-1.\end{aligned}$$

Според тоа, $A(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$, од што добиваме

$$\begin{aligned}F(x)&=\tfrac{x}{(1-x)(1-2x)}=2x\cdot\tfrac{1}{1-2x}-x\cdot\tfrac{1}{1-x}\\&=2x\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k-x\sum_{k=0}^{\infty}x^k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-1)x^k.\end{aligned}$$

Конечно, $a_n=2^n-1$, $n\geq 0$ е решение на дадената диференцна равенка.

21. Во едно езеро на почетокот на годината имало k жаби. Во текот на секоја година бројот на жабите се зголемувал l пати. На почетокот на секоја следна година m жаби од езерото се преселуваат во други езера. Нека броевите k,l и m се такви што $k(l-1)>m$. Колку жаби ќе има во ова езеро по N години?

Решение. Нека $a_0=k$ е бројот на жабите на почетокот, а a_n е бројот на жабите во езерото по $n\geq 1$ години. Од условот на задачата следува

$$a_{n+1}=la_n-m,\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{1}$$

при услов $a_0=k$. Ќе ја определиме генераторната функција $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ако за секој $n\in\mathbb{N}_0$ рекурзијата (1) ја помножиме со x^{n+1} и ги собереме добиените равенства, наоѓаме

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}=l\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}-m\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}.$$

Леваат страна на последното равенство е еднаква на $G(x)-a_0$. Понатаму, $l\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}=lxG(x)$ и $m\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{mx}{1-x}$, па затоа важи

$$G(x)-a_0=lxG(x)-\tfrac{mx}{1-x},$$

од каде наоѓаме

$$\begin{aligned}G(x) &= \frac{k}{1-lx} - m\frac{x}{(1-x)(1-lx)}\\ &= \frac{k}{1-lx} + \frac{m}{l-1}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{m}{l-1}\cdot\frac{1}{1-lx}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kl^n x^n + \frac{m}{l-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} l^n x^n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kl^n x^n - \frac{m}{l-1}\sum_{n=0}^{\infty}(l^n-1)x^n\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(kl^n - m\frac{l^n-1}{l-1}\right)x^n.\end{aligned}$$

Конечно, $a_n = kl^n - m\frac{l^n-1}{l-1}$, за $n \ge 0$. Лесно се проверува дека ова навистина е решение на (1). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

22. Нека низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ја задоволува линеарната диференцна равенка

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_m a_{n-m} \qquad (1)$$

од $m-$ти ред со константни коефициенти $c_1, c_2, ..., c_m$ и почетни услови $a_0, a_1, ..., a_m$. Докажи, дека генераторната функција $A(x)$ на оваа низа е од видот $A(x) = \frac{P_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$, каде $Q_m(x)$ е полином од $m-$ти степен, а степенот на полиномот $P_{m-1}(x)$ е помал или еднаков на $m-1$.

Решение. Нека претпоставиме дека треба да ја определиме генераторната функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ која ја задоволува диференцната равенка (1). Првите m членови на низата се $a_0, a_1, ..., a_{m-1}$, па затоа

$$\begin{aligned}&A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m + ...\\ &xA(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + ... + a_{m-1}x^m + a_m x^{m+1} + ...\\ &x^2 A(x) = a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + ... + a_{m-1}x^{m+1} + a_m x^{m+2} + ...\\ &...\\ &x^m A(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + ... + a_{m-1}x^{2m-1} + a_m x^{2m} + ...\end{aligned}$$

Сега, ако втората равенка ја помножиме со $-c_1$, третата со $-c_2$ итн. последната со $-c_m$, после собирањето добиваме

$$A(x)(1 - c_1 x - c_2 x^2 - ... - c_m x^m) = P_{m-1}(x)$$

каде $P_{m-1}(x)$ е полином со степен помал од m. Имено, од (1) следува дека по собирањето на десната страна сите коефициенти пред x^k, $k \ge m$ се еднакви на нула. Значи, генераторната функција на нашата низа е рационалната функција $A(x) = \frac{P_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$.

23. Нека генераторната функција

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m+... \qquad (1)$$

е рационална, т.е. $A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, каде $P(x)$ и $Q(x)$ се заемно прости полиноми. Докажи, дека почнувајќи од некој број n низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ја задоволува линеарната диференцна равенка

$$a_{n+m}=c_1a_{n+m-1}+c_2a_{n+m-2}+...+c_ma_n, \qquad (2)$$

каде m е степенот на полиномот $Q(x)$, а $c_1,c_2,...,c_m$ се некои константи.

Решение. Од $A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ следува $A(x)Q(x)=P(x)$. Сега ако во последното равенство од (1) замениме за $A(x)$ и за полиномите $P(x)$ и $Q(x), \deg Q=m$ по изедначување на коефициентите пред соодветните степени добиваме , дека почнувајќи од некој број n низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ја задоволува линеарната диференцна равенка (2), каде m е степенот на полиномот $Q(x)$, а $c_1,...,c_m$ се некои константи. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

24. Реши ја диференцната равенка

$$a_0=1,\ a_1=4,\ a_k=a_{k-1}+6a_{k-2}, \quad k\geq 2. \qquad (1)$$

Решение. Нека $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Бидејќи во диференцната равенка (1) коефициентот пред a_{k-1} е 1, а пред a_{k-2} е 6 со множење на $A(x)$ со x и $6x^2$ наоѓаме

$$xA(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}. \qquad (2)$$

$$6x^2A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}6a_kx^{k+2}. \qquad (3)$$

Сега, од равенствата (1), (2) и (3) наоѓаме

$$A(x)-xA(x)-6x^2A(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-6a_0)x^2+(a_3-a_2-6a_1)x^3+...$$
$$=a_0+(a_1-a_0)x=1+3x.$$

Ако последната равенка ја решиме по $A(x)$ добиваме

$$A(x)=\frac{1+3x}{1-x-6x^2}=\frac{1+3x}{(1-3x)(1+2x)}. \qquad (4)$$

Користејќи го методот на неопределени коефициенти имаме

$$\frac{1+3x}{(1-3x)(1+2x)}=\frac{a}{1-3x}+\frac{b}{1+2x}=\frac{a+b+(2a-3b)x}{(1-3x)(1+2x)},$$

т.е. го добиваме системот равенка

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-3b=3 \end{cases}$$

чие решение е $a=\frac{6}{5},\ b=-\frac{1}{5}$. Со замена во (4) добиваме

$$f(x)=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{1-3x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+2x}=$$
$$=\frac{6}{5}(1+3x+3^2x^2+...+3^nx^n+...)-\frac{1}{5}(1-2x+(-2)^2x^2+...+(-2)^nx^n+...)$$

односно

$$a_n=\frac{1}{5}[6\cdot 3^n-(-2)^n],\ \text{за}\ n\geq 0.$$

25. Низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена со рекуретната релација

$$a_0=2, a_1=7,\quad a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n+3^n,\ n\geq 0.$$

Определи експлицитен израз за a_n.

Решение. Нека $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Од $a_0=2$ и $a_1=7$ последователно следуваат следните равенства

$$\frac{A(x)-2}{x}=a_1+a_2x+a_3x^2+...+a_{n+1}x^n+...\quad \text{и}$$
$$\frac{A(x)-2-7x}{x^2}=a_2+a_3x+a_4x^2+...+a_{n+2}x^n+....$$

Ако во последното равенство замениме $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n+3^n$, за $n\geq 0$ и земеме во предвид дека $1+3x+3^2x^2+...+3^nx^n+...=\frac{1}{1-3x}$ добиваме

$$\frac{A(x)-2-7x}{x^2}=4\cdot\frac{A(x)-2}{x}-4A(x)+\frac{1}{1-3x},$$

од каде наоѓаме

$$A(x)=\frac{4x^2-7x+2}{(1-3x)(1-2x)^2}=\frac{(1-3x)+(1-2x)^2}{(1-3x)(1-2x)^2}=\frac{1}{1-3x}+\frac{1}{(1-2x)^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}(2x)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)2^n+3^n]x^n,$$

што значи

$$a_n=(n+1)2^n+3^n,\ \text{за}\ n\geq 0.$$

26. Реши ја диференцната равенка

$$a_0=1,\quad a_k=3a_{k-1}+4^k,\ k\geq 1 \qquad (1)$$

Решение. Нека $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Бидејќи во диференцната равенка (1) коефициентот пред a_{k-1} е еднаков на 3 наоѓаме

$$3xA(x)=\sum_{k=0}^{\infty} 3a_k x^{k+1}. \tag{2}$$

Понатаму, во (1) имаме член 4^k, па затоа ја наоѓаме генераторната функција на низата $b_k=4^k, k\ge 0$ и тоа е функцијата

$$\frac{1}{1-4x}=\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) наоѓаме

$$\begin{aligned}A(x)-3xA(x)-\frac{1}{1-4x}&=a_0-1+(a_1-3a_0-4)x+(a_2-3a_1-4^2)x^2+\dots\\&+(a_n-3a_{n-1}-4^n)x^n+\dots\\&=a_0-1=1-1=0.\end{aligned}$$

Последната равенка ја решаваме по $A(x)$ и добиваме:

$$\begin{aligned}A(x)&=\frac{1}{(1-4x)(1-3x)}=\frac{4}{1-4x}-\frac{3}{1-3x}\\&=4\sum_{k=0}^{\infty}4^k x^k-3\sum_{k=0}^{\infty}3^k x^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(4^{k+1}-3^{k+1})x^k,\end{aligned}$$

од каде наоѓаме $a_k=4^{k+1}-3^{k+1}, k\ge 0$.

27. Реши ја диференцната равенка

$$a_0=3,\quad a_k=2a_{k-1}+k,\ k\ge 1 \tag{1}$$

Решение. Нека $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Бидејќи во диференцната равенка (1) коефициентот пред a_{k-1} е еднаков на 2 наоѓаме

$$2xA(x)=\sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^{k+1}. \tag{2}$$

Понатаму, во (1) имаме член k, па затоа ја наоѓаме генераторната функција на низата $b_k=k, k\ge 0$ и тоа е функцијата

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty} kx^k. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) наоѓаме

$$A(x)-2xA(x)-\frac{x}{(1-x)^2}=a_0+(a_1-2a_0-1)x+(a_2-2a_1-2)x^2+...+(a_n-2a_{n-1}-n)x^n+...$$

$$=a_0=3.$$

Последната равенка ја решаваме по $A(x)$ и добиваме:

$$A(x)=\frac{3-5x+3x^2}{(1-2x)(1-x)^2}=\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{5}{1-2x}$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k+5\sum_{k=0}^{\infty}2^k x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-k-2+5\cdot 2^k)x^k,$$

од каде наоѓаме $a_k=-k-2+5\cdot 2^k$, $k\geq 0$.

28. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+3}=6a_{n+2}-11a_{n+1}+6a_n ,$$

со почетни услови $a_0=2, a_1=0, a_2=-2$.

Решение. Нека $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Од $a_0=2, a_1=0, a_2=-2$ последователно добиваме

$$\frac{A(x)-2}{x}=a_1+a_2x+a_3x^2+...+a_{n+1}x^n+...,\tag{1}$$

$$\frac{A(x)-2-0\cdot x}{x^2}=a_2+a_3x+a_4x^2+...+a_{n+2}x^n+...,\tag{2}$$

$$\frac{A(x)-2-0\cdot x+2x^2}{x^3}=a_3+a_4x+...+a_{n+3}x^n+....\tag{3}$$

Ако во равенството (3) замениме $a_{n+3}=6a_{n+2}-11a_{n+1}+6a_n$, за $n\geq 0$, и ги искористиме равенствата $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$, (1) и (2) по средувањето добиваме

$$\frac{A(x)-2-0\cdot x+2x^2}{x^3}=6\frac{A(x)-2-0\cdot x}{x^2}-11\frac{A(x)-2}{x}+A(x) ,$$

од каде наоѓаме

$$A(x)=\frac{20x^2-12x+2}{1-6x+11x^2+6x^3}=\frac{20x^2-12x+2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} .$$

Понатаму, со помош на методот на неопределени коефициенти добиваме

$$A(x)=\frac{5}{1-x}-\frac{4}{1-2x}+\frac{1}{1-3x} ,$$

што значи

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(5-4\cdot 2^n+3^n)x^n ,$$

па затоа $a \quad = 5-4\cdot 2^n+3^n$, за $n\geq 0$.

29. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=2^n+n,\ \ n\geq 0 \tag{1}$$

со почетни услови $a_0=a_1=0$.

Решение. Нека $A(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ е генератотрна функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Од $a_0=a_1=0$ последователно добиваме

$$\frac{A(x)}{x}=a_1+a_2x+a_3x^2+...+a_{n+1}x^n+...,\tag{1}$$

$$\frac{A(x)}{x^2}=a_2+a_3x+a_4x^2+...+a_{n+2}x^n+....\tag{2}$$

Понатаму, од равенствата (1) добиваме

$$a_{n+2}x^n-6a_{n+1}x^n+9a_nx^n=2^nx^n+nx^n,\ \ n\geq 0,\tag{3}$$

па ако ги сумираме равенствата (3) за $n\geq 0$, а потоа искористиме дека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, равенствата (1) и (2), како и тоа дека $F(x)=\frac{1}{1-2x}$ и $G(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ се генераторни функции на низите $x_n=2^n$, $n\geq 0$ и $a_n=n$, $n\geq 0$, соодветно, последователно добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}x^n-6\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n+9\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}nx^n,$$

$$\frac{A(x)}{x^2}-6\frac{A(x)}{x}+9A(x)=\frac{1}{1-2x}+\frac{x}{(1-x)^2},$$

$$A(x)=\frac{x^2-x^3-x^4}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)^2}$$

$$A(x)=\frac{1}{4(1-x)^2}+\frac{1}{1-2x}-\frac{5}{3(1-3x)}+\frac{5}{12(1-3x)^2}.$$

Сега, лесно се добива дека

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1+2^{n+2}+5(n-1)3^{n-1}}{4}x^n\ ,$$

од каде добиваме

$$a_n=\frac{n+1+2^{n+2}+5(n-1)3^{n-1}}{4},\ \ n\geq 0.$$

30. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1=1, a_{2n}=a_n$ и $a_{2n+1}=a_n+a_{n+1}$. Определи ја генераторната функција на оваа низа.

Решение. Секој член на низата, освен првиот, е определен со помош на членови кои претходно се познати, што значи дека низата е дбро дефинирана.

Нека $A(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ е генераторната функција на оваа низа. Ако првото равенство од дефиницијата на низата го помножиме со x^{2n-1}, а второто со x^{2n} и ако ги собереме сите равенства кои се добиваат наоѓаме

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{2n},$$

односно

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2)^{n-1}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2)^{n-1},$$

$$A(x)=x^2A(x^2)+xA(x^2)+A(x^2).$$

Според тоа, $A(x)=(x^2+x+1)A(x^2)$, од каде лесно се добива дека

$$A(x)=\prod_{i=0}^{\infty}(x^{2^{i+1}}+x^{2^i}+1).$$

31. За секој природен број n, нека

$$S_n=1+\tfrac{1}{2}+...+\tfrac{1}{n},$$
$$T_n=S_1+S_2+...+S_n,$$
$$U_n=\tfrac{T_1}{2}+\tfrac{T_2}{3}+...+\tfrac{T_n}{n+1}.$$

За секој n определи константи a_n,b_n,c_n,d_n такви, што

$$T_n=a_nS_{n+1}+b_n \text{ и } U_n=c_nS_{n+1}+d_n.$$

Решение. Нека

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}S_nx^n,\quad T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_nx^n \text{ и } U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_nx^n$$

се генераторните функции за разгледуваните низи. Од условот имаме

$$T_n-T_{n-1}=S_n \text{ и } S_n-S_{n-1}=\tfrac{1}{n}$$

па затоа

$$(1-x)T(x)=T_1x+(T_2-T_1)x^2+...+(T_n-T_{n-1})x^n+...$$
$$=S_1x+S_2x^2+...+S_nx^n+...=S(x),$$
$$(1-x)^2T(x)=(1-x)S(x)=S_1x+(S_2-S_1)x^2+...+(S_n-S_{n-1})x^n+...$$
$$=x+\tfrac{x^2}{2}+...+\tfrac{x^n}{n}+...$$

Според тоа,

$$[(1-x)^2T(x)]'=1+x+x^2+...+x^n+...=\tfrac{1}{1-x}$$

т.е.

$$-2(1-x)T(x)+(1-x)^2 T'(x)=\frac{1}{1-x}$$

од што следува

$$-2T(x)+(1-x)T'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \ . \qquad (1)$$

Од друга страна имаме

$$(1-x)T'(x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}nT_n x^{n-1}=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)T_{n+1}-nT_n]x^n$$

$$=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}T_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)S_{n+1}x^n=T(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)S_{n+1}x^n$$

од што според (1) добиваме

$$-T(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)S_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

т.е.

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)S_{n+1}-(n+1)]x^n$$

од што следува $T_n=(n+1)S_{n+1}-(n+1)$, што значи $a_n=n+1$ и $b_n=-(n+1)$.

Слично, за $U(x)$ имаме

$$(1-x)U(x)=U_1x+(U_2-U_1)x^2+...+(U_n-U_{n-1})x^n+...$$

$$=\frac{T_1}{2}x+\frac{T_2}{3}x^2+...+\frac{T_n}{n+1}x^n+...$$

$$=(S_2-1)x+(S_3-1)x^2+...+(S_{n+1}-1)x^n+...$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}S_i x^{i-1}-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{S(x)}{x}-\frac{1}{1-x}$$

од што следува

$$U(x)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{S(x)}{x}-\frac{1}{(1-x)^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n+1}S_j\Big)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[T_{n+1}-(n+1)]x^n$$

што значи дека $U_n=T_{n+1}-(n+1)$. Според тоа,

$$U_n=(n+2)S_{n+2}-(n+2)-(n+1)$$

$$=(n+2)(S_{n+1}+\tfrac{1}{n+2})-1-2(n+1)$$

$$=(n+2)S_{n+1}-2(n+1)$$

од што добиваме

$$c_n=n+2 \ \text{ и } \ d_n=-2(n+1) \ .$$

32. Докажи, дека генераторната функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е рационална ако и само ако постојат броеви $q_1, q_2, ..., q_k$ и полиноми $p_1(t), p_2(t), ..., p_k(t)$ такви што почнувајќи од некој n важи

$$a_n = p_1(t)q_1^n + p_2(t)q_2^n + ... + p_k(t)q_k^n . \tag{1}$$

Изразот на десната страна на (1) го нарекуваме *квазиполином* од променлива n.

Решение. Најпрво да забележиме дека генераторната функција $(1-qx)^{-m}$ има вид

$$(1-qx)^{-m} = 1+\binom{m}{1}qx+\binom{m+1}{2}q^2x^2+\binom{m+2}{3}q^3x^3+\binom{m+3}{4}q^4x^4+...$$
$$=1+\binom{m}{m-1}qx+\binom{m+1}{m-1}q^2x^2+\binom{m+2}{m-1}q^3x^3+\binom{m+3}{m-1}q^4x^4+...$$

Коефициентот пред x^n во оваа генераторна функција е

$$\frac{(n+1)(n+2)...(n+m-1)}{(m-1)!}q^n = P_{m-1}(n)q^n , \tag{2}$$

каде $P_{m-1}(n)$ е полином од n од $(m-1)-$ви степен. Понатаму, секоја рационална функција од x може да се запише во вид на линеарна комбинација од полиноми и елементарни дропки од видот $(1-q_i x)^{-m_i}$, па затоа коефициентите на соодветната генераторна функција се квазиполиноми.
Обратно, нека претпоставиме дека коефициентите на генераторната функција, почнувајќи од некој број n, можат да се запишат како казиполиноми. Ќе докажеме дека за квазиполиномот $p(n)q^n$ соодветната генераторна функција е рационална. Нека степенот на p е еднаков на $m-1$. Полиномите $P_0, P_1, ..., P_{m-1}$ определени со равенството (2) формираат база на просторот полиноми со степен помал или еднаков на $m-1$. Затоа полиномот p може да се запише како линеарна комбинација на полиномите $P_0, P_1, ..., P_{m-1}$, што значи дека соодветната генераторна функција е линеарна комбинација од функциите $(1-qx)^{-i}$, $i = 1, 2, ..., m-1$. За произволен квазиполином добиваме линеарна комбинација од функции од ваков вид за различни q_i, со што тврдењето е докажано.

33. *Производ на Адамар* за генераторните функции

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

и

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ...$$

ја нарекуваме генераторната функција

$$C(x) = a_0b_0 + a_1b_1x + a_2b_2x^2 + a_3b_3x^3 + ...$$

Докажи, дека производот на Адамар на две рационални генераторни функции и рационална генераторна функција.

Решение. Тврдењето следува непосредно од задача 32 и фактот дека согласно равенството (1) во задача 32 производ на квазиполиноми е квазиполином. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

34. Докажи дека

а) $\sum\limits_{n} \binom{2n}{m} x^{2n} = \frac{x^m}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}} \right)$,

б) $\sum\limits_{n} \binom{2n+1}{m} x^{2n+1} = \frac{x^m}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}} \right)$.

Решение. Во равенството од забелешката по решението на задача 18 земаме $m = k+1$, добиеното равенство го множиме со x^k и ги искористиме равенствата $\binom{k}{k} = 1$ и $\binom{k+i}{i} = \binom{k+i}{k}$, добиваме

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \binom{k}{k} x^k + \binom{k+1}{k} x^{k+1} + \binom{k+2}{k} x^{k+2} + \ldots + \binom{k+n}{k} x^{k+n} + \ldots = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n ,$$

т.е. функцијата $\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ е генераторна за низата $\binom{n}{k}$, $n \geq k$. Сега, ако ставиме $A = \sum\limits_{n} \binom{2n}{m} x^{2n}$ и $B = \sum\limits_{n} \binom{2n+1}{m} x^{2n+1}$, добиваме

$$A + B = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} ,$$

$$A + B = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (-1)^n x^n = \frac{(-1)^m x^m}{(1+x)^{m+1}} .$$

Решението на последниот систем е

$$A = \frac{x^m}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}} \right) \text{ и } B = \frac{x^m}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}} \right) ,$$

што и требаше да се докаже.

35. Формалниот степенски ред $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ го нарекуваме *експоненцијална генераторна функција* за низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Нека $A(x)$ и $B(x)$ се експоненцијални генераторни функции за низите $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$. Докажи дека

а) функцијата $C(x) = A(x) + B(x)$ е експоненцијална генераторна функција за низата $\{a_k + b_k\}_{k=0}^{\infty}$.

b) функцијата $C(x) = A(x)B(x)$ е експоненцијална генераторна функција за низата

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}, \ n = 0,1,2,3,...$$

која ја нарекуваме *биномна конволуција на низите* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Решение. *a)* Навистина, ако $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ и $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} x^k$ се експоненцијални генераторни функции за низите $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, тогаш со формално собирање на редовите добиваме

$$C(x) = A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k + b_k}{k!} x^k,$$

што значи дека $C(x) = A(x) + B(x)$ е експоненцијална генераторна функција на низата $\{a_k + b_k\}_{k=0}^{\infty}$.

b) Кога ги множиме бесконените редови $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ и $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} x^k$, ги множиме така што секој член на првиот ред го множиме со секој член на вториот ред и производите ги собираме. Секои два помножени члена се од видот

$$\frac{a_k}{k!} x^k \frac{b_i}{i!} x^i = a_k b_i \frac{(k+i)!}{k!i!} \frac{x^{k+i}}{(k+i)!} = \binom{k+i}{k} a_k b_i \frac{x^{k+i}}{(k+i)!}.$$

За да во производот на два члена добиеме израз во кој фигуриа x^n мора да важи $i = n - k$, па затоа

$$\binom{k+i}{k} a_k b_i \frac{x^{k+i}}{(k+i)!} = \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \frac{x^n}{n!},$$

од што со собирање на соодветните степени следува тврдењето.

Забелешка. Суштинска разлика меѓу експоненцијалните и обичните генераторни функции се забележува при нивното диференцирање и интегрирање. Имено, при диференцирањето и интегрирањето на експоненцијална генераторна функција повторно добиваме експоненцијална генераторна функција за која имаме шифтување на низата коефициенти, без да се менува нивната големина, т.е.

$$h'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} x^k \ \text{ и } \ \int h(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

36. Определи ја експоненцијалната генераторна функција на низата

$$a_k = \frac{n!}{(n-k)!}, \ k = 0,1,2,...,n.$$

Решение. Од

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1}x + \tbinom{n}{2}x^2 + \dots + \tbinom{n}{n}x^n \\ &= \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!}x + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^2 + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k + \dots + \frac{n!}{0!n!}x^n \\ &= \frac{n!}{n!}\cdot\frac{x^0}{0!} + \frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{x^1}{1!} + \frac{n!}{(n-2)!}\cdot\frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{n!}{0!}\cdot\frac{x^n}{n!},\end{aligned}$$

следува дека $(1+x)^n$ е експоненцијална генераторна функција за низата

$$a_k = \frac{n!}{(n-k)!},\ k = 0,1,2,\dots,n\ ,$$

т.е. за бројот на варијации без повторување од n елементи од класа k.

37. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+1} = (n+1)[a_n - n + 1]\,, \qquad (1)$$

со почетен услов $a_0 = 1$.

Решение. Нека $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ е експоненцијалната генераторна функција на разгледуваната низа. Ако (1) ја помножиме со $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ за секој $n \in \mathbb{N}_0$, добиваме

$$a_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = (n+1)[a_n - n + 1]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

односно

$$a_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x \cdot a_n \frac{x^n}{n!} - x^2 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x\frac{x^n}{n!}\ .$$

Ако сега сумираме по сите $n \in \mathbb{N}_0$, добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ .$$

Бидејќи $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, од последното равенство следува

$$A(x) - 1 = xA(x) - x^2 e^x + xe^x\ ,$$

па затоа

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\ .$$

Со изедначување на коефициентите од левата и десната страна добиваме $\frac{a_n}{n!} = 1 + \frac{1}{(n-1)!}$, т.е. $a_n = n! + n$, за $n \in \mathbb{N}_0$.

38. Реши ја диференцната равенка

$$a_{n+1} = (n+1)[(-1)^{n-1}(1 - \tfrac{1}{n+1}) - a_n]\,, \qquad (1)$$

со почетен услов $a_0 = 2$.

Решение. Нека $A(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}x^k$ е експоненцијалната генераторна функција на разгледуваната низа. Ако (1) ја помножиме со $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ за секој $n\in\mathbb{N}_0$, добиваме

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{x^{n+1}}{n!}[(-1)^{n-1}-\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}-a_n],$$

па затоа

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n!}-\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_n}{n!}x^{n+1}.$$

Ако сумираме по сите $n\in\mathbb{N}_0$, добиваме

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n!}-\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}-\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{a_n}{n!}x^{n+1}.$$

Бидејќи $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{x^n}{n!}=e^x$ од последното равенство добиваме

$$A(x)-a_0=-xe^{-x}-(e^{-x}-1)-xA(x),$$

па затоа

$$A(x)=\frac{3}{1+x}-e^{-x}=3\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n x^n-\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{(-1)^n}{n!}x^n.$$

Со изедначување на коефициентите од левата и десната страна добиваме $\frac{a_n}{n!}=3\cdot(-1)^n-\frac{(-1)^n}{n!}$, т.е. $a_n=(-1)^n(3n!-1)$ за $n\in\mathbb{N}_0$.

Забелешка. При решавањето на задачата ги искористивме добро познатиот резултат од математичка анализа $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{x^n}{n!}=e^x$, т.е. искористивме без да докажуваме дека функцијата $A(x)=e^x$ е експоненцијална генераторна функција за низата $a_n=1$, $n\in\mathbb{N}_0$ односно е генераторна функција за низата $a_n=\frac{1}{n!}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Ова смееме да го направиме, бидејќи ако е познато дека некој степенски ред $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}a_n x^n$ во некој $(-R,R)$ конвергира кон некоја функција $A(x)$, тогаш на тој интервал важи $A(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}a_n x^n$, што значи дека $A(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Од претходно кажаното следува дека:

а) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\binom{\sim}{n}x^n=(1+x)^{\sim}$, каде за произволен реален број $\sim$ и произволен ненегативен цел број n биномниот коефициент $\binom{\sim}{n}$ е определен со

$$\binom{\sim}{n} = \frac{\sim(\sim-1)(\sim-2)\dots(\sim-k+1)}{k!},$$

b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$,

c) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sin x$,

d) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \cos x$,

e) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{n+k}{n}x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$,

f) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x$,

g) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$,

h) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{2n+k}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k$,

i) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{k!(2n+k-1)!}{n!(n+k)!}x^n = \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k$,

j) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}x^{2n+1} = \arcsin x$,

k) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{4^n n!^2}{(n+1)\cdot(2n+1)!}x^n = \left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^2$,

39. Нека е дадена комбинаторна сума S која треба да ја пресметаме. Пресметувањето на сумата S може да се направи со помош на следниов метод:

1) Идентификуваме слободна променлива од која зависи сумата, на пример n. Нека $f(n)$ е вредноста на сумата.
2) Нека $F(x)$ е генератотната функција на низата $f(n)$.
3) Ја множиме сумата S со x^n и сумираме по n. Генераторната функција сега е двојна сума: надворешната е по n, а внатрешната е првобитната сума S.
4) Го заменуваме редоследот на собирање и ја наоѓаме внатрешната сума по n.
5) Ги идентификуваме коефициентите за генераторната функција, бидејќи тие се вредностите на сумата S во зависност од n.

Со претходно изложениот метод може да се решат голем број задачи, а самиот метод е познат како *метод на змијско масло*. Ова чудно име станува малку појасно ако се знае дека методот настанал и го добил името во Америка, каде американските индијанци змијското масло го сметале за универзален лек на.

Пресметај го збирот

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}.$$

Решение. Ако n е фиксиран број, тогаш m е слободна променлива и од неа зависи збирот. Нека

$$f(m)=\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}$$

и нека $F(x)$ е генераторна функција на низата $f(m)$, т.е. $F(x)=\sum_m f(m)x^m$.

Тогаш

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_m f(m)x^m=\sum_m x^m\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}\\&=\sum_{k\le n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{m\le k}\binom{k}{m}x^m\\&=\sum_{k\le n}(-1)^k\binom{n}{k}(1+x)^k\\&=(-1)^n\sum_{k\le n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(1+x)^k\\&=(-1)^n((1+x)-1)^n=(-1)^nx^n.\end{aligned}$$

Според тоа, $F(x)=(-1)^nx^n$, а бидејќи тоа е генераторна функција на низата $f(m)=\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ добиваме дека

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\begin{cases}(-1)^n, & n=m,\\ 0, & m<n.\end{cases}$$

40. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}.$$

Решение. Нека $f(m)=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ и нека $F(x)=\sum_m f(m)x^m$ е генераторна функција на низата $f(m)$. Тогаш

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_m f(m)x^m=\sum_m x^m\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}\\&=\sum_{k\le n}\binom{n}{k}\sum_{m\le k}\binom{k}{m}x^m=\sum_{k\le n}\binom{n}{k}(1+x)^k\end{aligned}$$

$$= (2+x)^n = \sum_{m \le n} \binom{n}{m} 2^{n-m} x^m$$

па затоа $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = f(m) = \binom{n}{m} 2^{n-m}$.

41. Докажи дека

$$\sum_k \binom{n}{[\frac{k}{2}]} x^k = (1+x)(1+x^2)^n ,$$

а потоа пресметај го збирот

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]} y^k ,$$

во експлицитен облик кога $y = \pm 2$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sum_k \binom{n}{[\frac{k}{2}]} x^k &= \sum_{k=2k'} \binom{n}{[\frac{2k'}{2}]} x^{2k'} + \sum_{k=2k''+1} \binom{n}{[\frac{2k''+1}{2}]} x^{2k''+1} \\ &= \sum_{k'} \binom{n}{k'} (x^2)^{k'} + x \sum_{k''} \binom{n}{k''} (x^2)^{k''} \\ &= (1+x^2)^n + x(1+x^2)^n = (1+x)(1+x^2)^n .\end{aligned}$$

Сега, да ја разгледаме низата $f(m) = \sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]} y^k$ и нејзината генераторна функција $F(x) = \sum_m f(m) x^m$. Имаме

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_m x^m \sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]} y^k = \sum_k \binom{n}{k} y^k \sum_m \binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]} x^m \\ &= \sum_k \binom{n}{k} y^k x^k \sum_m \binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]} x^{m-k} = \sum_k \binom{n}{k} y^k x^k (1+x)(1+x^2)^{n-k} \\ &= (1+x) \sum_k \binom{n}{k} (yx)^k (1+x^2)^{n-k} = (1+x)(1+x^2+xy)^n .\end{aligned}$$

За $y = 2$ имаме

$$F(x) = (1+x)^{2n+1} = \sum_m \binom{2n+1}{m} x^m ,$$

па затоа

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]} 2^k = \binom{2n+1}{m} .$$

За $y = -2$ имаме

$$F(x) = (1+x)(1-x)^{2n} = (1-x)^{2n} + x(1-x)^{2n}$$

па коефициентот пред x^m е еднаков на

$$(-1)^m \binom{2n}{m} + (-1)^{m-1} \binom{2n}{m-1} = (-1)^{m-1} \left[\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1} \right] ,$$

што значи дека

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]}(-2)^k = (-1)^{m-1}[\binom{2n}{m}-\binom{2n}{m-1}] .$$

42. Докажи дека за секој $n \ge 0$ важи

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k = \binom{n}{j}x^j(1+x)^{n-j} . \qquad (1)$$

Решение. Да земеме дека n е фиксирано, j е слободна променлива и да ставиме

$$f(j) = \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k \text{ и } g(j) = \binom{n}{j}x^j(1+x)^{n-j} .$$

Тогаш соодветните генераторни функции се

$$F(y) = \sum_j f(j)y^j = \sum_j y^j \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k = \sum_k \binom{n}{k}x^k \sum_j \binom{k}{j}y^j$$
$$= \sum_k \binom{n}{k}x^k(1+y)^k = \sum_k \binom{n}{k}(x+xy)^k = (1+x+xy)^n$$

и

$$G(y) = \sum_j g(j)y^j = \sum_j \binom{n}{j}x^j(1+x)^{n-j}y^j$$
$$= \sum_j \binom{n}{j}(1+x)^{n-j}(xy)^j = (1+x+xy)^n.$$

Според тоа, $F(y) = G(y)$, па затоа $f(j) = g(j)$,т.е. точен е индентитетот (1).

43. Докажи дека

$$\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n} . \qquad (1)$$

Решение. Прво да забележиме дека

$$\begin{aligned}\sum_n \binom{m}{2n}x^{2n} &= \tfrac{1}{2}((1+x)^m + (1-x)^m),\\ \sum_n \binom{m}{2n+1}x^{2n+1} &= \tfrac{1}{2}((1+x)^m - (1-x)^m).\end{aligned} \qquad (2)$$

Навистина, ако ставиме

$$A = \sum_n \binom{m}{2n}x^{2n} \text{ и } B = \sum_n \binom{m}{2n+1}x^{2n+1} ,$$

тогаш од Њутновата биномна формула имаме

$$A+B = \sum_n \binom{m}{n}x^n = (1+x)^m ,$$

$$A-B = \sum_n \binom{m}{n}(-1)^n x^n = (1-x)^m ,$$

од каде следува

$$A=\frac{1}{2}((1+x)^m+(1-x)^m) \text{ и } B=\frac{1}{2}((1+x)^m-(1-x)^m).$$

Да претпоставиме дека n е фиксирано, а дека m е слободна променлива од која зависат левата и десната страна на (1) и да ставиме

$$f(m)=\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} \text{ и } g(m)=\binom{2m+1}{2n}.$$

За да го докажеме равенството (1) ќе докажеме дека се еднакви генераторните функции

$$F(x)=\sum_m f(m)x^m \text{ и } G(x)=\sum_m g(m)x^m.$$

Од решението на задача 34 и равенствата (2), за функцијата $F(x)$ добиваме

$$\begin{aligned}
F(x)&=\sum_m x^m\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n}\\
&=\sum_k \binom{2n+1}{2k}\sum_m \binom{m+k}{2n}x^m\\
&=\sum_k \binom{2n+1}{2k}x^{-k}\sum_m \binom{m+k}{2n}x^{m+k}\\
&=\sum_k \binom{2n+1}{2k}x^{-k}\frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}}\\
&=\frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}}\sum_k \binom{2n+1}{2k}(x^{-1/2})^{2k}\\
&=\frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}}\frac{1}{2}((1+\frac{1}{\sqrt{x}})^{2n+1}-(1+\frac{1}{\sqrt{x}})^{2n+1})\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt{x})^{2n-1}(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}}-\frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}).
\end{aligned}$$

Од друга страна, за функцијата $G(x)$ имаме

$$\begin{aligned}
G(x)&=\sum_m \binom{2m+1}{2n}x^m\\
&=x^{-1/2}\sum_m \binom{2m+1}{2n}(x^{1/2})^{2m+1}\\
&=x^{-1/2}\frac{(x^{1/2})^{2n}}{2}((1+\frac{1}{\sqrt{x}})^{2n+1}-(1+\frac{1}{\sqrt{x}})^{2n+1})\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt{x})^{2n-1}(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}}-\frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}).
\end{aligned}$$

Конечно, $F(x)=G(x)$, од што следува равенството (1).

44. Докажи дека $\sum_k (-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

Решение. Да го разгледаме збирот $\sum_k (-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-m+k}$. Нека n е фиксирано, а m е слободна променлива од која зависи збирот:

$$f(m)=\sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-m+k} \text{ и}$$

$$F(x)=\sum_m f(m)x^m \ .$$

Тогаш

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_m x^m \sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-m+k}\\ &=\sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}\sum_m \binom{2n}{2n-m+k}x^m\\ &=\sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}x^k \sum_m \binom{2n}{m-k}x^{m-k}\\ &=\sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}x^k (1+x)^{2n}\\ &=(1+x)^{2n}\sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}x^k\\ &=(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}\\ &=(1-x^2)^{2n}\\ &=\sum_r (-1)^r \binom{2n}{r}x^{2r}.\end{aligned}$$

Според тоа, $f(2n)=(-1)^n\binom{2n}{n}$, па затоа

$$\begin{aligned}\sum_k (-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^2 &= (-1)^n \sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-2n+k}\\ &=(-1)^n f(2n)=\binom{2n}{n},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

45. Пресметај го збирот

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \ .$$

Решение. Нека m и k се фиксирани, а n е слободна променлива од која зависи збирот $f(n)=\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$ и нека $F(x)=\sum_n f(n)x^n$. Тогаш од решението на задача 34 и од забелешката по решението на задача 38, каде во i) ставаме $k=1$, за функцијата $F(x)$ добиваме

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_n x^n \sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\\ &=\sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{-k}\sum_n \binom{n+k}{m+2k}x^{n+k}\end{aligned}$$

$$= \sum_k \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}$$

$$= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \sum_k \binom{2k}{k} \frac{1}{k+1} \left(\frac{-x}{(1-x)^2}\right)^k$$

$$= -\frac{x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}} \left(1-\sqrt{1+\frac{4x}{(1-x)^2}}\right)$$

$$= -\frac{x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}} \left(1-\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{x^m}{(1-x)^m}.$$

Од друга страна, според задача 18 имаме

$$\frac{x^m}{(1-x)^m} = \binom{m-1}{m-1} x^m + \binom{m+1-1}{m-1} x^{m+1} + \binom{m+2-1}{m-1} x^{m+2} + \ldots + \binom{m+i-1}{m-1} x^{m+i} + \ldots,$$

т.е. функцијата $F(x) = \frac{x^m}{(1-x)^m}$ е генераторна за низата $\binom{n-1}{m-1}$, па затоа

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

46. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}.$$

Решение. Нека

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}, \quad g(n) = \binom{4n}{2n}$$

и

$$F(x) = \sum_n f(n) x^n, \quad G(x) = \sum_n g(n) x^n .$$

Ако ги искористиме задача 34 и забелешката по задача 38, генераторната функција под g), последователно добиваме

$$F(x) = \sum_n x^n \sum_{0 \le k \le n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$$

$$= \sum_{0 \le k} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \sum_n \binom{2n}{2k} x^n 2^{2n}$$

$$= \sum_{0 \le k} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \sum_n \binom{2n}{2k} (2\sqrt{x})^{2n}$$

$$= \sum_{0 \le k} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \cdot \frac{1}{2} (2\sqrt{x})^{2k} \left(\frac{1}{(1-2\sqrt{x})^{2k+1}} + \frac{1}{(1+2\sqrt{x})^{2k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2(1-2\sqrt{x})} \sum_{0 \le k} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{(1-2\sqrt{x})^2}\right)^k + \frac{1}{2(1+2\sqrt{x})} \sum_{0 \le k} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{(1+2\sqrt{x})^2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2(1-2\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1-2\sqrt{x})^2}}} + \frac{1}{2(1+2\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+2\sqrt{x})^2}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-4\sqrt{x}}}+\frac{1}{2\sqrt{1+4\sqrt{x}}}.$$

Од друга страна, повторно според забелешката по задача 38, генераторната функција под g), добиваме

$$\sum_n \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \text{ и } \sum_n \binom{2n}{n}(-x)^n = \frac{1}{\sqrt{1+4x}},$$

па затоа за $n=2k$ важи

$$\sum_k \binom{4k}{2k} x^{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}+\frac{1}{\sqrt{1+4x}}\right).$$

Затоа

$$G(z)=\sum_n \binom{4n}{2n} x^n = \sum_n \binom{4n}{2n}(\sqrt{x})^{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+4\sqrt{x}}}\right).$$

Според тоа, $F(x)=G(x)$, па затоа $f(n)=g(n)$, што и требаше да се докаже.

47. Докажи дека за $n\geq 1$ важи

$$\sum_{k\geq 1}\binom{n+k-1}{2k-1}\frac{(x-1)^{2k}x^{n-k}}{k}=\frac{(x^n-1)^2}{n}.$$

Решение. Бидејќи во идентитетот се јавува x, за генераторните функции ќе ја користиме променливата t. Нека

$$f(n)=\sum_{k\geq 1}\binom{n+k-1}{2k-1}\frac{(x-1)^{2k}x^{n-k}}{k},\quad g(n)=\frac{(x^n-1)^2}{n}$$

и

$$F(t)=\sum_n f(n)t^n,\quad G(t)=\sum_n g(n)t^n.$$

Имаме

$$\begin{aligned}
F(t)&=\sum_n t^n\sum_{k\geq 1}\binom{n+k-1}{2k-1}\frac{(x-1)^{2k}x^{n-k}}{k}\\
&=\sum_{k\geq 1}\frac{(x-1)^{2k}}{k}\sum_n\binom{n+k-1}{2k-1}x^{n-k}t^n\\
&=\sum_{k\geq 1}\frac{(x-1)^{2k}}{k}\frac{1}{x^{2k-1}t^{k-1}}\sum_n\binom{n+k-1}{2k-1}(xt)^{n+k-1}\\
&=\sum_{k\geq 1}\frac{(x-1)^{2k}}{k}\frac{1}{x^{2k-1}t^{k-1}}\frac{(xt)^{2k-1}}{(1-xt)^{2k}}\\
&=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{(x-1)^{2k}t^k}{(1-xt)^{2k}}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\left(\frac{(x-1)^2t}{(1-xt)^2}\right)^k\\
&=\log\frac{1}{1-\frac{(x-1)^2t}{(1-xt)^2}}=\log\frac{(1-xt)^2}{(1-xt)^2-(x-1)^2t}\\
&=\log\frac{(1-xt)^2}{(1-t)^2(1-x^2t)}.
\end{aligned}$$

Од друга страна имаме

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n\geq 1}\frac{(x^n-1)^2}{n}t^n = \sum_{n\geq 1}\frac{(x^{2n}-2x^n+1)t^n}{n} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{(x^2t)^n}{n} - 2\sum_{n\geq 1}\frac{(xt)^n}{n} + \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n} \\ &= \log\frac{1}{1-x^2t} - 2\log\frac{1}{1-xt} + \log\frac{1}{1-t} \\ &= \log\frac{(1-xt)^2}{(1-t)^2(1-x^2t)}. \end{aligned}$$

Според тоа, $F(t) = G(t)$, па затоа $f(n) = g(n)$, што и требаше да се докаже.

11. ТРИАГОЛНИ БРОЕВИ

1. Реши ја диференцната равенка

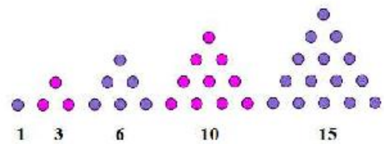
$$t_n - t_{n-1} = n\,,$$

со почетен услов $t_0 = 0$.

Решение. Ако ги собереме равенствата $t_k - t_{k-1} = k$, $k = 1, 2, ..., n$ добиваме

$$t_n = t_0 + \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Коментар. Броевите t_n всушност се броевите точки распоредени во облик на триаголник и затоа се наречени *триаголни броеви* (цртеж десно).



2. Докажи дека збирот на два последователни триаголни броја е квадрат на некој природен број и обратно, секој точен квадрат поголем од 1 може да се запише како збир на два триаголни броја.

Решение. За секој природен број $n > 1$ важи:

$$t_n + t_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2\,,$$

од каде што следува тврдењето на задачата.

3. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни триаголни броеви е куб на природен број.

Решение. Користејќи ги резултатите од претходните две задачи имаме

$$t_n^2 - t_{n-1}^2 = (t_n - t_{n-1})(t_n + t_{n-1}) = n \cdot n^2 = n^3\,.$$

4. Докажи дека збирот на квадратите на два последователни триаголни броја е триаголен број.

Решение. За секој природен број n имаме

$$\begin{aligned} t_n^2 + t_{n+1}^2 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{2} \cdot \frac{n^2+(n+2)^2}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2} \cdot \frac{n^2+n^2+4n+4}{2} = \frac{(n+1)^2}{2} \cdot (n^2 + 2n + 2) \\ &= \frac{(n+1)^2}{2}[(n+1)^2 + 1] = \frac{(n+1)^2[(n+1)^2+1]}{2} \\ &= t_{(n+1)^2}\,, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

5. Докажи дека двојниот производ на два последователни триаголни броја е триаголен број.

Решение. За секој природен број n важи:

$$2t_n t_{n+1} = 2\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n^2+2n)(n+1)^2}{2}$$
$$= \frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{2} = t_{n^2+2n}.$$

6. Докажи дека во низата триаголни броеви има само еден прост број.

Решение. Секој триаголен број е полупроизвод на два последователни природни броја, т.е. $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Да ги разгледаме случаите кога n е парен, односно непарен број.

Ако $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$t_n = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1),$$

а тоа е сложен број, освен за $k = 1$, т.е. $n = 2, t_2 = 3$.

Ако $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$t_n = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{2(2k+1)(k+1)}{2} = (k+1)(2k+1),$$

т.е. t_n е сложен број.

7. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $\frac{n^2+2n+12}{2}$ е триаголен број.

Решение. Треба да ги определиме сите природни броеви n за кои бројот $n^2+2n+12$ е еднаков на производ на два последователни броја.

Бројот n мора да е парен, бидејќи во спротивно бројот $n^2+2n+12$ ќе биде непарен и не може да е еднаков на производ на два последователни природни броја. Важи

$$n(n+1) = n^2+n < n^2+2n+12 .$$

Од друга страна, за парните броеви поголеми од 10 важи $12 < n+2$, па затоа

$$n^2+2n+12 < n^2+3n+2 = (n+1)(n+2) .$$

Според тоа, за парен број $n > 10$ важи

$$n(n+1) < n^2+2n+12 < (n+1)(n+2) ,$$

па затоа дадениот број не може да е производ на два последователни природни броја. За парните броеви помали или еднакви на 10 непосредно се проверува дека само за $n = 2$ и $n = 10$ бројот $n^2+2n+12$ е производ на два последователни природни броја.

8. Докажи дека природниот број m е триаголен ако и само ако $8m+1$ е точен квадрат на некој природен број.

Решение. Нека m е триаголен број, т.е. нека за некој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$m = t_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Тогаш

$$8m+1 = \frac{8n(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

т.е. $8m+1$ е точен квадрат на природен број.

Обратно, ако $8m+1$ е точен квадрат, тогаш тој е квадрат на непарен број, т.е. за некој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$8m+1 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = \frac{8n(n+1)}{2} + 1$$

од каде наоѓаме $m = \frac{n(n+1)}{2}$. Според тоа, m е триаголен број.

9. Докажи, дека за секој непарен број $n > 1$ бројот $\frac{1}{8}(n^2-1)$ е триаголен број.

Решение. Ако $n = 2k+1$ тогаш

$$\frac{1}{8}(n^2-1) = \frac{1}{8}(n-1)(n+1) = \frac{1}{8} \cdot 2k(2k+2) = \frac{k(k+1)}{2},$$

т.е. $\frac{1}{8}(n^2-1)$ е триаголен број.

10. Докажи дека за секој природен број n бројот:

а) $\frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$,

б) $9^n + 9^{n-1} + ... + 9 + 1$,

е триаголен број.

Решение. а) Имаме

$$n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = (n^2 + n + 1)^2 - 1,$$

што значи дека дадениот број е од видот $\frac{1}{8}(m^2-1)$, каде m е непарен број. Сега тврдењето следува од задача 9.

б) Имаме

$$9^n + 9^{n-1} + ... + 9 + 1 = \frac{9^{n+1}-1}{9-1} = \frac{1}{8}((3^{n+1})^2 - 1),$$

па од задача 9 следува дека дадениот број е триаголен број.

11. Докажи дека $\frac{9n+2}{2}$ е триаголен броја ако и само ако $\frac{n}{2}$ е триаголен број.

Решение. Нека $\frac{n}{2}$ е триаголен број. Од задача 8 следува дека $8 \cdot \frac{n}{2} + 1 = k^2$ за некој природен број k. Според тоа, $n = \frac{1}{4}(k^2-1)$, па затоа

$$\frac{9n+2}{2}=\frac{9\cdot\frac{1}{4}(k^2-1)+2}{2}=\frac{1}{8}((3k)^2-1),$$

па од задача 9 следува дека $\frac{9n+2}{2}$ е триаголен број.

Нека $\frac{9n+2}{2}$ е триаголен број. Тогаш од задача 8 следува дека $8\cdot\frac{9n+2}{2}+1=m^2$ за некој природен број m. Според тоа, $36n=m^2-9$, па од деливоста со 9 следува дека $9\mid m^2$, т.е. $m=3s$, за некој $s\in\mathbb{N}$. Значи, $\frac{n}{2}=\frac{1}{8}(s^2-1)$, за некој $s\in\mathbb{N}$, што според задача 9 значи дека $\frac{n}{2}$ е триаголен број.

12. Докажи дека $8\underbrace{99...9}_{k}1\underbrace{00...0}_{k}2$ е триаголен број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}8\underbrace{99...9}_{k}1\underbrace{00...0}_{k}2&=8\underbrace{99...9}_{k}1\underbrace{00...0}_{k+1}+2=8\underbrace{99...9}_{k}1\cdot 10^{k+1}+2\\&=9\cdot\underbrace{99...9}_{k+1}\cdot 10^{k+1}+2=9\cdot(10^{k+1}-1)\cdot 10^{k+1}+2.\end{aligned}$$

Сега, бројот $\frac{n}{2}=\frac{(10^{k+1}-1)\cdot 10^{k+1}}{2}$ е триаголен, па од задача 11 следува дадениот број е триаголен.

13. Докажи дека $\underbrace{55...5}_{n-1}6\underbrace{11...1}_{n-1}$ е триаголен број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}2\cdot\underbrace{55...5}_{n-1}6\underbrace{11...1}_{n-1}&=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}\cdot 10^n+2\cdot\underbrace{11...1}_{n}\\&=\underbrace{11...1}_{n}\cdot(10^n+2)=\underbrace{11...1}_{n}\cdot 1\underbrace{00...0}_{n-1}2\\&=\underbrace{11...1}_{n}\cdot 3\cdot\underbrace{3...3}_{n-1}4=\underbrace{33...3}_{n}\cdot(\underbrace{33...3}_{n}+1),\end{aligned}$$

од каде следува дека бројот $\underbrace{55...5}_{n-1}6\underbrace{11...1}_{n-1}$ е триаголен.

14. Докажи дека низата триаголни броеви содржи бесконечно многу точни квадрати.

Решение. Забележуваме дека триаголните броеви 1 и 36 се точни квадрати. Тоа се првиот и осмиот член во низата триаголни броеви. Ќе докажеме дека, ако t_n е точен квадрат, тогаш $t_{4n(n+1)}$ е точен квадрат. Навистина, ако

$$t_n=\frac{n(n+1)}{2}=k^2,$$

тогаш $4n(n+1)=8k^2$ и

$$t_{4n(n+1)}=t_{8k^2}=\frac{8k^2(8k^2+1)}{2}=4k^2(8k^2+1)=(2k)^2[4n(n+1)+1]$$
$$=(2k)^2(2n+1)^2=[2k(2n+1)]^2$$

т.е. $t_{4n(n+1)}$ е точен квадрат.

15. Докажи дека

а) $8t_{n-1}+4n=(2n)^2$,

б) $t_{2n}=3t_n+t_{n-1}$,

в) $t_{2n+1}=3t_n+t_{n+1}$,

г) $t_{t_{n-1}}+t_{t_n}=t_n^2-nt_{n-1}$,

д) $t_{2n}-2t_n=n^2$,

ѓ) $t_{2n-1}-2t_{n-1}=n^2$,

е) $t_n^2=t_n+t_{n-1}t_{n+1}$,

ж) $t_{3n-1}=3t_n+6t_{n-1}$.

Решение. а) Имаме:

$$8t_{n-1}+4n=8\cdot\frac{n(n-1)}{2}+4n=4n^2-4n+4n=(2n)^2.$$

б) Имаме:

$$3t_n+t_{n-1}=3\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3n^2+3n+n^2-n}{2}=\frac{2n(2n+1)}{2}=t_{2n}.$$

в) Имаме:

$$3t_n+t_{n+1}=3\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{3n^2+3n+n^2+3n+2}{2}$$
$$=\frac{4n^2+6n+2}{2}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}=t_{2n+1}.$$

г) Имаме:

$$t_{t_{n-1}}+t_{t_n}=\frac{t_{n-1}(t_{n-1}+1)}{2}+\frac{t_n(t_n+1)}{2}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}(\frac{n(n-1)}{2}+1)}{2}+\frac{\frac{n(n+1)}{2}(\frac{n(n+1)}{2}+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n-1)(n(n-1)+2)+n(n+1)(n(n+1)+2)}{8}$$
$$=\frac{n^2(n-1)^2+2n^2-2n+n^2(n+1)^2+2n^2+2n}{8}$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2+n^2((n-1)^2+4)}{8}$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2+n^2((n+1)^2-4n+4)}{8}$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n^2(n-1)}{2}$$
$$=t_n^2-nt_{n-1}.$$

д) Имаме:

$$t_{2n}-2t_n=\frac{2n(2n+1)}{2}-2\frac{n(n+1)}{2}=n(2n+1)-n(n+1)=n^2.$$

ѓ) Имаме

$$t_{2n-1}-2t_{n-1}=\frac{2n(2n-1)}{2}-2\frac{n(n-1)}{2}=n(2n-1)-n(n-1)=n^2.$$

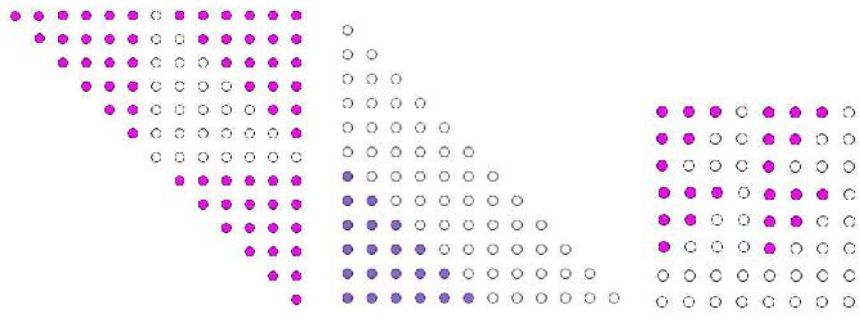
е) Имаме:

$$t_n + t_{n-1}t_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2+n^2+n-2}{2}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = t_n^2.$$

ж) Имаме:

$$3t_n + 6t_{n-1} = 3\frac{n(n+1)}{2} + 6\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n(n+1+2n-2)}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2} = t_{3n-1}.$$

Коментар. Некои од горните иденитети имаат едноставни нагледни претставувања. За $n = 6$ на долните цртежи од лево на десно се прикажани претставувањата на идентитетите $t_{2n+1} = 3t_n + t_{n+1}$ и $t_{2n} = 3t_n + t_{n-1}$, а на цртежот десно е прикажано претставувањето на идентитетот $8t_{n-1} + 4n = (2n)^2$, кој го покажавме во задача 8.



16. Ако за триаголните броеви t_m и t_n важи $t_n = 2t_m$, тогаш триаголниот број t_{2m-n} е квадратен број, т.е. тој е точен квадрат. Докажи!

Решение. Од $t_n = 2t_m$ добиваме $\frac{n(n+1)}{2} = 2\frac{m(m+1)}{2}$, односно

$$2m(m+1) = n(n+1)\ . \qquad (1)$$

Од друга страна, важи:

$$t_{2m-n} = \frac{(2m-n)(2m-n+1)}{2} = \frac{(2m-n)^2+2m-n}{2} = \frac{4m^2-4mn+n^2+2m-n}{2}$$
$$t_{2m-n} = \frac{2m(m+1)-n(n+1)}{2} + (n-m)^2.$$

Ако во последното равенство замениме од равенството (1) добиваме

$$t_{2m-n} = (n-m)^2,$$

т.е. t_{2m-n} е квадратен број.

Коментар. За триаголните броеви

$$t_{14} = \frac{14(14+1)}{2} = 105 \text{ и } t_{20} = \frac{20(20+1)}{2} = 210$$

важи $t_{20}=2t_{14}$, па од претходната задача следува дека триаголниот број $t_{2\cdot 14-20}=t_8$ е квадратен број. Навистина, $t_8=36=6^2=k_6$.

17. Ако $\frac{r(r+1)}{2}=t_r=k_s=s^2$, докажи дека

$$t_{3r+4s+1}=(2r+3s+1)^2\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека $\frac{r(r+1)}{2}=t_r=k_s=s^2$. Тогаш

$$\begin{aligned} t_{3r+4s+1} &= \frac{(3r+4s+1)[(3r+4s+1)+1]}{2} \\ &= \frac{(3r+4s+1)^2+3r+4s+1}{2} \\ &= \frac{9r^2+16s^2+1+24rs+6r+8s+3r+4s+1}{2} \\ &= \frac{9r^2+16\frac{r(r+1)}{2}+24rs+9r+12s+2}{2} \qquad (2) \\ &= \frac{17r(r+1)+24rs+12s+2}{2} \\ &= \frac{34s^2+24rs+12s+2}{2} \\ &= 17s^2+12rs+6s+1. \end{aligned}$$

Од друга страна имаме:

$$\begin{aligned} (2r+3s+1)^2 &= 4r^2+9s^2+1+12rs+4r+6s \\ &= 9s^2+4r(r+1)+12rs+6s+1 \\ &= 9s^2+8s^2+12rs+6s+1 \qquad (3) \\ &= 17s^2+12rs+6s+1. \end{aligned}$$

Конечно, равенството (1) следува од равенствата (2) и (3).

Коментар. Користејќи ја претходната задача лесно се докажува дека низата триаголни броеви содржи бесконечно многу точни квадрати (квадратни броеви). Навистина, за $s=r=1$ имаме $t_1=\frac{1(1+1)}{2}=1^2=k_1$, па од претходната задача следува

$$t_{3\cdot 1+4\cdot 1+1}=(2\cdot 1+3\cdot 1+1)^2\text{, т.е. } t_8=6^2=k_6\,.$$

Понатаму, за $r=8$ и $s=6$ добиваме

$$t_{3\cdot 8+4\cdot 6+1}=(2\cdot 8+3\cdot 6+1)^2\text{, т.е. } t_{49}=35^2=k_{35} \text{ итн.}$$

Решението на претходната задача е лесно и елегантно, но е чудно што некој воочил дека $(3r+4s+1)$ – от триаголен број е еднаков на $(2r+3s+1)$ – от квадратен број. Затоа е логично да се запрашаме како е дојдено до ова тврдење, бидејќи со непосредна проверка тоа скоро и да не е можно. Одговорот на ова прашање го дава решението на следнава задача.

18. Определи ги природните броеви p и q за кои важи

$$\frac{p(p+1)}{2}=q^2 .$$

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{p(p+1)}{2}=q^2$$
$$p^2+p=2q^2$$
$$4p^2+4p=8q^2$$
$$4p^2+4p+1=8q^2+1$$
$$(2p+1)^2=8q^2+1.$$

Во последната равенка воведуваме замена $2p+1=x$ и $y=q$ и ја добиваме равенката $x^2=8y^2+1$, која е Пелова равенка од видот

$$x^2-dy^2=1 \tag{1}$$

за $d=8$. Познато е дека сите решенија (x_n,y_n) на равенката (1) се дадени со формулата

$$x_n+y_n\sqrt{d}=(x_0+y_0\sqrt{d})^n,\ n\in\mathbb{N} \tag{2}$$

каде (x_0,y_0) е таканареченото фундаментално решение на (1). Во нашиот случај тоа е паротот $(x_0,y_0)=(3,1)$, па од (1) добиваме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$x_n+y_n\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^n, \tag{3}$$

Ако во (3) наместо n ставиме $n+1$, добиваме

$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^{n+1}. \tag{4}$$

Понатаму, равенството (4) го делиме со равенството (3) и последователно добиваме

$$\frac{x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{8}}{x_n+y_n\sqrt{8}}=\frac{(3+\sqrt{8})^{n+1}}{(3+\sqrt{8})^n}$$
$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})(x_n+y_n\sqrt{8})$$
$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{8}=3x_n+8y_n+(x_n+3y_n)\sqrt{8}$$

и како $\sqrt{8}$ е ирационален број од последното равенство следува

$$\begin{cases} x_{n+1}=3x_n+8y_n \\ y_{n+1}=x_n+3y_n. \end{cases} \tag{5}$$

Сега заради $2p+1=x$ и $y=q$ имаме $2p_n+1=x_n$, $y_n=q_n$ и $2p_{n+1}+1=x_{n+1}$, $y_{n+1}=q_{n+1}$ и ако замениме во (5) добиваме

$$\begin{cases} 2p_{n+1}+1=3(2p_n+1)+8q_n \\ q_{n+1}=2p_n+1+3q_n \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} p_{n+1} = 3p_n + 4q_n + 1 \\ q_{n+1} = 2p_n + 3q_n + 1, \end{cases} \qquad (6)$$

со што во множеството природни броеви се определени решенијата на равенката $\frac{p(p+1)}{2} = q^2$.

Коментар. а) Ако ги споредиме равенствата (6) со равенството (1) од претходната задача забележуваме дека всушност тргнувајќи од парот $(1,1)$ со равенството (1) од претходната задача се зададени редните броеви на сите триаголни броеви кои истовремено се и квадратни броеви, како и редните броеви на сите квадратни броеви кои истовремено се и триаголни броеви. Така, користејќи ги равенствата (6) можеме да ја составиме следнава табела

p	1	8	49	288	1681	...
q	1	6	35	204	1189	...

во која последователно добиваме кој триаголен број е еднаков на кој квадратен број.

б) Од првата равенка во (5) добиваме $8y_n = x_{n+1} - 3x_n$ и ако наместо n ставиме $n+1$ добиваме

$$8y_{n+1} = x_{n+2} - 3x_{n+1}. \qquad (7)$$

Сега втората равенка во (5) ја множиме со 8 и добиваме

$$8y_{n+1} = 8x_n + 24y_n ,$$

па ако замениме

$$8y_n = x_{n+1} - 3x_n$$

добиваме

$$8y_{n+1} = 8x_n + 3(x_{n+1} - 3x_n) . \qquad (8)$$

Сега од (7) и (8) добиваме $x_{n+2} - 3x_{n+1} = 8x_n + 3(x_{n+1} - 3x_n)$, односно

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n . \qquad (9)$$

Понатаму, ако во (9) ставиме

$$2p_n + 1 = x_n ,\ 2p_{n+1} + 1 = x_{n+1} \text{ и } 2p_{n+2} + 1 = x_{n+2} ,$$

по средувањето добиваме дека редните броеви на триаголните броеви кои истовремено се и квадратни броеви се решенија на следнава линеарна диференцна равенка од втор ред:

$$p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n = 2 , \qquad (10)$$

со почетни услови $p_1 = 1$, $p_2 = 8$. Според тоа, со замена во

$$s_n = \frac{p_n(p_n+1)}{2} , \text{ за } n = 1, 2, \ldots$$

ги добиваме триаголните броеви кои истовремено се и квадратни броеви.

в) Може да се докаже дека сите триаголни броеви кои истовремено се и квадратни броеви се решенија на линеарната диференцна равенка од втор ред

$$s_n = 34s_{n-1} - s_{n-2} + 2,$$

со почетни услови $s_0 = 0, s_1 = 1$.

19. Со $[x]$ да го означиме најголемиот природен број кој е помал или еднаков на x. На пример, $[2,345] = 2$, $[0,124] = 0$. Ако m е триаголен број, т.е. $m = t_n$, тогаш $n = [\sqrt{2m}]$. Докажи!

Решение. Од $m = \frac{n(n+1)}{2}$ следува $2m = n^2 + n$, т.е.

$$n^2 < 2m < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

па затоа $n < \sqrt{2m} < n+1$. Оттука следува дека n е најголемиот цел број кој е помал од $\sqrt{2m}$, па затоа $n = [\sqrt{2m}]$.

20. Нека бројот $x = 0,136051865...$ е формиран од цифрите на единиците на триаголните броеви. Дали x е рационален број?

Решение. Да запишеме неколку триаголни броеви: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 235, 276, 300, 325, 351, 378, ... Според тоа, првите 27 децимални цифри на бројот x се:

$$x = 0,136051865568815003100136 0518... .$$

Забележуваме дека постои период од 20 цифри, т.е. дека меѓу испишаните броеви t_n и t_{n+20}, за $n = 1,2,3,4,5,6,7$ имаат иста цифра на единици. Ќе докажеме дека споменатото својство важи за секој природен број n. За таа цел доволно е да докажеме дека за секој природен број n разликата $t_{n+20} - t_n$ е делива со 10. Имаме

$$t_{n+20} - t_n = \frac{(n+20)(n+20+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 10(2n+21).$$

Конечно, бројот x има периодичен децимален запис, што значи дека тој е рационален број.

21. Докажи, ако $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ е низата триаголни броеви, тогаш

$$A = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + ... + \frac{1}{t_n} + ... = 2.$$

Решение. За секој природен број k имаме $t_k = \frac{k(k+1)}{2}$, па затоа

$$\frac{1}{t_k} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\frac{k+1-k}{k(k+1)} = 2[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}].$$

Според тоа,

$$A = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + ... + \frac{1}{t_n} + ...$$

$$= 2(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + ...$$

$$=2(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+...+\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}+...)=2$$

што и требаше да се докаже.

22. Докажи дека сите броеви кои во систем со основа 9 се запишуваат само со цифрата 1 се триаголни броеви.

Решение. Треба да докажеме дека броевите

$$1_{(9)},\quad 11_{(9)},\quad 111_{(9)},\quad 1111_{(9)},\quad 11111_{(9)},\quad 111111_{(9)} \qquad (1)$$

се триаголни броеви. Имаме

$$\underbrace{111...11}_{k\text{ един.}}{}_{(9)}=1+9+9^2+...+9^{k-1}=\frac{9^k-1}{9-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^k-1}{2}\cdot\frac{3^k+1}{2}. \qquad (2)$$

Но, 3^k-1 и 3^k+1 се последователни парни броеви, т.е. $3^k-1=2n$ и $3^k+1=2n+2$, за некој $n\in\mathbb{N}$, па затоа

$$\underbrace{111...11}_{k\text{ един.}}{}_{(9)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^k-1}{2}\cdot\frac{3^k+1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n(2n+2)}{4}=\frac{n(n+1)}{2}$$

што значи дека секој член од низата (1) е триаголен број.

Забелешка. Тврдењето на задачата следува од претставувањето

$$\underbrace{111...11}_{k\text{ един.}}{}_{(9)}=1+9+9^2+...+9^{k-1}$$

и од задача 10, за која во продолжение на решението на претходната задча е дадено уште едно решение.

23. Докажи дека секој триаголен број, освен t_1 и t_3, може да се запише како збир на три, не задолжително различни триаголни броеви.

Упатство. Прво докажи ги следниве равенства:

а) $t_{3k+1}=t_k+t_{2k}+t_{2k+1}$, за секој $k\in\mathbb{N}$,

б) $t_{3k+2}=t_{k+1}+t_{2k+1}+t_{2k+1}$, за секој $k\in\mathbb{N}$,

в) $t_{3k}=t_{k-1}+t_{2k}+t_{2k}$, за секој $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Сега, за $n\geq 4$ тврдењето следува од равенствата а), б) и в), а за $n=2$ имаме

$$t_2=t_1+t_1+t_1.$$

24. Докажи дека од низата триаголни броеви може да се избере бесконечна подниза таква што сите нејзини парцијални збирови се точни квадрати.

Решение. *Прв начин*. Да ја разгледаме поднизата

$$t_1, t_{2\cdot 3^0}, t_{2\cdot 3^1}, t_{2\cdot 3^2},..., t_{2\cdot 3^k},....$$

од низата триаголни броеви. Имаме

$$\begin{aligned} t_1+t_{2\cdot 3^0}+t_{2\cdot 3^1}+t_{2\cdot 3^2}+...+t_{2\cdot 3^k} &= 1+3^0(2\cdot 3^0+1)+3^1(2\cdot 3^1+1)+...+3^k(2\cdot 3^k+1) \\ &= 1+(3^0+3^1+3^2+...+3^k)+2(3^0+3^2+3^4+...+3^{2k}) \end{aligned}$$

$$=1+\frac{3^{k+1}-1}{2}+2\cdot\frac{3^{2k+2}-1}{9^2-1}$$
$$=1+\frac{3^{k+1}-1}{2}+\frac{3^{2k+2}-1}{4}$$
$$=\frac{3^{2k+2}+2\cdot 3^{k+1}+1}{4}=(\frac{3^{k+1}+1}{2})^2.$$

Втор начин. Нека претпоставиме дека таква низа постои и дека сме конструирале дел од бараната низа:

$$t_{k_1},t_{k_2},t_{k_3},t_{k_4},...,t_{k_n} \qquad (1)$$

при што

$$t_{k_1}+t_{k_2}+t_{k_3}+t_{k_4}+...+t_{k_n}=t_{k_{n+1}}.$$

Ако на низата (1) го додадеме триаголниот број $t_{t_{k_{n+1}}-1}$ добиваме низа со истото својство. Навистина, бидејќи

$$t_n+(m+1)=t_{m+1}$$

за $m=t_{k_{n+1}}-1$ имаме

$$t_{k_1}+t_{k_2}+t_{k_3}+t_{k_4}+...+t_{k_n}+t_{t_{k_{n+1}}-1}=t_{k_{n+1}}+t_{t_{k_{n+1}}-1}=t_{t_{k_{n+1}}}.$$

Коментар. На прв поглед изгледа дека оваа конструкција е тешка поради индексите. Но, не е така. Еве пример:

$$t_3=6,\quad t_5=15,\quad t_{20}=210,...$$

Кој е следниот член на оваа подниза? Бидејќи $t_3+t_5+t_{20}=231$ од претходно кажаното следува дека четвртиот член на низата е $t_{230}=26565$, т.е. низата е

$$t_3,t_5,t_{20},t_{230},....$$

Јасно, петтиот член на низата е t_{26564} итн.

25. Докажи дека

$$t_{(n-1)^2+(n-1)-1}+t_{n^2+n-1}=n^4.$$

Решение. Според задача 1 имаме:

$$t_{(n-1)^2+(n-1)-1}+t_{n^2+n-1}=\frac{((n-1)^2+(n-1)-1)((n-1)^2+(n-1))}{2}+\frac{(n^2+n-1)(n^2+n)}{2}$$
$$=\frac{(n^2-n-1)(n^2-n)}{2}+\frac{(n^2+n-1)(n^2+n)}{2}$$
$$=\frac{(n^2-n)^2-(n^2-n)+(n^2+n)^2-(n^2+n)}{2}$$
$$=\frac{n^4-2n^3+n^2-n^2+n+n^4+2n^3+n^2-n^2-n}{2}$$
$$=n^4,$$

што и требаше да се докаже.

26. Пресметај го збирот

$$S=\frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+...+\frac{2020}{4\cdot 2020^4+1}.$$

Решение. *Прв начин.* Имаме:

$$4k^4+1=4k^4+4k^2+1-4k^2=(2k^2+1)^2-(2k)^2$$
$$=(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1),$$

па затоа

$$\frac{k}{4k^4+1}=\frac{k}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}=\frac{1}{4}\frac{2k^2+2k+1-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(k-1)^2+k^2}-\frac{1}{k^2+(k+1)^2}\right).$$

Според тоа,

$$S=\frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+...+\frac{2020}{4\cdot 2020^4+1}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{0^2+1^2}-\frac{1}{1^2+2^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2+2^2}-\frac{1}{2^2+3^2}\right)+...+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2019^2+2020^2}-\frac{1}{2020^2+2021^2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2020^2+2021^2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2021^2-1+2020^2}{2020^2+2021^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2020\cdot 2022+2020^2}{2020^2+2021^2}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2020\cdot 4042}{2020^2+2021^2}=\frac{1010\cdot 2021}{2020^2+(2020+1)^2}=\frac{1010\cdot 2021}{2020^2+2020^2+2\cdot 2020+1}$$
$$=\frac{1010\cdot 2021}{1+2\cdot 2020^2+2\cdot 2020}=\frac{1010\cdot 2021}{1+2\cdot 2020\cdot 2021}.$$

Втор начин. Последователно ги пресметуваме парцијалните збирови на дадената сума и наоѓаме:

$$S_1=\frac{1}{5}=\frac{\frac{1\cdot 2}{2}}{1+4\cdot\frac{1\cdot 2}{2}}=\frac{t_1}{1+4t_1},$$
$$S_2=\frac{\frac{2\cdot 3}{2}}{1+4\cdot\frac{2\cdot 3}{2}}=\frac{t_2}{1+4t_2}, \tag{2}$$
$$S_3=\frac{\frac{3\cdot 4}{2}}{1+4\cdot\frac{3\cdot 4}{2}}=\frac{t_3}{1+4t_3},$$

па затоа логично е да претпоставиме дека

$$S_n=\frac{t_n}{1+4t_n}\text{, за секој } n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Од (2) следува дека формулата (3) е точна за $n=1,2,3$. Нека претпоставиме дека (3) е точна за некој $n=k$, т.е. $S_k=\frac{t_k}{1+4t_k}$. Тогаш, ако искористиме дека за секој $k\in\mathbb{N}$ важи $t_{k+1}-t_k=k+1$, добиваме

$$\frac{t_{k+1}}{1+4t_{k+1}}-\frac{t_k}{1+4t_k}=\frac{t_{k+1}+4t_{k+1}t_k-t_k-4t_{k+1}t_k}{(1+4t_{k+1})(1+4t_k)}$$
$$=\frac{k+1}{(1+2(k+1)(k+2))(1+2k(k+1))}$$
$$=\frac{k+1}{(2k^2+6k+5)(2k^2+2k+1)}=\frac{k+1}{4(k+1)^4+1},$$

па затоа

$$\frac{t_{k+1}}{1+4t_{k+1}}=\frac{t_k}{1+4t_k}+\frac{k+1}{4(k+1)^4+1}=S_k+\frac{k+1}{4(k+1)^4+1}=S_{k+1},$$

т.е. формулата (3) важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.
Конечно, ако во (3) ставиме $n=2020$ добиваме

$$S=\frac{1}{4\cdot1^4+1}+\frac{2}{4\cdot2^4+1}+\ldots+\frac{2020}{4\cdot2020^4+1}=\frac{t_{2020}}{1+4t_{2020}}=\frac{\frac{2020\cdot2021}{2}}{1+4\cdot\frac{2020\cdot2021}{2}}=\frac{1010\cdot2021}{1+2\cdot2020\cdot2021}.$$

27. Определи ја генераторната функција на низата триаголни броеви.

Решение. Според задача 10.14 генераторната функција на низата $a_n=n+1$, $n=0,1,2,3,\ldots$ е $A(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. Понатаму, од дефиницијата на формален извод на ред следува

$$A'(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n\geq0}n(n+1)x^{n-1}=2\sum_{n\geq0}t_nx^{n-1}=2\sum_{n\geq1}t_nx^{n-1}=2\sum_{n\geq0}t_{n+1}x^n.$$

Сега ако во $\frac{2}{(1-x)^3}=2\sum_{n\geq0}t_{n+1}x^n$, прво поделиме со 2, а потоа помножиме со x добиваме

$$\frac{x}{(1-x)^3}=\sum_{n\geq0}t_{n+1}x^{n+1}=\sum_{n\geq1}t_nx^n=\sum_{n\geq0}t_nx^n,$$

што значи дека генераторната функција на низата $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$, $n=0,1,2,3\ldots$ е $T(x)=\frac{x}{(1-x)^3}$.

12. ФИБОНАЧИЕВИ И ЛУКАСОВИ БРОЕВИ

1. Реши ја диференцната равенка

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad (1)$$

со почетни услови $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

Низата $\{f_n\}$ која е решение на диференцната равенка (1) во литературата е позната како *Фибоначиева низа*, а нејзините членови како *Фибоначиеви броеви*.

Решение. Равенката (1) е линеарна диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти. Нејзината карактеристична равенка е $r^2 - r - 1 = 0$, со решенија $\sim = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $= \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, општото решение на равенката (1) е дадено со

$$f_n = A(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Од почетните услови $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ го добиваме системот равенки

$$A\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + B\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \text{ и } A + B = 0$$

чие решение е $A = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Според тоа, решението на (1) е дадено со

$$f_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]. \qquad (2)$$

Формулата (2) е позната како *формула на Бине*.

2. Докажи дека ножеството $\{1,2,...,n\}$ содржи точно f_{n+2} подмножества (вклучувајќи го и празното множество) во кои не се содржат два последователни природни броја.

Решение. Со a_n да го означиме бројот на подмножествата на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои не содржат два последователни природни броја. За секое множество S кое го броиме во a_n, имаме две можности:

1) $n \notin S$. Во множеството S може да се сите броеви од $\{1,2,...,n-1\}$ (бидејќи n не е во S), но при услов да во него нема два последователни природни броја. Такви множества и a_{n-1}.

2) $n \in S$. Бидејќи n е во множеството S во него не може да се содржи бројот $n-1$, па затоа $S \setminus \{n\} \subseteq \{1,2,...,n-1\}$, при услов да S не содржи два последователни природни броја. Такви множества има a_{n-2}.

Од претходните разгледувања следува дека

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Почетните услови ќе ги определиме со пребројување. За $n=1$ имаме две такви множества $\varnothing$ и $\{1\}$, т.е. $a_1 = 2$, а за $n=2$ имаме три такви множества $\varnothing$, $\{1\}$ и $\{2\}$, т.е. $a_2 = 3$. Бидејќи имаме иста диференцна равенка, а само поместени почетни услови добиваме $a_n = f_{n+2}$.

3. а) Нека a_n е бројот на начините на покривање на правоаголник $1\times n$ со домина 1×2 и квадрати 1×1. Докажи дека за секој $n \geq 1$ важи

$$a_n = f_{n+1}. \tag{1}$$

б) На колку начини правоаголник со димензии $2\times n$ може да се покрие со домина 1×2.

Решение. а) Да дефинираме $a_0 = f_1 = 1$ да е број на покривање на правоаголник со должина 0. Понатаму, правоаголник со должина 1 може да се покрие само на еден начин (еден квадрат), па затоа $a_1 = f_2 = 1$. Нека претпоставиме дека (1) важи за $n = k-1$ и $n = k$.

Нека имаме правоаголник со димензија $n = k+1$. Тогаш првото поле од лево можеме да го покриеме:

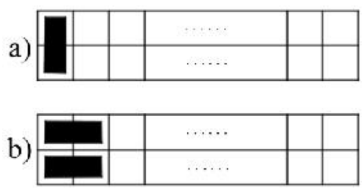
1) или со квадрат 1×1, по што ни останува да покриеме правоаголник со димензија k, за што бројот на покривањата е $a_k = f_{k+1}$,
2) или со домино 1×2, по што останува да покриеме правоаголник со димензија $k-1$, за што бројот на покривањата е $a_{k-1} = f_k$.

Но, за првото поле се само горните две можности, па затоа

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} = f_{k+1} + f_k = f_{n+2}.$$

Според тоа, (1) важи и за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \geq 1$.

б) Нека a_n е бројот на начините на кли правоагоникот $2\times n$ може да се покрие со домина 1×2. Врз основа како е поставено првото домино разликуваме два случаја (цртежи десно):



- првото домино е поставено вертикално, па сега остатокот од правоаголникот може да се покрие на a_{n-1} начини.
- Првото домино е поставено хоризонтално,па хоризонтално мора да се постави и второто домино, а остатокот од правоаголникот може да се покрие на a_{n-2} начини.

Сега, од принципот на збир следува дека

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

со почетни услови $a_1 = 1, a \quad = 2$, па затоа решението е $a_n = f_{n+1}$.

4. Фибоначиевиот број f_k е парен ако и само ако k е од видот $3n, n \in \mathbb{N}$. Докажи!

Решение. Ненегативните цели броеви да ги поделиме во три множества:

$$S = \{3n+1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \{1, 4, 7, 10, ...\},$$
$$R = \{3n+2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{2, 5, 8, 11, ...\},$$
$$T = \{3n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}.$$

Сега со индукција се докажува дека f_k е парен ако $k \in T$, а непарен ако $k \in S \cup R$.

За $n = 0$ тврдењето е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој n, т.е. дека f_{3n+1} и f_{3n+2} се непарни, а f_{3n} е парен. Тогаш

$f_{3(n+1)+1} = f_{3n+4} = f_{3n+3} + f_{3n+2} = f_{3n+1} + 2f_{3n+2}$ е непарен број,

$f_{3(n+1)} = f_{3n+3} = f_{3n+2} + f_{3n+1}$ е парен број, и

$f_{3(n+1)+2} = f_{3n+5} = f_{3n+4} + f_{3n+3} = f_{3n+2} + 2f_{3n+3}$ е непарен број.

Според тоа, тврдењето важи за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$, што и требаше да се докаже.

5. За секој $n \in \mathbb{N}_0$ важи $5 \mid f_{5n}$. Докажи!

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

За $n = 0$ имаме $5 \mid 0 = f_0$, што значи дека тврдењето важи.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за некој $n = k$, т.е. дека $5 \mid f_{5k}$.

Тогаш за $n = k+1$ имаме

$$\begin{aligned} f_{5(k+1)} &= f_{5k+4} + f_{5k+3} = (f_{5k+3} + f_{5k+2}) + f_{5k+3} \\ &= f_{5k+2} + 2f_{5k+3} = f_{5k++2} + 2(f_{5k+2} + f_{5k+1}) \\ &= 2f_{5k+1} + 3f_{5k+2} = 2f_{5k+1} + 3(f_{5k+1} + f_{5k}) \\ &= 5f_{5k+1} + 3f_{5k}, \end{aligned}$$

па затоа од $5 \mid f_{5k}$ и $5 \mid 5f_{5k+1}$ следува $5 \mid 3f_{5k} + 5f_{5k+1} = f_{5(k+1)}$, т.е. тврдењето важи за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

6. Докажи, дека бизата цифри на единиците на Фибоначиевите броеви е периодична со период 60.

Решение. Да ја разгледаме низата цифри на единицте на Фибоначчиевите броеви, c_n. За оваа низа важи рекурентната релација $c_{n+2} = c_{n+1} \oplus c_n$, каде операцијата $\oplus$ е собирање по модул 10. За да ја определиме периодата на оваа низа треба да ги најдеме првите броеви i и j, $i<j$, такви што $c_i = c_j$ и $c_{i+1} = c_{j+1}$, бидејќи понатаму цифрите на единиците ќе се повторуваат периодично со период $j-i$. Имаме

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c_n	0	1	1	2	3	5	8	3	1	4	5	9	4	3	7

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
c_n	0	7	7	4	1	5	6	1	7	8	5	3	8	1	9

n	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
c_n	0	9	9	8	7	5	2	7	9	6	5	1	6	7	3

n	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
c_n	0	3	3	6	9	5	4	9	3	2	5	7	2	9	1

n	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	...
c_n	0	1	1	2	3	5	8	3	1	4	5	9	4	3	...

Од горната табела воочуваме дека $i=0$ и $j=60$, што значи дека низата $\{c_n\}$ е периодична со период 60.

7. Докажи дека бројот f_n е најблизок природен број на бројот $\frac{a^n}{\sqrt{5}}$, каде $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Тврдењето на задачата следува од формулата на Бине

$$f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, \text{ каде } a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } b=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

при што го добиваме неравенството

$$|\, f_n - \frac{a^n}{\sqrt{5}} \,|=|\, \frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}} - \frac{a^n}{\sqrt{5}} \,|= \frac{|b|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

8. Докажи, дека бројот на цифрите на Фибоначиевиот број f_n е поголем од $\frac{n-2}{5}$.

Решение. Бројот на цидир на природниот број k е еднаков на $\lfloor \log_{10} k \rfloor + 1$. Според тоа, бројот на цифри на Фибоначиевиот број f_n е еднаков на

$\lfloor \log_{10} f_n \rfloor + 1$. Од задача 7 следува дека $f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, па затоа бројот на цифрите на бројот f_n е поголем или еднаков на

$$\left\lfloor \log_{10} \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \right\rfloor + 1 = \left\lfloor -\log_{10}\sqrt{5} + n\log_{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \right\rfloor + 1 .$$

Понатаму, точни се неравенствата

$$\log_{10}\sqrt{5} \approx 0,349485 < \frac{2}{5} \text{ и } \log_{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \approx 0,2089876 > \frac{1}{5},$$

па бројот на цифрите на бројот f_n е поголем или еднаков на

$$\left\lfloor \frac{n}{5} - \frac{2}{5} \right\rfloor + 1 > \left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor + 1 > \frac{n-2}{5} .$$

9. Докажи дека за Фибоначиевите броеви важи:

а) $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$, $n \geq 2$

б) $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$,

в) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$, $n \geq 2$

г) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$, $n \geq 1$

д) $f_{n-m} f_{n+m} - f_n^2 = (-1)^{n+m-1} f_m^2$, $n > m$

ѓ) $f_n^4 - f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = 1$,

е) $f_{n+i} f_{n+j} - f_n f_{n+i+j} = (-1)^n f_i f_j$.

Решение. а) *Прв начин*. За $n = 2$ и $n = 3$ формулата е точна бидејќи

$$f_{m+2} = f_{m+1} + f_m = f_{m+1} f_1 + f_m f_2 \text{ и}$$

$$f_{m+3} = f_{m+2} + f_{m+1} = (f_{m+1} + f_m) + f_{m+1} = f_2 f_m + 2 f_{m+1} = f_2 f_m + f_3 f_{m+1}$$

Нека претпоставиме дека формулата е точна за $n = k$ и $n = k + 1$, т.е.

$$f_{k+m} = f_{k-1} f_m + f_k f_{m+1} \text{ и } f_{k+1+m} = f_k f_m + f_{k+1} f_{m+1} .$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$f_{k+m} + f_{k+1+m} = (f_k + f_{k-1}) f_m + (f_k + f_{k+1}) f_{m+1},$$

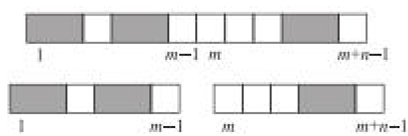
т.е.

$$f_{k+2+m} = f_{k+1} f_m + f_{k+2} f_{m+1} .$$

Според тоа, формулата е точна за $n = k + 2$, па затоа тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

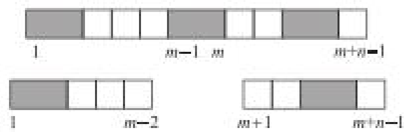
Втор начин. Ќе го докажеме равенството $a_{m+n-1} = a_{m-2} a_{n-1} + a_{m-1} a_n$, каде со a_n е означен бројот на покривање на правоаголник $1 \times n$ со домина 1×2 и квадрати 1×1. Бројот на покривања на правоаголникот со должина $m + n - 1$ е еднаков на a_{m+n-1}. Сега ќе го определиме бројот на покривањата на друг начин, така што ќе разгледаме два случаја.

1) Ако покриениот правоаголник со должина $m + n - 1$ може да се подели по $(m-1)$ – то поле (цртеж десно), тогаш тој настанал



со спојување на два правоагол-ници: еден кој има $m-1$ поле и друг кој има n полиња. Правоаголници-те ги покриваме независно еден од друг, па затоа вкупно имаме $a_{m-1}a_n$ покривања.

2) Ако покриениот правоаголник со должина $m+n-1$ не може да се подели кај $(m-1)-$то поле, тогаш постои домино кое ги покрива $(m-1)-$то и $m-$то поле (цртеж долу десно). Сега, првиот дел од правоаголникот кој е со должина $m-2$ може да се по-крие на a_{m-2} начини, потоа имаме домино и третиот дел од право-аголникот кој е со должина $n-1$ може да се покрие на a_{n-1} начини. Значи, во овој случај имаме $a_{m-2}a_{n-1}$ покривања на правоаголникот.



Бидејќи при секое покривање $(m-1)-$то квадратче е покриено или со квад-ратче или со домино, заклучиваме дека вкупниот број покривања е еднаков на $a_{m-1}a_n+a_{m-2}a_{n-1}$, па затоа важи $a_{m+n-1}=a_{m-2}a_{n-1}+a_{m-1}a_n$. Сега, од за-дача 2 следува $f_{n+m}=f_{m-1}f_n+f_mf_{n+1}$. Конечно, заради симетрија имаме $f_{n+m}=f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1}$, што и требаше да се докаже.

Трет начин. Имаме $\sim\ \ =-1$, $\sim-\ \ =\sqrt{5}$ и $\sim+\ \ =1$, па затоа

$$\sim^{m}\ \ ^{n-1}=(-1)^m\ \ ^{n-m-1},\ \sim^{n-1}\ \ ^{m}=(-1)^m\sim^{n-m-1},$$

$$\sim^{m+1}\ \ ^{n}=-(-1)^m\ \ ^{n-m-1},\ \sim^{n}\ \ ^{m+1}=-(-1)^m\sim^{n-m-1},$$

па затоа:

$$\begin{aligned}
f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1} &= \frac{1}{\sqrt5}(\sim^{n-1}-\ \ ^{n-1})\cdot\frac{1}{\sqrt5}(\sim^{m}-\ \ ^{m})+\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt5}(\sim^{n}-\ \ ^{n})\cdot\frac{1}{\sqrt5}(\sim^{m+1}-\ \ ^{m+1})\\
&=\frac15(\sim^{m+n-1}-\sim^{m}\ \ ^{n-1}-\sim^{n-1}\ \ ^{m}+\ \ ^{m+n-1})+\\
&\quad+\frac15(\sim^{m+n+1}-\sim^{m+1}\ \ ^{n}-\sim^{n}\ \ ^{m+1}+\ \ ^{m+n+1})\\
&=\frac15(\sim^{m+n-1}-(-1)^m\ \ ^{n-m-1}-(-1)^m\sim^{n-m-1}+\ \ ^{m+n-1})+\\
&\quad+\frac15(\sim^{m+n+1}+(-1)^m\ \ ^{n-m-1}+(-1)^m\sim^{n-m-1}+\ \ ^{m+n+1})\\
&=\frac15(\sim^{m+n-1}+\ \ ^{m+n-1}+\sim^{m+n+1}+\ \ ^{m+n+1})\\
&=\frac15(\sim^{m+n+1}-\sim^{m+n}\ \ -\ \ ^{m+n}\sim+\ \ ^{m+n+1})\\
&=\frac15(\sim-\ \ )(\sim^{m+n}-\ \ ^{m+n})=\\
&=\frac{1}{\sqrt5}(\sim^{m+n}-\ \ ^{m+n})\\
&=f_{n+m}.
\end{aligned}$$

б) Во задачата под а) наместо n ставаме $n+1$, а наместо m ставаме n.
в) Ако во формулата од задачата под а) наместо m ставиме n добиваме

$$f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})$$

и како $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ со замена во последното равенство го добиваме бараното равенство.
г) Ако во формулата од задачата под а) наместо n ставиме $2n$, а наместо m ставиме n добиваме

$$f_{3n} = f_{2n-1}f_n + f_{2n}f_{n+1}.$$

Со помош на формулите од задачите под б) и в) последното равенство може да се трансформира на следниот начин:

$$f_{3n} = f_{2n-1}f_n + f_{2n}f_{n+1} = (f_n^2 + f_{n-1}^2)f_n + (f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2)f_{n+1}$$
$$= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^2(f_{n+1} - f_n) = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3.$$

д) *Прв начин*. Точноста на формулата за $n = m+1$ следува од формулата под б). Нека претпоставиме дека за $n = k$ важи

$$f_{k-m}f_{k+m} - f_k^2 = (-1)^{k+m-1}f_m^2.$$

Од б) следува $f_{2k+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2$, а од а) следува

$$f_{2k+1} = f_{k-m}f_{k+m} + f_{k+1-m}f_{k+1+m}.$$

Од последните две равенства и од индуктивната претпоставка добиваме

$$f_{k+1-m}f_{k+1+m} - f_{k+1}^2 = -(f_{k-m}f_{k+m} - f_k^2) = -(-1)^{k+m-1}f_m^2 = (-1)^{k+m}f_m^2,$$

т.е. равенството важи за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n \geq m+1$.
Втор начин. Ако ја искористиме формулата на Бине добиваме

$$f_{n+m}\cdot f_{n-m} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+m} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+m}]\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-m} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-m}]$$
$$= \tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n} - (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2m}(\tfrac{1-5}{4})^{n-m} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2m}(\tfrac{1-5}{4})^{n-m}]$$
$$= \tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n} + (-1)^{n-m+1}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2m} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2m})]$$
$$= \tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n} + 2(-1)^{n+1} + (-1)^{n-m+1}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2m} - 2(-1)^m + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2m})]$$
$$= \tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n} - 2(-1)^n + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}] + (-1)^{n-m+1}\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2m} - 2(-1)^m + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2m}]$$
$$= [\tfrac{1}{\sqrt{5}}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n)]^2 + (-1)^{n-m+1}[\tfrac{1}{\sqrt{5}}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^m - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^m)]^2$$
$$= f_n^2 + (-1)^{n-m+1}f_m^2$$
$$= f_n^2 + (-1)^{n-m+1}(-1)^{2m-2}f_m^2$$
$$= f_n^2 + (-1)^{n+m-1}f_m^2,$$

што и требаше да се докаже.
Коментар. *i*) Докажаниот иднтитет е еквивалентен со идентитетот

$$f_n^2 - f_{n-m} f_{n+m} = (-1)^{n-m} f_m^2,$$

кој во литературата е познат како *Каталанов идентитет*.

ii) Ако во идентитетот $f_{n+m} \cdot f_{n-m} = f_n^2 + (-1)^{n+m-1} f_m^2, n > m$ земеме $m = 1$, го добиваме таканаречениот *Касиниев идентитет*

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n .$$

ѓ) Ако во формулата од задачата под д) ставиме $m = 1$ и $m = 2$ добиваме

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n f_1^2 \text{ и } f_{n-2} f_{n+2} - f_n^2 = (-1)^{n+1} f_2^2 ,$$

што значи дека

$$f_{n-1} f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n \text{ и } f_{n-2} f_{n+2} = f_n^2 - (-1)^n .$$

Ако ги помножиме последните две равенства го добиваме равенството

$$f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = f_n^4 - 1 ,$$

кое е еквивалентно на бараното равенство. Овој идентитет во литературата е познат како идентитет на *Гелин-Цезаро*.

е) Прво со примена на идентитет под а), а потоа со примена на Касиниевиот идентитет, при што ја користиме основната релација од дефиницијата на Фибоначиевите броеви, последователно добиваме:

$$\begin{aligned} f_{n+i} f_{n+j} - f_n f_{n+i+j} &= (f_n f_{i+1} + f_{n-1} f_i)(f_n f_{j+1} + f_{n-1} f_j) - f_n (f_{n+i} f_{j+1} + f_{n+i-1} f_j) \\ &= f_{n-1} f_n f_{i+1} f_j + f_{n-1}^2 f_i f_j - f_n f_j (f_n f_i - f_{n-1} f_{i-1}) \\ &= f_{n-1} f_n f_j (f_{i+1} - f_{i-1}) + f_i f_j (f_{n-1}^2 - f_n^2) \\ &= f_{n-1} f_n f_j f_i + f_i f_j (f_{n-1} f_{n+1} - f_n f_{n-1} - f_n^2) \\ &= f_{n-1} f_n f_j f_i + f_i f_j ((-1)^n - f_n f_{n-1}) = (-1)^n f_i f_j , \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Коментар. Лесно се гледа дека од непосредно докажаниот идентитет следува Каталановиот идентитет. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

10. Докажи дека

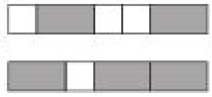
$$f_{3n} = 3 f_n f_{n+1}^2 - 3 f_n^2 f_{n+1} + 2 f_n^3 .$$

Решение. Ако во идентитетот $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$, кој го докажавме во задача 2 г), имаме замениме $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$, добиваме

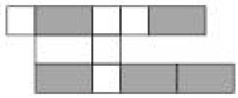
$$\begin{aligned} f_{3n} &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 = f_{n+1}^3 + f_n^3 - (f_{n+1} - f_n)^3 \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n+1}^3 + 3 f_{n+1}^2 f_n - 3 f_{n+1} f_n^2 + f_n^3 \\ &= 3 f_{n+1}^2 f_n - 3 f_{n+1} f_n^2 + 2 f_n^3 , \end{aligned}$$

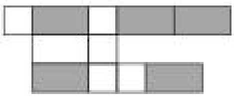
што и требаше да се докаже.

11. Користејќи ја задача 2 докажи го Касиниевиот идентитет.



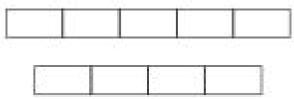
Решение. Со a_n да го означиме бројот на покривање на правоаголник $1\times n$ со домина 1×2 и квадрати 1×1. Да го разгледаме парот правоаголници со должина n прикажан на цртежот десно. Бројот на начините на кои може да се покрие парот е еднаков на a_n^2. Да го поместиме долниот правоаголник за едно квадратче надесно. Ќе велиме дека постои „грешка“ на местото i ако горниот правоаголник може да се подели на местото i, а долниот на местото $i-1$, без притоа да се крши плочка со која се покриени полињата на двата правоаголници. Поместувањето на горниот пар е прикажано на цртежот десно и може да се види дека во случајот имаме грешки на местата 1, 3 и 4. Сега да ги замениме деловите (опашките) на правоаголниците по последната грешка (цртеж лево). Така добиваме два правоаголници со „грешки“ на истите места како на почетокот, со тоа што горниот правоаголник сега има должина $n+1$, а долниот има должина $n-1$. Сега бројот на начините на кои може да се покрие новиот пар правоаголници е еднаков на $a_{n+1}a_{n-1}$. Јасно, ако барем едниот правоаголник има квадрат, тогаш сигурно постои „грешка“. На пример, ако првиот правоаголник има квадрат кој го покрива $i-$тото поле, тогаш тој може да се подели на местата i или $i-1$. Ако вториот правоаголник не може да се подели на местото i, тогаш постои домино кое ги покрива полињата i и $i+1$, па тогаш „грешката“ сигурно е на местото $i-1$. Во спротивно, ако вториот правоаголник може да се подели на на местото i, тогаш на тоа место има „грешка“. Јасно, „грешките“ може да се избегнат само на еден начин: покривање на двата правоаголници со домина.





Според задача 2 бројот на сите покривања на два посебни правоаголници со должина n е $x=a_n^2$, а бројот на сите покривања на правоаголник со должина $n+1$ и правоаголник со должина $n-1$ е $y=a_{n+1}a_{n-1}$.

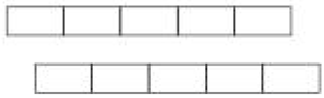
Нека претпоставиме дека n е непарен број. Тогаш двата правоаголници мора да имаат најмалку еден квадрат, па „грешка“ сигурно постои. Со замена на опашките на правоаголниците, добиваме правоаголници со должини $n+1$ и $n-1$, со грешки на истите места како во почетниот распоред. Така добивме биекција меѓу сите парови покривања на правоаголници со должина n и сите парови покривања на правоаголници со должини $n+1$ и $n-1$, при услов овие покривања да имаат барем една грешка. Но, n е непарен број, па затоа $n+1$ и $n-1$ се парни броеви и може да се



случи во парот правоаголници со должини $n+1$ и $n-1$ да нема ниту една грешка (цртеж десно). Овој пар нема да го броиме и затоа

$$a_n^2 = a_{n+1}a_{n-1} - 1 = a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^n .$$

Ако n е парен број, тогаш како и во претходниот случај, постои биекција меѓу сите парови правоаголници кои имаат „грешки“. Разликата во однос на претходниот случај е тоа што сега единствениот пар покривања кој нема



„грешка“ е парот во кој двата правоаголници со должина n се покриени само со домина (цртеж лево). Затоа за парен n важи

$$a_n^2 = a_{n+1}a_{n-1} + 1 = a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^n .$$

Сега, од задача 2 следува

$$f_{n+1}^2 = f_{n+2} f_n + (-1)^n$$

и ако во последното равен-ство ставиме $n+1=m$ добиваме

$$f_m^2 = f_{m+1} f_{m-1} + (-1)^{m-1} ,$$

односно

$$f_{m+1} f_{m-1} = f_m^2 + (-1)^m ,$$

што и требаше да се докаже.

12. За секој природен број $n \geq 2$ точна е формулата

$$x^n = (x^2 - x - 1)(f_1 x^{n-2} + f_2 x^{n-3} + f_3 x^{n-4} + \ldots + f_{n-2} x + f_{n-1}) + f_n x + f_{n-1} . \quad (1)$$

Докажи!

Решение. Со непосредна проверка се убедуваме дека формулата (1) е точна за $n = 2$. Понатаму, ако ја искористиме рекурентната релација за Фибоначиевите броеви, за $n \geq 3$ добиваме:

$$\begin{aligned}
&(x^2 - x - 1)(f_1 x^{n-2} + f_2 x^{n-3} + f_3 x^{n-4} + \ldots + f_{n-2} x + f_{n-1}) + f_n x + f_{n-1} = \\
&= f_1 x^n + f_2 x^{n-1} + f_3 x^{n-2} + f_4 x^{n-3} + \ldots + f_{n-2} x^3 + f_{n-1} x^2 + f_n x + f_{n-1} \\
&\qquad - f_1 x^{n-1} - f_2 x^{n-2} - f_3 x^{n-3} - \ldots - f_{n-3} x^3 - f_{n-2} x^2 - f_{n-1} x \\
&\qquad\qquad - f_1 x^{n-2} - f_2 x^{n-3} - \ldots - f_{n-4} x^3 - f_{n-3} x^2 - f_{n-2} x - f_{n-1} \\
&= 1 \cdot x^n + 1 \cdot x^{n-1} - 1 \cdot x^{n-1} + (f_3 - f_2 - f_1) x^{n-2} + (f_4 - f_3 - f_2) x^{n-3} + \ldots \\
&\quad + (f_{n-2} - f_{n-3} - f_{n-4}) x^3 + (f_{n-1} - f_{n-2} - f_{n-3}) x^2 + (f_n - f_{n-1} - f_{n-2}) x \\
&= x^n + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-3} + \ldots + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x = x^n ,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

13. Докажи дека

$$f_1 - f_2 + f_3 - \ldots - f_{2k-2} + f_{2k-1} = f_{2k-2} + 1 .$$

Решение. Ако во равенството (1) од задача 6 ставиме $x=-1$ и $n=2k$ добиваме

$$1=(1+1-1)(f_1-f_2+...-f_{2k-2}+f_{2k-1})-f_{2k}+f_{2k-1},$$
$$1+f_{2k}-f_{2k-1}=f_1-f_2+...-f_{2k-2}+f_{2k-1},$$
$$1+f_{2k-2}=f_1-f_2+...-f_{2k-2}+f_{2k-1},$$

што и требаше да се докаже.

14. Користејќи ја задача 6 докажи го Касиниевиот идентитет

$$f_{n+1}\cdot f_{n-1}=f_n^2+(-1)^n .$$

Решение. Прво да забележиме дека

$$\sim(1-\sim)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1^2-\sqrt{5}^2}{2^2}=\frac{1-5}{4}=-1 . \qquad (1)$$

Ако во равенството (1) во задача 6 замениме $x=\sim$ и земеме предвид дека $\sim$ е корен на полиномот x^2-x-1 добиваме

$$\sim^n=f_n\sim+f_{n-1} . \qquad (2)$$

Слично, ако во равенството (1) во задача 6 замениме $x=1-\sim$ и земеме предвид дека $1-\sim$ е корен на полиномот x^2-x-1 добиваме

$$(1-\sim)^n=f_n(1-\sim)+f_{n-1} . \qquad (3)$$

Ги множеме равенствата (2) и (3) и ако го искористиме равенството (1) и фактот дека $f_n+f_{n-1}=f_{n+1}$ последователно добиваме

$$\sim^n(1-\sim)^n=(f_n\sim+f_{n-1})(f_n(1-\sim)+f_{n-1})$$
$$[\sim(1-\sim)]^n=f_n^2\sim(1-\sim)+f_{n-1}f_n\sim+f_{n-1}f_n-f_{n-1}f_n\sim+f_{n-1}^2$$
$$(-1)^n=-f_n^2+f_{n-1}(f_n+f_{n-1})$$
$$f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n ,$$

што и требаше да се докаже.

15. Нека се $m,n\ge 2$. Докажи дека

$$f_{n+m-1}=f_nf_m+f_{n-1}f_{m-1} . \qquad (1)$$

Решение. Од равенството (2) од претходната задача имаме

$$\sim^n=f_n\sim+f_{n-1} ,\ \sim^m=f_m\sim+f_{m-1} \text{ и } \sim^{n+m}=f_{n+m}\sim+f_{n+m-1} ,$$

па затоа

$$f_{n+m}\sim+f_{n+m-1}=\sim^{n+m}=\sim^n\sim^m=(f_n\sim+f_{n-1})(f_m\sim+f_{m-1})$$

и како $\sim^2=\sim+1$ последователно ги добиваме следниве еквивалентни равенства

$$f_{n+m}\sim+f_{n+m-1}=f_nf_m\sim^2+f_{n-1}f_m\sim+f_nf_{m-1}\sim+f_{n-1}f_{m-1} \qquad \Leftrightarrow$$

$$f_{n+m}\sim + f_{n+m-1} = f_n f_m \sim + f_n f_m + f_{n-1} f_m \sim + f_n f_{m-1} \sim + f_{n-1} f_{m-1} \qquad \Leftrightarrow$$
$$f_{n+m}\sim + f_{n+m-1} = (f_n f_m + f_{n-1} f_m + f_n f_{m-1})\sim + f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1} \qquad \Leftrightarrow$$
$$f_{n+m}\sim + f_{n+m-1} = (f_n f_{m+1} + f_{n-1} f_m)\sim + f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1} \qquad \Leftrightarrow$$
$$(f_{n+m} - f_n f_{m+1} - f_{n-1} f_m)\sim = f_{n+m-1} - f_n f_m - f_{n-1} f_{m-1},$$

и како во последното равенство левата страна е ирационален, а десната страна е цел број добиваме дека е точно равенството (1).

Коментар. а) Ова е всушност уште еден начин на докажување на идентитетот од задача 2 а) кој всушност е идентитетот (1), ако $m-1$ го замениме со m.

б) Ако во равенството (1) ставиме $m = n+1$ и ако ги искористиме равенствата $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, т.е. $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ последователно добиваме

$$f_{n+n+1-1} = f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1-1} \qquad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}(f_{n+1} - f_{n-1}) + f_{n-1} f_n \qquad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n+1} f_{n-1} + f_{n-1} f_n \qquad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - (f_n + f_{n-1}) f_{n-1} + f_{n-1} f_n \qquad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_n f_{n-1} - f_{n-1}^2 + f_{n-1} f_n \qquad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2,$$

и ова е уште еден начин на решавање на задача 2 в).

16. Докажи дека

а) $f_{2n+1} = f_n f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+1}$ б) $f_{3n} = f_n f_{2n+1} + f_{n-1} f_{2n}$

Решение. а) *Прв начин*. Бараното равенство го добиваме ако во равенството (1) во задача 9 ставиме $m = n+2$.

Втор начин. Според задача 2 б) имаме $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$ и ако искористиме дека $f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, добиваме

$$\begin{aligned} f_{2n+1} &= f_n^2 + f_{n+1}^2 \\ &= f_n(f_{n+2} - f_{n+1}) + f_{n+1}(f_n + f_{n-1}) \\ &= f_n f_{n+2} - f_n f_{n+1} + f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1} \\ &= f_n f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+1}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

б) Бараното равенство го добиваме ако во равенството (1) од задача 9 ставиме $m = 2n+1$.

17. Докажи дека

$$f_{n+1} f_{n+2} f_{n+6} - f_{n+3}^3 = (-1)^n f_n .$$

Решение. Од основниот идентите во дефиницијата на Фибоначиевите броеви следува $f_{n+3}=f_{n+2}+f_{n+1}$ и

$$f_{n+6}=f_{n+5}+f_{n+4}=2f_{n+4}+f_{n+3}=3f_{n+3}+2f_{n+2}=5f_{n+2}+3f_{n+1},$$

па затоа

$$\begin{aligned}f_{n+1}f_{n+2}f_{n+6}-f_{n+3}^3&=f_{n+1}f_{n+2}(5f_{n+2}+3f_{n+1})-(f_{n+2}+f_{n+1})^3\\&=2f_{n+1}f_{n+2}^2-f_{n+2}^3-f_{n+1}^3\\&=-f_{n+2}^2(f_{n+2}-f_{n+1})+f_{n+1}(f_{n+2}^2-f_{n+1}^2)\\&=-f_nf_{n+2}^2+f_{n+1}f_n(f_{n+2}+f_{n+1})\\&=-f_nf_{n+2}(f_{n+1}+f_n)+f_{n+1}f_n(f_{n+2}+f_{n+1})\\&=f_n(-f_{n+2}f_{n+1}-f_{n+2}f_n+f_{n+2}f_{n+1}+f_{n+1}^2)\\&=-f_n(f_{n+2}f_n-f_{n+1}^2).\end{aligned}$$

Сега, со примена на Касиниевиот идентите за $n+1$, добиваме

$$f_{n+2}f_n-f_{n+1}^2=(-1)^{n+1},$$

па затоа

$$f_{n+1}f_{n+2}f_{n+6}-f_{n+3}^3=-f_n(f_{n+2}f_n-f_{n+1}^2)=-(-1)^{n+1}f_n=(-1)^nf_n,$$

што и требаше да се докаже.

18. Докажи дека за Фибоначиевите броеви важи:

а) $\sum_{i=1}^{n}f_i=f_{n+2}-1$, б) $\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)f_i=f_{n+4}-(n+3)$

в) $\sum_{i=1}^{n}if_i=nf_{n+2}-f_{n+3}+2$, г) $\sum_{i=1}^{n}f_{2i-1}=f_{2n}$

д) $\sum_{i=1}^{n}f_{2i}=f_{2n+1}-1$, ѓ) $\sum_{i=1}^{n}(-1)^if_i=(-1)^nf_{n-1}-1$,

е) $\sum_{i=1}^{n}f_i^2=f_nf_{n+1}$.

Решение. а) *Прв начин*. Од $f_k=f_{k+2}-f_{k+1}$ следува

$$\sum_{i=1}^{n}f_i=\sum_{i=1}^{n}(f_{i+2}-f_{i+1})=f_{n+2}-f_2=f_{n+2}-1.$$

Втор начин. Ако во равенството (1) во задача 6 ставиме $x=1$ и прво искористиме дека $f_n+f_{n-1}=f_{n+1}$, а потоа $f_n+f_{n+1}=f_{n+2}$ и последователно добиваме:

$$1^n=(1^2-1-1)(f_1\cdot1^{n-2}+f_2\cdot1^{n-3}+f_3\cdot1^{n-4}+...+f_{n-2}\cdot1+f_{n-1})+f_n\cdot1+f_{n-1}$$

$$f_1+f_2+f_3+...+f_{n-2}+f_{n-1}=f_n+f_{n-1}-1$$

$$f_1+f_2+f_3+...+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n=f_n+f_{n-1}-1+f_n$$
$$f_1+f_2+f_3+...+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n=f_{n+1}-1+f_n$$
$$f_1+f_2+f_3+...+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n=f_{n+2}-1,$$

што и требаше да се докаже.

б) Од задачата под а) имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)f_i &= f_1+(f_1+f_2)+(f_1+f_2+f_3)+...+(f_1+f_2+...+f_n)\\ &=(f_3-1)+(f_4-1)+(f_5-1)+...+(f_{n+2}-1)\\ &=\sum_{i=1}^{n+2}f_i-n-f_1-f_2\\ &=f_{n+4}-(n+3).\end{aligned}$$

в) Од задачите под а) и б) следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}if_i &=(n+1)\sum_{i=1}^{n}f_i-\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)f_i\\ &=(n+1)(f_{n+2}-1)-(f_{n+4}-(n+3))\\ &=nf_{n+2}-(f_{n+4}-f_{n+2})+2\\ &=nf_{n+2}-f_{n+3}+2.\end{aligned}$$

г) Имаме $f_{2k-1}=f_{2k}-f_{2k-2}$ па затоа:

$$\sum_{i=1}^{n}f_{2i-1}=\sum_{i=1}^{n}(f_{2i}-f_{2i-2})=f_{2n}-f_0=f_{2n}.$$

д) Имајќи ги предвид равенствата под а) и г) добиваме

$$\sum_{i=1}^{n}f_{2i}=\sum_{i=1}^{2n}f_i-\sum_{i=1}^{n}f_{2i-1}=f_{2n+2}-1-f_{2n}=f_{2n+1}-1.$$

ѓ) Од

$$(-1)^k f_k=(-1)^k f_{k-1}+(-1)^k f_{k-2}=(-1)^k f_{k-1}-(-1)^{k-1}f_{k-2}$$

следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i &=(-1)^1 f_1+\sum_{i=2}^{n}[(-1)^i f_{i-1}-(-1)^{i-1}f_{i-2}]\\ &=-f_1+(-1)^n f_{n-1}-(-1)^1 f_0\\ &=(-1)^n f_{n-1}-1,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

е) За секој $n\geq 1$ важи

$$f_i^2=f_i\cdot f_i=f_i(f_{i+1}-f_{i-1})=f_i f_{i+1}-f_i f_{i-1},$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(f_i f_{i+1} - f_i f_{i-1})$$
$$= (f_1 f_2 - f_1 f_0) + (f_2 f_3 - f_2 f_1) + (f_3 f_4 - f_3 f_2) + \ldots + (f_n f_{n+1} - f_n f_{n-1})$$
$$= f_n f_{n+1} - f_1 f_0 = f_n f_{n+1}.$$

19. Докажи деказа низата Фибоначиеви броеви $\{f_n\}$ важи

$$f_{n+2} + f_{n-2} = 3 f_n , \qquad (1)$$

за $n = 0,1,2,3,\ldots$.

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$f_{n+2} + f_{n-2} = (f_n + f_{n+1}) + f_{n-2} = f_n + (f_{n-1} + f_n) + f_{n-2}$$
$$= 2 f_n + (f_{n-1} + f_{n-2}) = 2 f_n + f_n = 3 f_n .$$

Втор начин. Имаме:

$$f_{n+2} + f_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}] + \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^4 + 1] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}[(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^4 + 1]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot [(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2 + 1] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot [(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2 + 1]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\frac{7+3\sqrt{5}}{2} + 1) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} + 1)$$
$$= \frac{3}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] = 3 f_n ,$$

што и требаше да се докаже.

20. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи равенството

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \underbrace{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}_{n} . \qquad (1)$$

Решение. Равенството (1) ќе го докажеме со индукција по n .

За $n = 1$ имаме $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1$, т.е. важи равенството (1).

Нека претпоставиме дека (1) важи за $n = k$. Тогаш за $n = k + 1$ имаме

$$\frac{f_{k+2}}{f_{k+1}} = \frac{f_{k+1} + f_k}{f_{k+1}} = 1 + \frac{f_k}{f_{k+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{k+1}}{f_k}} ,$$

Сега, од индуктивната претпоставка и последното равенство следува дека (1) важи и за $n = k + 1$.

Конечно, од принципт на математичка индукција следува дека (1) важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Коментар. Претставувањето на количникот $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ со формулата (1) всушност ја дава врската на Фибоначиевите броеви со верижните дропки.

21. Нека

$$x_1 = 2, x_2 = x_3 = 7 \text{ и } x_{n+1} = x_n x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ за } n \geq 3.$$

Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $x_n + 2$ е точен квадрат.

Решение. Ќе докажеме дека за $n \geq 2$ важи $x_n = 2 + 5 f^2_{2 f_{n-1}}$, каде $\{f_n\}$ е низата на Фибоначи. Имаме

$$x_2 = 7 = 2 + 5 f^2_{2 f_1}, \; x_3 = 7 = 2 + 5 f^2_{2 f_2}, \; x_4 = 7 \cdot 7 - 2 = 47 = 2 + 5 \cdot 9 = 2 + 5 f^2_{2 f_1}. (1)$$

Понатаму, ако се искористи дека $f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, каде $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $ab = 1$, тогаш лесно се докажува дека

$$2 + 5 f^2_{2 f_{n+1}} = (2 + 5 f^2_{2 f_n})(2 + 5 f^2_{2 f_{n-1}}) - (2 + 5 f^2_{2 f_{n-2}}),$$

па затоа $x_n = 2 + 5 f^2_{2 f_{n-1}}$, за $n \geq 2$.

Од друга страна, решението на диференцната равенка $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, со почетни услови $u_1 = 2, u_2 = 1$ е дадено со $u_n = a^n + b^n$, па затоа

$$u_n^2 - 2 = (a^n + b^n)^2 - 2 = a^{2n} + b^{2n}$$

е природен број. Конечно,

$$x_n + 2 = 4 + 5 f^2_{2 f_{n-1}} = 4 + 5\left(\frac{a^{2 f_{n-1}} - b^{2 f_{n-1}}}{\sqrt{5}}\right)^2 = (a^{2 f_{n-1}} + b^{2 f_{n-1}})^2,$$

што значи дека $x_n + 2$ е точен квадрат.

22. Докажи дека меѓу првите 10^8 членови на низата на Фибоначи

$$f_0 = 0, \; f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ за } n \geq 0$$

постои барем еден кој е делив со 10^4.

Решение. Нека претпоставиме дека $10^4 \nmid f_n$ за $n \leq 10^8$. Да ја разгледаме низата остатоци $r_i, i = 1, 2, ...$ од делењето на $f_i, i = 1, 2, ...$ со 10^4. Имаме

$$r_1 \equiv r_2 (\text{mod} 10^4) \text{ и } r_{n+2} \equiv r_{n+1} + r_n (\text{mod} 10^4).$$

Бидејќи $r_n \neq 0$, добиваме дека r_n прима најмногу $10^4 - 1$ вредност, а за сите последователни парови

$$(r_1, r_2), (r_2, r_3), \ldots, (r_n, r_{n+1}), \; n = 10^8 - 1$$

постојат најмногу $(10^4-1)^2<10^8-1$ можности.

Според тоа, постојат броеви $i<j\le 10^8-1$ такви што $r_i\equiv r_j(\bmod 10^4)$ и $r_{i+1}\equiv r_{j+1}(\bmod 10^4)$. Затоа

$$r_{i-1}\equiv r_{i+1}-r_i\equiv r_{j+1}-r_j\equiv r_{j-1}(\bmod 10^4),$$
$$r_{i-2}\equiv r_{j-2}(\bmod 10^4),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$1=r_2\equiv r_{j-i+2}(\bmod 10^4),$$
$$1=r_1\equiv r_{j-i+1}(\bmod 10^4).$$

Конечно,

$$r_{j-i}\equiv 1-1(\bmod 10^4),$$

т.е. $10^4\mid f_{j-i}$.

23. (*Теорема на Цезаро*). Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k f_k = f_{3n}$$

Решение. Ако ги искористиме формулите на Бине, при ознаки $\sim=\frac{1+\sqrt5}{2}$ и $1-\sim=\frac{1-\sqrt5}{2}$, и Њутновата биномна формула, добиваме

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k f_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\frac{1}{\sqrt5}(\sim^k-(1-\sim)^k)$$
$$=\frac{1}{\sqrt5}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\sim^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k(1-\sim)^k\Big)\qquad(1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt5}((1+2\sim)^n-(1+2(1-\sim))^n).$$

Понатаму, од $\sim^2=\sim+1$ следува

$$\sim^3=\sim^2\cdot\sim=\sim(\sim+1)=\sim^2+\sim=\sim+1+\sim=2\sim+1$$

и аналогно се докажува дека $(1-\sim)^3=1+2(1-\sim)$. Сега, заменуваме во (1) и добиваме

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k f_k=\frac{1}{\sqrt5}((1+2\sim)^n-(1+2(1-\sim))^n)=\frac{1}{\sqrt5}(\sim^{3n}-(1-\sim)^{3n})=f_{3n}.$$

24. Докажи дека

$$f_n^2=2f_{n-1}^2+2f_{n-2}^2-f_{n-3}^2,\ \text{за}\ n\ge 0.\qquad(1)$$

Решение. *Прв начин*. Со квадрирање на $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, за $n \geq 3$ последователно добиваме

$$f_n^2 = f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + 2f_{n-1}f_{n-2}$$

$$2f_{n-1}f_{n-2} = f_n^2 - f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2 . \qquad (2)$$

Ако во (2) наместо n ставиме $n-1$ добиваме

$$2f_{n-2}f_{n-3} = f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2 - f_{n-3}^2 . \qquad (3)$$

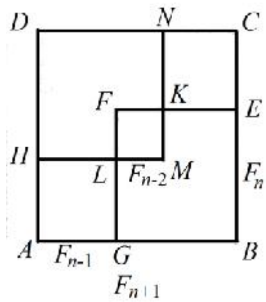
Сега, од (2) ја одземаме (3) и добиваме

$$2f_{n-2}(f_{n-1} - f_{n-3}) = f_n^2 - 2f_{n-1}^2 + f_{n-3}^2 . \qquad (4)$$

Ако во (4) замениме $f_{n-1} - f_{n-3} = f_{n-2}$, добиваме

$$2f_{n-2}^2 = f_n^2 - 2f_{n-1}^2 + f_{n-3}^2 \text{, т.е. } f_n^2 = 2f_{n-1}^2 + 2f_{n-2}^2 - f_{n-3}^2 ,$$

што и требаше да се докаже.



Втор начин. Ако во (1) наместо n ставиме $n+1$ добиваме

$$f_{n+1}^2 = 2f_n^2 + 2f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2 .$$

Да земеме квадрат $ABCD$ со должина на страна $\overline{AB} = \overline{BC} = f_{n+1}$. Квадратите $BEFG$ и $DHMN$ се поставени како на цртежот десно и имаат должини на страни $\overline{BE} = \overline{HM} = f_n$. Сега, ако $HM \cap FG = L$ и $MN \cap EF = K$, тогаш четириаголниците $AGLH$ и $CNKE$ се квадрати со должини на страни

$$\overline{AG} = \overline{CE} = f_{n+1} - f_n = f_{n-1} ,$$

па затоа четириаголникот $FKML$ е квадрат со должина на страна

$$\overline{FK} = f_n - f_{n-1} = f_{n-2} .$$

Од досега изнесеното следува

$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 &= P_{ABCD} = P_{EFGB} + P_{DHMN} - P_{FKML} + P_{AGLH} + P_{KECN} \\ &= f_n^2 + f_n^2 - f_{n-2}^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-1}^2 \\ &= 2f_n^2 + 2f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2 , \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Трет начин. Ако земеме $\sim = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, тогаш формулата на Бине ја запишуваме во обликот

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^n - \ ^n) , \; n \geq 0 . \qquad (5)$$

Сега, ако прво земеме предвид дека

$$\sim \quad = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1 ,$$

а потоа дека од $\sim^2 = \sim + 1$ следува

$$2\sim^4 + 2\sim^2 - 1 = 2\sim^4 + \sim^2 + \sim^2 - 1 = 2\sim^4 + \sim^2 + \sim = 2\sim^4 + \sim(\sim + 1)$$
$$= 2\sim^4 + \sim^3 = \sim^4 + \sim^4 + \sim^3 = \sim^4 + \sim^3(\sim + 1)$$
$$= \sim^4 + \sim^5 = \sim^4(\sim + 1) = \sim^6$$

и аналогно $2\ \ ^4 + 2\ \ ^2 - 1 = \ \ ^6$ и ја искористиме (5), добиваме:

$$2f_n^2 + 2f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2 = \tfrac{1}{5}[2(\sim^n - \ \ ^n)^2 + 2(\sim^{n-1} - \ \ ^{n-1})^2 - (\sim^{n-2} - \ \ ^{n-2})^2]$$
$$= \tfrac{1}{5}(2\sim^{2n} + 2\ \ ^{2n} - 4\cdot(-1)^n + 2\sim^{2n-2} + 2\ \ ^{2n-2}$$
$$- 4\cdot(-1)^{n-1} - \sim^{2n-4} - \ \ ^{2n-4} + 2\cdot(-1)^{n-2})$$
$$= \tfrac{1}{5}(2\sim^{2n} + 2\sim^{2n-2} - \sim^{2n-4} + 2\ \ ^{2n} + 2\ \ ^{2n-2} - \ \ ^{2n-4} - 2\cdot(-1)^{n+1})$$
$$= \tfrac{1}{5}[\sim^{2n-4}(2\sim^4 + 2\sim^2 - 1) + \ \ ^{2n-4}(2\ \ ^4 + 2\ \ ^2 - 1) - 2\cdot(-1)^{n+1}]$$
$$= \tfrac{1}{5}(\sim^{2n-4}\sim^6 + \ \ ^{2n-4}\ \ ^6 - 2\cdot(-1)^{n+1})$$
$$= \tfrac{1}{5}(\sim^{2n+2} + \ \ ^{2n+2} - 2\cdot(-1)^{n+1})$$
$$= \tfrac{1}{5}(\sim^{n+1} - \ \ ^{n+1})^2 = f_{n+1}^2,$$

што и требаше да се докаже.

25. Докажи дека

$$f_n^3 = 3f_{n-1}^3 + 6f_{n-2}^3 - 3f_{n-3}^3 - f_{n-4}^3, \text{ за } n \ge 0. \qquad (1)$$

Решение. Имаме:

$$f_n^3 = \frac{1}{5\sqrt{5}}(\sim^{3n} - 3\sim^{2n}\ \ ^n + 3\sim^n\ \ ^{2n} - \ \ ^{3n})$$
$$= \frac{1}{5\sqrt{5}}(\sim^{3n} - 3(-1)^n\sim^n + 3(-1)^n\ \ ^n - \ \ ^{3n})$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{\sim^{3n} - \ \ ^{3n}}{\sqrt{5}} - \frac{3}{5}(-1)^n\cdot\frac{\sim^n - \ \ ^n}{\sqrt{5}}$$
$$= \tfrac{1}{5}f_{3n} - \tfrac{3}{5}(-1)^n f_n.$$

Според тоа, ако во последниот идентитет n последователно го замениме со $n-1$, $n-2, n-3$ и $n-4$ за десната страна на (9) добиваме:

$$3f_{n-1}^3 + 6f_{n-2}^3 - 3f_{n-3}^3 - f_{n-4}^3 = \tfrac{1}{5}(3f_{3n-3} + 6f_{3n-6} - 3f_{3n-9} - f_{3n-12}) -$$
$$- \tfrac{3}{5}(-1)^n(-3f_{n-1} + 6f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4}).$$

Понатаму,

$$-3f_{n-1} + 6f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4} = -3f_{n-1} + 3(f_{n-2} + f_{n-3}) + 3f_{n-2} - f_{n-4}$$
$$= -3f_{n-1} + 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-4}$$

$$\begin{aligned}&= 3f_{n-2} - f_{n-4} = 3f_{n-2} - (f_{n-2} - f_{n-3})\\&= 2f_{n-2} + f_{n-3} = f_{n-2} + (f_{n-2} + f_{n-3})\\&= f_{n-2} + f_{n-1} = f_n,\end{aligned}$$

и користејќи дека $f_k = f_{k-1} + f_{k-1}$, со последователно намалување на индексот на f_{3n}, на потполно аналоген начин како погоре се докажува дека

$$f_{3n} = 3f_{3n-3} + 6f_{3n-6} - 3f_{3n-9} - f_{3n-12}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}f_n^3 &= \tfrac{1}{5}f_{3n} - \tfrac{3}{5}(-1)^n f_n\\&= \tfrac{1}{5}(3f_{3n-3} + 6f_{3n-6} - 3f_{3n-9} - f_{3n-12}) -\\&\quad - \tfrac{3}{5}(-1)^n(-3f_{n-1} + 6f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4})\\&= 3f_{n-1}^3 + 6f_{n-2}^3 - 3f_{n-3}^3 - f_{n-4}^3,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

26. Дали постојат бесконечно многу парови природни броеви (m,n) такви што $m\,|\,(n^2+1)$ и $n\,|\,(m^2+1)$.

Решение. *Прв начин*. Ќе докажеме, дека сите парови од видот

$$(n,m) = (f_{2k-1}, f_{k+1}),$$

каде f_s е $s-$тиот Фибоначиев број го задоволува условот на задачата. Ако во идентитетот

$$f_{n-m}f_{n+m} - f_n^2 = (-1)^{n+m-1}f_m^2$$

земеме $n = 2k+1$ и $m = 2$, би-дејќи $f_2 = 1$, добиваме

$$f_{2k+1}^2 + 1 = f_{2k-1}f_{2k+3}. \tag{1}$$

Сега од равенството (1) следува дека $f_{2k-1}\,|\,(f_{2k+1}^2+1)$ и $f_{2k+1}\,|\,(f_{2k-1}^2+1)$.

Втор начин. Равенството (1) ќе го докажеме со математичка индукција. Имаме $f_3^2 + 1 = f_1 f_5$, т.е. (1) важи за $k = 1$. Нека претпоставиме дека (1) важи за $k-1$, т.е. $f_{2k-1}^2 + 1 = f_{2k-3}f_{2k+1}$. Тогаш ако земеме предвид дека според задача 10 важи $f_{2k+3} = 3f_{2k+1} - f_{2k-1}$, добиваме

$$\begin{aligned}f_{2k-1}f_{2k+3} &= f_{2k-1}(3f_{2k+1} - f_{2k-1})\\&= 3f_{2k-1}f_{2k+1} - f_{2k-1}^2\\&= 3f_{2k-1}f_{2k+1} - (f_{2k-3}f_{2k+1} - 1)\\&= f_{2k+1}(3f_{2k-1} - f_{2k-3}) + 1\\&= f_{2k+1}^2 + 1,\end{aligned}$$

т.е. (1) важи и за k, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број.

Сега од равенството (1) следува дека $f_{2k-1}\,|\,(f_{2k+1}^2+1)$ и $f_{2k+1}\,|\,(f_{2k-1}^2+1)$.

27. Докажи дека ако го знаеме f_{2k+1}, тогаш можеме да ги најдеме f_{2k-1} и f_{2k+3}.

Решение. Ако го знаеме f_{2k+1}, тогаш можеме да ги најдеме решенијата на квадратната равенка $y^2-3f_{2k+1}y+f_{2k+1}^2+1=0$. Но, според задача 10 важи $3f_{2k+1}=f_{2k+3}+f_{2k-1}$, а според задача 2 д) важи $f_{2k+3}\cdot f_{2k-1}=f_{2k+1}^2+1$, па ако замениме во последната равенка, ја добиваме еквивалентната равенка

$$y^2-(f_{2k+3}+f_{2k-1})y+f_{2k+3}\cdot f_{2k-1}=0\,. \qquad (1)$$

Понатаму, од Виетовите правила следува дека корените на равенката (1) се f_{2k-1} и f_{2k+3}, што значи дека ако го знаеме f_{2k+1}, тогаш можеме да ги најдеме f_{2k-1} и f_{2k+3}.

28. Докажи дека ако го знаеме f_{2k+2}, тогаш можеме да ги најдеме f_{2k} и f_{2k+4}.

Решение. Ако го знаеме f_{2k+2}, тогаш можеме да ги најдеме решенијата на квадратната равенка $y^2-3f_{2k+2}y+f_{2k+2}^2-1=0$. Но, според задача 10 важи $3f_{2k+2}=f_{2k+4}+f_{2k}$, а според задача 2 д) важи $f_{2k+4}\cdot f_{2k}=f_{2k+2}^2-1$, па ако замениме во последната равенка, ја добиваме еквивалентната равенка

$$y^2-(f_{2k+4}+f_{2k})y+f_{2k+4}\cdot f_{2k}=0\,. \qquad (1)$$

Понатаму, од Виетовите правила следува дека корените на равенката (1) се f_{2k+4} и f_{2k}, што значи дека ако го знаеме f_{2k+2}, тогаш можеме да ги најдеме f_{2k} и f_{2k+4}.

29. Нека $m,n\in\mathbb{N}$, $1\le m,n\le 1981$ се такви што $|n^2-mn-m^2|=1$. Определи ја најголемата вредност на изразот m^2+n^2.

Решение. Прво во множеството природни броеви ќе ја решиме равенката

$$|n^2-mn-m^2|=1 \qquad (1).$$

Ако $m=n$, тогаш $m=n=1$. Ако (m,n), $m\neq n$ е решение на (1), тогаш ва-жи $n^2-mn-m^2=1$ или $m^2+mn-n^2=1$. Од $n^2=m^2+mn+1$ следува $n>m$. Од втората равенка следува $n-m=\frac{mn-1}{m+n}>0$, т.е. $n>m$. Значи, во секој случај постои $k>0$ таков што $n=m+k$. Сега, ако замениме во равенката $n^2-mn-m^2=1$ добиваме дека $k^2+km-m^2=1$, т.е. парот (k,m) е решение на равенката. Според тоа, ако парот $(m, k+m)$ е решение на равенката, тогаш и парот (k, m) е решение на равенката. Важи и обратното, што значи дека ако парот (k, m) е решение на горната равенка, тогаш и парот $(m, k+m)$ е решение на оваа равенка. Ова значи дека парот $(n-m, m)$ индуцира нов пар (m, n). Сега, парот (1,1) е решение на равенката, па затоа последователно добиваме дека паровите (1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (5,8), (8,13), ..., (987, 1597), (1597, 2584), ... се решенија на дадената равенка.

Според тоа, решенија на дадената равенка се паровите составени од последователните членови на низата на Фибоначи. Јасно, најголемата вредност на изразот m^2+n^2 при дадените услови е 987^2+1597^2.

30. (*Теорема на Цекендорф*). Докажи, дека секој природен број n еднозначно може да се претстави во видот

$$n=\sum_{i\geq 2} c_i f_i, \quad c_i \in \{0,1\}, \qquad c_i c_{i+1}=0.$$

Тоа значи дека во збирот никогаш не се појавуваат два последователни Фибоначиеви броја.

Решение. Ќе докажеме дека за секој природен број n важи

$$n=f_{n_1}+f_{n_2}+\ldots+f_{n_k}, \tag{1}$$

каде $n_1>n_2>\ldots>n_k$ и $n_i \geq n_{i+1}+2$, за $1\leq i\leq k-1$. Низата $f_2, f_3, f_4, \ldots$ строго монотоно расте, па затоа постои индекс $n_1\geq 2$ таков што важи

$$f_{n_1}\leq n< f_{n_1+1}.$$

Ако $f_{n_1}=n$, тогаш доказот е завршен. Во спротивно

$$f_{n_1}<n<f_{n_1+1}. \tag{2}$$

Сега, ако од последните неравенства одземеме f_{n_1} и земеме предвид дека $f_{n_1+1}-f_{n_1}=f_{n_1-1}$, добиваме

$$0<n-f_{n_1}<f_{n_1-1}.$$

Според тоа, постои f_{n_2} таков што

$$f_{n_2}\leq n-f_{n_1}<f_{n_1-1}. \tag{3}$$

Нека f_{n_2} е најголемиот број за кој важи (3). Од последните неравенства следува $f_{n_2}<f_{n_1-1}$, па затоа $n_2<n_1-1$, т.е. $n_1\geq n_2+2$. Ако $f_{n_2}=n-f_{n_1}$, тогаш $n=f_{n_1}+f_{n_2}$, т.е. постои бараното претставување. Во спротивно ја продолжуваме опишаната постапка, со која по конечен број чекори ќе го добиме претставувањето (1).

Во горните разгледувања, заради $f_1 = f_2 = 1$, го исклучивме бројот f_1. Еднозначноста на претставувањето следува од тоа што во секој чекор неравенствата од видот (2) се исполнети за единствен Фибоначиев број f_{n_i} и од тоа што во секој чекор го избираме најголемиот можен Фибоначиев број $f_{n_{i+1}}$ кој ги задоволува неравенствата (3). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

31. Со помош на генераторни функции изведи ја формулата за општиот член на низата на Фибоначи:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ \text{за}\ n \geq 0 .$$

Решение. Нека $F(x)$ е генераторната функција на низата на Фибоначи, т.е.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n . \qquad (1)$$

Од $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$ последователно добиваме

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - f_0}{x} = f_1 + f_2 x + f_3 x^2 + ... + f_{n+1} x^n + ... \quad \text{и}$$

$$\frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{F(x) - f_0 - f_1 x}{x^2} = f_2 + f_3 x + f_4 x^2 + ... + f_{n+2} x^n + ...$$

Ако во последното равенство замениме $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, за $n \geq 0$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-x}{x^2} &= f_0 + f_1 + (f_1 + f_2)x + (f_2 + f_3)x^2 + ... + (f_n + f_{n+1})x^n + ...\\ &= [f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + ... + f_n x^n + ...] + [f_1 + f_2 x + f_3 x^2 + ... + f_{n+1} x^n + ...]\\ &= F(x) + \frac{F(x)}{x}\end{aligned}$$

од каде наоѓаме $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Нека a и b се корените на равенката $1 - x - x^2 = 0$, т.е. $a = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и

$$1 - x - x^2 = -(a - x)(b - x) .$$

Понатаму, ќе ги определиме константите A и B такви што

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} .$$

Ако последното равенство го помножиме со $1 - x - x^2$ после средувањето добиваме

$$-x = -(A+B)x + Ab + Ba$$

од каде го добиваме системот

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ Ab + Ba = 0 \end{cases}$$

чие решение е $A=-\frac{a}{b-a}$ и $B=\frac{b}{b-a}$. Од досега изнесеното, следува

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}=\frac{1}{b-a}(\frac{b}{b-x}-\frac{a}{a-x})=\frac{1}{b-a}(\frac{1}{1-\frac{x}{b}}-\frac{1}{1-\frac{x}{a}})\\&=\frac{1}{b-a}(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{b})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{a})^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{b^n}-\frac{1}{a^n})\cdot\frac{1}{b-a}x^n.\end{aligned}\tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) следува дека

$$\begin{aligned}f_n&=\frac{1}{b-a}(\frac{1}{b^n}-\frac{1}{a^n})=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{a^n-b^n}{(ab)^n}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{5}}[(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n-(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].\end{aligned}$$

32. Претстави ги следниве низ со помош на Фибоначиевите броеви:

а) $a_0=r, a_1=s, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, за $n\geq 0$,

б) $b_0=0, b_1=1, b_{n+2}=b_{n+1}+b_n+c$, за $n\geq 0$,

в) $b_0=1, b_1=2, b_{n+2}=b_{n+1}b_n$, за $n\geq 0$.

Решение. а) *Прв начин*. Ако ги испишеме првите неколку членови на низата добиваме

$$a_0=r, a_1=s, a_2=r+s, a_3=r+2s, a_4=2r+3s, a_5=3r+5s,...,$$

па затоа можеме да насетиме дека $a_n=sf_n+rf_{n-1}$, за $n\geq 1$, што лесно се докажува со математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Втор начин. Ако $A(x)$ е генераторната функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогаш

$$\frac{A(x)-r-sx}{x^2}=\frac{A(x)-r}{x}+A(x),$$

од каде наоѓаме

$$A(x)=s\frac{x}{1-x-x^2}+r\frac{1-x}{1-x-x^2}=s\frac{x}{1-x-x^2}+r(1+x\cdot\frac{x}{1-x-x^2}).$$

Сега, ако искористиме дека $F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ е генераторната функција на низата Фибоначиеви броеви, добиваме $A(x)=sF(x)+r(1+xF(x))$. Конечно, бидејќи $1+xF(x)$ е генераторна функција за низата $(1,f_0,f_1,f_2,...)$, па од последното равенство следува $a_n=sf_n+rf_{n-1}$, за $n\geq 1$.

б) Дадената равенка можеме да ја запишеме во видот

$$b_{n+2}+c=b_{n+1}+c+b_n+c,$$

па со замената $a_n=b_n+c$, ја добиваме равенката $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, со почетни услови $a_0=b_0+c=c$ и $a_1=b_1+c=c+1$. Сега, од а) добиваме

$$a_n=(c+1)f_n+cf_{n-1}=cf_{n+1}+f_n,$$

па затоа

$$b_n = a_n - c = c(f_{n+1} - 1) + f_n .$$

в) Ја воведуваме смената $a_n = \log_2 b_n$. Тогаш за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ добиваме дека важи $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ со почетни услови $a_0 = 0, a_1 = 1$. Значи $a_n = f_n$, од што следува $f_n = \log_2 b_n$, односно $b_n = 2^{f_n}$, $n \geq 0$.

33. а) *Куп* монети го нарекуваме распоредот на n исти монети во редови така што во првиот ред монетите формираат непрекината низа, а во горните редови секоја монета допира точно две монети од претходниот ред. Ако првиот ред содржи k монети, тогаш купот го означуваме со (n,k). На горниот цртеж е прикажан $(24,9)$ – куп.

Блок куп монети е куп во кој секој ред се состои само од една непрекината низа монети. Нека a_k е бројот блок купови монети кои во првиот ред содржат точно k монети, $k \geq 0$. Определи ја генераторната функција за низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

б) Докажи дека $a_k = f_{2k-1}$, за $k \geq 1$, каде $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ е низата Фибоначиеви броеви.

Решение. а) Ако од блок куп монети, која во првиот ред содржи точно k монеи, го отстраниме целиот прв ред повторно добиваме блок куп монети кој во првиот ред има помалку од k монети. Обратно,ако сакаме да ги генерираме сите блук купови монети кои во првиот ред имаат точно k монети, про ќе го поставиме првиот ред. Потоа бираме $j, 0 \leq j \leq k-1$. Над редот со k монети ставаме блук куп кој во првиот ред има j монети. Ако $j = 0$ тоа можеме да го направи точно на еден начин, а инаку новиот блок куп од j монети може да се постави на $k - j$ начини (долната лева монета може да биде над монетите 1 и 2 од првиот ред, пооа над монетите 2 и 3, ..., над мо-нетите $k - j$ и $k - j + 1$). Имајќи го ова предвид ја добиваме рекурентната равенка

$$a_k = 1 + \sum_{j=1}^{k} (k - j) a_j , \tag{1}$$

со почетен услов $a_0 = 1$.

Равенката (1) ја помножиме со x^k, а потоа сумираме за $k \geq 1$, по што добиваме:

$$A(x) - 1 = \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} A(x) - \frac{x}{(1-x)^2} , \tag{2}$$

Притоа $A(x)-1$ на левата страна се јавува бидејќи сумиравме од $k=1$, а $a_0=1$, додека на десната страна првиот член се јавува заради собирање на степените x^k, $k\geq 1$, на производот $\frac{x}{(1-x)^2}A(x)$ на генераторните функции на низите $\{k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ соодветствува $\sum\limits_{j=0}^{k}(k-j)a_j$, па за да ова се сведе на $\sum\limits_{j=1}^{k}(k-j)a_j$ мораме да одземеме $ka_0=k$, што го дава третиот член во (2). Сега, од (2) добиваме

$$A(x)=\frac{1-2x}{1-3x+x^2}.$$

б) *Прв начин*. Генераторната функција можеме да ја претставиме во видот

$$A(x)=\frac{1}{10}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sim_1 x}+\frac{5+\sqrt{5}}{1-\sim_1 x}\right),$$

каде $\sim_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \sim_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Оттука добиваме дека

$$\begin{aligned}
a_k&=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k\\
&=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k}\\
&=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}\\
&=\frac{4\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}-\frac{4\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}\\
&=f_{2k-1}.
\end{aligned}$$

Втор начин. Од (1) или од генераторната функција ја добиваме линеарната рекурентна равенка

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0,$$

со почетни услови $a_0=a_1=1$. Сега лесно со математилка индукција се докажува дека $a_k=f_{2k-1}$, за $k\geq 1$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

34. а) Докажи дека за секој $n\geq 1$ важи

$$\frac{f_{n-1}}{f_n}-\frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}=\frac{(-1)^n}{f_{2n}}. \qquad (1)$$

б) Пресметај го збирот $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{f_{2^k}}$.

в) Пресметај го збирот на редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{f_{2^k}}$.

Решение. а) Од формулата на Бине последователно добиваме

$$\frac{f_{n-1}}{f_n}-\frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}=\frac{\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n-1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n-1}]}{\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n}]}-\frac{\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{2n-1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{2n-1}]}{\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{2n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{2n}]}$$

$$=\frac{(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n-1}(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n}-(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n}(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n-1}}{((\frac{1+\sqrt5}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n})((\frac{1+\sqrt5}{2})^{n}+(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n})}$$

$$=\frac{(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n-1}(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n-1}(\frac{1-\sqrt5}{2}-\frac{1+\sqrt5}{2})}{(\frac{1+\sqrt5}{2})^{2n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{2n}}$$

$$=\frac{-\sqrt5(\frac{1+\sqrt5}{2}\cdot\frac{1-\sqrt5}{2})^{n-1}}{(\frac{1+\sqrt5}{2})^{2n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{2n}}$$

$$=\frac{-\sqrt5(-1)^{n-1}}{(\frac{1+\sqrt5}{2})^{2n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{2n}}$$

$$=\frac{(-1)^{n}}{\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{2n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{2n}]}$$

$$=\frac{(-1)^n}{f_{2n}},$$

т.е. точно е равенството (1).

б) Од равенството (1) за $n=2^{k-1}$ следува

$$\frac{(-1)^{2^{k-1}}}{f_{2\cdot 2^{k-1}}}=\frac{f_{2^{k-1}-1}}{f_{2^{k-1}}}-\frac{f_{2\cdot 2^{k-1}-1}}{f_{2\cdot 2^{k-1}}},$$

односно

$$\frac{1}{f_{2\cdot 2^{k-1}}}=\frac{f_{2^{k-1}-1}}{f_{2^{k-1}}}-\frac{f_{2\cdot 2^{k-1}-1}}{f_{2\cdot 2^{k-1}}}.$$

Според тоа,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{f_{2^k}}=\frac{1}{f_{2^0}}+\frac{1}{f_{2^1}}+\frac{1}{f_{2^2}}+\frac{1}{f_{2^3}}+\frac{1}{f_{2^4}}+\ldots+\frac{1}{f_{2^{n-2}}}+\frac{1}{f_{2^{n-1}}}+\frac{1}{f_{2^n}}$$

$$=\frac{1}{f_{2^0}}+\frac{1}{f_{2^1}}+\frac{1}{f_{2\cdot 2}}+\frac{1}{f_{2\cdot 4}}+\frac{1}{f_{2\cdot 8}}+\ldots+\frac{1}{f_{2\cdot 2^{n-3}}}+\frac{1}{f_{2\cdot 2^{n-2}}}+\frac{1}{f_{2\cdot 2^{-1}}}$$

$$=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+(\frac{f_1}{f_2}-\frac{f_3}{f_4})+(\frac{f_3}{f_4}-\frac{f_7}{f_8})+(\frac{f_7}{f_8}-\frac{f_{15}}{f_{16}})+\ldots$$

$$+(\frac{f_{2^{n-3}-1}}{f_{2^{n-2}}}-\frac{f_{2\cdot 2^{n-3}-1}}{f_{2\cdot 2^{n-3}}})+(\frac{f_{2^{n-2}-1}}{f_{2^{n-1}}}-\frac{f_{2\cdot 2^{n-2}-1}}{f_{2\cdot 2^{n-2}}})+(\frac{f_{2^{n-1}-1}}{f_{2^{n-1}}}-\frac{f_{2\cdot 2^{n-1}-1}}{f_{2\cdot 2^{n-1}}})$$

$$=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{f_1}{f_2}-\frac{f_{2\cdot 2^{n-1}-1}}{f_{2\cdot 2^{n-1}}}=3-\frac{f_{2^n-1}}{f_{2^n}}.$$

в) За секој $k\in\mathbb{N}$ важи

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_{k-1}}{f_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{k-1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{k-1}]}{\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{k}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{k}]}=\lim_{k\to\infty}\frac{(\frac{1+\sqrt5}{2})^{k-1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{k-1}}{(\frac{1+\sqrt5}{2})^{k}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1-(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^{k-1}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^{k-1}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = - \quad .$$

Сега од решението на задачата под б) и горната граница следува

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f_{2^k}} = \lim_{n\to\infty} (3 - \frac{f_{2^n-1}}{f_{2^n}}) = 3 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{7-\sqrt{5}}{2} \; .$$

35. Докажи дека за $n \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = f_{n+1} \; . \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. За $n = 0$ и $n = 1$ имаме

$$f_1 = 1 = \binom{0}{0} \text{ и } f_2 = 1 = \binom{1}{0} \, ,$$

т.е. точна е формулата (1).

Нека претпоставиме дека (1) важи за секој $k \le n, n \in \mathbb{N}_0$, односно дека

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} = f_{k+1}, \;\; k \le n \; .$$

Тогаш, за $n+1$ од Паскаловото правило следува

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i-1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} \; . \qquad (2)$$

Ако n е парен број, тогаш

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ и } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor ,$$

па затоа од (2) и индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i-1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \binom{n-(j+1)}{j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{(n-1)-j}{j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} \\
&= f_n + f_{n+1} \\
&= f_{n+2}.
\end{aligned}$$

На сличен начин се докажува дека равенството важи и ако n е непарен број. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Втор начин. За $n=0$ имаме $f_1=1=\binom{0}{0}$, т.е. формулата важи, па затоа доволно е да докажеме дека

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i+1}{i} = f_{n+2} \,.$$

Според задача 2 бројот на подмножествата на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои не содржат два последователни броја е еднаков на f_{n+2}.

Да ги преброиме овие подмножества на друг начин. На секое подмножество на множеството $\{1,2,...,n\}$ му соодветствува бинарна низа (низа од нули е единици) $(s_1,s_2,...,s_n)$ определена со

$$s_j = \begin{cases} 1, & j \in S \\ 0, & j \notin S, \end{cases}$$

за $j=1,2,...,n$.

Нека $f(n,k)$ е бројот на $k-$елементните подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои не содржат два последователни броја. На овие подмножества им соодвествуваат бинарни низи со должина n кои не содржат две последователни единици и кои вкупно имаат k единици и $n-k$ нули. Ако ги фиксираме овие $n-k$ нули, секоја единица може да завземе едно од $n-k+1$ место (пред нулите, $n-k-1$ место меѓу секои две нули, по нулите). Затоа избираме k места за бројот 1 од вкупно $n-k+1$ места, што може да се направи на $\binom{n-k+1}{k}$ начини, па затоа

$$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k} \,.$$

Јасно, бројот k кој е индек во збирот на десната страна на равенството кое треба да го докажеме може да прима вредности од 0 (со 0 единици е само низата $(0,0,...,0)$ која соодветствува на празното множество) до $n-k+1 \geq k$ (бидејќи не можеме k единици да распоредиме на помалку од k места), што е еквивалентно на $k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Според тоа, важи

$$f_{n+2} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} f(n,k) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i+1}{i} \,,$$

што и требаше да се докаже.

36. Докажи дека

$$f_n = \frac{2}{\sqrt{5}} i^n \operatorname{sh} n(t - i\tfrac{\text{®}}{2}) \,, \qquad (1)$$

каде $t = \ln \sim\, = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ е функцијата синусхиперболикум.

Решение. За функциите

$$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \text{ и } \mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

и Фибоначиевите броеви важи

$$\begin{aligned} f_{2k} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^{2k}-(-1)^{2k}\sim^{-2k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^{2k}-\sim^{-2k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}((e^t)^{2k}-(e^t)^{-2k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{2kt}-e^{-2kt}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{sh}(2kt), \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} f_{2k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^{2k+1}-(-1)^{2k+1}\sim^{-(2k+1)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^{2k+1}+\sim^{-(2k+1)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}((e^t)^{2k+1}+(e^t)^{-(2k+1)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{(2k+1)t}+e^{-(2k+1)t}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{ch}((2k+1)t). \end{aligned} \tag{3}$$

Десните страни на формулите (2) и (3) ќе ги запишеме во вид на линеарна комбинација $A_n\,\mathrm{sh}(nt)+B_n\,\mathrm{ch}(nt)$, каде A_n и B_n ќе бидат функции од n такви што $A_n=\frac{2}{\sqrt{5}}$ кога n е парно и $A_n=0$ кога n е непарно, а $B_n=\frac{2}{\sqrt{5}}$ кога n е непарно и $B_n=0$ кога n е парно. За таа цел ќе ја користиме Ојлеровата формула $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, од која следува $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$. Имаме

$$\mathrm{ch}(ix)+\mathrm{sh}(ix)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

$$\mathrm{ch}(ix)-\mathrm{sh}(ix)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}-\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=e^{i(-x)}=\cos x-i\sin x.$$

Ако прво ги собереме последните две равенства, а потоа ги одземеме добиваме

$$\mathrm{ch}(ix)=\cos x, \tag{4}$$

$$\mathrm{sh}(ix)=i\sin x. \tag{5}$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}+\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\mathrm{sh}(x+y), \end{aligned}$$

т.е.

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)\,. \tag{6}$$

Од друга страна за тригонометриските функции $\sin$ и $\cos$ важи:

$$\cos\frac{n®}{2}=\begin{cases}0, & n=2k+1,\\ (-1)^k, & n=2k,\end{cases} \tag{7}$$

и

$$\sin\frac{n®}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k, & n=2k+1.\end{cases} \tag{7}$$

Сега, ако прво ја искористиме формулата (6), потоа парноста на хиперболичните функции, па формулите (4) и (5), потоа формулите (6) и (7), и на крајот формулите (2) и (3), при што водиме сметка дека $t=\ln\sim=\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, последователно добиваме

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{5}}i^n\operatorname{sh}n(t-i\tfrac{®}{2}) &= \frac{2}{\sqrt{5}}i^n(\operatorname{sh}nt\cdot\operatorname{ch}(-i\tfrac{n®}{2})+\operatorname{sh}(-i\tfrac{n®}{2})\cdot\operatorname{ch}(nt))\\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}i^n(\operatorname{sh}nt\cdot\operatorname{ch}(i\tfrac{n®}{2})-\operatorname{ch}(nt)\cdot\operatorname{sh}(i\tfrac{n®}{2}))\\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}i^n(\operatorname{sh}nt\cdot\cos\tfrac{n®}{2}-i\operatorname{ch}(nt)\cdot\sin\tfrac{n®}{2})\\
&=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{5}}i^{2k}(\operatorname{sh}(2kt)\cdot\cos\frac{2k®}{2}-i\operatorname{ch}(2kt)\cdot\sin\frac{2k®}{2}), & n=2k\\ \frac{2}{\sqrt{5}}i^{2k+1}(\operatorname{sh}(2k+1)t\cdot\cos\frac{(2k+1)®}{2}-i\operatorname{ch}((2k+1)t)\cdot\sin\frac{(2k+1)®}{2}), & n=2k+1\end{cases}\\
&=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{5}}(-1)^k\operatorname{sh}(2kt)\cdot\cos k®, & n=2k\\ \frac{2}{\sqrt{5}}(-1)^k\operatorname{ch}((2k+1)t)\sin\frac{(2k+1)®}{2}, & n=2k+1\end{cases}\\
&=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}(2kt), & n=2k\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{ch}((2k+1)t), & n=2k+1\end{cases}\\
&=f_n,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

37. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со равенствата

$$a_1=4,\ a_2=a_3=(a^2-2)^2 \text{ и } a_n=a_{n-1}a_{n-2}-2(a_{n-1}+a_{n-2})-a_{n-3}+8,\ n\ge 4\,,$$

каде $a>2$ е природен број. Докажи дека бројот $2+\sqrt{a_n}$ е точен квадрат за секој n.

Решение. Ќе докажеме дека $a_n=(s^{2f_{n-1}}+s^{-2f_{n-1}})^2$, $n=1,2,3,\dots$ каде s е поголемиот корен на квадратната равенка $t^2-at+1=0$, а $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ е низата на

Фибоначи. Да забележиме дека другиот корен на равенката $t^2 - at + 1 = 0$ е s^{-1}.

Непосредно се проверува дека тврдењето е точно за $n=1, n=2$ и $n=3$. Да претпоставиме дека тврдењето важи за сите природни броеви кои се помали или еднакви на n. Бидејќи

$$a_k - 2 = (s^{2f_{k-1}} + s^{-2f_{k-1}})^2 - 2 = s^{4f_{k-1}} + s^{-4f_{k-1}}, \text{ за } k \le n$$

добиваме

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n a_{n-1} - 2(a_n + a_{n-1}) - a_{n-2} + 8 \\
&= (a_n - 2)(a_{n-1} - 2) - (a_{n-2} - 2) + 2 \\
&= (s^{4f_{n-1}} + s^{-4f_{n-1}})(s^{4f_{n-2}} + s^{-4f_{n-2}}) - (s^{4f_{n-3}} + s^{-4f_{n-3}}) + 2 \\
&= s^{4(f_{n-1}+f_{n-2})} + s^{-4(f_{n-1}+f_{n-2})} + s^{4(f_{n-1}-f_{n-2})} + s^{-4(f_{n-1}-f_{n-2})} - \\
&\quad -(s^{4f_{n-3}} + s^{-4f_{n-3}}) + 2 \\
&= s^{4f_n} + s^{-4f_n} + s^{4f_{n-3}} + s^{-4f_{n-3}} - (s^{4f_{n-3}} + s^{-4f_{n-3}}) + 2 \\
&= s^{4f_n} + s^{-4f_n} + 2 \\
&= (s^{2f_n} + s^{-2f_n})^2,
\end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

Останува да забележиме

$$2 + \sqrt{a_n} = s^{2f_{n-1}} + s^{-2f_{n-1}} + 2 = (s^{f_{n-1}} + s^{-f_{n-1}})^2$$

и бројот $s^{f_{n-1}} + s^{-f_{n-1}}$ е цел број за секој природен број n. Навистина, ако u и v се корени на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$ со целобројни коефициенти p и q, тогаш броевите $a_n = u^n + v^n$ се решенија на диференцната равенка равенка $a_{n+1} + pa_n + qa_{n-1} = 0$, и во случајот се цели броеви за секој ненегативен број n.

38. Нека $\{f_n\}$ е низата на Фибоначи. Пресметај го збирот

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{2^i} = \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{2^2} + \frac{f_3}{2^3} + \dots . \tag{1}$$

Решение. Ќе ја пресметаме $n-$тата парцијална сума S_n на редот (1). Имаме

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{2^2} + \frac{f_1 + f_2}{2^3} + \frac{f_2 + f_3}{2^4} + \dots + \frac{f_{n-2} + f_{n-1}}{2^n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{f_1}{8} + \frac{f_2}{8} + \frac{f_2}{16} + \frac{f_3}{16} + \dots + \frac{f_{n-2}}{2^n} + \frac{f_{n-1}}{2^n} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{2^i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{2^i} - \frac{1}{4} - \frac{f_{n-1}}{2^{n+1}} - \frac{f_n}{2^{n+2}} - \frac{f_n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{2^i}-\frac{f_n}{2^{n+2}}-\frac{f_{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_n-\frac{f_n}{2^{n+2}}-\frac{f_{n+1}}{2^{n+1}},$$

па затоа

$$S_n=2-\frac{f_n}{2^n}-\frac{f_{n+1}}{2^{n-1}}. \tag{2}$$

Ќе докажеме дека

$$f_n\le 3^{\frac{n}{2}}\text{, за секој } n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Јасно, (3) важи за $n=1$ и $n=2$. Нека претпоставиме дека (3) важи за $n-1$ и n. Тогаш

$$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\le 3^{\frac{n}{2}}+3^{\frac{n-1}{2}}=3^{\frac{n-1}{2}}(3^{\frac{1}{2}}+1)\le 3^{\frac{n-1}{2}}\cdot 3=3^{\frac{n+1}{2}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека (3) важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

Сега, од (2) и (3) следува

$$\lim_{n\to\infty}|S_n-2|=\lim_{n\to\infty}(\frac{f_n}{2^n}+\frac{f_{n+1}}{2^{n-1}})\le\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2^n}\cdot 3^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 3^{\frac{n+1}{2}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(3\cdot(\frac{3}{4})^{\frac{n-1}{2}}+(\frac{3}{4})^{\frac{n}{2}})=0,$$

па затоа $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$, односно $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{f_i}{2^i}=2$.

39. Реши ја диференцната равенка

$$l_{n+2}=l_{n+1}+l_n \tag{1}$$

со почетни услови $l_1=1, l_2=3$.

Низата $\{l_n\}$ која е решение на диференцната равенка (1) во литературата е позната како *Лукасова низа*, а нејзините членови како *Лукасови броеви*.

Решение. Равенката (1) е линеарна диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти. Нејзината карактеристична равенка е $r^2-r-1=0$, со решенија

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{ и } b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Според тоа, општото решение на равенката (1) е дадено со

$$l_n=A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Од почетните услови $l_1=1, l_2=3$ го добиваме системот равенки

$$A\frac{1+\sqrt{5}}{2}+B\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1\text{ и } A\frac{3+\sqrt{5}}{2}+B\frac{3-\sqrt{5}}{2}=3$$

чие решение е $A=B=1$. Според тоа, решението на (1) е дадено со

$$l_n = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n .$$

40. Докажи дека за низите Фибоначиеви броеви $\{f_n\}$ и Лукасови броеви $\{l_n\}$ важи:

$$f_{n+1} + f_{n-1} = l_n \text{, за } n = 1,2,3,\dots . \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Ќе користиме математичка индукција. Имаме:

$$f_2 + f_0 = 1+0 = 1 = l_1 \text{ и } f_3 + f_1 = 2+1 = 3 = l_2$$

т.е. равенството (1) е точно за $k = 1$ и $k = 2$.

Нека претпоставиме дека равенството (1) е точно за k и $k+1$, т.е. дека важи

$$f_{k+1} + f_{k-1} = l_k \text{ и } f_{k+2} + f_k = l_{k+1} .$$

Ги собираме горните равенства и ако ги искористиме рекурентните формули со кои се зададени низите $\{f_n\}$ и $\{l_n\}$ добиваме

$$f_{k+2} + f_k + f_{k+1} + f_{k-1} = l_{k+1} + l_k$$
$$(f_{k+2} + f_{k+1}) + (f_k + f_{k-1}) = l_{k+1} + l_k$$
$$f_{k+3} + f_{k+1} = l_{k+2},$$

т.е. (1) важи и за $k+2$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

Втор начин. За $n = 1,2,3,\dots$ имаме:

$$f_{n+1} + f_{n-1} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}] + \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + 1] - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}[(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 + 1]$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \tfrac{10+2\sqrt{5}}{4} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \tfrac{10-2\sqrt{5}}{4}$$
$$= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \tfrac{\sqrt{5}+1}{2} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n = l_n .$$

41. Докажи, дека множеството $\{1,2,\dots,n\}$ содржи точно l_n подмножества (вклучувајќи го и $\varnothing$) во кои не се наоѓаат два последователни броја, како ниту 1 и n истовремено.

Решение. Како во решението на задача 2 со a_n да го означиме бројот на подмножества од $\{1,2,\dots,n\}$ кои не содржат два последователни броја, а со b_n да го означиме бројот на подмножества од $\{1,2,\dots,n\}$ кои не содржат два последователни броја, како ниту 1 и n истовремено. За секое множество S кое го броиме во b_n имаме две можности:

1) $n \notin S$. Бидејќи n не е во S во него може да се сите броеви од множеството $\{1,2,...,n-1\}$, но со услов да нема два последователни. Вакви броеви има a_{n-1}.
2) $n \in S$. Бидејќи n е во S, во него не може да се ниту 1, ниту $n-1$, па затоа $S \setminus \{n\} \subseteq \{1,2,...,n-2\} \setminus \{1\}$, повторно со услов да нема два последователни броја. Вакви подмножества има a_{n-3}.

Сега, од претходните разгледувања и од задачите 2 и 38 следува

$b_n = a_{n-1} + a_{n-3} = f_{n+1} + f_{n-1} = l_n$.

42. Докажи дека за низите Фибоначиеви броеви $\{f_n\}$ и Лукасови броеви $\{l_n\}$ важи:

$$l_{n+1} + l_{n-1} = 5f_n. \tag{1}$$

Решение. *Прв начин*. Од задача 38 следува

$$f_{n+2} + f_n = l_{n+1}, \tag{2}$$

$$f_n + f_{n-2} = l_{n-1}. \tag{3}$$

Ги собираме (2) и (3), а потоа ако искоритиме дека $f_{n+2} + f_{n-2} = 3f_n$ добиваме

$$l_{n+1} + l_{n-1} = f_{n+2} + f_{n-2} + 2f_n = 3f_n + 2f_n = 5f_n,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned}
l_{n+1} + l_{n-1} &= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + 1] + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}[(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 + 1] \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2} + 1) + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2} + 1) \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \tfrac{5+\sqrt{5}}{2} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \tfrac{5-\sqrt{5}}{2} \\
&= \sqrt{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n] \\
&= 5 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n] = 5f_n,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

43. Докажи дека за секој природен број n важи

$$l_n^2 - 5f_n^2 = 4 \cdot (-1)^n.$$

Решение. Од задача 38 и Касиниевиот идентите поледователно добиваме

$$\begin{aligned}
l_n^2 - 5f_n^2 &= (f_{n+1} + f_{n-1})^2 - 5f_n^2 \\
&= (f_n + 2f_{n-1})^2 - 5f_n^2
\end{aligned}$$

$$= 4(f_{n-1}^2 + f_n f_{n-1} - f_n^2)$$
$$= 4(f_{n-1}(f_{n-1} + f_n) - f_n^2)$$
$$= 4(f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2)$$
$$= 4 \cdot (-1)^n,$$

што и требаше да се докаже.

44. Докажи дека:

а) $f_{2n} = f_n l_n$, б) $f_{m+1} l_n + f_m l_{n-1} = l_{m+n}$,

в) $2 f_{m+n} = f_m l_n + f_n l_m$,

Решение. а) Од задача 9 а) и задача 38 следува

$$f_{2n} = f_{n-1} f_n + f_n f_{n+1} = f_n (f_{n-1} + f_{n+1}) = f_n l_n .$$

б) Според задача 38 имаме

$$l_{m+n} = f_{m+n+1} + f_{m+n-1} . \tag{1}$$

Понатаму, од задача 9 а) ако наместо n ставиме $n+1$, добиваме

$$f_{n+m+1} = f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1} , \tag{2}$$

а ако наместо n ставиме $n-1$ добиваме

$$f_{n+m-1} = f_{n-2} f_m + f_{n-1} f_{m+1} . \tag{3}$$

Конечно, од (1), (2) и (3) следува

$$f_{m+1} l_n + f_m l_{n-1} = f_{m+1}(f_{n+1} + f_{n-1}) + f_m (f_n + f_{n-2})$$
$$= (f_{m+1} f_{n+1} + f_m f_n) + (f_{m+1} f_{n-1} + f_m f_{n-2})$$
$$= f_{m+n+1} + f_{m+n-1}$$
$$= l_{m+n}.$$

в) Од задача 38 и задача 9 а) следува

$$f_m l_n + f_n l_m = f_m (f_{n+1} + f_{n-1}) + f_n (f_{m+1} + f_{m-1})$$
$$= (f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n) + (f_n f_{m+1} + f_m f_{n-1})$$
$$= 2 f_{m+n}.$$

45. Докажи дека

$$l_{n-1} l_{n+1} - l_n^2 = 5 \cdot (-1)^{n+1} .$$

Решение. Имаме

$$l_{n-1} l_{n+1} - l_n^2 = ((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1})((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}) - ((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n)^2$$
$$= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} ((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2) - 2(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$
$$= ((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}))^{n-1} ((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 - 2(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}))$$
$$= (\tfrac{1-5}{4})^{n-1} (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 5 \cdot (-1)^{n-1} = 5 \cdot (-1)^{n+1},$$

што и требаше да се докаже.

46. За секој природен број k и за сите природни броеви n такви што $n \geq k$ важи

$$l_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} l_{n-i} . \tag{1}$$

Докажи!

Решение. Ако искористиме дека $\frac{3\pm\sqrt{5}}{1\pm\sqrt{5}} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ и $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} l_{n-i} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-i} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-i}] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-k} (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-k} (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-i} \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-i} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-i} \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-k} (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1)^k + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-k} (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} + 1)^k \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-k} (\tfrac{3+\sqrt{5}}{2})^k + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-k} (\tfrac{3-\sqrt{5}}{2})^k \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} (\tfrac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^k + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} (\tfrac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}})^k \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^k + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^k \\
&= (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+k} + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+k} \\
&= l_{n+k} .
\end{aligned}$$

47. Нека бесконечната реална матриаца $A = [a_{ij}]$ е определена со

$$a_{ij} = \binom{i}{j-i} \text{, за секој } (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} , \tag{1}$$

при што дополнително претпоставуваме дека се точни равенствата

$$\binom{n}{k} = 0 \text{, за } n < k \text{ или за } k < 0 , \tag{2}$$

и нека бесконената реална матрица $B = [b_{ij}]$ е определена со

$$b_{ij} = \tfrac{j}{i} a_{ij} \text{, за секој } (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} . \tag{3}$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{j} b_{ij} = l_j , \quad j \geq 1 . \tag{4}$$

Решение. Матрицата $A=[a_{ij}]$ всушност се добива од Паскаловиот триаголник, а од неа со помош на формулите (3) се добиваме матрицата $B=[b_{ij}]$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 9 & 7 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 14 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Пред да преминеме на доказот на формулата (4) да забележиме дека заради равенствата

$$b_{ij}=0, \text{ за секои } i,j\in\mathbb{N} \text{ такви што } i>j,$$

кои директно следуваат од равенствата (2) и (3), тврдењето во задачата е дека збирот на сите елементи во $j-$тата колона на матрицата B е еднаков на $j-$тиот Лукасов број. За секој $j\in\mathbb{N}$ дефинираме

$$c_j=\sum_{i=1}^{j} b_{ij}\,. \tag{6}$$

Ќе докажеме дека оваа низа е решение на диференцната равенка

$$c_{j+2}=c_{j+1}+c_j, \text{ за секој } j\in\mathbb{N}$$

со почетни услови $c_1=1, c_2=3$, што според задача 37 значи дека $c_n=l_n$, за секој $n\in\mathbb{N}$, со што тврдењето е докажано.

Лесно се проверува дека $c_1=1, c_2=3$, т.е. почетните услови се задоволени. Ќе докажеме дека за секој $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ важи равенството

$$b_{i+1,j+2}=b_{ij}+b_{i,j+1}\,. \tag{7}$$

Последователно имаме:

$$\begin{aligned} b_{ij}+b_{i,j+1} &= \tfrac{j}{i}\tbinom{i}{j-i}+\tfrac{j+1}{i}\tbinom{i}{j-i+1} \\ &= \frac{j}{i}\cdot\frac{i!}{(j-i)!(2i-j)!}+\frac{j+1}{i}\cdot\frac{i!}{(j-i+1)!(2i-j-1)!} \\ &= \frac{j\cdot(i-1)!}{(j-i)!(2i-j)!}+\frac{(j+1)\cdot(i-1)!}{(j-i+1)!(2i-j-1)!} \\ &= \frac{j(j-i+1)(i-1)!+(j+1)(2j-i)(i-1)!}{(j-i+1)!(2i-j)!}=\frac{(j+2)i(i-1)!}{(j-i+1)!(2i-j)!} \\ &= \frac{(j+2)i!}{(j-i+1)!(2i-j)!}=\frac{j+2}{i+1}\cdot\frac{(i+1)!}{(j-i+1)!(2i-j)!} \\ &= \tfrac{j+2}{i+1}\tbinom{i+1}{j-i+1}=b_{i+1,j+2}. \end{aligned}$$

Сега, од равенствата (7) со собирање по променливата i се добиваат равенствата $c_{j+2}=c_{j+1}+c_j$, што и требаше да докажеме.

48. Определи ја генераторната функција на низата Лукасови броеви:

$$l_1=1, l_2=3, \quad l_{n+2}=l_{n+1}+l_n \text{, за } n\ge 1.$$

Решение. Нека $L(x)$ е генераторната функција на низата на Лукас и да ставиме $l_0=2$, т.е.

$$L(x)=\sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n \ .$$

Од $l_0=2$ и $l_1=1$ последователно добиваме

$$\frac{L(x)-l_0}{x}=l_1+l_2x+l_3x^2+...+l_{n+1}x^n+... \quad \text{и}$$

$$\frac{L(x)-l_0-l_1x}{x^2}=l_2+l_3x+l_4x^2+...+l_{n+2}x^n+... \ .$$

Ако во последното равенство замениме $l_{n+2}=l_{n+1}+l_n$, за $n\ge 0$ добиваме

$$\frac{L(x)-l_0-l_1x}{x^2}=l_0+l_1+(l_1+l_2)x+(l_2+l_3)x^2+...+(l_n+l_{n+1})x^n+...$$

$$=[l_0+l_1x+l_2x^2+...+l_nx^n+...]+[l_1+l_2x+l_3x^2+...+l_{n+1}x^n+...]$$

$$=L(x)+\frac{L(x)-l_0}{x}$$

од каде наоѓаме $L(x)=\frac{2-x}{1-x-x^2}$.

49. Докажи дека

$$l_n=\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} \ .$$

Решение. Ќе ги користиме истите ознаки како во вториот начин на решавање на задача 33.

Според задача 39 овој бројот на подмножествата од множеството кои не содржат два последователни броја, ниту истовремено ги содржат броевите 1 и n е еднаков на l_n . Да ги преброиме овие множества на друг начин.

Со $f^*(n,k)$ да го означиме бројот на k – елементните подмножества од множеството $\{1,2,...,n\}$ кои не содржат два последователни броја, ниту истовремено ги содржат броевите 1 и n. За секое множество S кое го броиме во $f^*(n,k)$ имаме две можности.

1) $n\notin S$. Бидејќи бројот n не е во S, во него може да бидат сите броеви од $\{1,2,...,n-1\}$, но да се вкупно k и да не содржи два последователни броја. Според задача 33 такви броеви има $f(n-1,k)$.

2) $n \in S$. Бидејќи n е во S во него не може да се 1 и $n-1$, па затоа важи $S \setminus \{n\} \subseteq \{1, 2, ..., n-2\} \setminus \{1\}$ и има $k-1$ елемент и да не содржи два последователни броја. Такви подмножества има $f(n-3, k-1)$.

Според тоа,

$$f^*(n,k) = f(n-1,k) + f(n-3,k-1) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

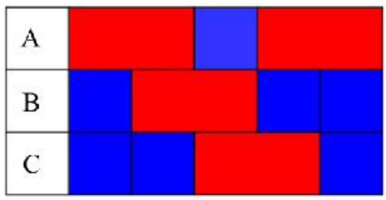
$$= (1 + \frac{k}{n-k})\binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

Јасно, $k \geq 0$ и $k \leq n-k$, односно $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,

$$l_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} f^*(n,k) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

50. Во еден ред во кино сала има $5n$ места за седење, и по секои 5 места се наоѓа пролаз.Столицата може да биде стандардна (1 мест) или *love box* (2 места). На колку начини може да се поставaт столиците во еден ред така што никои два *love box* столици не се соседни и не постојат три стандардни столици по ред (столиците се сметаат за соседни и вослучај кога преминот е меѓу нив). Јасно, *love box* столицата не може да преминува преку пролазот.

Решение. Разгледуваме групи од по 5 места (групи меѓу два пролази). СПоред дадените услови двата вида столици може да се распоредат во група од по 5 места само на 3 начин. Дефинираме променливи a_n, b_n, c_n кои го означуваат бројот на начините на кои може да се постават столиците, во зависност од тоа како изгледа последната група од 5 места.



Со A, B, C да ги означиме трите начини на кои за поставување на столиците во групи од по 5 места (единечните столици со сина боја, столиците *love box* со црвена боја). На цртежот десно е прикажано дека по редот од тип A може да се стави ред од типот B или C, но не и ред од типот A. Слично и задругите два типа. Затоа користејќи ја оваа табела имаме:

	A	B	C
A	×	√	√
B	√	×	×
C	√	√	×

1) Ако A е на прво место, тогаш $a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$.

2) Ако B е на прво место, тогаш $b_n = a_{n-1}$.

3) Ако C е на прво место, тогаш $c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$.

Значи, вкупно имаме

$$d_n = a_n + b_n + c_n = (b_{n-1} + c_{n-1}) + a_{n-1} + (a_{n-1} + b_{n-1})$$

$$= (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) + a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$= (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) + (b_{n-2} + c_{n-2}) + a_{n-2}$$
$$= d_{n-1} + d_{n-2}.$$

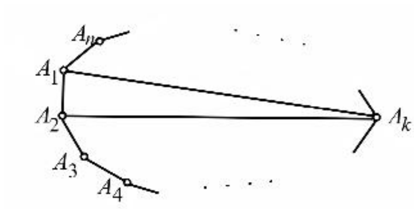
Да ги определиме почетните услови:

$$a_1 = b_1 = c_1,\ d_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 3,$$
$$a_2 = 1+1,\ b_2 = 1,\ c_2 = 1+1,\ d_2 = 2+1+2 = 5.$$

Сега,лесно се гледа дека $d_n = f_{n+3}$.

13. КАТАЛАНОВИ БРОЕВИ

1. Нека е даден конвексен $n-$ аголник $A_1A_2...A_n$, (цртеж десно). Под *триангулација на $n-$аголникот* ќе подразбираме негова поделба на триаголници при што се исполнети условите:



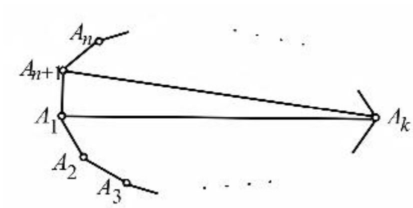
а) или триаголниците немаат заеднички точки,
б) или имаат само заедничко теме,
в) или имаат заедничка страна.

Триангулацијата која се состојат само од дијагонали на $n-$аголникот ја нарекуваме дијагонална.

Нека со T_n, $n \geq 3$ го означиме бројот на дијагоналните триангулации на конвексниот $n-$аголник. Докажи, дека броевите $T_n, n \geq 2$ ја задоволуваат диференцната равенка

$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + ... + T_{n-1}T_3 + T_nT_2 . \quad (1)$$

Решение. Да го разгледаме многуаголникот $P = A_1...A_{n+1}$, (цртеж десно). Страната A_1A_{n+1} припаѓа на некој триаголник на секоја дијагонална триангулација на P. Третото теме на тој триаголник може да биде некое од темињата A_k, $k = 2,...,n$. Да го пресметаме бројот на начините на кои третото теме може да биде некое од темињата $A_k, k = 2,...,n$. Триаголникот $A_1A_{n+1}A_k$ го дели многуаголникот P на два помали конвексни многуаголници и тоа „долен“ конвексен $k-$аголник $A_1...A_k$ и „горен“ конвексен $(n-k+2)-$аголник $A_kA_{k+1}...A_{n+1}$. Долниот $k-$аголник може да се триангулира на T_k начини, а горниот $(n-k+2)-$аголник на T_{n-k+2} начини, па затоа вкупниот број на триангулации во овој случај е T_kT_{n-k+2}. Но, за секој $k = 2,...,n$ на претходно опишаниот начин добиваме различни триангулации, па затоа

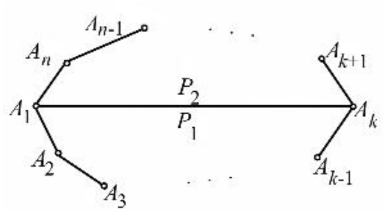


$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + ... + T_{n-1}T_3 + T_nT_2 .$$

2. Докажи, дека броевите $T_n, n\geq 4$ на дијагоналните триангулации ја задоволуваат диференцната равенка

$$T_n=\frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)\,. \qquad (1)$$

Решение. Да го разгледаме многуаголникот $A_1...A_n$, (цртеж десно). Дијагоналата A_1A_k, $k=3,...,n-1$ го дели P на два многуаголника P_1 и P_2, т.е. на долен конвексен $k-$аголник $P_1=A_1...A_k$ и на горен конвексен $(n-k+2)-$аголник



$P_2=A_1A_kA_{k+1}...A_n$, (цртеж десно). Бројот на триангулациите на P во кои учествува дијагоналата A_1A_k е еднаков на T_kT_{n-k+2}. Од темето A_1 излегуваат $n-3$ дијагонали $A_1A_3, A_1A_4,...,$ A_1A_{n-1}, па затоа бројот на триангулациите за сите дијагонали од темето A_1 е еднаков на

$$T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3$$

и ова важи за сите темиња. Значи бројот

$$n(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)$$

ги опфаќа сите можни триангулации за секоја дијагонала, и притоа броиме двапати, за секое теме на дијагоналата. Според тоа, бројот

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)$$

е број за секоја можна дијагонала што учествува во триангулација на P. Но, бидејќи секоја триангулација ја броиме за секоја дијагонала одделно, а имаме $n-3$ дијагонали добиваме дека бројот на триангулациите е

$$\frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)\,,$$

т.е. важи формулата (1).

3. Нека со T_n, $n\geq 2$ го означиме бројот на дијагоналните триангулации на конвексниот $n-$аголник. Докажи, дека за секој $n\geq 2$ важи

$$T_n=\frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}\,. \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи $T_2=1$, од задача 1 добиваме

$$T_{n+1}-2T_n=T_3T_{n-1}+...+T_{n-1}T_3\,.$$

Сега од задача 2 следува

$$T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3=T_n\,\frac{2(n-3)}{n}\,,$$

па затоа

$$T_{n+1}-2T_n=\frac{2(n-3)}{n}T_n\,,$$

т.е. $T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n} T_n$. Од последната формула последователно добиваме

$$T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n} T_n = \frac{2^2(2n-3)(2n-5)}{n(n-1)} T_{n-1} = \frac{2^3(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{n(n-1)(n-2)} T_{n-2} = \dots$$

$$= \frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)(2n-7)\dots(2\cdot3-3)(2\cdot2-3)}{n(n-1)(n-2)\dots3\cdot2}$$

$$= \frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)(2n-7)\dots(2\cdot3-3)(2\cdot2-3)}{n(n-1)(n-2)\dots3\cdot2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)\dots3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)\dots3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdot\dots\cdot3\cdot1}{n(n-1)(n-2)\dots3\cdot2} \cdot \frac{(2n-2)(2n-4)\cdot\dots\cdot6\cdot4\cdot2}{(n-1)(n-2)\dots3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Конечно, ако во последната формула наместо $n+1$ ставиме n ја добиваме формулата (1).

Забелешка. Проблемот на триангулација прв го решил Ојлер, но подоцна Каталан решавајќи го проблемот на загради ги открил броевите од облик $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, кои во негова чест се наречени *Каталанови броеви*. Понатаму, важи $C_n = T_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Понатаму, бидејќи $T_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} T_k T_{n+2-k}$, односно $T_{n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} T_k T_{n+3-k}$, добиваме дека Каталановите броеви ја задоволуваат рекурзијата $C_n = \sum_{k=2}^{n+1} C_{k-2} C_{n+1-k}$, т.е. $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$.

4. (*Проблем на загради*). а) Определи го бројот на начините на кои можат да се помножат n броеви.

б) Определи го бројот на различните начини на кои може да се помножат n броеви, чиј распоред е фиксиран. На пример, $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Решение. Нека со Z_n го означиме бараниот број. Да го разгледаме било кој од Z_{n-1} производите на броевите $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. На секој од овие производи го додаваме бројот x_n и тоа може да се направи на два начини:

- како надворешен множител $x_n(\dots)$ или $(\dots)x_n$,
- како внатрешен множител, при што на секое од $(n-2)-$те множења за пресметување на еден од производите на броевите $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ додавањето може да се направи на 4 начини. Имено, ако имаме множење на два соседни броја a и b, тогаш внатрешното вметнување на бројот x_n може да се направи на еден од следните четири начини:

$$(x_n a)b,\ (a x_n)b,\ a(x_n b),\ a(b x_n).$$

Од претходно изнесеното следува дека бројот x_n може да се вметне или да се додаде на секој од Z_{n-1} производите на броевите $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на

$$4(n-2)+2=4n-6$$

начини. Значи, броевите Z_n, $n=2,3,...$ ја задоволуваат диференцната равенка

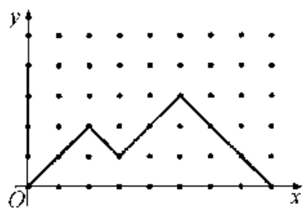
$$Z_n=(4n-6)Z_{n-1}, \qquad (1)$$

со почетен услов $Z_1=1$. Решението на равенката (1) е дадено со

$$\begin{aligned} Z_n &= (4n-6)Z_{n-1}=(4n-6)(4n-10)Z_{n-2} \\ &= (4n-6)(4n-10)...(4\cdot 3-6)(4\cdot 2-6)Z_1 \\ &= 2(2n-3)2(2n-5)...2(2\cdot 3-3)2(2\cdot 2-3) \\ &= 2^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdot ...\cdot 3\cdot 1 \\ &= \frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdot ...\cdot 3\cdot 1}{(n-1)!}(n-1)! \\ &= \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdot ...\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-1)!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}=(n-1)!\binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

б) За да ја решиме задачата доволно е бројот Z_n да го поделиме со бројот на пермутациите на броевите $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е. со $n!$. Значи решение на задачата е $\frac{Z_n}{n!}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}=C_{n-1}$, т.е. тоа е $(n-1)$ – от Каталанов број.

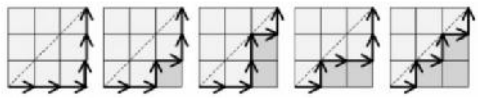
5. Да ја разгледаме целобројната решетка во првиот квадрант на Oxy рамнината. *Пат на Дик* ја нарекуваме секоја непрекината искршена линија со целобројни темиња, која се состои од $\mathbf{a}(1,1)$ и $\mathbf{b}(1,-1)$ и која почнува од координатниот почеток, завршува на оската Ox и никогаш не оди под неа (цртеж десно). Притоа, делот од искршената линија кој се состои од еден вектор $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ го нарекуваме *чекор* во патот на Дик, а бројот на чекорите од кои е составен патот го нарекуваме *должина* на патот на Дик. Определи го бројот на патиштата на Дик со должина $2n$.



Решение. Ако на секој чекор $\mathbf{a}$ го замениме со отворена заграда, а секој чекор $\mathbf{b}$ го замениме со затворена заграда, добиваме дека на секој пат на Дик му соодветствува еден распоред на заградите од решението на претходната задача под б). Обратно, ако секоја отворена заграда ја замениме со чекор $\mathbf{a}$, а секоја затворена заграда со чекор $\mathbf{b}$, тогаш добиваме дека на секој распоред на заградите му соодветствува еден пат на Дик. Јасно, вака определеното пресликување е биекција меѓу бројот на заградите ори множење на $n+1$

броеви и бројот на патиштата на Дик со должина $2n$, па затоа бараниот број на патишта со должина $2n$ е еднаков на $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

6. (*Патишта во целобројна мрежа*). Цебројната мрежа се состои од прави кои минуваат низ целобројните точки, кои се паралелни со координатните оски во Декартов кординатен систем. Разгледуваме дел од мрежата со големина $n \times n$. Определи го бројот на различни најкратки патишта во ваква целобројна мрежа кои тргнуваат од долниот лев агол и одат до горниот десен агол, но никогаш не ја преминуваат дијагоналата, односно патишта под дијагоналата од долниот лев агол до горниот десен агол по кои се движеме само горе и десно. На цртежот десно се прикажани патиштата во мрежата 3×3.

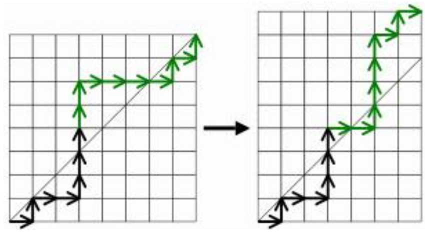


Решение. Бројот на различните патишта кои ги задоволуваат наведените услови ќе го определиме со директно пребројување на сите патишта низ целобројната мрежа до точката (n,n) и од овој број ќе го одземеме бројот на патиштата кои ја сечат (преминуваат) дијагоналата.

Секој целоброен пат можеме да го претставиме како определен редослед на вектор за поместување во десно $\vec{i} = (1,0)$ и вектор за поместување нагоре $\vec{j} = (0,1)$. Притоа имаме n поместувања во десно и n поместување нагоре, односно вкупно $2n$ поместувања. Јасно, ако поместувањата ги означиме со броевите $1, 2, 3, ..., 2n-1, 2n$, тогаш во случај на избор на n од овие броеви за поместувања во десно добиваме точно еден и само еден определен пат во целобројната мрежа. Имено, определен е единствен пат бидејќи преостанатите n броеви ги даваат поместувањата нагоре. Значи, во целобројна $n \times n$ имаме вкупно $\binom{2n}{n}$ патишта кои водат од долниот лев до горниот десен агол.

Сега да ги преброиме патиштата кои ја сечат дијагоналата. Да ја разгледаме првата точка која се наоѓа на недозволен пат (пат кој ја сече дијагоналата), т.е. која е над дијагоналата. По таа точка го пресликуваме делот од патот така што секое поместување во десно го заменуваме со поместување кон горе и секое поместување кон горе го заменуваме со поместување во десно. Бидејќи сме едно поле над дијагоналата, досега сме направиле k поместувања во десно и $k+1$ поместување кон горе. Значи, ни преостануваат $n-k$ поместувања во десно и $n-k-1$ поместувања кон горе за да дојдеме до точката (n,n). Со пресликувањето на патот се заменуваат броевите на преостанатите поместувања, што значи дека во добиената нова патека ќе има $k+(n-k-1) = n-1$ поместувања во десно и $k+1+(n-k) = n+1$ поместување кон горе.

Последното значи дека ќе дојдеме до точката $(n-1,n+1)$. На ваков начин секој недозволен пат од точката $(0,0)$ до точката (n,n) на единствен начин можеме да го модифицираме во нај-краток пат од точката $(0,0)$ до точ-ката $(n-1,n+1)$, кој често пати се нарекува рефлектиран пат. (На цртежот десно се прикажани недозволен пат во 8×8 целобројна мрежа и со-одветниот рефлектиран пат).



Исто така, секој најкраток пат во целобројната мрежа од точката $(0,0)$ до точката $(n-1,n+1)$ можеме на единствен начин да го модифицираме во недозволен пат од точката $(0,0)$ до точката (n,n), со заменување на насоките на движење во моментот кога ќе ја премине дијагоналата во целобројната $n\times n$ мрежа. На овој начин најдовме биекција меѓу множеството од сите најкратки патишта кои ја сечат дијагоналата и множеството од сите најкратки патишта во целобројната мрежа од точката $(0,0)$ до точката $(n-1,n+1)$.
Секој најкраток пат во целобројната мрежа од точката $(0,0)$ до точката $(n-1,n+1)$ се добива со избор на $n-1$ движења во десно од множеството од $n-1+n+1=2n$ движења, т.е. со избор на $n-1$ броеви од множеството $1,2,...,2n-1,2n$. Значи, во случајов имаме $\binom{2n}{n-1}$ патишта кои ја пресекуваат дијагоналата. Конечно, од претходните разгледувања следува дека бројот на различните патишта кои ги задоволуваат наведените услови е еднаков на

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}&=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}\\&=\frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\&=C_n,\end{aligned}$$

што значи дека тоа е $n-$тиот Каталанов број.

7. Даден е природен број n. Еден шеф пишува секој ден по n писма и ги нумерира со броевите $1,2,3,...,n$. Кога ќе напише писмо тој го става најгоре во една кутија. Ако неговата секретарка е слободна, таа го зема најгорното писмо од кутијата и го отчукува. Понекогаш секретарката успева да го отчука писмото пред шефот да го стави следното, а понекогаш тој успева да стави

едно или повеќе писма пред тоа време. Секретарката секогаш успева да ги отчука сите писма до крајот на работниот ден.

За една пермутација на броевите од 1 до n ќе велиме дека е печатна, ако е можно писмата да бидат отчукани во тој редослед. Определи го бројот на сите печатни пермутации.

Решение. Во координатен систем да ги разгледаме точките чии кординати се цели ненегативни броеви. Да ставиме жетон во точката $(1,0)$. Кога шефот ќе стави писмо во кутијата, го поместуваме жетонот едно поле надесно. Кога секретарката ќе отчука писмо го поместуваме жетонот едно поле нагоре. Секретарката не може да отчука писмо кое не е напишано, па затоа жетонот не може да се постави на и над симетралата s на првиот квадрант. Значи, треба да ги преброиме сите патишта од $(1,0)$ до $(n+1,n)$ со тоа својство. Лесно се гледа дека ова всушност се патиштата од претходната задача, што значи дека бројот на печатните пермутации е еднаков на $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

8. (*Проблем на дисјунктни тетиви*). На кружницата се дадени $2n$ точки. На колку начини овие точки можат да се разбијат на n парови така што меѓу n – те тетиви определени со овие парови точки не постојат две кои се сечат?

Решение. Со a_n да го означиме бараниот број разбивања, а точките на кружницата да ги означиме со $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n}$, во ист редослед како што се поставени на кружницата. Точката A_1 може, при дадените услови со тетива да се поврзе само со една од точките $A_2, A_4, ..., A_{2n-2}, A_{2n}$ (точки со парни индекси), бидејќи во спротивно, од секоја страна на тетивата која излегува од A_1 ќе има непарен број точки, па барем една тетива ќе ја сече тетивата од A_1.

Да го определиме бројот на различните начини на поврзувања на точките, кога A_1 е поврзана со точката A_{2k}. Од едната страна на тетивата A_1A_{2k} има $2k-2=2(k-1)$ точки и тие можат да се поврзат на a_{k-1} начин. Од другата страна на тетивата A_1A_{2k} се наоѓаат $2(n-k)$ точки и тие можат да се поврзат на a_{n-k} начини. Од принципот на производ следува дека бројот на поврзувањата на точнике со n тетиви, при кои точката A_1 е поврзана со точкта A_{2k} е еднаков на $a_{k-1}a_{n-k}$. Понатаму, ако сумираме по k од принципот на збир следува дека

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + ... + a_{k-1}a_{n-k} + ... + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0, \qquad (1)$$

Јасно, $a_0 = a_1 = 1$. Останува да забележиме дека,споре забелешката по задача 3, рекурзијата (1) всушност е рекурзијата која ја задоволуваат Каталановите броеви, што значи дека $a_n = C_n$, за $n \in \mathbb{N}$.

9. Наставникот по физичко во сала наредил 30 ученици, така да сенаоѓаат во темиња на правилен триесетаголник. На колку начини може да се изберат 15парови кои ќе си додаваат со одбојкарски топки (се претпоставува дека движењето на топката е праволиниско), така што ќе бидеме сигурни дека никои две топки нема да се судрат.

Решение. Овој проблем е еквивалентен на проблемот на проблемот на $2n=30$ точки кои определуваат $n=15$ тетиви кои не се сечат. Според задача 9 решението на проблемот е Каталановиот број $C_{15}=\frac{1}{16}\binom{30}{15}$.

10. За низата нули и единици со должина $2n$ ($2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$) ќе велиме дека е *урамнотежена* ако содржи n нули и n единици. За урамнотежената $2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$ ќе велиме дека е *добра* ако во ниту еден нејзин почетен дел нема повеќе нули од единици. Во спротивно ќе велиме дека $2n$-низата е *лоша*.

Докажи, дека бројот на добри $2n$-низи над азбука $\{0,1\}$ е $a_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n$.

Решение. Прво да забележиме дека бројот на урамнотежени $2n$-низи е еднаков на $\binom{2n}{n}$. Ќе го определиме бројот на лошите низи меѓу урамнотежените $2n$-низи. Во секоја лоша низа може да се забележи првата нула со која се нарушува условот низата да е добра (во почетниот дел кој завршува со оваа нула има повеќе нули од единици). Ако во овој почетен дел ги замениме нулите со единици и единиците со нули добиваме $2n$-низа со $n+1$ единица и $n-1$ нула, Од друга страна, за секоја $2n$-низа со $n+1$ единица и $n-1$ нула може да се изврши обратната постапка на замена и да се најде лошата низа од која е добиена почетната низа. На пример, низата 001011101101 е добиена од низата 110100001101 со замена на нулите и единиците во почетниот дел со должина 7. Од принципот на еднаквост следува дека бројот на лошите $2n$-низи е еднаков на $\binom{2n}{n-1}$. Конечно, од принципот на исклучување следува дека бројот на добрите $2n$-низи е

$$a_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!n!}[1-\frac{n}{n+1}]$$
$$=\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n.$$

11. Пред билетарница стојат $2n$ лица. Секоја од нив сака да купи по еден билет кој чини 50 денари. Меѓу лицата во редот точно n лица имаат по 50 денари, а останатите имаат по една банкнота од по 100 денари. На почетокот касата на билетарницата е празна. Колкав е бројот на распоредите на лицата така што продавачката може да врати кусур на секое лице кое купува билет?

Решение. На секое лице при купувањето на билетот може одма да му се врати потребниот кусур ако и само ако за секое лице кое има 100 денари бројот на лицата кои се во редот пред него и имаат по 50 денари е поголем од бројот на лицата кои се во редот пред него и имаат по 100 денари. Ако на секое лице кое има 50 денари му го придружиме бројот 1, а на останатите бројот 0, добиваме $2n$-низа од нули и единици, која е добра. Според претходната задача бројот на добрите $2n$-низи е C_n. Бидејќи n – те лица со 50 денари можат да се распоредат на n – те места во секоја добра низа на $n!$ начини и истото важи за n – те лица со 100 денари, заклучуваме дека бараниот број распореди е еднаков на $C_n n!n! = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} n!n! = \frac{(2n)!}{n+1}$.

12. (*Проблем на гласање на Бертранд*). На претседателски избори има два кандидати A и B за кои гласаат $2n$ гласачи. На колку начини можеме да ги преброиме резултатите од гласањето, така што во ниту еден момент на броењето B нема да има повеќе гласови од A, а конечниот резултат ќе биде нерешен?

Решение. Ако на секој глас на A му гопридружиме бројот 1, а на секој глас на B му го придружиме бројот 0, тогаш е јасно дека разгледуваниот пробем е еквивалентен на проблемот на урамнотежени добри $2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$. Сега, од задача 10 следува дека бројот на пребројување на гласањето на саканиот начин е еднаков на $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

13. Кловн стои на работ на базени држи вреќа во која има n сини и n црвени топчиња. Од вреќата без гледање извлекува топче по топче. Кога ќе извлече сино топче прави чекор кон базенот, а кога ќе извлече црвено топче прави чекор од базенот (се претпоставува дека сите чекори се со иста должина). На колку начини кловнот може да ги извлече топчињата, а притоа да не падне во базенот?

Решение. Ќе воспоставиме биекција меѓу извлекувањата на топчињата и урамнотежените низи од 0 и 1. Бидејќи кловното не смее да падне во базенот, тоа значи дека бројот на сините топчиња не смее да биде поголем од бројот на црвените, па на извлекувањето на сино топче да му придружиме нула, а на извлекувањето на црвенот топче да му придружиме еден. Според тоа, треба да го определиме бројот на урамнотежените добри низи, кој според задача 10 е еднаков на $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

14. На хоризонтална права се земени $2n$ точки. Определи го бројот на начините на поврзување на овие точки со дисјунктни лаци така што сите лаци се на

иста страна од правата и секој лак поврзува две точки. На долниот цртеж се дадени сите поврзувања за 6 точки.

Решение. Ако n – те лаци кои ги поврзуваат дадените $2n$ точки ги пресликаме во низи од n единици и n нули, така што на левите крајни точки на лаците им придружиме единици,а на десните крајни точки им придружиме нули, тогаш добиваме биекција меѓу поврзувањата кои ги задоволуваат условите на задачата и урамнотежените добри $2n$-низи над азбуката $\{0,1\}$.

Според тоа, бараниот број поврзувања е еднаков на $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

15. Определи ја генераторната функција за низата Каталанови броеви.

Решение. Нека

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + ...$$

е генераторна функција на низата $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$. Ако ја искористиме рекурзијата

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

Добиваме:

$$[C(x)]^2 = [C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + ...][C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + ...]$$
$$= C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + ... + (C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + ... + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0)x^{n-1}$$
$$= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + ... = \frac{C(x)-C_0}{x} = \frac{C(x)-1}{x}$$

т.е.

$$x[C(x)]^2 = C(x) - 1. \quad (1)$$

Квадратната равенка (1) ја решаваме по $C(x)$ и добиваме

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}. \quad (2)$$

Но, $C_0 = 1$, па затоа $C(0) = 1$ и како $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1$, а $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$ добиваме дека

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad (3)$$

е генераторна функција на низата Каталанови броеви $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Коментар. а) Во претходните задачи ја определивме експлицитната форма на Каталановите броеви. Но, Каталановите броеви може да ги определиме и ако го определиме коефициентот пред x^k во развојот на функцијата (3). За таа цел ќе ја користиме обопштената Њутнова биномна формула, според која

$$(1-4x)^{1/2} = 1+\sum_{k\geq 1}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)...(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-1)^k 4^k x^k$$
$$= 1+\sum_{k\geq 1}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2-1}{2}\cdot\frac{4-1}{2}\cdot...\cdot\frac{2k-2-1}{2}}{k!}4^k x^k$$
$$= 1-\sum_{k\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2k-3)}{k!}2^k x^k$$
$$= 1-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2k-3)2^k\cdot 1\cdot 2\cdot 3...\cdot(k-1)}{(k-1)!\cdot(k-1)!}x^k$$
$$= 1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2k-3)\cdot 2\cdot 4\cdot 5...\cdot(2k-2)}{(k-1)!\cdot(k-1)!}x^k$$
$$= 1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\cdot(k-1)!}x^k$$
$$= 1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\cdot(k-1)!}x^k$$
$$= 1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k$$

па затоа

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1-1+2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k}{2x}$$
$$= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^{k-1}$$
$$= \sum_{i\geq 0}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i.$$

Според тоа,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ n = 0,1,2,... .$$

б) Постои едноставна врска меѓу Каталановите броеви и верижните дропки. За да ја определиме истата равенството (1) ќе го запишеме во видот

$$x[C(x)]^2 = C(x)-1,$$

од каде добиваме $C(x)(1-xC(x)) = 1$, односно

$$C(x) = \frac{1}{1-xC(x)} = \frac{1}{1-\frac{x}{1-xC(x)}} = \frac{1}{1-\frac{x}{1-\frac{x}{1-xC(x)}}} = ... = \frac{1}{1-\frac{x}{1-\frac{x}{1-\frac{x}{1-\frac{x}{\ddots}}}}}. \quad (4)$$

Сега, ако земеме приближна вредност на верижната дропка до шестата дропка добиваме

$$C(x) = 1+x+2x^2+5x^3+14x^4+42x^5+132x^6+O(x^7),$$

при што коефициентите во овој развој се токму Каталановите броеви.

в) Во решението на задача 3, каде со T_n го означивме бројот на триангулациите на конвексен n – аголник докажавме дека

$$T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n} T_n \text{ и } T_{n+2} = C_n .$$

Имајќи ги предвид горните формули добиваме

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+2}}{T_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+2}}{T_{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(2n-1)}{n+1} T_{n+1}}{T_{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n-1)}{n+1} = 4.\end{aligned}$$

Според тоа, за доволно големи n секој следен Каталанов број е приближно четири пати поголем од претходниот Каталанов број.

ЛИТЕРАТУРА

1. Amini, A. R.: *Fibonacci Numbers a Long Division Formula*, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
2. Anderson, J. A.: *Diskretna matematika sa kombinatorikom*, CET, Beograd, 2005
3. Andreescu, T., Feng, Z.: *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhauser, Boston, 2003
4. Askey, R. A.: *Fibonacci and Lucas Numbers*, Mathematics Teacher, 98, 2005
5. Bakula, B., Franušić, Z.: *Matrice s Fibonaccijevim brojevima,* math.e 26
6. Balakrishman: *Combinatorics*, Schaum's Outlines McGraw-Hill, 1995.
7. Ban, S., Rukavina, S.: *Latinski kvadrati*, Matematičko-fizički list, LXII 4 (2011. – 2012.)
8. Bender, E. A., Williamson, S. G.: *Foundations of combinatorics with applications*, Dover Publications, New York, 2006.
9. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
10. Benjamin, A. T.: *The Lucas Triangle Recounted*, http://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/LucasTriangle.pdf
11. Cameron, P. J.: *Notes on Combinatorics*, School of Mathematical Sciences at Queen Mary, University of London
12. Carstensen, J., Muminagić, A.: *Fibonaccital -og polynomiers division*, Matematik Magasinet 40/2008
13. Carstensen, J.: *Blandet om Fibonaccit-og Lucastal*, Matematik Magasinet 68/2013
14. Čavrak, H.: *Katalanovi brojevi*, Hrvatski elektronski ćasopis, 7
15. Chen, C.C. , Koh, K.M.: *Principles and Tehniques in Combinatorics*, Word Scientific, Singapore - New York-London-Hong Kong, 1992
16. Cull P., Elahive M., Robson R.: *Difference equations: From rabbits to chaos*, Springer, 2005
17. Cull, P., Flahive, M., Robson, R.: *Difference Equations: From Rabbits to Chaos*, Springer, 2005
18. Cvitković, M.: *Kombinatorika (zbirka zadataka)*, Element, Zagreb, 1994.
19. Cvitković,M.: *Kombinatorik: zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2018
20. Dakić, B.: *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995
21. Davis, T.: Catalan Numbers, http://www.geometer.org/mathcircles, 2001.
22. Dogančić, E., Martinjak, I.: Catalanovi brojevi I putevi u celobrojnoj mreži, Osječki matematički list, 18, 2018
23. Dokić, B.: Stirlingovi brojevi, Osječki matematički list, 13, 2013
24. Dravec, H.: *Kombinatorne igre*, Osječki matematički list, 6, 2006

25. Drino, Dž., Murica, M.: *Neki načini dokazivanja identiteta s Fibonaccijevim brojevima*, Matematičko-fizički list, LXVIII, 4, 2017/18
26. Dujella, A.: *Fibonaccijevi brojevi i geometrija*, Matka14 (1995), 60–65.
27. Dujella, A.: *Fibonaccijevi brojevi,* Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000
28. Engel, A.: *Problem-Solving Strategies,* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
29. Erdös, P., Graham, R. L., Montgomery, P., Rotschild, B. L., Spenver, J. H., Straus, E. G.: *Euclidean Ramsey theorems* I, J. Combin. Theory (A) 14/1973
30. Erdös, P., Graham, R. L., Montgomery, P., Rotschild, B. L., Spenver, J. H., Straus, E. G.: *Euclidean Ramsey theorems* II, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 10/1973
31. Erdös, P., Graham, R. L., Montgomery, P., Rotschild, B. L., Spenver, J. H., Straus, E. G.: *Euclidean Ramsey theorems* III, North Holland, Amsterdam, 1975
32. Erdös, P., Szekeres, G.: *A combinatorial problem in geometry,* Composito Math., 2/1935
33. Flajolet, P., Sedgewick, R.: *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2009.
34. Fomin, S., Reading, N.: *Root systems and generalized associahedra,* IAS/Park City Mathematics Institute, 2004
35. Fults, J. L.: *Magic squares*, Open Court Publishing Company, La Salle Illinois, 1974
36. Goulden, I. P., Jackson, D. M.: *Combinatorial enumeration,* John Wiley & Sons, New York, 1983.
37. Graham, L., Knuth, D., Patashnik, O.: *Concrete mathematics,* Addison-Wesley, Boston, 2003
38. Hilton, P., Pedersen, J.: Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/CatalanInPascal.shtml
39. Ho, L. K., Wing, L. T., Yin, L. K.: *Double Counting,* Mathematical Excallibur, Vol. 13, No. 4, 2008
40. Jamak, H.: *Osnovni principi I metode prebrojavanja*, Evolventa (JAMTK), 1 (1) (2018), 6-12
41. Jojić, D.: *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011
42. Jurić, N.: *Jedno svojstvo Fibonaccijevih brojeva,* Matematičko-fizički list, LXV, 4, 2014/15
43. Klavžar, S.: *Zeckendorfov izrek in Fibonaccijeve kocke*, Obzornik za matematiko in fiziko, 50(6), 2003
44. Knott, R.: *Lucas Numbers*, http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/lucasNbs.html#pascal
45. Koshy, T.: *Catalan Numbers with Applications,* Oxford University Press, 2009.
46. Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications,* John Wiley and Sons, New York, 2001
47. Koshy, T.: *Trigonometric Functions and Fibonacci and Lucas Arrays,* Mathematical Spectrum, Vol. 42, Number 3, 2009

48. Kovačić, B.: *O vezi Lucasovih brojeva i Pascalova trokuta*, Matematičko-fizički list, Zagreb, LXIV, 1, 2013
49. Kurnik. Z.: *Metoda rekurzija,* Matematika i škola, 24, 2004
50. Loehr, N. A.: *Combinatorics*, Chapman and Hall, United Kingdom, 2017
51. Luhász, R.: Ramsey type theorems in the plane, J. Combin. Theory (A) 27/1979
52. Mahendra J., Rieper, R. G.: *Continued fractions and Catalan problems*, 2000
53. Majstorović, S.: *Dirichletov princip*, Osječki matematički list, 6, 2006
54. Martinjak, I.: *O Eulerovom teoremu o particijama*, Osječki matematički list, 16, 2016
55. Martinjak, I.: *Poopćenja Cassinijevog identiteta*, Matematičko-fizički list, LXVI, 2, 2015/16
56. Melham, R. S.: *A Fibonacci Identity in the Spirit of Simson and Gelin-Cesàro*, Fibonacci Quart. 41 (2) (2003), 142–143.
57. Merris, R.: Combinatorics, 2nd ed., John Wiley and Sons, 2003
58. Miklos Bona: *A walk through combinatorics: An introduction to enumeration and graph theory*, University of Floria, SAD, 2006
59. Milanović, M.: *Lucas Numbers and Pascal Triangle*, http://milan.milanovic.org/math/english/fibo/fibo3.html
60. Murovec, D.: *Male tajne Fibonaccijevih brojeva*, Matematičko-fizički list, LVI, 1, 2005/06
61. Nurkanović, A., Muminagić, A.: *Nestandardni dokazi nekih osobina Fibonaccievih brojeva*, Evolventa (JAMTK) 1(2)/2018
62. Richard P. Stanley, Catalan Numbers, Cambridge University Press 2015.
63. Riordan, J.: *Combinatorial Identities*, John Willey & Sons, 1968
64. Rosen, K. H.: *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill, 1998
65. Schwenk, A. J.: Which Rectangular Chessboards Have a Knight’s Tour?, Mathematics Magazine, 64/5, 1991
66. Stanley, R.: Catalan Numbers, Cambridge University Press, 2015
67. Stevanović, D., Ćirić, M., Simić, S., Baltić, V. *Diskretna matematika: osnove kombinatorike i teorije grafova,*Prirodno matematički fakultet u Nišu, 2007
68. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. *Diskretna matematika: osnove kombinatorike I teorije grafova, zbirka rešenih zadataka*, DMS, Beograd, 2004
69. Stojadinović, T.: *On Catalan numbers*, The teaching of mathematics,Vol. XVIII, 1, 2015
70. Tošić, R.: *Kombinatorika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodnomatematički fakultet, Novi Sad, 1999.
71. Veljan, D.: *Kombinatorika i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001
72. Wilf, H. S.: *Generatingfunctionology*, University of Pennsylvania, 2006
73. Wilf, H.S.: *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994
74. Баралић, Ђ.: *Идентитети са биномним коефициентима*, Тангента
75. Велинов, Д.: *Генераторни функции*, Математички талент, 2021, https://matematickitalent.mk

76. Велинов, Д.: *Инаријанти и монинваријанти*, Математички талент, 2021, https://matematickitalent.mk
77. Велинов, Д.: *Некои карактеристични задачи од комбинаторика*, Математички талент, 2021, https://matematickitalent.mk
78. Велинов, Д.: *Рекурентни релации*, Сигма, Скопје
79. Виленкин, Н. Я.: *Комбинаторика*, Наука, Москва, 1969
80. Гарднер, М.: *Математически развлечения*, Том 2,София, Наука и изкуство, 1977
81. Герганов, И.: Задачи в триъгълна решетка, Математка 6/2012, София
82. Герганов, И.: Преброяване върху триъгълна решетка, Математка 1/2012, София
83. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
84. Гуревич, Е.: *Тайна древнего талисмана*, Москва, Наука, 1969
85. Давидов, Љ.: *Генераторни функции*, Сигма, Скопје
86. Давидов, Љ.: *Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми*, Сигма, Скопје
87. Ђукић, Д.: *Задаци о скуповима*, Београд, 2015, www.imo.org.yu/sc
88. Ђукић, Д.: *Задаци са распоредима бројева*, Београд, 2016, www.imo.org.yu/sc
89. Ђукић, Д.: *Инваријанте*, Београд, 2013, www.imo.org.yu/sc
90. Ђукић, Д.: *Комбинаторна геометрија*, Београд, 2016, www.imo.org.yu/sc
91. Ђукић, Д.: *Комбинаторна теорија бројева*, Београд, 2016, www.imo.org.yu/sc
92. Ђукић, Д.: *Математичке игре погађања*, Београд, 2015, www.imo.org.yu/sc
93. Ђукић, Д.: *Партиције природног броја*, Београд, 2013, www.imo.org.yu/sc
94. Ђукић, Д.: *Холова теорема*, Београд, 2016, www.imo.org.yu/sc
95. Ерусалимский, Я. М.: *Дискретная математика*, Везувская книга, Москва, 2004
96. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: *Тригонометрија, хипеболични функции и Фибоначиеви броеви*, Математички талент, Скопје, 2023, https://matematickitalent.mk
97. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: *Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
98. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: *Паскаловиот триаголник и бројот е*, Сигма, Скопје, 2020
99. Колев, Е.: Задачи за фудболни турнири, Математика 3/2015, София
100. Макарова, Н.: *Волшебный мир магических квадратов*, Саратов, 2009
101. Малчески, А., Малчески, Р.: *Разбивање на броеви*, Математика$^{+}$, София, 1997
102. Малчески, Р., Малческа, В. : *Математика* 1 – *алгебарски структури (трето издание)*, Армаганка, Скопје, 2020
103. Малчески, Р., Малческа, В.: *Математика* 5 – *дискретна математика (второ издание)*, Армаганка, Скопје, 2020

104. Малчески, Р., Малчески, А. Малчески, С.: *Меѓународни математички олимпијади* 1959-2019, Математички талент, Скопје, 2022
105. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: *Балкански математички молимпијади* 1984-2020, Математички талент, Скопје, 2022
106. Малчески, Р., Малчески, С., Велинов, Д.: *Логички и комбинаторни задачи за натпревари за учениците од VI до IX одделение*, Математички талент, Скопје, 2023
107. Малчески, Р., Малчески, С.: *Боење и покривање*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
108. Малчески, Р., Малчески, С.: *Математика на правоаголна табла (втор дел)*, Математички талент, Скопје, 2023, https://matematickitalent.mk
109. Малчески, Р., Малчески, С.: *Математика на правоаголна табла (прв дел)*, Математички талент, Скопје, 2023, https://matematickitalent.mk
110. Малчески, Р., Малчески, С.: *Сојузни натпревари по математика за учениците од средното образование* 1960-1991, Математички талент, Скопје, 2022
111. Малчески, Р., Муминагиќ, А.: *Некои релации за Фибоначиевите и Лукасовите броеви*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
112. Малчески, Р., Муминагиќ, А.:*Три идентитети за Фибоначиевите броеви, Математички талент*, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
113. Малчески, Р., Цветковски, З.: *Задачи со боење и покривање*, Математички талент, Скопје, 2022, https://matematickitalent.mk
114. Малчески, Р., Цветковски, З.: *Принцип на Дирихле*, Математички талент, Скопје, 2022, https://matematickitalent.mk
115. Малчески, Р., Цветковски, З.: *Решавање на комбинаторни задачи со доведување до противречност*, Математички талент , Скопје, 2022, https://matematickitalent.mk
116. Малчески, Р.: *Метод на инваријанти*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
117. Малчески, Р.: *Метод на инваријанти*, Сигма, Скопје,2014
118. Малчески, Р.: *Боење броеви и фигури*, Математички талент, Скопје, 2023
119. Малчески, Р.: *Збирка задачи по теорија на броеви*, Математички талент, Скопје, 2022
120. Малчески, Р.: *Паркетирания и приложения*, Математика +, София, 2001
121. Малчески, Р.: *Теорија на броеви*, Математички талент, Скопје, 2022
122. Малчески, Р.: *Триаголни броеви*, Сигма, Скопје, 1995
123. Малчески, Р.: *Фибоначиеви броеви*, Сигма, Скопје, 2009
124. Малчески, С., Малчески, Р.: *Подготвителни задачи за математички олимпијади - комбинаторика*, Математички талент, Скопје, 2023, https://matematickitalent.mk
125. Малчески, С., Малчески, Р.: *Принцип на Дирихле (прв дел)*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk

126. Малчески, С., Малчески, Р.: *Принцип на Дирихле*, Математички талент, 2020, https://matematickitalent.mk
127. Малчески, С., Малчески, Р.: *Принципи на Дирихле (втор дел)*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
128. Малчески, С.: *Игри и стратегии*, Математички талент, 2021, https://matematickitalent.mk
129. Малчески, С.: *Игри и стратегии-втор дел*, Математички талент, 2023, https://matematickitalent.mk
130. Младеновић, П.: *Комбинаторика (четврто издање)*, ДМ Србије, Београд, 2013
131. Муминагиќ, А., Малчески, Р.: *Триаголни броеви* 2, Армаганка, Скопје, 2020
132. Плотников, А. Д.: *Дискретная математика*, Новое знание, Москва, 2005
133. Сойфер. А.: Няколко щрихи от математично оцветяване, Математика+, София
134. Стевановић, Д., Балтић, В., Симић, С., Ћирић, М.: *Дискретна математика (основе комбинаторике и теорије графова)*, Друштво математичара Србија, Београд,
135. Тодоровска, К., Целакоска-Јорданова, В.: Магични квадрати, Математички омнибус, 7, 2020
136. Тошић, Р.: *Комбинаторика*, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1999
137. Тошић, Р.: *Математика и игре*, Тангента, Београд, 1998
138. Тошић, Р.: *Математичке игре*, Агенција Ваљевац, Вањево, 1999
139. Филеп, Л., Березнай, Г.: *История на цифрите*, София, Техника, 1988
140. Хаджииванов, Н.: *Комбинаторни задачи за две шахматни дами*, Математика 5/2012, София
141. Цветковски, З., Малчески, Р.: *Една класа линеарни Диофантови равенки и нивна примена*, Математички талент, Скопје, https://matematickitalent.mk
142. Цветковски, З., Малчески, Р.: *Игри и стратегии*, Математички талент, Скопје, 2022, https://matematickitalent.mk
143. Цветковски, З., Малчески, Р.: *Метод на инваријанти* 2, Математички талент, 2022, https://matematickitalent.mk