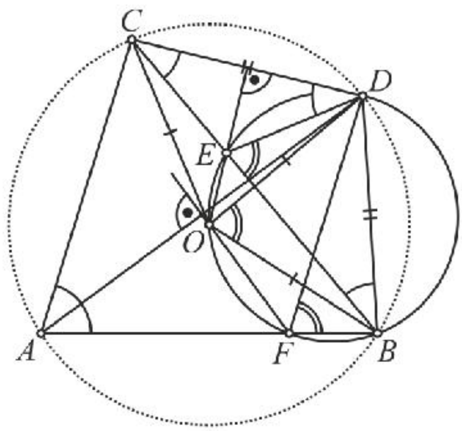
ЈММО 2024

1. Нека a, b и c се шозитивни реални броеви. Докажи дека
$$\frac{a^4+3}{b}+\frac{b^4+3}{c}+\frac{c^4+3}{a}\geq 12 .$$
Кога важи знак за равенство?
Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува
$$a^4+3=a^4+1+1+1\geq 4a$$
и аналогно $b^4+3\geq 4b$ и $c^4+3\geq 4c$. Според тоа,
$$\begin{aligned}\frac{a^4+3}{b}+\frac{b^4+3}{c}+\frac{c^4+3}{a}&\geq \frac{4a}{b}+\frac{4b}{c}+\frac{4c}{a}\\ &=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\ &\geq 4\cdot 3\cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=12,\end{aligned}$$
при што последното неравенство повторно следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

2. За група од 2024 ученици знаеме дека секој ученик во групата има најмалку 1011 познаник. Освен тоа, постои ученик кој има најмалку 1012 познаници во групата. Докажи дека за секој пар ученици X, Y во групата постојат ученици $X_0=X, X_1, ..., X_{n-1}, X_n=Y$ така што X_i и X_{i+1} се познаници за секој $i=0,1,...,n-1$.
Решение. Нека A е ученик кој има најмалку 1012 познаници, а B е ученик кој не се познава со A (ако таков ученик постои).
Ако A и B немаат заеднички познаник, тогаш вкупниот број познаници на A и B е поголем или еднаков на $1012+1011=2023$, па како меѓу нив не се A и B групата брои најмалку $2023+2=2025$ познаници, што е противречност. Според тоа, секој ученик или го познава A или има заеднички познаник со A.
Нека X и Y се произволни два ученика. Можни се следниве случаи:
- $X=A$ го познава Y,
- $X=A$ познава X_1, кој го познава Y,
- $X=X_0$ го познава $X_1=A$, кој го познава Y,
- $X=X_0$ го познава $X_1=A$, кој познава X_2 кој го познава Y,

- $X = X_0$ го познава X_1 кој го познава $X_2 = A$, а A познава X_3 кој го познава Y .

3. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече опишаната кружница околу остро-аголниот триаголник ABC во точката D. Нека симетралите на отсеч-ките CD и AD ги сечат страните BC и AB во точките E и F, соод-ветно. Ако O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC докажи дека точките F, D, E и O лежат на една кружница.



Решение. *Прв начин*. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па како AD е симетрала на $\measuredangle BAC$ добиваме $\measuredangle BCD = \measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \measuredangle DBC$ од каде следува $\overline{BC} = \overline{CD}$. Но, $\overline{OB} = \overline{OC}$, па затоа чеириаголникот $OBDC$ е делтоид. Понатаму, централниот агол е два пати поголем од периферниот, па затоа $\measuredangle BOC = 2\measuredangle BAC = 2\sim$. Но, OD е симетрала на $\measuredangle BOC$ (OD е оска на симетраја на делтоидот $OBDC$), па затоа

$$\measuredangle BOD = \frac{1}{2}\measuredangle BOC = \sim \ . \tag{1}$$

Од друга страна, бидејќи точката E припаѓа на симетралата на CD важи $\overline{ED} = \overline{EC}$, т.е. триаголникот CDE е рамнокрак, па затоа $\measuredangle CDE = \measuredangle ECD = \frac{1}{2}\sim$. Но $\measuredangle BED$ е надворешен за триаголникот CDE, па затоа

$$\measuredangle BED = \measuredangle CDE + \measuredangle ECD = \sim \ . \tag{2}$$

Сега, од (1) и (2) следува дека четириаголникор $BDEO$ е тетивен, што значи дека точката O лежи на кружницата опишана околу триаголникот BDE .

Бидејќи точката F припаѓа на симетралата на AD важи $\overline{AF} = \overline{FD}$, т.е. триаголникот ADF е рамнокрак, па затоа $\measuredangle DAF = \measuredangle FDA = \frac{1}{2}\sim$. Но $\measuredangle BFD$ е надворешен за триаголникот ADF , па затоа

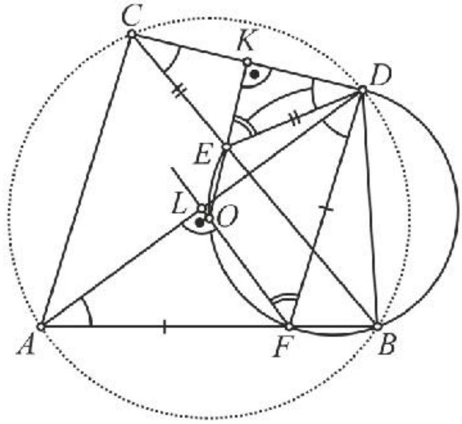
$$\measuredangle BFD = \measuredangle FAD + \measuredangle ADF = \sim \ . \tag{3}$$

Сега од (1) и (3) следува дека четириаголникот $BDEF$ е тетивен, што значи дека точката F лежи на кружницата опишана околу триаголникот BDE.

Конечно, O и F лежат на кружницата опишана околу триаголникот BDE, па затоа точките F, D, E и O лежат на една кружница.

Втор начин. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па затоа

$\measuredangle FAD = \measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \measuredangle ECD$



Понатаму, точките F и E лежат на симетралите на отсечките CD и AD, па затоа триаголниците CDE и FAD се рамнокраки. Сега, од $\measuredangle FAD = \measuredangle ECD$ следува дека триаголниците CDE и FAD се слични. Нека K е средина на CD и L е средина на AD. Отсечките CD и AD се тетиви на опишаната кружница околу триаголникот ABC, па затоа нивните симетрали KE и FL минуваат низ центарот O. Сега, од $\triangle ADF \sim \triangle CDE$ следува

$$\measuredangle DFO = \measuredangle DFL = \measuredangle DEK .$$

Значи, $\measuredangle DFO + \measuredangle OED = \measuredangle DEK + \measuredangle OED = 180^\circ$, од каде следува дека четириаголникот $DEOF$ е тетивен, т.е. точките F, D, E и O лежат на една кружница.

4. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ е низа природни броеви кои што се точни квадрати и a_{i+1} се добива од a_i со допишување на една цифра од десно. Определи ги сите такви низи со максимална должина.

Решение. *Прв начин*. Броевите 1, 16 и 169 го задоволуваат условот на задачата и како меѓу броевите 1690 и 1699 нема точни квадрати, добиваме дека $n = 3$ е 1, 16 и 169 е една таква низа.

Ќе докажеме дека не постои друга низа со должина $n = 3$ која ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека постои друга таква низа од три броја $a_1 = b^2, a_2 = c^2, a_3 = d^2$ која ги задоволу-ва условите на задачата. Бидејќи во втората десетка само бројот 16 е точен квадрат, мора да важи $a_1 = b^2 > 1$. Од дефиницијата на низата добиваме $d^2 = 100b^2 + m$, за некој $0 < m < 100$ (бидејќи $10b^2$ не може да е точен квадрат, важи $m>0$). Според тоа, $d=10b+k$, за $k\in\mathbb{N}$. Значи, $d^2=100b^2+20bk+k^2$, па затоа $20bk+k^2=m<100$. Од последното неравенство следува $b<5$.

Ако $b=4$, тогаш $a_1=16$ и $a_2=169$, а меѓу 1690 и 1699 нема точен квадрат

Ако $b=3$, тогаш $a_1=9$, а меѓу 90 и 99 нема точен квадрат.

Ако $b=2$, тогаш $a_1=4$ и $a_2=49$, а меѓу 490 и 499 нема точен квадрат.

Втор начин. Нека претпоставиме дека $a_1=b^2, a_2=c^2, a_3=d^2$ се три броја кои ги задоволуваат условите на задачата. Од дефиницијата на низата добиваме $d^2=100b^2+m=(10b)^2+m$, за некој $0<m<100$ (бидејќи $10b^2$ не може да е точен квадрат, важи $m>0$). Значи, $d=10b+k$, за некој $k\in\mathbb{N}$. Според тоа, $(10b+k)^2=(10b)^2+m$, од каде добиваме

$$k(20b+k)=m. \qquad (1)$$

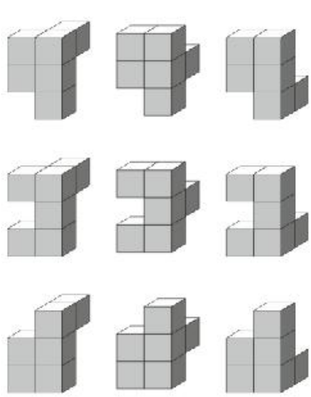
Во $\mathbb{N}$ решенија (b,k,m) на (1) за $0<m<100$ се: (1, 1, 21), (1, 2, 44), (1, 3, 69), (1, 4, 96), (2, 1, 41), (2, 2, 84), (3, 1, 61) и (4, 1, 81)

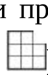
Според тоа, за a_1 и a_3 добиваме:

$a_1=b^2$	1	1	1	1	4	4	9	16
$a_3=(10b+k)^2$	121	144	169	196	441	484	961	1681

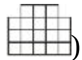
Сега, од дефиницијата на низата следува дека соодветните броеви за a_2 се: 12, 14, 16, 19, 44, 48 и 168, па како меѓу овие броеви само 16 е точен квадрат добиваме дека единствено три броја кои ги задоволуваат условите на задачата се: 1, 16 и 169. Конечно, бидејќи меѓу броевите 1690 и 1699 нема точен квадрат заклучуваме $n=3$ и низата е 1, 16 и 169.

5. Секоја од фигурите на цртежот десно е составена од шест единечни коцки (коцки со раб со должина 1). Кои тела може да се направат со овие фигури:

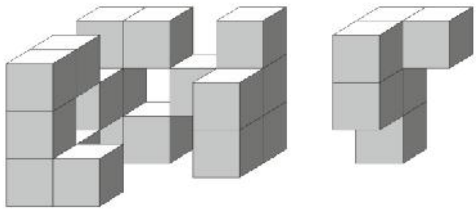


а) Коцка со раб со должина 3 од која се отстранети коцките кои припаѓаат на еден раб (три слоја во форма )?

б) Квадар со димензии $5\times4\times3$ од кој од еден ист 5×3 ѕид се отстранети коцки кои

припаѓаат на два раба со должина 3 (три слоја во форма )?
Секоја фигура е дозволен да се употреби најмногу еднаш, фигурите не смее да излегуваат надвор од телото и секоја мала коцка од телото мора да е покриена со мала коцка од фигура.

Решение. а) Дадените фигури од лево кон десно во првиот ред да ги означиме со 11, 12 и 13, во вториот ред со 21, 22 и 23, во третиот ред со 31, 32 и 33. Еден начин за добивање на бараното тело е со поврзување на фигурите 22, 23 и 32 како што е прикажано на долниот цртеж, по што останува точно простор за да се постави фигурата 33.



22	22	32
23	33	33
23	33	

22	32	32
22	33	32
23	33	

22	22	32
23	33	32
23	23	

На долните шеми се прикажани слоевите на коцки кои припаѓаат на соодветните делови, при што левиот слој е најгоре, средниот е во средина и десниот е најгоре.

б) Како и во решението под а) фигурите од првиот ред да ги означиме со 11, 12 и 13, од вториот ред со 21, 22 и 23, од третиот ред со 31, 32 и 33. Малите коцки на телото кое треба да ги добиеме ги боиме црно-бело наизменично (секои две коцки кои имаат заеднички ѕид се обоени во различна боја). На долните цртежи е прикажано боење на трите слоја. Јасно, првиот и третиот слој се обоени на ист начин, а средниот слој е обоен во спротивно и притоа имаме 28 бели и 26 црни коцки.

Телото кое треба да го добиеме се составено од $28+26=54$ мали, коцки, па како секоја од дадените фигури има по 6 коцки, потребни ни се $54:6=9$ фигури, т.е. мора да се употребат сите мали фигури. Понатаму, бидејќи секои мали коцки кои имаат заеднички ѕид се различно обоени, како и да се поставени фигурите 11, 13, 22, 31 и 33, тие ќе имаат еднаков број бели и црни мали коцки, а фигурите 12, 21, 23 и 32 ќе имаат четири коцки од една боја и две коцки од друга боја.

Да претпоставиме дека сме успеале да го пополниме целото тело со овие девет фигури, каде b е бројот на фигурите кои имаат повеќе две бели коцки, а c е бројот на фигурите кои имаат повеќе две црни коцки. Јасно, $b+c=4$, а како во телото има точно повеќе две бели коцки треба да важи $b-c=1$. Од последните две равенства следува $2b=5$, што не е можно бидејќи b е природен број. Конечно, од добиената противречност следува дека не е можно да се состави саканото тело.