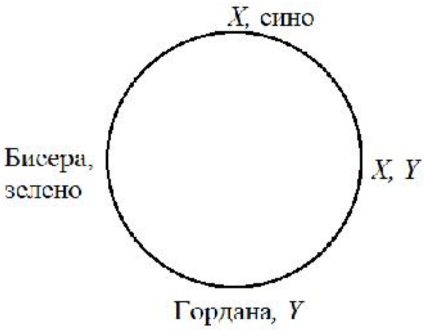
Регионален натпревар 2024

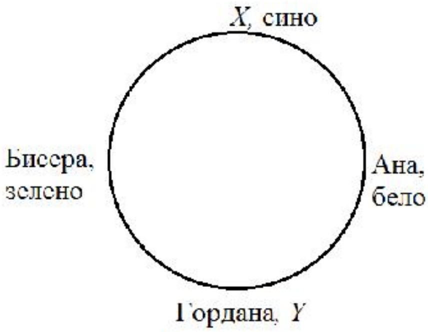
I година

1А. Во школскиот двор, застанати во круг, разговараат четири другарки: Ана, Бисера, Валентина и Гордана. Девојчето што носи зелено палто, кое не е ниту Ана ниту Валентина, стои меѓу девојчето што носи сино палто и Гордана. Девојчето што носи бело палто стои меѓу девојчето што носи розово палто и Валентина. Одреди каква е бојата на палтото што го носи секое од девојчињата.

Решение. Според првиот услов, девојчето со зелено палто мора да биде Бисера, затоа што не е ниту Ана, ниту Валентина и стои до Гордана. Исто така, од првиот услов заклучуваме дека Гордана не носи сино палто (цртеж 1).



Цртеж 1



Цртеж 2

Според вториот услов, девојчето со бело палто сигурно не стои до Бисера, затоа што Бисера не носи розово палто и Бисера не е Валентина, па значи мора да стои спроти неа и тоа мора да е Ана, затоа што Валентина не носи бело палто (цртеж 2). Исто така, заклучуваме дека Валентина не носи розово палто. Конечно, заклучуваме дека Валентина носи сино, а Гордана розово палто (цртеж 3).

Цртеж 3

1Б. Тројца браќа се родени еден по друг со иста разлика во годините. Кога се родил најмалиот брат, најстариот брат имал шест години помалку отколку што средниот брат има сега. Збирот на годините на најстариот и најмладиот брат е 36. Колку години има секој од браќата сега?

Решение. Нека средниот брат има x години и нека разликата во години ја означиме со a. Значи, браќата сега имаат: $x-a, x$ и $x+a$ години соодветно. За збирот на годините на најмалиот и најстариот брат имаме: $x-a+x+a=36$, од каде следува $2x=36$, т.е. $x=18$. Значи средниот брат има 18 години. Од друга страна, според воведените ознаки, кога се родил најмалиот брат, најстариот брат имал $2a$ години, па од првиот услов се добива: $2a=x-6=18-6=12$, т.е. $a=6$.

Конечно, најмладиот брат има $x-a=18-6=12$, а најстариот брат има $x+a=18+6=24$ години.

2АБ. Десет цели броеви, од кои два се еднакви меѓу себе, го исполнуваат условот: кога девет од нив ќе се соберат, можни се следните различни збирови: 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93 и 94. Најди го бројот кој што се повторува двапати.

Решение. Нека десетте броеви се $n_1, n_2, ..., n_{10}$ и нека нивниот збир е $S=n_1+n_2+...+n_{10}$. Можни се десет збирови од по 9 броја и тоа $S-n_1$, $S-n_2, ..., S-n_{10}$. Бидејќи два од броевите се еднакви, и два од збировите се еднакви. Со x да го означиме збирот кој се јавува два пати. Тогаш

$$S-n_1+S-n_2+...+S-n_{10}=86+87+88+89+90+91+92+93+94+x,$$

$$10S-(n_1+n_2+...+n_{10})=810+x,$$

$$9S-810=x,$$

$$9(S-90)=x.$$

Според тоа, бројот x е делив со 9 и важи $86 \le x \le 94$. Единствен број кој ги задоволува условите е бројот 90. Според тоа, $x=90$, $S=100$ и бројот кој се појавива два пати е бројот $S-x=100-90=10$.

3АБ. Познато е дека $0 \le a-b \le 1$ и $1 \le a+b \le 4$. Пресметај ја вредноста на изразот $2023a+2022b$, во случај кога вредноста на бројот $a-2b$ е најголема.

Решение. Имаме

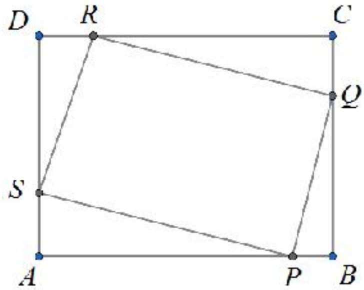
$$a=\frac{a-b}{2}+\frac{a+b}{2} \text{ и } -2b=(a-b)-(a+b) .$$

Оттука добиваме дека

$$a-2b=\frac{a-b}{2}+\frac{a+b}{2}+(a-b)-(a+b)=\frac{3}{2}(a-b)-\frac{1}{2}(a+b) .$$

Од последното равенство следува дека најголема вредност на $a-2b$ се добива за најголемата вредност на $a-b$ и најмалата вредноста на $a+b$, односно за $a-b=1$ и $a+b=1$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $2a=2$, т.е. $a=1$, а ако од второто го одземеме првото добиваме $2b=0$, т.е. $b=0$. Значи, бараната вредност на изразот $2023a+2022b$ е: $2023\cdot 1+2022\cdot 0=2023$.

4А. Во правоаголник со страни $3\,cm$ и $4\,cm$ е вписан друг правоаголник чии страни се однесуваат како $1:3$. Определи ги периметарот и плоштината на впишаниот правоаголник.



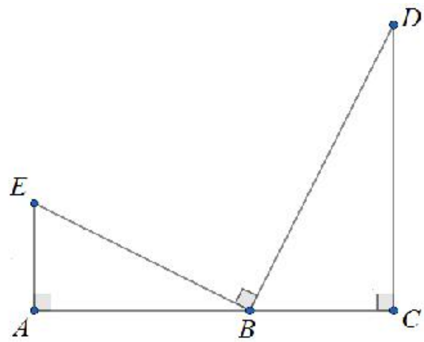
Решение. Нека дадениот правоаголник го означиме со $ABCD$, при што $\overline{AD}=3\,cm$ и $\overline{AB}=4\,cm$, а впишаниот правоаголник го означиме со $PQRS$ (цртеж десно). Нека $\overline{PQ}:\overline{SP}=1:3$, т.е. при $\overline{PQ}=x$ имаме дека $\overline{SP}=3\overline{PQ}=3x$. Понатаму, за правоаголните триаголници PBQ и RDS важи $\overline{PB}=\overline{RS}$ (четириаголникот е $PBRS$ е правоаголник) и $\measuredangle PQB=\measuredangle RSD$ (агли со паралелни краци), па затоа тие се складни. Да означиме $\overline{PB}=\overline{RD}=a$ и $\overline{BQ}=\overline{DS}=b$. Понатаму, $\triangle SAP\sim\triangle PBQ$ (соодветните агли им се еднакви како агли со нормални краци), па затоа $\overline{PB}:\overline{SA}=\overline{BQ}:\overline{AP}=\overline{PQ}:\overline{SP}=1:3$, односно $\overline{AP}=3\overline{BQ}=3b$ и $\overline{SA}=3\overline{PB}=3a$. Сега, бидејќи $\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}$ и $\overline{AD}=\overline{SA}+\overline{DS}$, добиваме $4=3b+a$ и $3=3a+b$, од каде добиваме $a=\frac{5}{8}\,cm$ и $b=\frac{9}{8}\,cm$. Според тоа, $x=\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BQ}^2}=\frac{\sqrt{106}}{8}\,cm$. Конечно, периметарот на правоаголникот $PQRS$ е $L=2(x+3x)=8x=\sqrt{106}\,cm$, а неговата плоштина е $P=x\cdot 3x=\frac{159}{32}\,cm^2$.

4Б. Дадена е отсечка AC и точки E и D кои лежат во иста полурамнина во однос на правата AC, такви што отсечките EA и DC се нормални на AC. Нека B е точка од отсечката AC таква што $\measuredangle EDB=90^\circ$ и $\overline{EB}:\overline{BD}=1:3$. Ако $\overline{AE}=4\,cm$ и $\overline{AC}=15\,cm$, пресметај ја должината на отсечката ED.

Решение. Од $\overline{EB}:\overline{BD}=1:3$ следува $\overline{BD}=3\overline{EB}$. Сега $\measuredangle ABE=\measuredangle CDB$ како агли со нормални краци, па затоа правоаголните триаголници BAE и DCB се слични. Од оваа сличност следува

$$\overline{AE}:\overline{BC}=\overline{EB}:\overline{BD}=1:3,$$

па затоа $\overline{BC}=3\overline{AE}=12\,cm$. Според тоа, $\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}=3\,cm$. Понатаму, од Питагоровата теорема применета на триаголникот BAE добиваме $\overline{BE}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{AB}^2}=5\,cm$, па затоа $\overline{BD}=3\overline{EB}=15\,cm$. Повторно, од Питагоровата теорема применета на триаголникот EBD добиваме дека $\overline{ED}=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{5^2+15^2}=5\sqrt{10}\,cm$.



II година

1А. Производот $A=(\frac{1+1}{1^2+1}+\frac{1}{4})\cdot(\frac{2+1}{2^2+1}+\frac{1}{4})\cdot(\frac{3+1}{3^2+1}+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(\frac{2024+1}{2024^2+1}+\frac{1}{4})$ може да се запише во видот $\frac{q}{2^r s}$, каде q,r,s се природни броеви, при што q и s се заемно прости. Определи ја вредноста на s

Решение. За секој природен број n важи

$$\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{1}{4}=\frac{4(n+1)+n^2+1}{4(n^2+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+2)^2+1}{n^2+1},$$

па затоа

$$\begin{aligned}A&=(\frac{1+1}{1^2+1}+\frac{1}{4})\cdot(\frac{2+1}{2^2+1}+\frac{1}{4})\cdot(\frac{3+1}{3^2+1}+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(\frac{2024+1}{2024^2+1}+\frac{1}{4})\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+2)^2+1}{1^2+1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(2+2)^2+1}{2^2+1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(3+2)^2+1}{3^2+1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(2023+2)^2+1}{2023^2+1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(2024+2)^2+1}{2024^2+1}\\&=\frac{1}{4^{2024}}\cdot\frac{3^2+1}{1^2+1}\cdot\frac{4^2+1}{2^2+1}\cdot\frac{5^2+1}{3^2+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2024^2+1}{2022^2+1}\cdot\frac{2025^2+1}{2023^2+1}\cdot\frac{2026^2+1}{2024^2+1}\\&=\frac{1}{4^{2024}}\cdot\frac{(2025^2+1)(2026^2+1)}{(1^2+1)(2^2+1)}=\frac{(2025^2+1)(2026^2+1)}{2^{4049}\cdot 5}.\end{aligned}$$

Да означиме $q=(2025^2+1)(2026^2+1)$ и $r=4049$. Цифрата на единиците на бројот q е 2, па затоа тој не е делив со 5. Според тоа, $s=5$.

1Б. Определи ги вредностите на реалниот параметар m за кои системот равенки

$$\begin{cases} 2x-3y=m, \\ x+4y=m-1 \end{cases} \tag{1}$$

има решение (x,y) кое го задоволува системот неравенки

$$\begin{cases} 3x+y<0, \\ 2y-x<0. \end{cases} \tag{2}$$

Решение. Решението на системот (1) е $x=\frac{7m-3}{11}$, $y=\frac{m-2}{11}$. Со замена во системот неравенки (2), добиваме

$$\begin{cases} 3\cdot\frac{7m-3}{11}+\frac{m-2}{11}<0, \\ 2\cdot\frac{m-2}{11}-\frac{7m-3}{11}<0, \end{cases}$$

од каде добиваме $22m-11<0$ и $-5m-1<0$, односно $m<\frac{1}{2}$ и $m>-\frac{1}{5}$. Конечно, $m\in(-\frac{1}{5},\frac{1}{2})$.

2АБ. Нека p и q се прости броеви такви што p^2+pq+q^2 е квадрат на природен број. Докажи дека p^2-pq+q^2 е прост број.

Решение. Нека $p^2+pq+q^2=n^2$, каде n е природен број. Ова равенство последователнло е еквивалентно на равенствата

$$(p+q)^2-n^2=pq,$$
$$(p+q+n)(p+q-n)=pq.$$

Според тоа, $p+q+n\mid pq$, па како $p+q+n>p$ и $p+q+n>q$, односно $p+q+n\nmid p$ и $p+q+n\nmid q$, добиваме дека $p+q+n=pq$, па од последното равенство следува $p+q-n=1$. Ако ги собереме последните равенства, го добиваме равенството $2p+2a=pq+1$, кое е еквивалентно со равенството $(p-2)(q-2)=3$. Од последното равенство следува

$$p-2=1, q-2=3 \text{ или } p-2=3, q-2=1,$$

од каде добиваме $p=3, q=5$ или $p=5, q=3$. И во двата случаја имаме $p^2-pq+q^2=19$, што значи дека p^2-pq+q^2 е прост број.

3АБ. Ако равенките

$$ax^2+bx+c=0, bx^2+cx+a=0 \text{ и } cx^2+ax+b=0$$

имаат точно еден заеднички корен, определи ја вредноста на изразот $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$.

Решение. Според условот на задачата равенките се квадратни, па затоа коефициентите a,b,c се различни од нула. Понатаму, ако $x=0$ е заеднички корен на трите равенки, тогаш $a=b=c=0$, што е противречност. Нека u е заеднички корен на трите равенки. Тогаш

$$au^2+bu+c=0, bu^2+cu+a=0 \text{ и } cu^2+au+b=0 .$$

Ако првото равенство го помножиме со b, второто со a и добиените равенства ги одземеме, по средувањето добиваме

$$(b^2-ac)u=a^2-bc \qquad (1)$$

Аналогно ги добиваме равенствата

$$(c^2-ab)u=b^2-ac , \qquad (2)$$

$$(a^2-bc)u=c^2-ab . \qquad (3)$$

Ако ги помножиме (1), (2) и (3), добиваме

$$(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)u^3=(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab) .$$

Можни се два случаја:

1) Ако $(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)\neq 0$, тогаш $u^3=1$, т.е. $u=1$ е заедничкиот корен на дадените равенки. Сега со замена во (1), (2) и (3) добиваме $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab=k$, а со замена во било која од дадените равенки наоѓаме $a+b+c=0$. Според тоа:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}&=\frac{a^2}{bc}-1+\frac{b^2}{ca}-1+\frac{c^2}{ab}-1+3\\&=\frac{a^2-bc}{bc}+\frac{b^2-ca}{ca}+\frac{c^2-ab}{ab}+3\\&=\frac{k}{bc}+\frac{k}{ca}+\frac{k}{ab}+3\\&=k\cdot\frac{a+b+c}{abc}+3=k\cdot\frac{0}{abc}+3=3.\end{aligned}$$

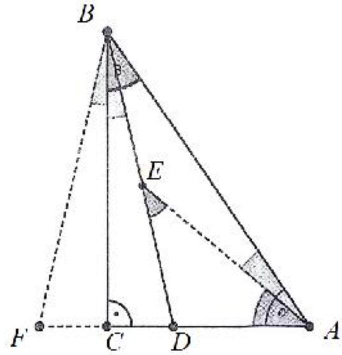
2) Ако $(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)=0$, тогаш еден од трите множители е еднаков на 0, па од (1), (2) и (3) следува $a^2-bc=0, b^2-ac=0$ и $c^2-ab=0$, односно $a^2=bc, b^2=ac$ и $c^2=ab$. Конечно,

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{bc}{bc}+\frac{ca}{ca}+\frac{ab}{ab}=1+1+1=3 .$$

4АБ. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. Нека D е точка на катетата AC и E е точка на отсечката BD таква што $\measuredangle ABC = \measuredangle DAE = \measuredangle AED$. Докажи дека $\overline{BE} = 2\cdot\overline{CD}$.

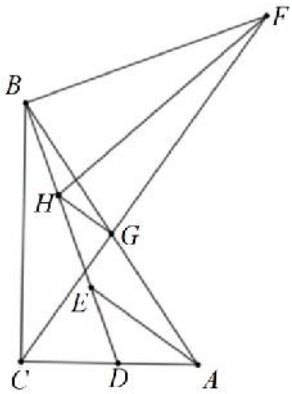
Решение. *Прв начин*. Нека $\measuredangle ABC =$ и $\measuredangle BAC = \sim$. Од $\measuredangle DAE = \measuredangle AED =$ следува дека $\triangle AED$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AD} = \overline{ED}$. Понатаму, $\measuredangle BAE = \sim -$ и $\measuredangle BDC = 2$ (надворешен агол за $\triangle AED$), па затоа

$$\measuredangle CBD = 90^\circ - 2 \quad = \sim - \quad = \measuredangle BAE.$$



Нека F е точката симетрична на D во однос на C (види цртеж). Тогаш триаголникот FBD е рамнокрак и притоа важи $\overline{FD} = 2\cdot\overline{CD}$ и $\measuredangle FBC = \measuredangle CBD = \sim -$ и $\measuredangle FBA = \sim - \quad + \quad = \sim$. Според тоа, $\triangle FBA$ е рамнокрак и $\overline{FA} = \overline{FB} = \overline{DB}$. Значи, $\overline{FD} + \overline{DA} = \overline{DE} + \overline{BE}$, па како $\overline{AD} = \overline{ED}$, добиваме $\overline{FD} = \overline{BE}$. Конечно, $\overline{BE} = \overline{FD} = 2\cdot\overline{CD}$.

Втор начин. Нека $\measuredangle ABC =$ и $\measuredangle BAC = \sim$.



Јасно, $\sim + \quad = 90^\circ$. Нека FB е отсечка нормална на BD и $\overline{BF} = \overline{BC}$ (цртеж десно). Нека G е пресекот на отсечките FC и AB. Сега, $\triangle FBC$ е рамнокрак и

$$\measuredangle FBC = \measuredangle FBD + \measuredangle DBC = 90^\circ + 90^\circ - \measuredangle BDC$$
$$= 180^\circ - \measuredangle EDC = \measuredangle EDA = 180^\circ - 2 \quad .$$

Затоа $\measuredangle BFC = \measuredangle BCF =$. Тоа значи дека $\triangle GBC$ е рамнокрак и $\overline{GB} = \overline{GC}$. Сега, од

$$\measuredangle ACG = 90^\circ - \quad = \sim = \measuredangle CAG$$

следува дека $\triangle AGC$ е рамнокрак, па затоа $\overline{GA} = \overline{GC}$. Значи, $\overline{GA} = \overline{GB}$, т.е. G е средина на хипотенузата AB на $\triangle ABC$. Нека правата низ G паралелна на AE ја сече BD во точката H. Тогаш отсечката GH е средна линија на триаголникот ABE, па затоа H е средина на BE. Бидејќи

$$\measuredangle HGC = \measuredangle BGC - \measuredangle BGH = 180^\circ - 2 \quad - \measuredangle BAE$$
$$= 180^\circ - 2 \quad - (\sim - \quad) = 180^\circ - \quad - \sim = 90^\circ,$$

четириаголникот $FBHG$ е тетивен и

$$\measuredangle BFH = \measuredangle BGH = \sim - \quad = 90^\circ - 2 \quad .$$

Значи, за правоаголните триаголници BCD и FBH важи $\overline{BF} = \overline{BC}$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle BFH = 90^\circ - 2 \quad$, па затоа тие се складни. Оттука, $\overline{CD} = \overline{BH}$, па како H е средина на отсечката BE , добиваме $\overline{CD} = \frac{\overline{BE}}{2}$, т.е. $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{CD}$.

III година

1АБ. Нека a,b,c и d се реални броеви поголеми од 1. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$S = \log_a ab^2 + \log_b b^2c^3 + \log_c c^5d^6 + \log_d d^{35}a^{36} .$$

Решение. Од $a,b,c,d > 1$ следува

$$\log_d a > \log_d 1 = 0,\ \log_a b > \log_a 1 = 0,\ \log_b c > \log_b 1 = 0,\ \log_c d > \log_c 1 = 0 .$$

Сега, од својствата на логаритмите и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} S &= \log_a ab^2 + \log_b b^2c^3 + \log_c c^5d^6 + \log_d d^{35}a^{36} \\ &= 1 + 2\log_a b + 2 + 3\log_b c + 5 + 6\log_c d + 35 + 36\log_d a \\ &\geq 43 + 4 \cdot \sqrt[4]{2\log_a b \cdot 3\log_b c \cdot 6\log_c d \cdot 36\log_d a} \\ &= 43 + 4 \cdot \sqrt[4]{6^4 \cdot \frac{\lg b}{\lg a} \cdot \frac{\lg c}{\lg b} \cdot \frac{\lg d}{\lg c} \cdot \frac{\lg a}{\lg d}} = 43 + 4 \cdot 6 = 67. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако

$$2\log_a b = 3\log_b c = 6\log_c d = 36\log_d a = t ,$$

т.е. ако и само ако $b = a^{\frac{t}{2}}, c = b^{\frac{t}{3}}, d = c^{\frac{t}{6}}, a = d^{\frac{t}{36}}$. Ако последователно во четвртата равенка заменуваме за d од третата, па за c од втората и за b од првата добиваме $a = a^{\frac{t^4}{1296}}$, односно $t = \sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 36} = 6$. Значи, знак за равенство важи за произволен $a > 1$ и $b = a^3, c = a^6, d = a^6$, па затоа најмалата можна вредност на S е 67.

2А. Определи ги сите врености на аголот $\sim$ за кои множествата $S = \{\sin\sim, \sin 2\sim, \sin 3\sim\}$ и $C = \{\cos\sim, \cos 2\sim, \cos 3\sim\}$ се еднакви.

Решение. Нека $S = C$. Тогаш

$$\sin\sim + \sin 2\sim + \sin 3\sim = \cos\sim + \cos 2\sim + \cos 3\sim ,$$

па со примена на адиционите формули

$$\sin\sim + \sin 3\sim = 2\sin 2\sim \cos\sim \text{ и } \cos\sim + \cos 3\sim = 2\cos 2\sim \cos\sim$$

последователно добиваме

$$\sin 2\sim + 2\sin 2\sim \cos\sim = \cos 2\sim + 2\cos 2\sim \cos\sim,$$
$$(1+2\cos\sim)\sin 2\sim = (1+2\cos\sim)\cos 2\sim.$$

Ако $1+2\cos\sim = 0$, тогаш $\sim = \pm\frac{2®}{3} + 2k®, k \in \mathbb{Z}$. За овие вредности на $\sim$ важи $\sin 3\sim = 0$, па затоа $0 \in S$. Но, за овие вредности на $\sim$ имаме $\cos\sim \neq 0, \cos 2\sim \neq 0, \cos 3\sim \neq 0$, па затоа $0 \notin C$, односно $S \neq C$.

Ако $1+2\cos\sim \neq 0$, тогаш $\sin 2\sim = \cos 2\sim$. Оттука $\text{tg}\, 2\sim = 1$, односно $\sim = \frac{®}{8} + \frac{k®}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Бидејќи $\frac{®}{8} + \frac{3®}{8} = \frac{®}{2}$, добиваме

$$\sin\frac{®}{8} = \cos\frac{3®}{8},\ \cos\frac{®}{8} = \sin\frac{3®}{8} \text{ и } \sin\frac{2®}{8} = \cos\frac{2®}{8},$$

од каде следува дека $S = C$. Според тоа, бараното множество вредности за $\sim$ е $\{\frac{®}{8} + \frac{k®}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2Б. Пресметај ја вредноста на изразот

$$S = \sqrt{2}\,\text{tg}\,1^\circ\,\text{tg}\,89^\circ + 2\sqrt{3}\,\text{tg}\,2^\circ\,\text{tg}\,88^\circ + 3\sqrt{2}\,\text{tg}\,3^\circ\,\text{tg}\,87^\circ + 4\sqrt{3}\,\text{tg}\,4^\circ\,\text{tg}\,86^\circ + \\ ... + 49\sqrt{2}\,\text{tg}\,49^\circ\,\text{tg}\,41^\circ + 50\sqrt{3}\,\text{tg}\,50^\circ\,\text{tg}\,40^\circ.$$

Решение. Ако се искористат равенствата

$$\text{tg}\sim = \text{ctg}(90^\circ - \sim) \text{ и } \text{tg}\sim \cdot \text{ctg}\sim = 1$$

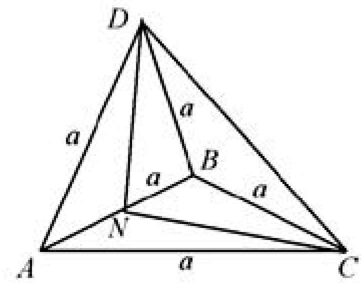
последователно добиваме

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2}\,\text{tg}\,1^\circ\,\text{ctg}\,1^\circ + 2\sqrt{3}\,\text{tg}\,2^\circ\,\text{ctg}\,2^\circ + 3\sqrt{2}\,\text{tg}\,3^\circ\,\text{ctg}\,3^\circ + 4\sqrt{3}\,\text{tg}\,4^\circ\,\text{ctg}\,4^\circ + \\ &\quad ... + 49\sqrt{2}\,\text{tg}\,49^\circ\,\text{ctg}\,49^\circ + 50\sqrt{3}\,\text{tg}\,50^\circ\,\text{ctg}\,50^\circ \\ &= \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + ... + 49\sqrt{2} + 50\sqrt{3} \\ &= \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + ... + 49\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + ... + 50\sqrt{3} \\ &= (1+3+5+...+49)\sqrt{2} + (2+4+6+...+50)\sqrt{3} \\ &= 625\sqrt{2} + 650\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3АБ. Два ѕида на тристрана пирамида се рамнострани триаголници со должина на страна a. Рамнините на овие триаголнци се заемно нормални. Пресметај ги плоштината и волуменот на оваа пирамида.

Решение. Нека е дадена тристраната пирамида $ABCD$, чии ѕидови ABC и ABD се заемно нормални рамнострани триаголници, односно

$$\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BD}=a\,.$$



Нека CN и DN се висините на триаголниците ABC и ABD повлечени кон заедничката страна AB. Според тоа, $CN\perp AB$ и $DN\perp AB$. Од условот на задачата следува $CN\perp DN$.

Ако еден од рамностраните триаголници земеме за основа на пирамидата, на пример ABC, тогаш висината на пирамидата ќе биде DN, па волуменот на ширамидата ќе биде $V=\frac{1}{3}P_{ABC}\cdot\overline{DN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{8}$.

Триаголникот CDN е рамнокрак правоаголен, па затоа

$$\overline{CD}=\overline{CN}\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Триаголниците CDA и CBD се складни рамнокраки триаголници со основа $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ и крак a, па затоа

$$P_{CDA}=P_{CDB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{a^2-(\frac{a\sqrt{6}}{4})^2}=\frac{a^2\sqrt{15}}{8}\,.$$

Конечно, плоштината на пирамидата е

$$P=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{a^2\sqrt{15}}{8}=\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}\,.$$

4А. Определи ги сите реални вредности на параметарот a, за кои функцијата $f(x)=|x^2+2x+a|-2$ има четири различни нули.

Решение. Имаме

$$|x^2+2x+a|=\begin{cases}x^2+2x+a, & x\in(-\infty,-1-\sqrt{1-a}]\cup[-1+\sqrt{1-a},+\infty),\\ -(x^2+2x+a), & x\in(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a}),\end{cases}$$

па затоа треба да ги определиме корените на равенката $x^2+2x+a=2$ на интервалот $(-\infty,-1-\sqrt{1-a}]\cup[-1+\sqrt{1-a},+\infty)$ и корените на равенката $x^2+2x+a=-2$ на интервалот $(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a})$. Бидејќи дадената функција треба да има четири различни нули, треба дадените равенки да имаат реални и различни решенија. Дискриминантата на равенката $x^2+2x+a-2=0$ е $D'=4-4(a-2)$, а дискриминантата на равенката $x^2+2x+a+2=0$ е $D''=4-4(a+2)$. Од $D'>0$ и $D''>0$ добиваме $a<3$ и

$a<-1$. Според тоа, корените на равенките се реални и различни за $a\in(-\infty,-1)$.

Да провериме дали решенијата на равенките се во соодветните интервали. За корените на квадратната равенка $x^2+2x+a-2=0$ имаме $x_{1/2}=-1\pm\sqrt{3-a}$ и притоа имаме $x_1=-1-\sqrt{3-a}\in(-\infty,-1-\sqrt{1-a}]$ и $x_2=-1+\sqrt{3-a}\in[-1+\sqrt{1-a},+\infty)$. За корените на квадратната равенка $x^2+2x+a+2=0$ имаме $x_{3/4}=-1\pm\sqrt{-1-a}\in(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a})$.

Од претходните разгледувања следува дека за $a\in(-\infty,-1)$ функцијата има четири реални и различни нули.

4Б. Нека a,b,c се реални броеви, такви што $a+b+c>0$ и функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ нема реални нули. Докажи дека $c>0$.

Решение. Бидејќи функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ нема реални нули, добиваме $f(x)>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$ или $f(x)<0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Но, според условот на задачата имаме $f(1)=a+b+c>0$, па затоа $f(x)>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Но, тогаш и $f(0)>0$, односно $c>0$.

IV година

1А. 2Б. Нека $0<x<1$ и $a,b>0$. Докажи дека

$$a^x b^{1-x}<a+b. \tag{1}$$

Решение. Нека претпоставиме дека $b\le a$. Тогаш $0<\frac{b}{a}\le 1$, па затоа од $0<x<1$ следува $0<(\frac{b}{a})^x\le 1$ и $0<(\frac{b}{a})^{1-x}\le 1$. Според тоа, $0<(\frac{b}{a})^x\le 1$ и $\le 1-(\frac{b}{a})^{1-x}<1$, па ако ги помножиме последните неравенства, го добиваме неравенството

$$(\frac{b}{a})^x(1-(\frac{b}{a})^{1-x})<1, \tag{2}$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).
Нека $a<b$. Воведуваме смена $y=1-x$. Тогаш $0<y<1$ и неравенството (1) всушност е неравенството $a^{1-y}b^y<a+b$, каде $a<b$ кое веќе го докажавме.

1Б. Во рамнината се дадени n прави такви што секои две прави се сечат и никои три немаат заедничка точка (прави во општа положба). На колку делови овие прави ја делат рамнината?

Решение. Една права ја дели рамнината на два дела. Нека претпоставиме, дека е познат бројот $F_2(n)$ на деловите, на кои n прави во општа положба ја делат рамнината и нека се дадени $n+1$ права во општа положба. Првите n прави ја делат рамнината на $F_2(n)$ делови, а според условот $(n+1)-$та права p ги сече останатите n прави во n различни точки. Овие n точки ја делат правата p на $F_1(n)=n+1$ делови. Според тоа, правата p сече $F_1(n)=n+1$ од веќе добиените делови на кои првите n прави ја делат рамнината и истите ги удвојува, што значи дека таа на веќе добиените $F_2(n)$ додава нови $F_1(n)=n+1$ делови. Значи, за бројот на деловите на кој $n+1$ права во општа положба ја делат рамнината важи

$$F_2(n+1)=F_2(n)+F_1(n)=F_2(n)+(n+1)\,. \qquad (1)$$

Ако во равенството (1), наместо n последователно ставиме $n-1$, $n-2, n-3, ..., 2, 1$ добиваме

$$\begin{aligned}
&F_2(n)=F_2(n-1)+n,\\
&F_2(n-1)=F_2(n-2)+n-1,\\
&F_2(n-2)=F_2(n-3)+n-2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_2(3)=F_2(2)+3,\\
&F_2(2)=F_2(1)+2.
\end{aligned}$$

Ако ги собереме последните равенства и земеме предвид дека $F_2(1)=2$ наоѓаме

$$\begin{aligned}
F_2(n)&=F_2(1)+(n+(n-1)+...+3+2)\\
&=1+(n+(n-1)+(n-2)+...+2+1)\,.\\
&=1+\tfrac{n(n+1)}{2}=\tfrac{n^2+n+1}{2}.
\end{aligned}$$

2А. Низата $\{x_n\}_{n\geq 1}$ е определена со $x_1=1,\ x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$, за $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека $x_{2024}^2+x_{2024}<1$.

Решение. Со математичка индукција ќе докажеме дека $x_{2k}^2+x_{2k}<1$, за секој $k\in\mathbb{N}$.

За $k=1$ имаме $x_2=\frac{1}{2}$ и $x_2^2+x_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}<1$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека $x_{2k}^2+x_{2k}<1$, т.е.

$$x_{2k}^2+x_{2k}-1<0\,. \qquad (1)$$

Имаме

$$x_{2(k+1)}=\frac{1}{1+x_{2k+1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_{2k}}}=\frac{1+x_{2k}}{2+x_{2k}},$$

па затоа од последното равенство и од (1) следува

$$x_{2(k+1)}^2+x_{2(k+1)}=x_{2(k+1)}(1+x_{2(k+1)})=\frac{1+x_{2k}}{2+x_{2k}}(1+\frac{1+x_{2k}}{2+x_{2k}})$$

$$=\frac{1+x_{2k}}{2+x_{2k}}\cdot\frac{3+x_{2k}}{2+x_{2k}}=1+\frac{x_{2k}^2+x_{2k}-1}{(2+x_{2k})^2}<1.$$

Според тоа, неравенството важи за секој $k\in\mathbb{N}$.

Сега за $k=1012$ добиваме $x_{2024}^2+x_{2024}<1$, што и требаше да се докаже.

3А. Даден е рамнокрак триаголник $ABC, \overline{AC}=\overline{BC}=1$. Определи ја вредноста на аголот $¥=\measuredangle ACB$ за која изразот $g=\frac{\overline{AB}^2+2}{P_{\triangle ABC}}$ достигнува најмала вредност.

Решение. Од косинусната теорема имаме $\overline{AB}^2=2-2\cos ¥$, а за плоштината на триаголникот важи $P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin ¥=\frac{1}{2}\sin ¥$. Според тоа,

$$g(¥)=\frac{2(4-2\cos ¥)}{\sin ¥}=\frac{4(2-\cos ¥)}{\sin ¥}\,.$$

Воведуваме смена $x=\mathrm{tg}\frac{¥}{2}$, при што важи $\sin ¥=\frac{2x}{1+x^2}$ и $\cos ¥=\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Значи $g=g(x)=\frac{2(1+3x^2)}{x}$. Сега, бидејќи $¥\in(0,®)$, добиваме $\frac{¥}{2}\in(0,\frac{®}{2})$, па затоа $x>0$, од каде следува дека $g>0$. Ќе ја определиме најмалата вредност на функцијата $g(x), x\in(0,+\infty)$. Нека $g_{\min}=y$. Ќе ја определиме врредноста на x за која $y=\frac{2(1+3x^2)}{x}$, односно $6x^2-yx+2=0$. Дадената равенка по x треба да има реални крени, па затоа нејзината дискриминанта треба да е ненегативна, од каде добиваме $y^2-48\geq 0$, т.е. $y\leq -4\sqrt{3}$ или $y\geq 4\sqrt{3}$. Но,

$g>0$, па затоа $y\geq 4\sqrt{3}$. Тогаш најмалата вредност на функцијата е $y=4\sqrt{3}$ и истата се достигнува за вредностите на x за кои $6x^2-4x\sqrt{3}+2=0$, односно за $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Според тоа, $\frac{\sqrt{3}}{3}=\text{tg}\frac{¥}{2}$, од каде добиваме $¥=\frac{®}{3}$.

3Б. Дали е можно броевите $2, \sqrt{6}$ и $\frac{9}{2}$ истовремено да се членови (не мора последователни) на една:

а) аритметичка прогресија,

б) геометриска прогресија?

Решение. а) Нека претпоставиме дека дадените броеви во некој редослед се членови на аритметичка прогресија со почетен член a и разлика $d\neq 0$. Тогаш постојат по парови различни природни броеви m,n,k такви што $2=a+md$, $\sqrt{6}=a+nd$ и $\frac{9}{2}=a+kd$. Ако од второто равенство го одземеме првото равенство добиваме $\sqrt{6}-2=(n-m)d$, а ако од третото го одземеме првото равенство добиваме $\frac{5}{2}=(k-m)d$. Ако ги поделиме последните две равенства добиваме $\frac{2\sqrt{6}-4}{5}=\frac{n-m}{k-m}$, што не е можно бидејќи во последното равенство левата страна е ирационален број, а десната страна е рационален број. Значи, дадените броеви не може да се членови на аритметичка прогресија.

б) Дадените броеви може да се членови на геометриска прогресија. На пример за $a=2$ и $q=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ја добиваме прогресијата: $2, \sqrt{6}, 3, \sqrt{\frac{27}{2}}, \frac{9}{2}, \dots$.

4А. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ за кои важи

$$2f(f(n))=5f(n)-2n \text{, за секој } n\in\mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Решение. Воведуваме смена $f(n)=g(n)+2n$. Тогаш од (1) следува

$$5(g(n)+2n)-2n=2(g(f(n))+2f(n)),$$
$$5g(n)+8n=2g(f(n))+4(g(n)+2n),$$
$$g(n)=2g(f(n))=2g(g(n)+2n), \qquad (2)$$

за секој $n\in\mathbb{Z}$. Според тоа, 2 е делител на $g(n)$. Понатаму, $g(n)+2n$ е цел број, па затоа од (2) следува

$$g(g(n)+2n)=2g(g(g(n)+2n)+2(g(n)+2n)),$$

па ако замениме во (2) добиваме

$$g(n)=2^2 g(g(g(n)+2n)+2(g(n)+2n)),$$

што значи дека $2^2 \mid g(n)$ за секој $n\in\mathbb{Z}$. Продолжувајќи ја постапката N пати добиваме дека $2^N \mid g(n)$ за секој $n\in\mathbb{Z}$. Сега од произволноста на N следува дека $g(n)=0$, односно $f(n)=2n$, за секој $n\in\mathbb{Z}$. Лесно се проверува дека оваа функција навистина е решение на дадената функционална равенка.

4Б. Определи го бројот на петцифрените броеви кои имаат непарен број непарни цифри.

Решение. Бараните броеви може да имаат 1, 3 или 5 непарни цифри. Ако броевите имаат 5 непарни цифри, тогаш секоја од нив може да биде било која од цифрите 1, 3, 5, 7, 9 и вакви петцифрени броеви има 5^5.

Да ги преброиме броевите кои имаат: 3 непарни и 2 парни или 1 непарна и 4 парни цифри. Да забележиме дека кога првата цифра е парна, таа не може да е 0. Така во случај на 2 парни и 3 непарни цифри имаме два случаја:

1) Првата цифра е парна: имаме 4 можности за ибор на првата цифра 2, 4, 6, 8. Остануваат 4 места кои треба да се пополнат со 1 парна и 3 непарни цифри и за секоја имаме по 5 можности. Избираме едно место за парната цифра на $\binom{4}{1}$ начини и вкупно добиваме $4\cdot\binom{4}{1}\cdot 5^4$ вакви броеви.
2) Првата цифра е непарна. Избираме две места за парните цифри на $\binom{4}{2}$ начини и бидејќи имаме по 5 избори за секоја парна и секоја непарна цифра, вкупно добиваме $\binom{4}{2}\cdot 5^5$ вакви броеви.

На потполно аналоген начин можеме да ги изброиме броевите кои имаат 4 парни и 1 непарна цифра. Во првиот случај кога првата цифра е парна имаме $4\cdot\binom{4}{3}\cdot 5^4$, а во вториот случај кога првата цифра е непарна имаме 5^5 броеви.

Конечно, бараниот број броеви е

$$5^5+4\cdot\binom{4}{1}\cdot 5^4+\binom{4}{2}\cdot 5^5+4\cdot\binom{4}{3}\cdot 5^4+5^5=45000.$$