Ристо Малчески

КОМБИНАТОРИКА
(ДЕФИНИЦИИ, ТЕОРЕМИ И ЗАДАЧИ – втор дел)

Скопје, 2024

Рецензент:
Проф. д-р Даниел Велинов
Градежен факултет, УКИМ
Скопје

С О Д Р Ж И Н А

ПРЕДГОВОР

Предметнава книга е втор дел од двотомното издание под наслов Комбинаторика (дефиниции, теореми и задачи). Материјалот кој се разработува во овој дел е поделен на 21 параграф, кои се обработени како и првиот дел од книгата, при што е задажан континуитет во нумерацијата на параграфите.

Во четиринаесеттиот параграф е разработен Паскаловиот триаголник, за кој се докажани низа својства и појавата на триаголните, Фибоначиевите и Каталановите броеви во истиот.

Понатаму, петнаесеттиот и шеснаесеттиот параграф се посветени на проблемите на разбивање (партиции) на броеви и множества, а во седумнаесеттиот параграф е разгледана примената на инваријантите и полуинваријантите во решавање на комбинаторни проблеми.

Осумнаесеттиот и деветнаесеттиот параграф се посветени на проблемите на боење и поплочување, кои се доста присутни на меѓународните математички натпревари.

Во дваесеттиот параграф се разгледани латинските квадрати и латинските правоаголници и за истите се докажани основните својства. Во следниот дваесет и први параграф се разгледани магичните квадрати и се презентирани алгоритми за конструкции на истите.

Дваесет и вториот и двесет и третиот параграф се посветени, соодветно, на неконкурентските и конкурентските игри. Самите разгледувања не се пропратени со стандардните теориски разгледувања за решавање на определени класи игри, туку се разгледани бројни задачи во кои тежиштето е на наоѓањето на победничка стратегија на комбинаторни игри.

Во следните шест параграфи се разгледани задачи со табели и распореди, мерења, патишта, познанства, задачи со турнири и задачи на шаховска абла поврзани со играта шах. Понатаму, во триесеттиот параграф се разгледуваат триаголната решетка и комбинаторни проблеми поврзани со истата.

Заради огромната разновидност и значење, следните два параграфи се посветени на задачи од комбинаторна геометрија и комбинаторна теорија на броеви. Иако задачи од овие две области се присутни во скори сите претходни параграфи, сепак задачите кои се овде разгледани фрлаат дополнително светло како на значењето, така и на убавината на овие две гранични области.

Во претпоследниот параграф на ова двотомно издание е разгледана теоремата на Хол за систем различни претставници и се решени неколку задачи во кои е покажана примената на истата. Самата теорема е докажана во термините на множества, при што не е разгледувана нејзината еквивалентна формулација во термините на биполарните (бипартитните графови), бидејќи теоријата на графови воопшто не е застапена во книгава.

На крајот, во последниот параграф се дадени определен број дополнителни задачи, во кои меѓу другото е докажан бесконечниот принцип на Дирихле и е дадена формулацијата и примената на бесконечниот принцип на Ремзи.

Се надевам дека оваа книга ќе најде свои читатели меѓу младите математичари кои сакаат да ги прошират и продлабочат своите знаења во рамките на темите и надвор од нив кои се предвидени со стандардните наставни програми. Дел од материјалот обработен во книгава е предаван при подготовните на нашите најдобри ученици за учество на меѓународните математички натпревари, па затоа оваа книга пред сè е наменета на учениците кои сакаат да се подготват за успешно учество на натпреварите на младите математичари. Сметам дека книгава ќе биде корисна и за професорите по математика, особено за организирање на додатната настава по математика и работата на математичките секции. Книгава може да ја користат и студентите по математика и информатика, за совладување на темите од дискретната матемтика кои овде се содржани.

Рецензентот д-р Даниел Велинов даде многу корисни забелешки за содржините кои се обработени во книгава, за што посебно му благодарам.

Издавањето на секоја книга, па и на оваа, не го одминуваат како технички така и материјани грешки. Токму затоа ќе му бидам благодарен на секој кој ќе укаже на некоја грешка или пак со своите коментари и забелешки ќе придонесе на било кој начин да се подобри книгава.

Во Скопје, јануари 2024 Авторот

14. ПАСКАЛОВ ТРИАГОЛНИК

1. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $d_i, 0,1,...,n$ е произволна конечна низа реални броеви. За конечната низа реални броеви $s_i, 0,1,...,n,n+1$ определена со

$$s_0 = d_0, s_k = d_{k-1} + d_k, k = 1,2,...,n \text{ и } s_{n+1} = d_n \quad (1)$$

ќе велиме дека е изведена од низата $d_i, 0,1,...,n$ според *Паскаловото правило*. За низата $d_i, 0,1,...,n$ ќе велиме дека е *симетрична* ако за секој $k, 0 \le k \le n$ важи $d_k = d_{n-k}$.

Нека низата $s_i, 0,1,...,n,n+1$ е изведена од низата $d_i, 0,1,...,n$ според Паскаловото правило, докажи дека:

а) Збирот на елементите на добиената низа $s_i, 0,1,...,n,n+1$ е два пати поголем од збирот на елемените на почетната низа $d_i, 0,1,...,n$.

б) Ако почетната $d_i, 0,1,...,n$ е симетрична, тогаш и добиената низа s_i, $0,1,...,n,n+1$ е симетрична.

2. За низата која се состои од еден елемент еднаков на 1 ќе велиме дека е *нулта Паскалова низа*. Ако за некој $i \in \mathbb{N}_0$ е дадена $i-$*тата Паскалова низа*, тогаш низата добиена од оваа низа со помош на Паскаловото правило, т.е. со помош на равенствата (1) од задача 1 ја добиваме $(i+1)-$*вата Паскалова низа*.

Докажи, дека за Паскаловите низи важи:

а) Збирот на сите елемени на $n-$тата Паскалова низа е еднаков на 2^n.

б) Сите Паскалови низи се симетрични.

3. Ако почнувајќи од нултата низа, ги запишеме Паскаловите низи така што секој елемент на новата низа се наоѓа во следниот ред меѓу елементите на претходната низа од кои е добиен, добиваме бесконечна табела броеви, која ја нарекуваме *Паскалов триаголник*. Во долната табела се прикажани првите десет реда на Паскаловиот триаголник, запишан на стандарден начин.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \end{array} \quad (1)$$

Ако го ротираме Паскаловиот триаголник за 45° во насока обратна од насоката на движењето на стрелките на часовникот, истиот ќе биде запише во следната форма:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

(2)

Забележуваме дека сега Паскаловиот триаголник може да се конструира ако во првиот ред и првата колона запишеме единици, а потоа последователно секој елемент во секој ред ги добиваме како збир на елементот пред него во редот и елементот над него во претходниот ред.

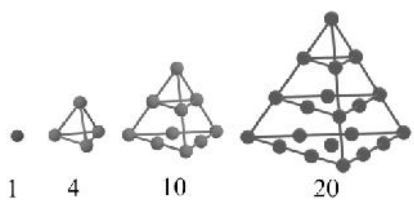
Докажи дека за елементите на Паскаловиот триаголник запишан во видот (2) важи:

i) Секој елемент A во табелата (2) е еднаков на збирот на сите елементи од претходниот ред, почнувајќи од првиот број, па се до бројот над елементот A.

ii) Секој елемент A во табелата (2) е еднаков на збирот на сите елементи од претходната колона, почнувајќи од првиот број, па се до бројот лево од елементот A.

iii) За секој елемент A од табелата (2) важи дека бројот $A-1$ е еднаков на збирот на сите елементи лево и над од претходните редови и колони, кои не го содржат елементот A.

4. Нека Паскаловиот триаголник е запишан во обликот (1) од задача 4. Докажи дека:
   a) низата формирана од членовите на неговата прва дијагонал е низата природни броеви,
   b) низата формирана од членовите на неговата втора дијагонала е низата триагиолни броеви,
   c) низата формирана од членовите на неговата трета дијагонала е низата тетраедарни броеви, која всушност е низата парцијални суми на низата триаголни броеви (цртеж десно).



5. Докажи дека за секој $n \geq 2$ важи

$$P_{n,1}^2 = P_{n,2} + P_{n+1,2} \,. \tag{1}$$

6. Докажи, дека за $n \geq 1$ збирот на квадратите на членовите на $n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник е еднаков на средниот член на $2n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник.

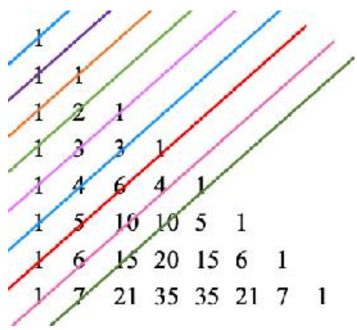
7. (*Давидова ѕвезда*). Докажи дека за секои $n \geq 2$, $k \geq 1$ ($n \geq k$) важи
$$P_{n-1,k-1} \cdot P_{n,k+1} \cdot P_{n+1,k} = P_{n-1,k} \cdot P_{n,k-1} \cdot P_{n+1,k+1} \,. \tag{1}$$

8. (*Хокеарска палка*). Докажи дека за секои $n,k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ важи
$$\sum_{i=k}^{n} P_{i,k} = P_{n+1,k+1} \,. \tag{1}$$

9. Докажи, дека во $2n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник разликата на средниот член и неговиот соседен член е еднаква на $n-$тиот Каталанов број.

10. Докажи, дека во $(2n-1)-$виот ред на Паскаловиот триаголник разликата на еден од двата средни членови и неговиот соседен член кој не е среден е еднаква на $n-$тиот Каталанов број.

11. На цртежот десно е прикажан Паскаловиот триаголник така што почетните членови во секоја Паскалова низа се запишани во колона, вторите членови во втората колона итн., а потоа се повлечени неговите дијагонали. Ако последователно ги собереме членовите на секоја дијагонала одделно, првите девет добиени броеви се:



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

Забележуваме дека тоа всушност се првите девет ненулти членови на низата на Фибоначи
$$f_1 = 1,\ f_2 = 1 \text{ и } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ n \geq 1 \,.$$
Докажи, дека за
$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} P_{n-k,k} = f_n \tag{1}$$

12. Нека P_n е производот на елементите во $n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник. Докажи дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n-1}P_{n+1}}{P_n^2}=e\ .$$

13. *Антипаскалов* триаголник е таблица во облик на рамностран триаголник која се состои од броеви такви што, освен за броевите во последниот ред, важи да секој број е еднаков на апсолутната вредност на разликата на двата броја кои се непосредно под него. На пример, следната таблица е антипаскалов триаголник со четири реда кој се состои од сите природни броеви од 1 до 10.

4

2 6

5 7 1

8 3 10 9

Дали постои антипаскалов триаголник со 2018 реда кој се состои од сите природни броеви од 1 до $1+2+...+2018$?

15. РАЗБИВАЊЕ НА БРОЕВИ

1. *Композиција* (*подредено разбивање*, *подредена партиција*) на природниот број n на k собирци е било кое решение $(a_1, a_2, ..., a_k)$ во множеството природни броеви на равенката
$$a_1 + a_2 + ... + a_k = n . \qquad (1)$$
Бројот на композициите на бројот n на k собирци ќе го означуваме со $c_k(n)$. Докажи дека бројот на решенија на равеката (1), т.е. бројот на композиции на природниот број n на k собирци е $c_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$.

2. Докажи, дека вкупниот број композиции на бројот n е $c(n) = 2^{n-1}$.

3. Докажи, дека бројот на композициите на бројот n, кај кои секој $j \in \mathbb{N}_n$ се јавува точно a_j пати, при што $a_1 + 2a_2 + ... + na_n = n$ е еднаков на
$$\binom{a_1+a_2+...+a_n}{a_1,a_2,...,a_n} = \frac{(a_1+a_2+...+a_n)!}{a_1!a_2!...a_n!} .$$

4. Дадени се природни броеви r и n, $r \le n$. Ги разгледуваме си $n-$торки ненегативни цели броеви $(a_1, a_2, ..., a_n)$ за кои важи
$$a_1 + a_2 + ... + a_n = r \text{ и } a_1 + 2a_2 + ... + na_n = n . \qquad (1)$$
За секоја таква $n-$торка го пресметуваме количникот $\frac{1}{a_1!a_2!...a_n!}$. Докажи дека збирот на сите овие количници е еднаков на $\frac{(n-1)!}{(n-r)!r!(r-1)!}$.

5. Нека $n_1, n_2, ..., n_k$ се различни природни броеви и со $c(n \mid \{n_1, n_2, ..., n_k\})$ да го означиме бројот на сите подредени разбивања на природниот број n кај кои секој од деловите е еднаков на некој од броевите $n_1, n_2, ..., n_k$. Докажи, дека
$$c(n \mid \{n_1, n_2, ..., n_k\}) = \sum_{j=1}^{k} c(n - n_j \mid \{n_1, n_2, ..., n_k\}) , \qquad (1)$$
каде што по дефинција земаме
$$c(m \mid \{n_1, n_2, ..., n_k\}) \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } m < 0, \\ 1, & \text{ако } m = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

6. Учителката на учениците им задала три прашања и секој ученик точно одговорил на 1, 2 или 3 прашања. Учителката решила да подели чоколада која има 9 реда со по 4 коцки во ред на следниот начин: ако ученикот точно одговорил на i прашања, тој добива i редови, т.е. секој ученик добива чоколадо со димензија $1\times 4, 2\times 4$ или 3×4. Првото дете добило $a_1>0$ редови, второто $a_2>0$ редови итн. додека учителката не го подели целото чоколадо. На колку начини може учителката да го подели чоколадото.

7. Нека претпоставиме дека порака се пренесува со помош на сигнали со должина 1, 2, 3, 4 единици време. Колку различни пораки можат да се пренесат за 10 единици време.

8. *Партиција* (разбивање) ® на бројот n, $n\in\mathbb{N}$, на k собирци, $k\geq 1$, е фамилија ® $=\{a_1,a_2,...,a_k\}$, таква што важи $a_i\in\mathbb{N}$ за секој $i=1,2,...,k$ и

$$a_1+a_2+...+a_k=n.$$

Ако за секој $i\in\{1,2,3...,n\}$ во партицијата ® $=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ на бројот n има f_i делови еднакви на i, партицијата ја означуваме со ® $=[1^{f_1}2^{f_2}3^{f_3}...n^{f_n}]$.

Основната разлика меѓу композициите и партициите е во тоа што кај композициите е важен редоследот на собирците, а додека кај партициите редоследот на собирците не е важен.

Нека $p_k(n)$ е бројот на партициите на n на k собирци. Докажи, дека

$$p_k(n)=p_k(n-k)+p_{k-1}(n-k)+...+p_1(n-k). \qquad (1)$$

9. Нека $n_1,n_2,...,n_k$ се различни природни броеви. Со $p(n\,|\,\{n_1,n_2,...,n_k\},\neq)$ да го означиме бројот на партициите на бројот n на различни собирци, кај кои секој од собирците е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,...,n_k$. Докажи дека

$$p(n\,|\,\{n_1,...,n_k\},\neq)=p(n-n_k\,|\,\{n_1,...,n_{k-1}\},\neq)+p(n\,|\,\{n_1,...,n_{k-1}\},\neq) \qquad (1)$$

каде

$$p(m\,|\,\{n_1,n_2,...,n_k\},\neq)=\begin{cases}0, & \text{ако } m<0,\\ 1, & \text{ако } m=0.\end{cases} \qquad (2)$$

10. Докажи, дека

$$p(n\,|\,\mathbb{N}_k,\neq)=p(n-k\,|\,\mathbb{N}_{k-1},\neq)+p(n\,|\,\mathbb{N}_{k-1},\neq),$$

каде $p(0\,|\,\mathbb{N}_j,\neq)=1$ и $p(m\,|\,\mathbb{N}_j,\neq)=0$ за $m<0$.

11. Нека $n_1,n_2,...,n_k$ се различни природни броеви. Со $p(n\,|\,\{n_1,n_2,...,n_k\})$ да го означиме бројот на партициите на бројот n, кај кои секој од собирците е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,...,n_k$. Докажи дека

$$p(n\,|\,\{n_1,...,n_k\}) = p(n-n_k\,|\,\{n_1,...,n_k\}) + p(n\,|\,\{n_1,...,n_{k-1}\}) \qquad (1)$$

каде

$$p(m\,|\,\{n_1,n_2,...,n_k\}) = \begin{cases} 0, & \text{ако } m<0, \\ 1, & \text{ако } m=0. \end{cases} \qquad (2)$$

12. Докажи, дека

$$p(n\,|\,\mathbb{N}_k) = p(n\,|\,\mathbb{N}_{k-1}) + p(n-k\,|\,\mathbb{N}_k)\,, \qquad (1)$$

$$p(n\,|\,\mathbb{N}_k) = p(n\,|\,\mathbb{N}_{k-1}) + p(n-k\,|\,\mathbb{N}_{k-1}) + p(n-2k\,|\,\mathbb{N}_{k-1}) + ... \qquad (2)$$

каде $p(0\,|\,\mathbb{N}_j)=1$ и $p(m\,|\,\mathbb{N}_j)=0$ за $m<0$.

13. На колку начини сума од 50 денари може да се исплати со монети и банкноти од 1, 2, 5, 10 и 20 денари, ако секоја од монетите и банкнотите може да се употреби произволен број пати?

14. Докажи, дека низата $\{f_n\}$ на бројот на партициите кај кои сите собирци се еднакви на i, т.е. $f_n = p(n\,|\,\{i\})$, има генераторна функција $F(x) = \frac{1}{1-x^i}$.

15. Нека $i \in S$. Нека $f_n = p(n\,|\,\{i\})$, $g_n = p(n\,|\,S\setminus\{i\})$ и $h_n = p(n\,|\,S)$. Докажи, дека низите $\{f_n\},\{g_n\},\{h_n\}$ имаат генераторни функции $F(x),G(x),H(x)$ за кои важи $H(x)=F(x)G(x)$.

16. Докажи дека генераторната функција за низата броеви $\{p(n)\}$ е

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...}\,.$$

17. Докажи, дека бројот на партициите на бројот n кои немаат собирок 1 е еднаков на $p(n)-p(n-1)$.

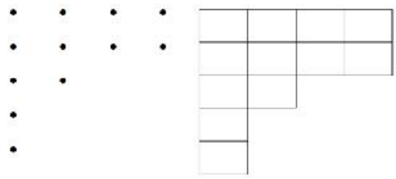
18. На колку начини бројот 10 може да се претстави како збир на броевите 2 и 3.

19. (*Ојлеров идентитет*). Бројот на партициите на бројот n на разлuчни собирци е еднаков на бројот на партициите на бројот n на непарни собирци, т.е. важи $p(n\,|\neq) = p(n\,|\,\{1,3,5,...\})$. Докажи!

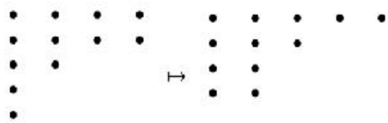
20. Докажи, дека бројот на партициите на природниот број n во кои секој парен собирок се појавува најмногу еднаш е еднаков на бројот на партициите на n во кои секој собирок се појавува најмногу три пати.

21. (*Теорема на Глејшер*). Бројот на партициите на природниот број n на собирци кои не се деливи со d е еднаков на бројот на партициите во кои ниту еден собирок на се појавува d или повеќе пати. Докажи!

22. Партицијата ® на бројот n може да се претстави со помош на *Ферерсовиот дијаграм* така што делови на партицијата ги подредуваме по големина (т.е. во нерастечка низа, почнувајќи од најголемиот), а потоа секој дел се претставува како ред со соодветен број симболи – ние ќе користиме точки $\bullet$. Партицијата може да се претстави и сопомош на *табла на Ферерс*, која во секој ред наместо точки има единечни квадратчиња. На цртежот десно се прикажани дијаграмот и таблата на Ферерс за партицијата $® = \{4,4,2,1,1\}$ на бројот 12.



За партицијата « ќе велиме дека е добиена со коњугирање на партицијата ª ако Ферерсовиот дијаграм на « е добиен со замена на колоните и редовите на Ферерсовиот дијаграм на ª. Притоа ќе велиме дека « е *коњугирана партиција* на ª и ќе пишуваме $« = ª*$. На цртежот десно е прикажано коњугирањето на партицијата $® = \{4,4,2,1,1\}$.



За партицијата која е коњугирана сама на себе ќе велиме дека е *самокоњугирана*.

Докажи, дека бројот на партициите на природниот број n кај кои собирците не се поголеми од m, т.е. $p(n\,|\,\mathbb{N}_m)$ е еднаков на бројот на партициите на бројот n кои имаат најмногу m собироци $p_{\leq m}(n)$, односно дека важи $p(n\,|\,\mathbb{N}_m) = p_{\leq m}(n)$.

23. Докажи, дека бројот $p(n\,|\,\text{с.к.})$ на самокоњугираните партиции на бројот n е еднаков на бројот $p(n\,|\neq,\text{непарни})$ на партициите на бројот n кај кои сите собирци се различни непарни броеви, т.е. дека $p(n\,|\,\text{с.к.}) = p(n\,|\neq,\text{непарни})$.

24. Докажи, дека бројот на партициите $p_{\leq m}(n)$ на бројот n кои немаат повеќе од m собирци е едаков на бројот на партициите $p_m(n+m)$ на бројот $n+m$ кои имаат точно m собирци, односно дека важи $p_{\leq m}(n) = p_m(n+m)$.

25. Докажи, дека бројот на самокоњугираните партиции на бројот n кај кои најголемиот собирок е еднаков на k е еднаков на бројот на самокоњугираните

партиции на бројот $n-2k+1$ кај кои најголемиот собирок е помал од k, односно важи равенството

$$p(n\,|\,\text{с.к., н.с.}=k)=p(n-2k+1\,|\,\text{с.к., н.с.}<k+1)\ .$$

26. Докажи, дека бројот на партициите на бројот n на парни собирци е еднаков на бројот на партициите на бројот n кај кои секој собирок се јавува парен број пати, т.е. дека

$$p(n\,|\,\text{парни})=p(n\,|\,\text{секој собирок парен број пати})\ .$$

27. Докажи, дека бројот на партициите на бројот n кои имаат најмногу m собирци е еднаков на бројот на партициите на бројот $n+\frac{m(m+1)}{2}$ со точно m различни собирци, т.е. важи равенството $p_{\le m}(n)=p_{m,\ne}(n+\frac{m(m+1)}{2})$.

28. Докажи, дека $p(n)>p(n-1)$ за секој $n\ge 2$.

29. Докажи дека $p(n)-2p(n-1)+p(n-2)\ge 0$.

30. За секој природен број n, со $f(n)$ е означен бројот од различни претставувањана бројот n како збир од степени на бројот 2 со ненегативни целобројни показатели. Претставувањата кои се разликуваат само во редоследот на собирците се сметаат за еднакви. На пример, $f(4)=4$ бидејќи бројот 4 може да се претстави на следните четири начини: 4, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1.
Докажи дека за секој природен број $n\ge 3$ важи

$$2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}\ .$$

*

*   *

Во следните задачи ќе се осврнеме на примена на генераторните функции во пребројувањата. Притоа, како што читателот ќе може сам да согледа во некои случаи пребројувањата се тесно поврзани со партициите на природните броеви.

31. Определи ги бројот на решенијата на равенката

$$a+b+c+d=r\ ,$$

каде $0\le r\le 6$, $a,b,c,d\in\mathbb{N}_0$ и $0\le a\le 1, 0\le b\le 1, 0\le c\le 2, 0\le d\le 2$.

32. Нека A е множество кое содржи 1 објект од тип a, 1 објект од тип b, 2 објекта од тип c и 2 објекта од тип d . Определи го бројот на начините на кои може да се изберат 4 објекти од дадените 4 типа во множеството A .

33. Во сад имаме 4 црвени, 5 сини и 2 зелени топчиња.
а) На колку различни начини од садот можат да се изберат 7 топчиња?
б) На колку различни начини можат да се извлечат 7 топчиња, но притоа да мора да се извлече 1 црвено и 2 сини топчиња?

34. Нека претпоставиме дека во сад се наоѓаат 3 црвени, 8 зелени, 9 портокалови и 2 бели топчиња. На колку начини можат да се изберат 12 топчиња, ако мора да се изберат барем едно црвено топче, парен број зелени топчиња и непарен број портокалови топчиња?

35. На колку начини 12 објекти можат да се изберат од 5 видови објекти, при што мора да има најмногу 2 објекти од првите три видови, а неограничен број објекти од останатите два видови објекти?

36. На колку начини 20 објекти можат да се изберат, ако објектите од првиот вид можат да се изберат само во пакети од по 5 објекти, од вториот вид само во пакети од по 3 објекти, од третиот вид можат да се земат најмногу 4, од четвртиот вид најмалку 3 објекти и може да се земат најмногу 2 објекти од петтиот вид?

37. Најди ја генераторната функција чиј n – ти коефициент го дава бројот на ненегативните решенија на равенката
$$a+4b+5c+3d=n\ .$$

16. РАЗБИВАЊЕ НА МНОЖЕСТВА

1. *Партиција (разбивање) на множеството* M на k блокови е фамилија множества ® $=\{M_1, M_2, ..., M_k\}$ таква што

   а) $M_j \neq \varnothing$ за $j = 1, 2, 3, ..., k$,

   б) $M_i \cap M_j = \varnothing$ за $i, j = 1, 2, 3, ..., k$, $i \neq j$ и

   в) $M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_k$.

   На секое разбивање ® на множеството M на k блокови му соодветствуваат $k!$ подредени разбивања на M на k блокови. Тоа се пермутациите на блоковите на разбивањето ®. Нека $\sim_1, \sim_2, ..., \sim_k$ се природни броеви чиј збир е еднаков на n и нека со $B_n(\sim_1, \sim_2, ..., \sim_k)$ го означиме бројот на сите подредени разбивања $(M_1, M_2, ..., M_k)$ на множеството M, $|M| = n$ на k блокови, при што за деловите на тоа разбивање е исполнето $|M_j| = \sim_j$, $j = 1, 2, 3, ..., k$.
   Со $S_{n,k}$ ќе го означиме бројот на разбивања на множеството M, $|M| = n$ на k блокови, а со B_n бројот на сите разбивања на множеството M, $|M| = n$. Од дефиницијата на броевите $S_{n,k}$ и B_n е јасно дека $S_{n,0} = 0$ за $n \geq 1$, $S_{n,n} = 1$ за $n \geq 1$ и $S_{n,k} = 0$ за $k > n$. По дефиниција ставаме $S_{0,0} = B_0 = 1$. Бројот B_n го нарекуваме n*-ти Белов број*. Броевите $S_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$ се познати како *Стирлингови броеви од втор вид*, за кои се користат уште и ознаките $S(n,k)$ и $\{{n \atop k}\}$. Во нашите разгледувања ние ќе ја користиме ознаката $S_{n,k}$.
   Нека $n, k, \sim_1, \sim_2, ..., \sim_k$ се природни броеви за кои важи $\sim_1 + \sim_2 + ... + \sim_k = n$. Докажи, дека

$$B_n(\sim_1, \sim_2, ..., \sim_k) = \frac{n!}{\sim_1! \sim_2! ... \sim_k!}. \qquad (1)$$

2. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и нека $n \geq k$. Докажи дека важат равенствата

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sim_1 + \sim_2 + ... + \sim_k = n} \frac{n!}{\sim_1! \sim_2! ... \sim_k!}, \qquad (1)$$

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n, \qquad (2)$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n . \qquad (3)$$

3. Докажи, дека за броевите $S_{n,k}$ за $k, n \in \mathbb{N}_0$ и $S_{n,0} = 0$, $S_{n,1} = S_{n,n} = 1$ важи

$$S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n,k} . \qquad (1)$$

4. Користејќи ја рекурзијата (1) од претходната задача пресметај ги Стирлинговите броеви од втор вид за $0 \le n, k \le 10$.

5. На колку начини може 8 разнобојни топчиња да се разместат во 3 идентични кутии така што
а) ниту една кутија нема да остане празна,
б) може да има празна кутија?

6. Имам 10 различни разгледници и сакам сите да ги испратам, но така што секој од моите 6 пријатели ќе добие барем една разгледница. На колку начини тоа можам да го направам?

7. Докажи дека Стирлинговите броеви од втор вид ја задоволуваат рекурентната формула

$$S_{n+1,k} = \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} S_{j,k-1} . \qquad (1)$$

8. Докажи, дека за Беловите броеви важи следнава рекурентна формула

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \text{, каде } B_0 = 1 .$$

9. Нека $B(x)$ е експоненцијалната генераторна функција за низата Белови броеви $B(n)$. Докажи дека $B(x) = e^{e^x - 1}$.

10. Докажи дека за Стирлингоите броеви од прв и втор вид важи

$$s_{n,,k} \ge S_{n,k} \text{, за секои } k, n \in \mathbb{N}_0 . \qquad (1)$$

11. Користејќи ги експоненцијалните генераторни функции докажи дека бројот на начините на кои n различни објекти може да се стават во k различни кутии, при што ниту една кутија не смее да биде празна и $1 \le k \le n$, е

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n . \qquad (1)$$

12. Определи ја експоненцијалната генераторната функција која може да се искористи за наоѓање на бројот на начините на кој n лица може да се сметат во 3 соби со најмалку 2, но не повеќе од 9 лица.

13. Определи ја експоненцијалната генераторна функција за низата варијации со повторување од n елементи од класа k .

14. Определи го бројот на сместување на n гости во три сали, при што во првата сала мора да има барем еден гостин, во втората сала мора да има непарен број гости и во третата сала мора да има парен број гости.

15. Множеството $S=\{1,2,...,n\}$ првиот пат е разбиено на m, а вториот пат на $m+k$ непразни подмножества ($k>0$). Докажи дека најмалку $k+1$ елемент на множеството S првиот пат се наоѓа во побројно множество отколку вториот пат.

16. Дали може множеството природни броеви да се разбие на три непразни по парови дисјунктни множества A,B,C така што ако x и y припаѓаат на две од мнижествата, тогаш $x+y+xy$ припаѓа на третото множество.

17. Множеството природни броеви дисјунктно е разбиено на следниот начин:
$$A_1=\{1\},\ A_2=\{2,3\},\ A_3=\{4,5,6\},\ A_4=\{7,8,9,10\},\ldots$$
Определи го збирот на членовите од n -тото по ред множество.

18. Броевите $1,2,...,2n-1,2n$ се поделени на две групи, по n во секоја. Нека $a_1<a_2<...<a_n$ се броевите од првата група запишани во растечки редослед, а $b_1>b_2>...>b_n$ се броевите од втората група запишани во опаѓачки редослед. Докажи дека
$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_n-b_n|=n^2 .$$

19. Дадени се природните броеви $1=a_1,a_2,...,a_n$ закои важи $a_i\le a_{i+1}\le 2a_i$, за $i=1,2,...,n-1$ и бројот $\sum_{i=1}^{n}a_i$ е парен. Докажи, дека овие броеви може да се поделат во две групи со еднакви збирови.

20. Дадени се реални броеви $x_i>1,\ i=1,2,...,2n$. Докажи, дека интервалот $[0,2]$ содржи најмногу $\binom{2n}{n}$ збирови од видот

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i x_i \text{ , каде } a_i \in \{-1,1\} \text{ за } i = 1, 2, ..., 2n \text{ .}$$

21. Нека $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и M е множеството од сите позитивни делители на m кои се производ на два прости делители на m. Определи го најмалиот природен број n со следното својство: од било кои n различни броеви од M може да се изберат три чиј производ е m.

22. Дали е можно множеството природни броеви да се раздели на две дисјунктни подмножества, така да ниту едно од нив не содржи бесконечна аритметичка прогресија, која што не е константна.

23. Докажи, дека множеството $\{1, 2, 3, ..., 12001\}$ може да се разбие на пет подмножества такви, што ниту едно од нив не содржи 11-члена аритметичка прогресија.

24. Нека $n \geq 3$ е природен број. Докажи, дека множеството $\{1, 2, 3, ..., n^2 - n\}$ може да се разбие на две дисјунктни множества такви, што ниту едно од нив не содржи n броеви $a_1 < a_2 < ... < a_n$ за кои важи $a_k \leq \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ за секој $k = 2, 3, ..., n$.

25. Нека $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ се произволни реални броеви. Докажи, дека овие броеви можат да се разделат на две дисјунктни множества A и B од по n броеви така што разликата на збировите $S(A)$ и $S(B)$ на броевите во множествата го задоволуваат неравенството
$$|S(A) - S(B)| \leq \max_{1 \leq i < 2n} |x_{i+1} - x_i| \text{ .}$$

26. Нека $A = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ и $B = (B_i)_{1 \leq i \leq n}$ се две разбивања на множеството M , такви што унијата $A_i \cup B_j$, на произволни две дисјунктни множества A_i и B_j не содржи помалку од n елементи. Докажи дека $|M| \geq \frac{n^2}{2}$.

    Дали е можно равенството $|M| = \frac{n^2}{2}$?

27. Нека $A = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$, $B = (B_i)_{1 \leq i \leq n}$ и $C = (C_i)_{1 \leq i \leq n}$ се разбивања на конечното множество M такви што за било кои i, j, k , $1 \leq i, j, k \leq n$ важи
$$|A_i \cap B_j| + |B_j \cap C_k| + |C_k \cap A_i| \geq n \text{ .}$$

Докажи дека $|M| \geq \frac{n^3}{3}$. Докажи дека за $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv 0 (\bmod 3)$ важи знак за равенство.

28. Докажи дека множеството $\{1, 2, ..., 1989\}$ може да се подели на 117 дисјунктни подмножества $A_1, A_2, ..., A_{117}$ за кои е исполнето:

1) A_i има 17 елементи за $i = 1, 2, 3, ..., 117$;

2) во секое множество A_i, $i = 1, 2, 3, ..., 117$ збирот на елементите е еднаков.

29. Определи го најголемиот природен број n за кој постојат различни множества S_i, $i = 1, 2, ..., n$ такви што:

1) $|S_i \cup S_j| \leq 2004$, за секои i, j, такви што $1 \leq i < j \leq n$, и

2) $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1, 2, ..., 2008\}$, за секои i, j, k такви што $1 \leq i < j < k \leq n$.

30. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството $\{1, 2, ..., 3n\}$ може да се подели на n дисјунктни триелементни подмножества $\{a, b, c\}$ за кои $b - a$ и $c - b$ се различни броеви од множеството $\{n-1, n, n+1\}$.

31. Нека $S = \{1, 2, 3, ..., 2006\} = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, при што важи:

1) $13 \in A$;

2) ако $a \in A, b \in B, a + b \in S$, тогаш $a + b \in B$;

3) ако $a \in A, b \in B, ab \in S$, тогаш $ab \in A$.

Определи го бројот на елементите на множеството A.

32. Определи ги сите подредени тројки (A, B, C) од непразни множества цели броеви такви што $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$, а множествата $A + B, B + C$ и $C + A$ се по парови дисјунктни ($X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$).

33. Дали може целите броеви да се поделат во три дисјунктни множества така што за секој $n \in \mathbb{Z}$ броевите $n, n - 2^6$ и $n + 3^6$ припаѓаат во трите различни множества?

34. Нека N е природен број. На таблата се запишани природни броеви, кои ги задоволуваат следниве услови:

1) За секој запишан број k важи $1 \leq k \leq N$.

2) Секој природен број k таков што $1 \leq k \leq N$ е запишан барем еднаш.

3) Збирот на сите запишани броеви е парен број.

Докажи дека е можно некои од запишаните броеви да се означат со $\odot$, а преостанатите со $\times$ така што збирот на означените броеви со $\odot$ да е еднаков на збирот на означените броеви со $\times$.

35. Нека X е делумно подредено множество, со релација на подредување $\leq$. Множеството $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ го нарекуваме *верига* во X ако

$$x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq ... \leq x_{i_n}$$

за некоја пермутација $i_1, i_2, ..., i_n$ на $1, 2, ..., n$. Множеството $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ го нарекуваме *антиверига* во X ако секои два негови елементи не се споредливи.
Докажи, дека ако во делумно подредено множество X не постои верига со $m+1$ елемент, тогаш X може да се претстави како унија од најмногу m антивериги.

36. Нека M е множество природни броеви, секој од кои има 2013 цифри и во декадниот запис не ја содржи нулата. За два броја од M велиме дека се *соседни*, ако цифрите им се совпаѓаат барем во една класа. Определи го најголемиот можен број елементи на M, ако меѓу секои 9 броеви од M можеме да избереме 3 броја кои се соседни по парови.

37. Даден е прост број $p > 3$. Дали броевите $1, 2, ..., p-1$ можеме да ги поделиме (разбиеме) на две непразни множества така што збирот на броевите во едното и производот на броевите во другото множество да даваат ист остаток при делење со p?

38. Нека m е природен број, $A = \{-m, -m+1, ..., m-1, m\}$ и $f : A \to A$ е пресликување такво што $f(f(n)) = -n$ за секој $n \in A$.
а) Докажи, дека m е парен број.
б) Определи го бројот на сите функции со даденото својство.

39. Даден е природен број n. Докажи дека множеството $\{1, 2, ..., n\}$ може да се подели на m дисјунктни подмножества со еднакви збирови на елементите ако и само ако m е делител на бројот $\frac{n(n+1)}{2}$ и не е поголем од $\frac{n+1}{2}$.

40. За секое подмножество S на множеството природни броеви $\mathbb{N}$ со $r_S(n)$ го означуваме бројот на подредените парови $(a, b), a, b \in S, a \neq b$, за кои $a + b = n$. Докажи, дека $\mathbb{N}$ може да се разбие на две подмножества A и B, така што $r_A(n) = r_B(n)$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

41. Множеството од сите дијагонали на правилен $(4n+3)-$аголник $(n \in \mathbb{N})$ е поделено на k дисјунктни подмножества $S_1, S_2, ..., S_k$ така што за секои $1 < i < j < k$ барем една дијагонала од S_i во внатрешна точка сече барем една дијагонала од S_j. Определи ја најголемата можна вредност на k.

17. ИНВАРИЈАНТИ И ПОЛУИНВАРИЈАНТИ

Во овој параграф прво ќе се задржиме на задачи од следниов вид:

Задача. *Дадени се некој математички објект* A *и дозволени трансформации на истиот. Се поставува прашањето дали со повеќекратна примена на дозволените трансформации дадениот објект* A *може да се претвори (трансформира) во некој друг однапред зададен објект* B .

Решавањето на задачите од овој вид се сведува на следниве два случаја:

- ако одговорот на поставеното прашање е позитивен, тогаш доволно е да се наведе било кој пример кој покажува како може со помош на допустливите трансформации од објектот A да се добие објектот B и
- ако одговорот на поставеното прашање е негативен, тогаш е потребно да се докаже дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B .

Во првиот случај треба да го докажеме постоењето на низа допустливи трансформации која ја обезбедува трансформацијата на објектот A во објектот B , а тоа не е секогаш едноставна задача. Како да постапиме во вториот случај? Иако одговорот на ова прашање не е еднозначен, а уште помалку едноставен, сепак во многу случаи го користиме следниов метод:

- наоѓаме својство кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени која било од допустливите трансформации,
- докажуваме дека објектот B го нема наведеното својство, и
- заклучуваме дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B .

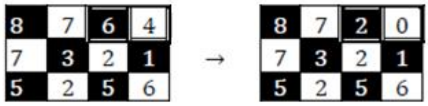
Својството кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени допустлива трансформација го нарекуваме *инваријанта* на допустливата трансформација, а претходно опишаниот метод го нарекуваме *метод на инваријанти*.

1. Квадратна табела 3×3 е пополнета со броевите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, како на цртжот десно. Во секој чекор можеме да одбереме две соседни полиња и од двата броја запишани во нив да одземеме помалиот број, без да ги менуваме другите броеви. Дали со вакви трансформации може да се добие табела пополнета само со нули?

0	1	2
3	4	5
6	7	8

2. Во секое поле на шаховска $m\times n$ табла е запишан по еден природен број. Во еден потег може на било два соседни броја да се додаде број цел број k така што се добиваат ненегативни броеви, а притоа другите броеви не се менуваат

(два броја се соседни ако се во полиња кои имаат заедничка страна). Најди потребен и доволен услов, по конечно многу потези, сите запишани броеви на таблата да се еднакви на нула.



3. Дадена е бела квадратна табла со димензии 10×10, на која во црвено се обоени девет полиња. Никола дополнително во црвено смее да обои поле кое има заеднички страни со најмалку веќе две обоени полиња. Дали е можно, на дозволениот начин, Никола целата табла да ја обои во црвено?

4. Во една сала има 101^2 светилки распоредени во темиња на квадратна решетка со должина на страна 100. На почетокот се запалени k светилки. Во секој чекор избираме единечен квадрат, и ако во него се запалени три светилки, ја палиме и четвртата. Определи го најмалиот број k за кој постои почетен распоред на светилките кој овозможува во конечно време сите светилки да се запалат.

5. Круг е поделен на 10 сектори и во секој сектор е ставен по еден жетон. Дозволено е во еден чекор да се преместат два жетони, но така што секој жетон се премести во соседно поле и тие два жетони при преместувањето се движат во спротивни насоки. Дали со повторување на оваа операција може сите жетони да се преместат во едно поле?

6. Нека n е непарен природен број. На таблата се запишани броевите $1,2,...,2n$. Во секој чекор бришиме било кои два броја и наместо нив ја запишуваме нивната разлика. Постапката ја реализираме се додека на таблата не остане еден број. Докажи дека овој број е непарен.

7. На почеток на три плочки се наоѓаат броевите 2012, 2014 и 2016. Марко во секој чекор броевите на плочките ги означува со a,b и c по некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a-b, 3b-c$ и $3c-a$. Дали може, со последователна примена на оваа постапка, Марко во некој момент на трите плочки да има три еднакви броеви?

8. Карти со броевите од 1 до 11 се дадени последователно во насоката на движењето на стрелките на часовникот на 11 луѓе, кои стојат околу тркалезна маса на еднакви растојанија. Во секој чекор човек може да даде една од картите на свој сосед, ако бројот i на таа карта има својство, да пред и по чекорот картите со броевите $i-1, i$ и $i+1$ не се темиња на остроаголен три-

аголник (картата 0 е картата 11, а картата 12 е картата 1). Докажи дека не може во ниту еден момент сите карти да се кај еден човек.

9. На еден остров живеат 1995 камелеони, меѓу кои има сини, црвени и жолти. Ако се сретнат два камелеони со различна боја, тие истовремено ја менуваат својата боја во преостанатата трета боја. Во еден момент имало 1000 сини, 395 црвени и 600 жолти камелеони. Дали по извесно време може сите камелеони да бидат во една иста боја.

10. Четири цели броеви се запишани во четири различни точки на една кружница. За еден број, негов соседен е бројот што е прв до него во насока обратна од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Во еден чекор секој од броевите се заменува со разликата меѓу него и неговиот соседен број. Дали по 2012 вакви чекори може да се добијат четири броја a,b,c,d такви што броевите $|ab-cd|, |ac-bd|, |bc-ad|$ ќе бидат прости?

11. На таблата се запишани некои цели броеви. Во секој чекор избираме два броја a и b кои се запишани на таблата, ги бришеме и на нивно место ги запишуваме броевите $3a-b$ и $13a-3b$. Ако на почетокот се запишани броевите 1, 2, 3, 4, ..., 2011, 2012, дали е можно по конечен број чекори на таблата да бидат запишани броевите 2, 4, 6, 8, …, 4022, 4024?

12. На таблата е запишан природен број. Ако на таблата веќе е запишан бројот x, тогаш можеме да допишеме $2x+1$ или $\frac{x}{x+2}$. Докажи, дека ако во некој момент на таблата се појави бројот 2008, тогаш и првиот запишан број е 2008.

13. Дадена се реалните броеви a,b и c. Во еден чекор се прави некоја пермутација на броевите a,b и c, на пример (a,b,c) и од неа се добива тројката $(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}},c)$, т.е. се добиваат броевите $\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ и c. Потоа од овие броеви се прави нова пермутација итн. Дали со оваа трансформација од броевите $2,\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ може да се добијат броевите $1,\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$.

14. Компјутер ги врши следниве операции:

1° Парот (a,b) го трансформира во парот $(a+1,b+1)$.

2° Ако a и b се парни, тогаш парот (a,b) го трансформира во $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$.

3° Од паровите (a,b) и (b,c) може да го добие парот (a,c).

Дали е можно компјутерот со комбинација на претходно опишаните операции, од парот $(5,19)$ да го добие парот $(17,2009)$. (Компјутерот ги има на располагање сите добиени парови до тој момент)

15. На таблata се напишани броевите $\frac{49}{k}$, каде $k=1,2,...,97$. Во еден чекор можеме да избришеме два од дадените броеви a и b и на нивно место на таблата го запишуваме бројот $2ab-a-b+1$. Оваа постапка ја повторуваме се додека на таблата не остане само еден број. Определи кои броеви може да бидат последниот број кој ќе биде запишан на таблата.

16. На таблата се запишани броевите $0,1,\sqrt{2}$. Во еден чекор е дозволено на еден од овие броеви да се додаде раликата на другите два помножена со некој рационале број. Дали може со помош на овие операции да се добијат броевите $0,2,\sqrt{2}$?

17. На почетокот на таблата се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 2010. Во еден чекор е дозволено да се избришат два броја a и b и да се запише бројот $ab+a+b$. Дали е можно на овој начин на таблата да се добие само бројот:
а) $2^{2011}-1$, б) 2^{2011}.

18. Нека (x,y) е подреден пар природни броеви во кој точно една координата е парна. Во еден *чекор* парот (x,y) го пресликуваме во парот $(\frac{x}{2},y+\frac{x}{2})$ ако $2\,|\,x$, односно во парот $(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2})$ ако $2\,|\,y$. Докажи дека за секој непарен природен број n, $n>1$, постои парен природен број b, $b<n$, таков што со последователна примена на конечно многу чекори од подредениот пар (n,b) се добива подредениот пар (b,n).

19. Кругот е поделен на шест кружни исечоци, во кои во насока на движењето на стрелките на часовникот последователно се запишани броевите 1, 0, 1, 0, 0, 0. Во секој потез е дозволено да се зголемат броевите во два соседни исечоци за 1. Дали може се конечно многу повторување на дозволениот потег сите запишани броеви во кругот да се еднакви?

20. На кружница се запишани 299 нули и една единица. Дозволени се следниве потези:
    1) од секој број истовремено да се одземат двата негови соседни броја,
    2) да се изберат два броја меѓу кои се наоѓаат точно два броја и двата избрани броја истовремено да се зголемат или намалат за 1.

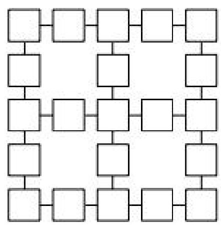
Дали може со конечна низа дозволени потези да се постигне на кружницата да се запишани:
а) две последователни единици и 298 нули,
б) три последоваелни единици и 297 нули.

21. На квадратен трином Пабло може да ги изврши следниве операции:
1) Да ги промени местата на водечкиот и слободниот коефициент.
2) Да го замени x со $x-m$, каде m е произволен реален број.
Дали е можно, со помош на конечен број дозволени дејствија, тргнувајќи од $6x^2+2x+1996$ Пабло да го добие триномот $25x^2+5x+2014$.

22. На таблата прво се запишани полиномите $x, x^3, x^5, ..., x^{2k+1}, ...$ Ако во еден момент на таблата се запишани полиномите $f(x)$ и $g(x)$, дозволено е да се допишат и некои од полиномите $af(x)+b, (a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0)$, $f(x)+g(x)$ или $f(g(x))$. Дали е можно, во конечен број чекори со дозволените операции, да се добие полиномот $x^{2023}-20x+11$?

23. Дали е можно, тргнувајќи од полиномото $f(x)=x^2+4x+3$ да се добие полиномот $g(x)=x^2+10x+9$, со конечен број пати примена на трансформациите $f(x) \to x^2 f(\frac{1}{x}+1)$ или $f(x) \to (x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$.

24. Дадена е фигурата прикажана на цртежот десно. На почетокот во секој квадрат е запишан бројот 0. Во секој потег се избира еден од квадратите и истовремено броевите кои се наоѓаат во тој квадрат и во нему соседните квадрати се зголемуваат за 1. Докажи дека по конечно многу потези:
а) може да се постигне во секој квадрат да е запишан бројот 2010;
б) не може да се постигне во секој квадрат да е запишан бројот 2011.



25. Три скакулци се наоѓаат во три темиња на квадрат. Секоја минута еден од нив прескокнува некој од преостанатите два скакулци и доскокнува во точката која е централно симетрична на точката од која скокнал во однос на скакулецот кој што го прескокнал. Дали може некој од скакулците по конечно многу такви скокови да стигне во четвртото теме на квадратот?

26. На бесконечна шаховска табла во квадрат $n\times n$ се распоредени n^2 жетони, на секое поле по еден жетон. Се игра следнава игра. Во еден потег еден жетон се преместува во хоризонтален или вертикален правец, преку жетон на соседното поле, на следното поле, ако истото е слободно. Прескокнатиот жетон се отстранува од таблата. За кои n може да се постигне на таблата да остане само еден жетон?

27. На полињата на правоаголна $m\times n$ табла се поставени жетони кои се бели од едната страна и црни од другата страна, така што сите полиња се свртени на белата страна, освен еден жетон кој се наоѓа во еден од аглите на таблата и тој е свртен на црната страна. Во еден потег е дозволено да се земе еден жетон кој е свртен на црната страна, по што сите негови соседни по страна жетони се превртуваат. За кои m и n од таблата можеме да ги земеме сите жетони?

28. Во ред се наредени n жетони, кои се бели од едната страна и црни од другата страна. На почетокот сите жетони се завртени со белата страна нагоре. Во секој чекор, ако е можно, отстрануваме по еден жетон со белата страна нагоре, но не еден од крајните жетони, при што жетоните кои од двете страни му се најблиски на тој жетон (лево и десно) ги превртуваме. Докажи дека може да постигнеме да ни останат само два жетона ако и само ако бројот $n-1$ не е делив со 3.

29. Рамностран триаголник ABC со должина на страна $\overline{AB}=n\in\mathbb{N}$ е поделен на n^2 единечни рамнострани триаголници. Во секое теме на некој од малите триаголници е запишан по еден број, и тоа 1 во темињата A,B,C и точката D за која важи $\overline{AD}=\sqrt{3}$, а 0 во сите други темиња. Во еден чекор можеме броевите запишани во темињата на некој ромб со должина на страна 1 (кој се состои од два мали триаголника) да ги зголемиме или намалиме за иста вредност. За кои n може да се постигне сите запишани броеви да се еднакви на нула?

*

*   *

Ако за истиот вид задача дадена на почетокот од овој параграф најдеме величина која при примена на дозволената операција се менува строго монотоно растечки (опаѓачки), тогаш за ваквата величина велиме дека е *полуинваријанта* (*моноинваријанта*).

30. Во секое теме на петаголникот е запишан по еден цел број, при што збирот на сите пет броја е позитивен. Се додека меѓу запишаните броеви има нега-

тивни, ја реализираме следнава операција: избираме три последователни броја $x, y, z\ (y < 0)$ и ги заменуваме со броевите $x+y, -y, z+y$. Докажи дека овој процес завршува по конечен број чекори.

31. На почетокот на таблата се запишани n единици. Во еден чекор е дозволено од таблата да се избришат броевите x и y и наместо нив за са запише бројот $\frac{x+y}{4}$. По $n-1$ чекори на таблата останува само еден број. Докажи дека овој број е поголем или еднаков на $\frac{1}{n}$.

32. Во полињата на правоаголна табела $m \times n$ се запишани цели броеви. Дозволено е операција со која се заменуваат знаците на сите броеви, кои се наоѓаат во произволен ред или произволна колона на табелата. Докажи, дека со помош на вакви операции може да се добие табела, во која збирот на броевите во секој ред и во секоја колона е ненегативен.

33. Во рамнината се дадени $2n\ (n > 1)$ различни точки. Докажи, дека постојат n отсечки со краеви во овие точки такви, што не постојат две отсечки со заедничка внатрешна точка.

34. Секој член на еден парламент има најмногу три непријатели. Докажи дека парламентот може да се подели на две групи така, што секој парламентарец во својата група ќе има најмногу еден непријател. (Непријателството е симетрична релација.)

35. На пазарот има тезга за размена на килими. Ако има килим со димензии $a \times b$, клиентот може да добие или килим со димензии $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ или два килима со димензии $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при секоја таква размена бројот c го избира клиентот). Патник раскажал дека на почетокот имал еден килим со страни поголеми од 1, а по неколку такви размени се здобил со неколку килими, кај секој од кои едната страна е поголема од 1, а другата е помала од 1. Дали може патникот да ја говори вистината? (Ако клиентот сака, килимот со димензии $a \times b$ може да го смета за килим со димензии $b \times a$.)

36. Околу тркалезна маса седат 2024 гусари кои распоредуваат златници меѓу себе. На почетокот сите златници се кај капетанот. Во секој чекор, ако некој гусар има најмалку два златника, еден од тие гусари му дава по еден златник на своите соседи.
а) Докажи дека за $n \geq 2024$ гусарите никогаш нема да ја завршат распределбата.

б) Докажи дека за $n < 2024$ како и да постапуваат гусарите ќе ја завршат распределбата.

37. Нека a, b, c, d се различни цели броеви. Во секој чекор броевите a, b, c, d ги заменуваме редоследно со броевите $a-b,\ b-c,\ c-d,\ d-a$. Докажи дека по конечен број чекори апсолутната вредност на барем еден од броевите ќе биде поголема од однапред зададен број позитивен број M.

38. Нека $n \geq 2$. На хоризонтална права се наоѓаат n болви но така што не се сите во една точка. За позитивен број ª *потез* се дефинира на следниов начин: Се избираат две болви кои се наоѓаат во произволни точки A и B при што точката A се наоѓа лево од точката B. Болвата од точката A скока во точката C, која на дадената права се наоѓа десно од B така што важи $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} =$ ª.

Определи ги сите вредности на ª така што за секоја точка M на дадената права и произволен почетен распоред на $n-$те болви постои конечна низа потези после која сите болви ќе се најдат десно од точката M.

39. Нека $2n$ луѓе седат на кружна маса на кои им се поделени m колачиња. Колачињата може да се подаваат под следниве услови:
а) Секој може да подаде колаче само на соседите.
б) Ако некој подаде на некого колаче, тогаш тој мора и да изеде едно колаче.
Нека A е еден од тие луѓе. Најди го најмалиот број m така што без разлика како колачињата првично се поделени, постои стратегија за подавање на колачињата така што A да добие најмалку едно колаче.

40. Пабло има три сметки во банка, секоја од нив со цел број на долари на неа. На Пабло му е дозволено да префрла пари од една на друга сметка така, што сумата на сметката на која се префрлаат пари се дуплираат. Докажи дека Пабло секогаш може да ги префрли сите пари на две сметки. Дали секогаш Пабло може да ги префрли сите пари само на една сметка?

18. БОЕЊА БРОЕВИ, ТОЧКИ И ОТСЕЧКИ

1. Дадени се 6 триелементни подмножества на множеството X. Докажи дека елементите на X може да се обојат во две бои така што ниту едно од дадените подмножества не е еднобојно (монохроматско).

2. Сите реални броеви поголеми од 1 се обоени во две бои, при што се користат и двете бои. Докажи, дека постојат реални броеви a и b за кои броевите $a+\frac{1}{b}$ и $b+\frac{1}{a}$ се обоени во различни бои.

3. Докажи дека природните броеви можат да бидат обоени во две бои така што истовремено се исполнети условите:
   1) За секој прост број p и секој природен број n броевите p^n, p^{n+1} и p^{n+2} не се монохромаѕски.
   2) Не постои бесконечна геометриска прогресија од монохроматски броеви.

4. Определи го минималниот број бои со кои може да се обојат природните броеви од 1 до 2004 така што да не постојат тројки различни монохроматски броеви a,b,c за кои $a\,|\,b$ и $b\,|\,c$.

5. Нека E е бројната оска (т.е. ориентирана права со единечна отсечка на неа) и нека S е множеството точки од E кои имаат координати $19x+85y$, каде x и y се природни броеви. Точките од S се обоени во црвено, а останатите точки од E кои имаат целобројни координати се обоени во зелено. Дали постои точка A од E (не задолжително со целобројна координата) таква што секои две точки B и C од E со целобројни координати кои се симетрични во однос на A да се различно обоени?

6. Множеството $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$ е поделено на три подмножества. Докажи, дека постојат два броја (може и еднакви) од едно исто подмножество чиј збир е во истото тоа подмножество.

7. Нека $n,k\in\mathbb{N}$, $(n,k)=1$, $1\le k\le n-1$ и $M=\{1,2,3,...,n-1\}$. Секој елемент од M е обоен со една од две бои, бела или сина така што:
   (i) за секој i од M, броевите i и $n-i$ имаат иста боја;
   (ii) за секој $i\in M, i\ne k$, броевите i и $|i-k|$ имаат иста боја.

Докажи дека сите елементи од M се обоени во иста боја.

8. Дали може природните броеви да се обојат во 2009 бои така што секоја боја да се среќава бесконечно многу пати и производот на секои два разнобојни броја да има боја на некој од нив?

9. Секоја точка од рамнината е обоена во црвена или сина боја. Докажи дека постои многуаголник со еднобојни темиња од барем еден од следниве видови:
   - рамностран триаголник со должина на страна 2,
   - рамностран триаголник со должина на страна $\sqrt{3}$,
   - ромб со должина на страна 1.

10. Во просторот се дадени девет точки, такви што било кои четири не лежат во иста рамнина. Секои две точки се поврзани со отсечка и секоја од нив е обоена со сина или со црвена боја или не е обоена. Определи го најмалиот број n таков што при било какво боење на избраните n отсечки, меѓу нив постојат три еднакво обоени кои се страни на триаголник.

11. Определи го најмалиот природен број n за кој важи: како и да ги обоиме во три бои темињата на правилен $n-$аголник, постои рамнокрак трапез чии темиња се монохроматски.

12. Дадена е петстрана призма со основи $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Сите рабови на основите и сите отсечки A_iB_j $(i, j = 1,2,3,4,5)$ се обоени со црвена или зелена боја, така што во секој триаголник, чии темиња се во темињата на основите на призмата, постојат две страни обоени со различна боја. Докажи дека сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

13. Дадено е конечно множество точки во рамнината, такво што секоја точка има целобројни координати. Дали е можно некои точки од тоа множество да се обојат со црвена боја, а преостанатите со бела боја, така што за секоја права L која е паралелна со било која од координатните оски, разликата меѓу бројот на белите и бројот на црвените точки на L да биде -1 ,0 или 1?

14. Секоја точка од рамнината е обоена во сино или црвено. Докажи дека постојат две сини точки на растојание 1 или четири колинеарни црвени точки A_1, A_2, A_3, A_4 такви што $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = 1$.

15. Нека T е конвексна фигура во рамнина, која содржи барем три неколинеарни точки. Секоја точка од фигурата е обоена во една од p дадени бои. Дока-

жи дека за $n \geq 3$ постојат бесконечно многу складни n-аголници такви што сите нивни темиња се обоени со една иста боја.

16. Права е обоена во две бои. Докажи, дека постои отсечка чии крајни точки и средина се монохроматски (обоени во иста боја).

17. Рамнина е обоена во две бои. Докажи, дека постои триаголник кој е сличен на даден триаголник и чии темиња се монохроматски.

18. Рамнината е обоена во две бои. Докажи, де-ка постои рамнокрак правоаголен триагол-ник чии темиња се монохроматски.

19. Тврдењата во секоја од задачите 16, 17 и 18 се точни ако наместо целата рамнина се разгледува конечно множество точки (за секоја задача множеството е различно).

20. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во три бои. Докажи, дека постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.

21. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во N бои. Докажи, дека постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.

22. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во N бои. Докажи, дека постои правоаголник чии темиња се монохроматски.

23. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во две бои. Докажи, дека постои квадрат чии темиња се монохроматски.

24. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во N бои. Докажи, дека постои квадрат чии темиња се монохроматски.

25. Нека во рамнината точките со целобројни координати се обоени во k бои и M е произволно конечно множество точки од решетката. Тогаш постои монохроматско множество, слично на множеството M.

26. Во точките на целобројната решетка на рамнината се запишани природни броеви. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои квадрат со страни паралелни на линиите на решетката, таков што збирот на броевите внатре во квадратот е делив со n.

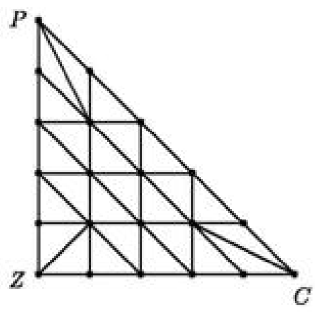
27. Нека рамнината е обоена во k бои и M е произволно конечно множество точки од рамнината. Докажи, дека постои монохроматско множество, слично на множеството M .

28. Во рамнината се дадени две различни точки O и A . За секоја точка X во рамнината, различна од O , со $\sim(X)$ ја означуваме големината на аголот AOX изразена во радијани ($0 \le \sim(X) < 2$® и аголот се мери од кракот AO во насока обратна од движењето на стрелките на часовникот) и со $C(X)$ ја означуваме кружницата со центар во O и радиус $\overline{OX} + \frac{\sim(X)}{\overline{OX}}$. Точките од рамнината се обоени со конечно многу бои. Докажи дека во рамнината постои точка Y за која $\sim(Y) > 0$ и таква што на кружницата $C(Y)$ се наоѓа точка обоена со истата боја како и Y .

29. Дадена е бесконечна квадратна решетка. Определи го најмалиот природен број n со следново својство: За секој позитивен број d јазлите на решетката може да бидат обоени во n бои така, што секои два јазли меѓу кои растојанието е d се обоени во различни бои.
Бројот n се нарекува *хроматичен број* на решетката.

30. За множеството прави во рамнината ќе велиме дека се во општа положба ако никои две прави не се паралелни и никои три не минуваат низ иста точка. Множеството прави во општа положба ја дели рамнината на области; *ограничени* области во поделбата ги нарекуваме оние кои имаат конечна плоштина. Докажи дека за секој доволно голем n, во секое множество од n прави во општа положба може да се обојат во сино барем $\sqrt{n}$ прави така што ниту една од ограничените области во поделбата нема потполно сина граница.

31. Триаголникот ZCP е поделен на 25 мали триаголници како на цртежот десно, а потоа сите темиња на овие триаголници се обоени во три бои на следниот начин: темето Z е обоено со зелена боја, темето C со црвена и темето P со сина; секое од темињата на отсечката ZC е обоено или со зелена или со црвена боја, секое од темињата на отсечката CP е обоено или со црвена или со сина боја, а секое од темињата на отсечката ZP е обоено или со зелена или со сина боја. Секое теме кое се наоѓа во внатрешноста на триаголникот е обоено без ограничување, со една од трите бои.



Докажи, дека за секое боење барем на еден од 25-те мали триаголници темињата се обоени со различна боја.

32. Секоја точка во рамнината е обоена со една од три бои. Докажи, дека постои триаголник за кој важи:
i) Темињата на триаголникот се монохроматски.
ii) Радиусот на опишаната кружница околу триаголникот е 2008.
iii) Еден агол на триаголникот е два или три пати поголем од некој од другите два агли на триаголникот.

33. Рамнината е поделена на единечни квадрати со помош на две множества паралелни прави кои формираат бесконечна решетка. Секој единечен квадрат е обоен во една од 1201 боја така што ниту еден правоаголник со периметар 100 не содржи два единечни квадрати обоени со иста боја. Докажи дека ниту еден правоаголник со димензии 1×1201 (или 1201×1) не содржи два квадрата обоени со иста боја.
Напомена. Се претпоставува дека страните на сите разгледувани правоаголници припаѓаат на решетката.

34. Определи ги сите природни броеви n такви што страните и дијагоналите на правилен $n-$аголник може да се обојат така што се исполнети следниве услови:
а) Секоја страна или дијагонала е обоена во една боја.
б) За секои три различни бои постои триаголник со темиња меѓу темињата на правилниот $n-$аголник чии страни се обоени со тие три бои.

35. На кружница е дадено множество E од $2n-1(n\geq3)$ различни точки, меѓу кои точно k точки се обоени со црна боја. За боењето на точките велиме дека е „добро“ ако постојат две црни точки такви што во внатрешноста на еден од соодветните лаци кои тие точки ги определуваат се наоѓаат точно n точки од E. Определи го најмалиот број k за кој секое боење на множеството E е „добро“.

36. Во рамнината се дадени 2012 точки, секоја обоена во една од n бои. Познато е дека нема две бои со кои се обоени еднаков број точки. Да се определи оној број n, за кој бројот на множествата со по n точки, по една од секоја боја, е максимален.

37. Целобројните точки во рамнината се обоени со три бои. Определи го најмалиот позитивен реален број S со следново својство: за секое такво боење постои триаголник со плоштина S, чии темиња се монохроматски?

38. Во целобројна решетка е даден 10×10 квадрат. Единечните отсечки на квадратот се обоени во неколку бои. Познато е дека контурата на секој квадрат со страни на целобројната решетка е обоена најмногу во две бои. (Не е задолжително таков квадрат да се содржи во дадениот.) Определи го максималниот број искористени бои?

39. Конфигурацијата од 4027 точки во рамнината ја нарекуваме *колумбиска* ако се состои од 2013 црвени и 2014 сини точки, при што никои три точки од конфигурацијата не се колинерани. Со повлекување на прави рамнината се дели на области. За распоредот на правите ќе велиме дека е *добар* за колумбиската конфигурација, ако се исполнети следниве услови:
    - нити една права не минува низ некоја точка од конфигурацијата,
    - нити една област не содржи различно обоени точки.

    Определи го најмалиот број k таков што за секоја колумбиска конфигурација од 4027 постои добар распоред на k прави.

19. БОЕЊА И ПОПЛОЧУВАЊА

1. Дадена е квадрат 4×4 и четири различни бои. На колку начини може да се обои квадратот, секое квадратче во една боја, така да во секоја колона и во секоја редица, секоја боја се јавува точно еднаш.

2. Секое поле на квадратна 50×50 табела е обоено со една од 10 бои. Докажи дека на табелата постојат полиња M, A, B, C, D обоени со иста боја така што A е во ист правец лево од M (не задолжително соседно), B е во ист правец десно од M, C е во ист правец горе од M и D е во ист правец долу од M.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои квадрат со должина на страна n може да се расече на квадрати со должини на страни 2 или 3.

4. Дадена е табла со димензии 8×8 која е шаховски обоена во две бои црна и бела, т.е. полињата кои имаат заедничка страна се обоени во различни бои. Во еден потег треба да избереме еден ред или една колона и на секое од осумте полиња во тој ред или колона да ја смениме бојате, од црна во бела и обратно. Дали може со конечна низа вакви потези да се постигне точно едно поле на таблата да е црно?

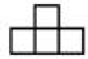
5. Докажи, дека табла со димензии 8×8 не може да се покрие со 15 тетрамина од облик на цртеж а) и едно тетрамино од облик на цртеж б).

6. Правоаголна табла со димензии $m\times n$ е покриена со 2×2 и 1×4 тетрамина, кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата. Докажи, дека таблата не може да се покрие на опишаниот начин со истите тетрамина, ако едно од тетрамината 2×2 се замени со тетратмино 1×4.

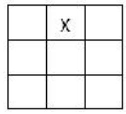
7. Дали може квадратна табла со димензии 10×10 да се покрие со 1×4 тетрамина?

8. Квадратна табла со димензии 2004×2004 се покрива со 1×4 тетрамина Дали постои покривање во кое бројот на хоризонтално поставени домина е еднаков на бројот на вертикално поставени тетрамина?

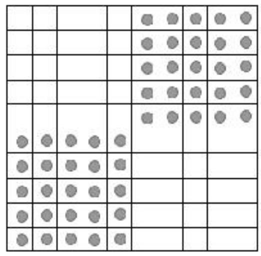
9. Дали може табла со димензии 10×10 да се покрие со 25 T – тетрамина (цртеж десно)?



10. На секое поле на табла 3×3 се наоѓа по 1 жетон. Во секој чекор преместуваме било кои два жетони, секој од нив на соседно поле (соседни се полиња кои имаат заедничка страна). Дали е можно, по определен број чекори, сите жетони да се најдат на полето означено со буквата X ?

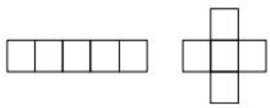


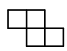
11. На табла со димензии 10×10 се поставени 50 жетони така што никои два не се на исто поле. Притоа 25 жетони се поставени на долниот лев дел од таблата, а преостанатите 25 жетони се поставени на горниот десен дел од таблата (цртеж десно). Нека X, Y, Z се редоследно три последователни полиња (хоризонтално, вертикално или дијагонално. Ако два жетони се на полињата X и Y и ако полето Z е слободно, жетонот од полето X може да се премести на полето Z , прескокнувајќи го жетонот на полето Y .
Дали со конечна низа вакви потези може да се преместат сите жетони на долниот дел од таблата, т.е. на првите пет реда гледајќи оддолу-нагоре?



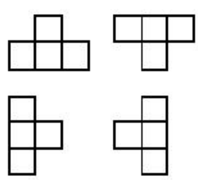
12. Даден е правилен n – аголник. Повлечени се некои дијагонали на n – аголникот, така што никои две не се сечат во внатрешна точка и тие го делат n – аголникот на триаголници. Притоа од секое теме на n – аголникот излегуваат парен број дијагонали. Определи ги сите природни броеви $n \geq 4$ за кои ова е можно.

13. Дадена е табла со димензии 2016×2017 . Дали е можно во последната колона да се отстранат две полиња и така добиената плоча да се покрие со пентонима дадени на цртежот десно? Пентонимата може да се ротираат.



14. Определи го најголемиот можен број на тетрамина од вид  кои може да се постават на квадратна табла со димензии 2003×2003 (не се дозволени ротации) така да без преклопувања секое од нив да покрива точно четири квадратчиња од таблата.

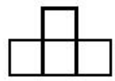
15. Дали е можно во единечните квадратчиња на табла со димензии 6×6 да се запишат броевите од 1 до 36, во секое квадратче по еден број, така што збирот на броe-



вите запишани во секоја од фигурите дадени на цртежот десно е делив со бројот 2?

16. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем xOy. Во секоја точка $(k,0), k\in\mathbb{Z}$ е повлечена права паралелна со $y-$оската и во секоја точка $(0,n), n\in\mathbb{Z}$ е повлечена права паралелна со $x-$оската, со што е добиена бесконечна табла. Во секое единечно квадратче на таблата се запишани ненегативни цели броеви такви што секој број е еднаков на аритметичката средина на броевите запишани во соседните квадратчиња (соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна). Докажи дека сите запишани броеви се еднакви.

17. Во секое единечно квадратче на квадратна табла со димензии 50×50 е запишан по еден број. Притоа каде и да ја поставиме фигурата прикажана на цртежот десно (дозволени се ротации), таа покрива четири полиња за кои збирот на запишаните броеви е еднаков на 4. Докажи, дека сите запишани броеви се еднакви меѓу себе.



18. Од квадратна 2012×2012 табла е исечено едно единечно кавдратче. Докажи дека остатокот од таблата може да се покрие со $\text{L}-$тримина.

19. Агол со рамо n се нарекува фигура составена од $2n-1$ квадратчиња 1×1, која се добива кога на две соседни страни на едно квадратче 1×1 се залепи по еден правоаголник со димензија $1\times(n-1)$ така, што единичните страни на квадратчето и правоагоникот се совпаѓаат.
Квадратчињата на табла со димензии 100×100 се обоени во 15 бои. Ќе велиме дека еден агол со рамо 8 е *разнобоен*, ако тој содржи по едно квадратче од секоја боја. Определи го најголемиот број разнобојни агли со рамо 8 на таблата.

20. Располагаме со 19 аголни тримина (2×2 квадрат од кој е отстрането едно квадратче) и неограничен број 2×2 квадрати. Определи го најголемиот непарен број n за кој квадрат $n\times n$ може да се покрие со дадените фигури.

21. На секое поле на квадратна табла со димензии 8×8 е поставена коцка (работ на поставените коцки е еднаков страната на полињата на таблата). Една од шесте страни на секоја од поставените коцки е обоена црно, а останатите пет страни се обоени бело. Цел ред или цела колона коцки може да ротира за $90^\circ, 180^\circ$ или 270° (ротира како паралелопипед со основа квадрат и висина осум пати поголема од страната на неговата основа). Дали постои редослед

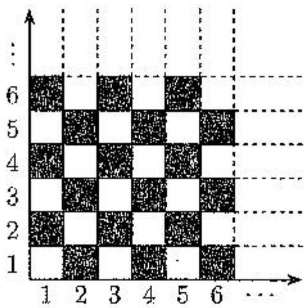
на ротации после кој сите црно обоени полиња се на горната страна на поставените коцки.

22. Дадени се природни броеви m,n и r, $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ и квадратна табла со димензии $(mn+r)\times(mn+r)$. Таблата е покриена со квадрати со димензии $n\times n$ со страни паралелни со страните на таблата, така што секое единечно поле е покриено барем еднаш. Определи го најмалиот можен број единечни полиња кои се покриени повеќе од еднаш.

23. Дадена е квадратна табла со димензија $n\times n$, каде n е парен број. Таблата е поделена на n^2 единечни квадрати. Два различни единечни квадрати на таблата се соседни ако имаат заедничка страна.
Означени се N единечни квадрати така што секој единечен квадрат (означен или неозначен) е соседен со барем еден означен квадрат.
Определи ја најмалата можна вредност на бројот N.

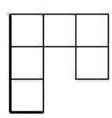
24. Нека $n \geq 2$ е природен број. Од квадрат $n\times n$ е отстрането едно поле и остатокот на квадратот е покриен со квадрати 2×2 и 3×3. Определи ги можните вредности на n.

25. Дадена е бесконечна шаховска табла, поставена во првиот квадрант, чии полиња се обоени со бела и црна боја, а редовите и колоните се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ... (цртеж десно). На почетокот на полето $(1,1)$ е поставен жетон. На секој чекор се избира еден од веќе поставените жетони и се заменува со два нови жетони според следново правило: ако на таблата има k жетони и избраниот жетон е на полето (i,j), тогаш двата нови жетона се поставуваат на полињата $(i,k+1)$ и $(k+1,j)$. Определи го бројот на достижните конфигурации, кои се состојат од n жето-ни распоредени само на црните полиња.



26. Секое поле во табла 2014×2014 е обоено црно или бело. Познато е дека секој квадрат 2×2 содржи парен број црни полиња, а секој крст (квадрат 3×3 без четирите аголни полиња) содржи непарен број црни полиња. Докажи дека четирите аголни полиња од таблата се еднобојни.

27. *Кука* ќе ја наречеме фигурата прикажана на цртежот десно, која составена од шест единечни квадрати, или било која друга



фигура која е добиена од оваа фигура со примена на ротации и осни симетрии. Определи ги сите $m\times n$ правоаголници кои можат да се покријат со куки така што
1) правоаголникот е покриен без празнини и преклопувања,
2) ниту еден дел од некоја кука не е надвор од правоаголникот.

28. Дадена е шаховска табла со димензии $m\times n$, $m,n\geq 2$. За боењето на единечните полиња на таблата во боите бела, зелена, црвена и сина (секое поле е обоено со една боја) ќе велиме дека е *шарено,* ако четирите полиња во секој 2×2 квадрат се обоени во различни бои. Определи го бројот на шарените боења на таблата.

29. Коцка со димензии $3\times 3\times 3$ е поделена на 27 складни единечни коцки (клетки). Една од добиените единечни клетки е празна, а во секоја од преостанатите се наоѓа единечна коцка означена со еден од броевите 1, 2, ..., 26 (секој од овие броеви е доделен на точно една коцка). Дозволено е единечна коцка да се премести во соседна празна клетка (две клетки се соседни ако имаат заеднички ѕид). Дали може со помош на конечно многу дозволени потези единичните коцки да се распоредат така што коцките означени со броевите k и $27-k$ ги заменат местата, за секој $k\in\{1,2,...,13\}$?

30. Полињата на бесконечна шаховска табла се стандардно обоени во црна и бела боја. Потоа сите бели полиња се преобоени во црвена и сина боја така што полињата кои имаат соседен агол се разнобојни. Нека l е произволна права, која не е паралелна со страните на полињата. За секоја отсечка I која е паралелна на l ја пресметуваме разликата од збировите на црвените и сините делови на I. Докажи, дека постои број C, кој зависи само од правата l, таков што сите добиени се помали или еднакви на C.

31. Точките во рамнината со целобројни координати се темиња на единечни квадрати. Квадратите се наизменично обоени со бела и црна боја (како шаховска табла). За произволен пар позитивни цели броеви m и n разгледуваме правоаголен триаголник чии темиња имаат целобројни координати, а неговите катети, со должини m и n, лежат на страните на единечните квадрати. Нека S_1 е вкупната плоштина на црниот дел од триаголникот и S_2 е вкупната плоштина на белиот дел од триаголникот. Нека

$$f(m,n)=|S_1-S_2|.$$

а) Пресметај го $f(m,n)$ за кои било позитивни цели броеви m и n со иста парност.

б) Докажи, дека $f(m,n)\leq\frac{1}{2}\max\{m,n\}$ за секои природни броеви m и n.

в) Докажи, дека не постои константа C таква што $f(m,n) < C$ за секои природни броеви m и n.

32. За полином $f(x)$ со реални коефициенти, $\deg f = 2012$ и позитивен водечки коефициент ја разгледуваме фигурата составена од сите точки со координати (x, y) такви што $y \geq f(x)$. Дали може рамнината да се покрие со конечен број такви фигури?

33. Од квадратна табла со димензии 100×100 се исечени 1950 домина (правоаголници 1×2 или 2×1). Докажи дека од преостанатите делови може да се исече тетрамино (евентуално ротирано). Ако тетраминото веќе се добило се смета дека е исечено.

34. Правоаголник со димензии 9×12 е поделен на единични квадрати. Со црвена боја се обоени центрите на сите единични квадрати, освен на четирите аголни и осумте квадрати кои имаат заедничка страна со некој од аголните квадрати. Дали е можно црвените центри да се означат со $C_1, C_2, ..., C_{96}$, но така да се исполнети следниве услови:

1) $\overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = ... = \overline{C_{95}C_{96}} = \overline{C_{96}C_1} = \sqrt{13}$, и

2) затворената искршена линија $C_1C_2...C_{96}C_1$ е централно симетрична.

35. Дадена е квадратна табла 8×8 чии полиња се бели. Во еден чекор можеме да одбереме 2×2 квадрат со сите бели полиња и во него да обоиме црно две дијагонално соседни полиња. Колку чекори може најмногу да се направат?

36. Нека n е природен број. Определи го (во зависност од) најмалиот природен број m за кој може да се обојат точно n полиња на бесконечна квадратна табла така што е исполнет условот:

Секој правоаголник со страни долж линиите на таблата на кој му се обоени две спротивни аголни полиња содржи најмногу обоени полиња.

37. Сите квадратчиња на табла 1000×1000 се обоени црно или бело. Познато е дека постојат квадрат 10×10 во кој сите квадратчиња се црни и квадрат 10×10 во кој сите квадратчиња се бели. За секој квадрат со димензии 10×10 дефинираме негова моќ $m(K)$ како апсолутна вредност на разликата на бројот на црните и белите полиња во квадратот K. Нека T е 10×10 квадрат кој има најмала моќ меѓу сите квадрати на дадената табла со димензија 10×10. Определи ја најголемата можна вредност за $m(T)$.

38. Во едно од полињата на квадратна 41×41 табла е маскиран тенк. Стрелец со еден истрел погодува едно поле. Ако го погоди полето во кое е тенкот, тогаш тенкот се преместува во соседно поле, а во спротивно останува во полето во кое се наоѓа. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна. По истрелот стрелецот не знае дали го погодил или не го погодил тенкот. За да се уништи тенкот треба да е погоден двапати. Кој е најмалиот број истрели со кој стрелецот сигурно ќе го уништи тенкот?

39. Во квадрат 17×17 во црна боја се обоени n полиња. Секој ред, секоја колона и секоја голема дијагонала на квадратот ќе ја наречеме линија. Во еден чекор е дозволено ако најмалку 6 полиња на таа линија се обоени во црно, сите полиња на таа линија да се обојат во црно. Определи ја најмалата можна вредност на n, за која постои почетна конфигурација на n црни полиња, од која може по конечен број чекори да се добие црна табла.

40. Квадрат, поделен на единечни квадратчиња, може да се расече на n складни фигури со по k квадратчиња во секоја фигура. Докажи дека истиот квадрат може да се расече и на k складни фигури со по n квадратчиња во секоја фигура.

41. На квадрат 100×100 се поставени неколку рамнокраки правоаголни триаголници со катети 1 кои не се сечат, при што секој триаголник покрива точно половина поле. Се покажало дека секоја страна на поле (вклучувајќи ги и граничните) е покриена од точно една катета на триаголник. Определи го најголемиот можен број полиња кои не содржат ниту еден триаголник.

42. Квадрат со димензии $n\times n$ е поделен на единечни квадрати. Во големиот квадрат треба да се постават определен број рамнокраки правоаголни триаголници со должина на хипотенуза 2 и со темиња во темињата на единечните квадрати, но така што секоја страна на секој единечен квадрат припаѓа тачно на еден триаголник (лежи во внатрешноста или на работ). Определи ги сите вредности на n за кои ова е можно.

43. Нека f е бројот на начините на покривање на табла со димензии $2\times n$ со 2×1 домина, b е бројот на низи од единици и двојки чиј збир е еднаков на n и

$$c=\begin{cases}\binom{m}{0}+\binom{m+1}{2}+...+\binom{2m}{2m}, & n=2m\\ \binom{m+1}{1}+\binom{m+2}{3}+...+\binom{2m+1}{2m+1}, & n=2m+1.\end{cases} \quad (1)$$

Докажи, дека $f=b=c$.

44. Нека P е полимино со следниве својства:
  1) барем еден правоаголник може да биде покриен со копии на P,
  2) за секој правоаголник, кој може да биде покриен со копии на P, тоа покривање е единствено со точност до симетриите кои го запазуваат правоаголникот.

  Докажи, дека P е квадрат.

45. Во полињата на $n \times n$ табла се распоредени $2n-1$ жетони. Докажи дека некои од овие жетони може да се обојат во зелено така што:
  1) во секој ред и во секоја колона има парен број зелени жетони, или
  2) во секој ред и во секоја колона има непарен број зелени жетони.

20. ЛАТИНСКИ КВАДРАТИ

1. Нека Q е множество од n елементи. Матрицата елементи од Q ја нарекуваме *латински* $r\times n$ *– правоаголник* ако во секој нејзин ред и во секоја нејзина колона сите елементи се различни меѓу себе.
   Латинскиот $n\times n$ правоаголник го нарекуваме *латински квадрат* од $n-$ти ред.
   Докажи, дека за секој природен број постои латински квадрат од $n-$ти ред.

2. Првиот квадрант на координатната рамнина е поделен на единечни квадрати. Дали е можно во секој од овие квадрати да се запише по еден природен број, така што во секој ред и секоја колона секој природен број биде запишан точно еднаш?

3. Даден е латински квадрат од $(2n+1)-$ви ред пополнет со броевите $1, 2, ...,$ $2n+1$. Ако броевите се симетрично распоредени во однос на една од дијагоналите, докажи дека на таа дијагонала се наоѓаат сите броеви од 1 до $2n+1$.

4. Докажи, дека за произволни природни броеви n и r, $r<n$ постои латински $r\times n-$ правоаголник.

5. Латинскиот $3\times 6-$ правоаголник
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
   прошири го до латински $4\times 6-$ правоаголник.

6. Определи го бројот на латинските $2\times n$ правоаголници.

7. За латинските квадрати кои еден од друг можат да се добијат со пермутирање на редиците, колоните или преименување на елементите ќе велиме дека се *изотопни*.
   Нека множеството Q елементи на латинскиот квадрат е подредено множество. За латинскиот квадрат ќе велиме дека е *стандарден* ако елементите на првиот ред се во основен поредок (основна пермутација). За латинскиот

квадрат ќе велиме дека е *двојно стандарден* ако и елементите на првиот ред и елементите на првата колона се во основен поредок.

За два латински квадрати $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ од $n-$ти ред ($i, j=1,...,n$) ќе велиме дека се *заемно ортогонални*, ако за сите вредности на индексите i, j, k,l важи $(a_{ij},b_{ij})\neq(a_{kl},b_{kl})$ кога $(i, j)\neq(k,l)$, т.е. ако сите n^2 подредени парови (a_{ij},b_{ij}) се различни меѓу себе.

Дадени се латинските квадрати:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&1&2\\4&3&2&1\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&2&1\\2&1&4&3\end{bmatrix}.$$

Докажи дека тие се ортогонални.

8. Конструирај пар ортогонални латински квадрати од ред $n=2k+1,\ k\geq 1$.

9. Нека $L_1,L_2,...,L_k$ се по парови заемно ортогонални латински квадрати. Докажи дека постојат латински квадрати $L_1',L_2',...,L_k'$ кои се изотопни на дадените, стандардни и по парови заемно ортогонални.

10. Докажи дека за секој природен број $n>1$ постојат најмногу $n-1$ неизотопни по парови заемно ортогонални латински квадрати.

11. За множеството од $n-1$ по парови ортогонални латински квадрати од ред n велиме дека е *потполн систем ортогонални латински квадрати* од ред n (скратено ПСОЛК(n)).

    Докажи, дека за секој прост број $p>2$ постои ПСОЛК(p).

12. Конструирај ги ортогоналните латински квадрати од 5-ти ред.

21. МАГИЧНИ КВАДРАТИ

1. *Магичен квадрат* од $n-$ти ред е квадратна $n\times n$ шема (или матрица) од n^2 природни броеви, такви што збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на еден ист број K_n. Бројот K_n го нарекуваме *магична константа*.

   Ако во магичниот квадрат од $n-$ти ред се запишани првите n^2 природни броеви, тогаш нивниот збир е:

   $$1+2+...+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

   па затоа магичната константа е $K_n=\frac{n(n^2+1)}{2}$. Магичните квадрати кои се составени од броевите од 1 до n^2 ги нарекуваме *стандардни магични квадрати*.

   Конструирај магичен квадрат од ред $n=2k+1$.

2. Конструирај магичен квадрат од ред $n=4k$, $k\ge 1$.

3. Конструирај магичен квадрат од ред $n=4k+2$, $k\ge 1$.

4. Нека $a,d,n\in\mathbb{N}$. Докажи дека од членовите на конечната аритметичка прогресија $a_k=a+(k-1)d$, $k=1,2,...,n^2$ може да се состави магичен квадрат.

22. НЕКОНКУРЕНТСКИ ИГРИ

Математичките игри, кои овде се предмет на нашите разгледувања, се една од најнестандардните и најразновидни области. Ние нема да се задржиме на теориските разгледувања и на класичните алгоритми за решавање на определени видови игри, туку ќе разгледаме неколку задачи кои припаѓаат на оваа интересна математичка дисциплина и кои се задавани на матемаички натпревари.

Во овј параграф ќе разгледаме задачи во кои при определени услови треба да се постигне дадена цел, но притоа нема играч кој оневозможува да се постигне целта. Ваквите видови игри се нарекуваат *неконкурентски игри*.

1. Во едно кралство има 100 мудреци. Кралот сака да ги тестира мудреците на следниов начин: ги реди во колона и на еској на главата му става бела или црна капа така што секој мудрец ги геда капите на сите пред него, но не ја гледа својата капа и капите на тие зад него. Потоа мудреците еден по еден пробуваат да ја погодат бојата на својата капа. Мудрецот кој ќе погоди добива награда еден златник, а мудрецот кој нема да погоди плаќа казна од еден златник. Кој е најмалиот број златници кои мудреците заедно може да ги заработат?

2. На случаен начин 2008 момчиња и 2008 девојчиња се распоредени на круг. Секое девојче има топка, а секое момче има кукла. Во еден чекор секој на својот десен сосед му го предава предметот кој го има во моментот. Потоа сите момчиња кои добиле топка и сите девојчиња кои добиле кукла го напуштаат кругот, а преостанатите продолжуваат на истиот начин. Определи го максималниот можен број чекори во оваа игра.

3. Група разбојници го крие своето богатство во 2011 пештери кои се означени со броевите 1, 2, 3, ..., 2011. Преку ден богатството се наоѓа во една од пештерите, а во текот на ноќта разбојниците богатството го преместуваат во една од соседните пештери. Алибаба ја имал оваа информација и секој ден на пладне пребарува една од пештерите. Дали постои стратегија со која Алибаба ќе го најде богатството по конечен број денови?

4. Група разбојници го крие своето богатство во n пештери кои редоследно се означени со броевите $1, 2, ..., n$. Преку ден богатството се наоѓа во една од пештерите, а во текот на ноќта разбојниците богатството го пренесуваат надесно во соседната пештера. Кога богатството ќе се најде во крајната десна

пештера, т.е. во пештерата означена со бројот n, тоа останува во неа. Алибаба ја имал оваа информација и секој ден на пладне пребарува една од пештерите. Определи го најмалиот можен број денови кои му се потребни на Алибаба за со сигурност да го најде богатството.

5. Горјан ги запишал броевите од 1 до 100 во некој редослед. Со едно прашање Андреј од Горјан може да го дознае меѓусебниот редослед на произволни 50 од запишаните броеви. Докажи дека со помош на само пет прашања Андреј може да го открие редоследот на сите 100 броеви.

6. На неколку деца им се дадени 2^n монети, при што секое дете има најмалку една монета. Во еден потег, секогаш кога некое дете има најмалку половина од сите монети, а повеќе од секое од преостанатите други деца, тоа на секое друго дете му дава онолку монети колку што тоа дете веќе има. Колку најмногу потези може да се направат?

7. Во еден чекор можеме да го измениме множеството $S \subset X = \{1, 2, ..., n\}$ на еден од следниве начини:
   i) го додаваме 1, ако $1 \notin S$,
   ii) го отфрламе n, ако $n \in S$,
   iii) го отфрламе r и го додаваме $r+1$, ако r е таков што $r \in S$ и $r+1 \notin S$.

   Нека претпоставиме дека постои низа од $2^n - 1$ чекори во која од $\varnothing$ доаѓаме до множеството $\{n\}$, при што поминуваме низ секое подмножество на множеството X точно еднаш. Докажи дека $n+1$ е степен на бројот 2.

8. Пабло замислил природен број n, $1 \le n \le 2000$, а Матео пробува да го погоди. Во секој чекор Матео може да избере множество броеви A и во врска со тоа множество на Пабло да му постави едно прашање, на што Пабло одговара со *да* или со *не*. Определи го најмалиот број прашања кои што му се потребни на Матео за со сигурност да го погоди бројот n.

9. Ивана замислила полином $P(x)$ чии коефициенти се ненегативни цели броеви. Марија сака да го определи овој полином. Во еден потез го кажува целиот број k, а Ивана и ја соопштува вредноста $P(k)$. Најди стратегија со која Марија со најмал број потези ќе го определи полиномот $P(x)$.

10. Петар и Васил измислиле десет квадратни полиноми. Потоа Васил кажувал последователни природни броеви (почнувајќи од некој број), а Петар го заменувал секој од кажаните броеви во некој од квадратните полиноми (по сопствен избор) и добиените вредности ги запишувал на табла од лево на

десно. Се покажало, дека броевите, запишани на таблата, формираат аритметичка прогресија (во редослед во кој се запишувани). Колку најмногу броеви може да каже Васил?

11. На кружница се распоредени 2009 ненегативни цели броеви кои се помали или еднакви на 100. Дозволено е да се додаде по 1 на секои два соседни броја, при што за секои два соседни броја оваа операција се извршува најмногу k пати. Определи го најмалиот k за кој сме сигурни дека сите броеви можеме да ги направиме еднакви.

12. Бесмртна болва се движи по целобројните точки од реалната права, почнувајќи од 0. За секој природен број k таа во $k-$тиот скок скока лево или десно за 2^k+1 во однос на точката во која се наоѓа. Дали е точно дека за секоја точка со координата природен број постои момент во кој болвата ќе биде во таа точка, ако и е дозволено да минува низ една иста точка повеќе од еднаш?

13. Дадени се три карти и на секоја од нив е напишан по еден природен број. Овие броеви p,q и r го задоволуваат условот $0<p<q<r$. Тројца играчи A, B и C играат игра во која еден круг се состои во следното: картите се мешаат и се делат така што секој играч добива по една карта и потоа секој играч добива онолку топчиња колку што е бројот запишан на неговата карта, по што картите се враќаат, а топчињата остануваат кај играчите. Играта има N кругови, $N\geq 2$. На крајот на играта, играчот A имал вкупно 20 топчиња, $B-10$ топчиња, а $C-9$ топчиња.
Познато е дека во последниот круг играчот B добил r топчиња. Кој од играчите добил q топчиња во првиот круг?

14. На кружница во некој редослед се распоредени броевите $1,2,...,n$. Ако постојат два соседни броја a и b (b е десно од a) така што $b\leq a-2$, дозволено е на овие броеви да им ги замениме местата. Докажи дека по најмногу $\binom{n}{3}$ вакви замени може да се дојде во состојба по која понатаму замените не се можни.

15. На темињата на правилен петаголник им се придружени цели броеви, чиј збир е природен број. Ако на три последователни темиња им соодветствуваат броевите x,y,z и $y<0$, тогаш се врши следнава операција:

броевите x,y,z се заменуваат со $x+y,-y,z+y$, соодветно.

Оваа операција се изведува се додека барем еден од петте броеви е негативен. Дали постапката ќе заврши по конечно многу чекори?

16. Даден е природен број $N \geq 2$. Во редица се наоѓаат $N(N+1)$ фудбалери со меѓусебно различни висини. Тренерот Ванчо сака да отстрани $N(N-1)$ играчи, така што ќе остане редица со $2N$ фудбалери во која се задоволени следниве N услови:
1) меѓу двајцата највисоки играчи не стои никој,
2) меѓу третиот и четвртиот играч по висина не стои никој,
....
N) меѓу двајцата најниски играчи не стои никој.
Докажи дека ова секогаш може да се постигне.

17. Нека се n и k природни броеви такви што $k > n$ и $k-n$ е парен број. Дадени се $2n$ сијалици означени со броевите $1, 2, ..., 2n$; секоја од кои може да биде запалена или изгаснатa. На почетокот сите сијалици се изгаснатаи. Разгледуваме низи од чекори: во секој чекор се менува состојбата на тачно една сијалица (запалена станува изгасната, а изгасната - запалена).
Нека N е бројот на такви низи од k чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до n се запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати.
Нека M е бројот на такви низи од k чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до n запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати и притоа ниту еднаш не е променета состојбата на сјалиците од $n+1$ до $2n$.
Пресметај $\frac{N}{M}$.

18. Дадена е правоаголна табла $ABCD$ со димензии $\overline{AB} = 20$ и $\overline{BC} = 12$, која е поделена на 20×12 единечни квадрати.
Нека $r \in \mathbb{N}$. Монета може да биде придвижена од еден квадрат на друг ако и само ако растојанието меѓу центрите на двата квадрата е $\sqrt{r}$. Целта е да се најде низа од движења на монетата од квадратот чие теме е A до квадратот чие теме е B.
a) Докажи дека целта не може да се постигне ако r е делив со 2 или 3.
b) Докажи дека целта може да се постигне ако $r = 73$.
c) Дали целта може да се постигне ако $r = 97$?

19. Десет играчи почнале да играат игра, секој со иста сума пари. Еден по друг секој од нив фрлал по пет коцки. По секое фрлање, играчот кој ги фрлил коцките му исплаќа на секој од своите девет соиграчи сума еднаква на $n-$тиот дел од сумата која овој ја имал пред последното фрлање на коцките, каде n е збирот на броевите кои ги покажале коцките. Кога последниот, десеттиот играч ги фрлил коцките збирот на броевите кои го покажале бил 12, и по извршеното плаќање се покажало дека секој играч имал еднаква сума на пари како и на почетокот на играта.

Најди ги, ако тоа е можно, збировите на броевите кои ги покажале коцките во претходните девет фрлања.

20. Во еден ред се наредени n бели и n црни жетони. Во еден потег два разнобојни жетони можат да си ги заменат местата, но само ако меѓу нив има најмногу $n-1$ други жетони. Колкав е најмалиот број на потези со кои, тргнувајќи од произволен распоред, белите жетони може да се разместат на првите n места, а црните жетони на преостанатите n места.

21. Во секоја од шесте кутии $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ на почетокот се наоѓа точно по една монета. Дозволено е да се вршат следниве операции:

1° Да се избере непразна кутија B_j за некој $j \in \{1,2,3,4,5\}$, да се извади една монета од B_j и да се додадат две монети во B_{j+1}.

2° Да се избере непразна кутија B_k за некој $k \in \{1,2,3,4\}$, да се извади една монета од B_k и да се заменат содржините (може да се и празни) на кутиите B_{k+1} и B_{k+2}.

Испитај дали со конечна низа вакви операции може да се постигне кутиите B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 да се празни, а кутијата B_6 да содржи точно $2010^{2010^{2010}}$ монети. (Важи $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

22. Во сите единечни клетки на $n \times m$ таблица е запишан по еден цел број. Дијагонала на таблицата се нарекува множеството клетки за кои разликата меѓу бројот на редот и бројот на колоната е еднаква. Во секој чекор имаме право или да додадеме 1 или да одземеме 1 од сите клетки од даден ред, дадена колона или дадена дијагонала. Докажи, дека ако со помош на овие операции можеме да ги направиме еднакви на нула броевите во секоја 3×3 подтаблица, при што останатите броеви не се менуваат, тогаш можеме да ги направиме еднакви на нула сите броеви од таблицата.

23. Даден е природен број k. Определи го најмалиот природен број $n \geq k+1$ за кој во следнава игра може да се одиграат бесконечно многу потези.

Дадени се n кутии означени со $b_1, b_2, ..., b_n$, при што за секој i кутијата b_i на почетокот содржи точно i монети. Во секој потег редоследно ги реализираме следниве три чекори:

1) Се избираат $k+1$ кутии.
2) Од овие $k+1$ кутии се избира една, да кажеме b_i. Во оваа кутија се додаваат i монети, а од секоја од преостанатите k кутии се отстранува најмалку половина од монетите.

3) Ако некоја кутија се испразни, играта завршува. Во спротивно се преминува на следниот чекор.

24. На бесконечна шаховска табла се игра следната игра. На почеток, n^2 жетони се поставени на полиња на $n \times n$ квадрат и тоа по еден жетон на секое поле. Во оваа игра, „потег“ е скок во хоризонтална или вертикална насока преку зафатено на слободно поле кое е непосредно до него. Жетонот преку кој се скока се отстранува.
Определи ги сите вредности n за кои играта може да се заврши само со еден жетон на таблата.

25. Маѓионичар има 100 карти нумерирани со броевите од 1 до 100. Тој ги става сите карти во три кутии – црвена, бела и сина, така што секоја кутија содржи барем една карта. Гледач од публиката прво избира две кутии, а потоа избира по една карта од секоја од избраните кутии и го соопштува збирот на броевите на избраните карти. Знаејќи го тој збир маѓионичарот ја определува кутијата од која не е избрана карта.
На колку начини маѓионичарот може да ги распореди картите во кутиите така што овој трик секогаш ќе биде успешен? (Два распореди се различни ако барем една карта не е двата пати ставена во иста кутија.)

26. Во секое од темињата на правилен 12-аголник е запишана една од цифрите 0 или 1 (или 0 или 1). Во еден чекор се избира теме во кое е запишана цифрата 1 и се променуваат цифрите во неговите соседни темиња, ако во соседно теме на избраното теме стои 0 запишуваме 1, а ако стои 1 запишуваме 0. Определи ги сите почетни позиции од кои со примена на конечен број на чекори може да се добие позиција во која има запишано една цифра 1 и единаесет цифри 0.

27. Дадени се низа A од 2014 природни броеви од интервалот $[1,6]$ и природен број $t \leq 2014$. Во еден потег можеме да избереме произволни t броеви од A и за 1 да го зголемиме секој од овие броеви кој е помал од 6, а секој број кој е еднаков на 6 да го замениме со 1. Определи ги сите вредности на t, за кои од секоја низа A после конечен број потези може да се добијат само шестки.

28. Во еден ред има $2n-1$ сијалици. На почетокот средната (n – тата) сијалица е запалена, а сите останати се изгаснати. Во еден чекор е дозволено да се изберат две несоседни изгаснати сијалици меѓу кои сите сијалици се запалени и да се промени состојбата на тие две сијалици, како и состојбата на сите сијалици меѓу нив (на пример, од конфигурацијата ●○○○● се добива конфи-

гурацијата $\circ\bullet\bullet\bullet\circ$). Определи го најголемиот број чекори кој може да се реализира.

29. Банката на градот Бата издава монети кои од едната страна имаат ознака H, а од другата ознака T. Хари наредил n вакви монети во низа од лево на десно. Со овие монети тој ја повторува следнава операција: ако во низата има точно $k>0$ монети кои покажуваат H, тогаш тој ја превртува $k-$тата монета од лево, а во спротивно сите монети покажуваат T и постапката завршува. На пример, ако $n=3$ и почетниот распоред е THT, Хари ја извршува низата оперции $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ и постапката завршува по овие три операции.
а) Докажи дека за секој почетен распоред на монетите Хари ја завршува опишаната постапка по конечно многу операции.
б) За почетен распоред C, нека со $L(C)$ е означен бројот на операциите кои Хари ги извршува пред постапката да заврши. На пример, $L(THT)=3$ и $L(TTT)=0$. Определи ја аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C.

30. Во непроѕирен сад се наоѓаат 2016 бонбони нумерирани со броевите 1, 2, ..., 2016, при што 1008 бонбони се црвени, а преостанатите 1008 се жолти. Андреј постапува на следниов начин: во еден потег тој извлекува една бонбона од садот (бонбоната не ја гледа додека не ја извлече), ја става на купче пред себе (пред првиот потег нема бонбони во купчето пред Андреј), а потоа може, ако сака, од купчето да одбере некои две бонбони со иста боја и да ги изеде. Андреј ова го повторува вкупно 2016 пати (т.е. се додека има бонбони во садот). Секогаш кога во оваа постапка тој ќе изеде две бонбони (на опишаниот начин), да кажеме нумерирани со броевите a и b, Андреј добива $|a-b|$ поени.
   1) Докажи дека Андреј може да смисли стратегија која ќе му гарантира најмалку $2\cdot 504^2$ освоени поени на крајот на играта.
   2) Дали Адреј може да смисли стратегија која ќе му гарантира повеќе од $2\cdot 504^2$ поени?

31. На масата се поставени 2009 жетони, секој од кои има бела и црна страна. На почетокот сите жетони се во еден ред и сите, со исклучок на еден, се завртени со белата страна нагоре. Во секој чекор можеме да избереме жетон, завртен со црната страна нагоре, и ги превртуваме двата соседни жетони (или еден, ако сме избрале краен жетон). Определи ги сите почетни положби при кои може да се постигне положба во која сите жетони се завртени со црните страни нагоре.

32. Маѓионичар зад параван ја открива плоштината на конвексен 2008-аголник. Тој посочува две точки од контурата на многуаголникот, гледачите ја повлекуваат правата низ тие два точки и на маѓионичарот му ја соопштуваат помалата од плоштините на добиените многуаголници (ако плоштините се еднакви, тие му ја кажуваат соодветната плоштина). Маѓионичарот посочува како точка теме на многуаголникот или точка, која дели од него опеределена страна во даден од него однос. Докажи дека со 2006 прашања маѓионичарот може да ја открие плоштината на многуаголникот.

33. Нека n е природен број, а t е цел број. На таблата се запишани n различни цели броеви. Бојан, кој е во соседната соба, сака да знае дали меѓу тие броеви постојат неколку броја чиј збир е еднаков на t. Ана, која се наоѓа пред таблата, ќе му помогне на Бојан да дојде до саканото сознание. На почеток, таа му го кажува само вкупниот збир запишани на таблата. Потоа, Бојан во секој чекор кажува една од следниве четири реченици:
1) Дали меѓу броевите запишани на таблата е бројот k?
2) Ако на таблата е запишан бројот k, избриши го.
3) Ако на таблата не е запишан целиот број k, допиши го.
4) Дали броевите на таблата може да се поделат во две множества со еднаков збир на елементите?

На прашањата Ана точно одговара со да или не, а операциите кои ги кажува Бојан таа ги реализира на таблата (ако е можно), при што не му кажува дали ги реализирала. Докажи дека за помалку од $3n$ чекори Бојан може да осознае дали меѓу броевите запишани на почетокот постојат неколку броја чиј збир е еднаков на t.

34. Комплет од 2008 црвени и 2008 бели карти е измешан и секој од 2008 играчи извлекува по две карти. По извлекувањето играчите седнуваат во круг. Во секој чекор од играта играчите истовремено ја реализираат следнава постапка:
Ако играч има барем една црвена карта, тој дава една црвена карта на играчот кој седи десно од него. Ако играчот нема црвена карта, тој дава една бела карта на играчот кој седи лево од него.
Определи го најголемиот можен број чекори кој е потребен за да се дојде до состојба во која секој играч има по една бела и по една црвена карта.

35. Стражарот им ја предлага на затворениците следнава игра. Сите ќе излезат во дворот, каде на секој од нив на глава ќе му биде ставен шешир кој е обоен во една од 5 можни бои. Стражарот потоа затворениците ќе ги нареди во ред така што секој затвореник ги гледа сите шешири освен сопствениот и ќе го праша првиот затвореник во редот дали ја знае бојата на својот шешир. Затвореникот гласно одговара со „да“ или „не“. Ако одговори „не“, одма ќе биде заклучен во самица. Ако одговори „да“, стражарот го прашува која боја е

неговиот шешир, на што затвореникот треба да одговори така што останатите затвореници да не го слушнат неговиот одговор. Ако одговор е погрешен, тој затвореник одма ќе биде заклучен во самица пред сите, а ако одговор е точен, тој затвореник ќе биде одма ослободен пред сите. Стражарот потоа му приоѓа на следниот затвореник во редот и ја повторува истата постапка, и така се до последниот затвореник. Затворениците имаат можност да осмислат стратегија пред почетокот на играта, но кога играта ќе почне, никаква комуникација меѓу затворениците не е дозволена. Ако во затворот има 2015 затвореници, докажи дека постои стратегија со која најмалку 2013 затвореници сигурно ќе бидат ослободени?

23. КОНКУРЕНТСКИ ИГРИ

Во параграф ќе се осврнеме на таканаречените *конкурентски игри*, т.е. на игрите во кои според определени правила играат двајца играчи, при што треба да се определи кој од играчите победува, без разлика како ќе игра противникот. Притоа основна цел е наоѓањето на таканаречената победничка стратегија.

1. На масата има 10 купчиња со 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 ореви. Двајца играчи последователно земаат по еден орев се додека не останат 3 ореви. Ако и трите ореви се од различни купчиња, тогаш играта ја добива играчот кој зема втор (втор играч), а во спротивно играта ја добива играчот кој зема прв (прв играч). Кој играч има победничка стратегија?

2. Дваесет монети се распоредени во круг. Двајца играчи последователно земаат по три монети, се додека не останат две монети. Ако преостанатите монети не се соседни, играта ја добива првиот играч, а ако се соседни, тогаш играта ја добива вториот играч. Кој од двајцата играчи има победничка стратегија?

3. Марко и Симон последователно поставуваат жетони во полињата табла со димензии 20×20. На почетокот таблата е празна и прв на потег е Марко. Играта ја добива играчот кој прв ќе постави жетон така што во пресечните полиња на два реда и две колони има жетони. Кој од играчите има победничка стратегија?

4. Даден е $n\in\mathbb{N}$. Горјан и Андреј ја играат следнава игра против Филип. Прво Филип во еден ред на масата поставува $2n$ карти означени со броевите $1,2,...,2n$. Откако ќе го погледне распоредот на картите, Горјан може (но не мора) да избере две карти и да им ги замени местата. Потоа сите карти се вртат со лицето надолу, а на масата и приоѓа Андреј. Филип кажува било кој број од 1 до $2n$, а Андреј ги превртува картите за да ја најде картата со тој број. Горјан и Андреј победуваат ако Андреј ја најде картата во најмногу n обиди, а во спротивно победува Филип. Кој има победничка стратегија? (Горјан и Андреј може да се договараат само пред почетокот на играта.)

5. Двајца играчи во декаден брон систем формираат шестцифрен број според следните правила:
   - првиот играч ја кажува првата цифра на бројот, потоа вториот играч ја кажува втората цифра, потоа првиот играч ја кажува трета цифра итн. наиз-

менично до шестата цифра на бројот и

- ниту една цифра не смее да биде повторена.

Ако добиениот број е сложен победува првиот играч, а ако е прост број победува вториот играч. Кој играч има победничка стратегија?

6. На кружница се избрани $2n+1$, $n \geq 2$ точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Двајца играчи последователно бришат по една точка. Ако по потегот на некој од играчите сите триаголници со темиња во останатите точки се тапоаголни, играта завршува со победа на тој играч. Кој играч има победничка стратегија, првиот или вториот?

7. Даден е природен број n. Јана запишува n различни природни броеви, а потоа Иван брише неколку од броевите (може ниту еден, но не може сите броеви) и пред секој од преостанатите броеви става еден од знаците $+$ или $-$. Иван победува ако добиениот резултат е делив со 2003, а во спротивен случај победува Јана. Кој од играчите има победничка стратегија?

8. Даден е природен број n. Даниел и Марија играат игра. Даниел има k листови, каде k е природен број. На горната страна на секој лист тој запишува некои од броевите од 1 до n (може да запише произволно многу броеви, вклучително ниту еден или сите броеви). На спротивната страна тој ги запишува останатите броеви. Марија може да преврти дел од листовите (може да преврти произволно многу листови, вклучително нула или сите листови). Ако Марија може да постигне сите броеви од 1 до n да се гледаат, тогаш таа победува.

   Определи го најмалиот број k, за кој Марија секогаш може да победи, независно од тоа кои броеви ги запишал Даниел.

9. Во конвексен 100-аголник $\mathbb{M}$ е избрана точка X која не лежи на страна или дијагонала на $\mathbb{M}$. На почетокот нема означени темиња. Павел и Вангел по ред означуваат (до тогаш неозначени) темиња на $\mathbb{M}$, при што во првиот чекор Павел означува две темиња, а потоа секој од нив кога е на потег означува по едно теме. Потезите ги влечат наизменично. Играта ја губи тој по чиј потег точката X ќе падне во внатрешноста на многуаголник чии темиња се означени. Докажи дека Павел има победничка стратегија.

10. Во рамнината се обележани сите точки со целобројни координати (x, y) такви што $x^2 + y^2 \leq 10^{10}$. Двајца играчи ја играат следнава игра, при што потезите ги влечат наизменично. Првиот става жетон на обележана точка и точката ја брише. Во секој следен чекор жетонот се преместува во друга одбележена точка и таа се брише. Притоа должината на чекорите треба да

расте, но е забрането преместување од точка во симетричната нејзина точка во однос на центарот. Играта ја губи играчот што не може да направи потег. Кој играч има победничка стратегија?

11. Нека t, a и b се природни броеви. Двајца играчи ја играат следнава (t, a, b) игра: првиот играч го заменува бројот t со еден од броевите $t-a$ или $t-b$, потоа вториот играч го заменува добиениот број ако од него одземе a или b, потоа одново првиот играч одзема a или b од бројот кој е добиен од вториот играч итн. Играта ја губи оној играч кој не може бројот t да го замени со природен број. Докажи, дека постојат бесконечно многу броеви t такви што првиот играч има победничка стратегија за (t, a, b) игра за секои a и b такви што $a+b=2005$.

12. Дадена е $(m+1)\times m$ решетка и жетон во еден од нејзините јазли. Двајца играчи последователно го поместуваат жетонот во соседни јазли, при што не смее да се минува по отсечка која веќе е искористена. Губи играчот кој не може да повлече потег. Докажи дека ако на почетокот жетонот е во еден од јазлите на долната хоризонтала, тогаш првиот играч има победничка стратегија.

13. Дадени се природни броеви m и n. Дадени се n купчиња од златни монети, при што i – тото купче содржи $a_i > 0$ монети. Ја разгледуваме следнава игра:
    1) Бојан избира множества $B_1, B_2, ..., B_n$, секое од кои е подмножество на $\{1, 2, ..., m\}$.
    2) Ана, знаејќи ги избраните множества на Бојан, избира непразно подмножество S на $\{1, 2, ..., m\}$.
    3) Монетите од i – тото купче се даваат на Бојан ако $B_i \cap S$ има парен број елементи. Во спротивен случај монетите се даваат на Ана.

    Докажи дека за секој избор на множествата $B_1, B_2, ..., B_n$ кој може да го направи на Бојан, Ана може да избере множество S така, што ќе добие повеќе монети од Бојан.

14. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$. Играчите A и B наизменично избираат цели броеви $n_1, n_2, n_3, ...$ според следниве правила:
    - играчот A го знае бројот n_{2k} и избира природен број n_{2k+1} таков што $n_{2k} \le n_{2k+1} \le n_{2k}^2$; и
    - играчот B го знае бројот n_{2k+1} и може да избере природен број n_{2k+2} таков што $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ е степен на прост број или на бројот 1.

Играчот A победува ако го избере бројот 1990, а играчот B победува ако го избере бројот 1. За кое n_0

а) играчот A може да победи,

б) играчот B може да победи, и

в) ниту еден од играчите нема победничка стратегија?

15. Ана и Бојан ја играат следнава игра. Пред нив се наоѓаат две непразни купчиња монети. Наизменично, прва почнува Ана, секој избира купче во кое има парен број монети и половина од монетите ги преместува од тоа купче во другото купче. Играта завршува ако играчот кој е на потег не може да одигра потег, во кој случај победува другиот играч. Определи ги сите парови (a,b) природни броеви такви што ако купчињата на почетокот имаат a и b монети, тогаш Бојан има победничка стратегија.

16. Дадено е множество од 2013 прости броеви. Иван избира пар (p,q) од различни броеви од даденото множество. Петар сака да ги определи броевите p и q, при што за едно прашање на Иван му соопштува пар природни броеви (a,b), а Иван соопштува дали бројот $ap-bq$ е позитивен, негативен или е еднаков на нула. Определи го најмалиот број прашања кои му се потребни на Петар за да со сигурност знае кои броеви ги избрал Иван?

17. Дадени се природни броеви n и k, за кои $n \geq k \geq 2$. Андреј ја игра следнава игра со Мартин, кој располага со $2n$ карти, при што за секој $i = 1, 2, ..., n$ бројот i е запишан точно на две карти. Мартин во произволен редослед ги реди картите со запишаните броеви надолу. Андреј прави чекор на следниов начин: избира k од картите на Мартин и тој му ги кажува броевите запишани на нив. Ако меѓу овие k карти има две со еднакви броеви запишани на нив Андреј победува. Ако нема, Мартин ги размешуваа само картите кои во овој потег ги избрал Андреј (притоа Андреј не го гледа) и Андреј повторно е на потег. Ќе велиме дека играта е добитна за Андреј, ако постои природен број m и стратегија со која Андреј може да победи во најмногу m чекори, независно од како Мартин ги размешува картите. За кои вредности на n и k играта е добитна за Андреј?

18. Нека p е прост број и нека $M = a_0 + 10a_1 + ... + 10^{p-1}a_{p-1}$. Играчите A и B играат игра, при што играчот A игра прв. Тие наизменично бираат број i од множеството $\{0,1,..., p-1\}$ кој претходно не е избран, па на местото на a_i запишуваат некоја цифра (може и нула). Целта на играчот A е по завршување на играта бројот M да биде делив со p.

Докажи дека A има победничка стратегија.

19. *Погодувалка* е игра која ја играат двајца играчи A и B. Правилата на играта зависат од природните броеви k и n кои се познати и на едниот и на другиот играч.
На почетокот на играта A избира броеви x и N такви што $1 \le x \le N$. Играчот A на играчот B не му соопштува информација за бројот x, но му ја соопштува точната вредност на бројот N. Играчот B пробува да добие информации за бројот x поставувајќи му на играчот A прашања од следниот вид: во секое прашање B избира произволно подмножество S на множеството природни броеви (може да избира исто подмножество повеќе пати) и го прашува играчот A дали x припаѓа на S. Играчот B може да поставува колку сака прашања. По секое прашање играчот A одговара со *да* или со *не*, но може и да лаже. Единствено ограничување е меѓу $k+1$ последователни одговори барем еден мора да е вистинит.
Откако B ќе постави колку што сака прашања, тој треба да избере множество X кое се состои од најмногу n природни броеви. Ако x припаѓа на X тогаш B победува, а во спротивно B губи. Докажи дека:
а) Ако $n \ge 2^k$, тогаш B има победничка стратегија.
б) За секој доволно голем k постои природен број $n \ge 1,99^k$ така што A има победничка стратегија.

20. Решетка е множеството од сите точки од видот (m,n), каде m и n се цели броеви за кои важи $|m| \le 2019, |n| \le 2019$ и $|m|+|n| < 4038$. Точките (m,n) од решетката за кои $|m| = 2019$ или $|n| = 2019$ ги нарекуваме *рабни*. Четирите прави $x = \pm 2019$ и $y = \pm 2019$ ги нарекуваме *рабови*. Две точки на решетката се соседни ако растојанието меѓу нив е еднакво на 1.
Зоран и Марко играат игра на решетката. Тие играат наизменично при што Зоран ја почнува играта со поставување на жетон на точката $(0,0)$, а Марко прв повлекува потег.
1) Во секој свој потег Марко отстранува најмногу по две рабни точки од секој раб.
2) Во секој свој потег Зоран прави точно три *чекори*. Чекорот се состои во поместување на жетонот на една од соседните точки кои не се отстранети.
Играта завршува со победа на Зоран во моментот кога тој ќе го постави жетонот на некоја гранична точка која сè уште не е отстранета. Дали Зоран има победничка стратегија?

21. Дадена е таблица $1\times n, (n\geq 2)$. Двајца играчи во слободните полиња наизменично ги запишуваат знаците „+“ и „-“. Првиот играч секогаш запишува „+“, а вториот играч секогаш запишува „-“. Не е дозволено два исти знака да бидат запишани во две соседни полиња. Играта ја губи играчот кој не може да одигра потег. Кој од играчите има победничка стратегија?

22. Двајца играчи ја играат следнава игра: наизменично во темињата на $n-$ аголник ги запишуваат броевите 0 или 1. Првиот играч ја почнува играта и победува ако по некој негов потег постои триаголник чии темиња се три последователни темиња на $n-$аголникот, таков што збирот на броевите запишани во неговите темиња е делив со 3. Вториот играч победува ако тоа успее да го спречи. Определи кој играч има победничка стратегија ако:
а) $n=2019$, б) $n=2020$, в) $n=2021$.

23. *Позиција* е секоја точка (x,y) во рамнината таква што x и y се природни броеви не поголеми од 20.
На почетокот, сите 400 позиции се слободни. Ана и Бојан играат игра во која наизменично повлекуваат потези, при што Ана игра прва. Во секој свој потег Ана поставува нов црвен жетон на слободна позиција така што растојанието меѓу секои две позиции на кои се наоѓаат црвени жетони е различно од $\sqrt{5}$. Во секој свој потег Бојан поставува нов син жетон на некоја слободна позиција. (Позицијата на која се наоѓа син жетон може да биде на било кое растојание од другите позиции на кои се наоѓа некој жетон.) Играта завршува кога некој од играчите не може да повлече потег.
Определи го најголемиот број K така што Ана сигурно може да постави K црвени жетони, без разлика како Бојан ги поставува сините жетони.

24. Дадена е квадратна решетка со димензии 2012×2012. Во некои темиња се наоѓаат мува и k пајаци. Еден потег се состои во следново. Мувата се поместува во некое соседно теме или останува на исто место, а потоа секој од $k-$те пајаци се поместува во некое соседно теме или останува на место (соседни се темињата кои се разликуваат во точно една координата и тоа за 1). Во секој момент мувата и пајаците ја знаат позицијата на останатите.
а) Определи го најмалиот k за кој пајаците може да ја фатат мувата во конечно многу потези, без разлика на почетната позиција на мувата и пајаците.
б) Одговори на истото прашање во случај на кубна решетка со димензии $2012\times 2012\times 2012$.

25. Дадена е коцка. По нејзините рабови се движат мравка и два пајаци. Нивните најголеми брзини се еднакви. На почетокот двата пајаци се наоѓаат во едно теме, а мравката се наоѓа во дијагоналното спротивно теме. Докажи дека

пајаците секогаш може да ја фатат мравката. Во текот на движењето и мравката и пајаците имаат информација за моменталната положба на сите учесници во потерата.

26. Дадена е коцка. По нејзините рабови се движат мравка и три пајаци. Мравката е три пати побрза од секој од пајаците. Докажи дека пајаците секогаш може да ја фатат мравката. Во текот на движењето и мравката и пајаците имаат информација за моменталната положба на сите учесници во потерата.

27. Дадени се n кутии нумерирани со броеви од 1 до n. На почетокот во секоја кутија има карта со бројот на кутијата. Велко произволно ги разместил картите во кутиите и потоа во $i-$тата кутија се наоѓала картата со број a_i, $i=1,2,...,n$. Павле има право да избере две карти со броеви x и y и да им ги замени местата, при што за размената на картите плаќа $2|x-y|$ денари. Докажи дека, Павле може да ги врати сите карти на почетните места но така да плати најмногу $\sum_{i=1}^{n}|a_i-i|$ денари.

28. Ловец и невидлив зајак играат игра во рамнината. Почетните точки во рамнината на зајакот и ловецот, соодветно означени со A_0 и B_0, се исти. По $n-1$ кругови играње, зајакот е во точката A_{n-1}, а ловецот е во точката B_{n-1}. Во $n-$тиот круг редоследно се случуваат следниве настани:

i) Зајакот незабележливо се поместува во точка A_n која е на растојание 1 од точката A_{n-1},

ii) Ловецот на радар отчитува точка P_n. Единствено што гарантира радарот е дека растојанието меѓу точките P_n и A_n е најмногу 1.

iii) Ловецот се поместува во точка B_n на растојание точно 1 од точката B_{n-1}, што зајакот го гледа.

Дали ловецот секогаш, без разлика како ќе се движи зајакот и какви се извештаите на радарот, може да се движи така што ќе обезбеди по 10^9 кругови растојанието меѓу него и зајакот да биде најмногу 100?

24. ТАБЕЛИ И РАСПОРЕДИ

1. Мравка се движи по линиите на квадратна шема од теме до теме на следниот начин: поаѓа од едно теме на шемата и во секое следно теме го менува правецот на движење за 90°. По посетата на одреден број на темиња, мравката се вратила во темето од кое го почнала движењето.
Докажи дека бројот на темиња кои мравката ги посетила е делив со 4. (Секое теме се брои онолку пати колку што е посетено.)

2. Чета од $n(n+2)$ војници е построена во n колони и $n+2$ реда на еднакви растојанија од еден метар. По команда при која секој војник се придвижува за еден метар во еден од четирите правци или останува на место, четата е построена во $n+2$ колони и n редови на еднакви растојанија. Докажи, дека n е парен број.

3. Дадена е табела со димензиии $n\times n$ во која со ѕвездички се обележани $n-1$ квадратче. Докажи, дека со меѓусебно разместување на редовите и меѓусебно разместување на колоните може ѕвездичките да се постават само во квадратчињата кои се наоѓаат под дијагоналата која ги поврзува горниот лев и долниот десен агол.

4. Во полињата на квадратна табела со димензии $n\times n$ во произволен редослед се запишани броевите $1,2,...,n^2$. Докажи, дека постојат две соседни полиња, за кои разликата меѓу броевите, запишани во нив, е поголема или еднаква на n.

5. Разгледуваме квадратна табела

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{matrix}$$

која содржи ненегативни цели броеви и го има следното својство: ако $a_{ij}=0$, тогаш збирот на елементите на $i-$тата редица и $j-$тата колона е

$$a_{i1}+a_{i2}+...+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+...+a_{nj}\geq n.$$

Докажи, дека $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq \frac{1}{2}n^2$.

6. Во секое поле на табела со димензии $n\times n$ е запишан еден од броевите $-1,0$ или 1. Дали може збировите на запишаните броеви по редици и колони да бидат различни $2n$ броеви, ако
а) $n=4$, б) $n=5$.

7. Во секое поле на квадратна $n\times n$ табела, $n\geq 2$, е запишан еден од броевите $+1$ или -1. Полето кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона го означуваме со (i,j), $i,j=0,1,...,n-1$. Соседни полиња на полето (i,j) се полињата $(i,j-1),(i,j+1),(i-1,j),(i+1,j)$ каде собирањето и одземањето е по модул n. Во еден чекор го заменуваме бројот запишан во секое поле со производот на броевите во четирите соседни полиња. На пример, за табела 3×3 имаме

+1	−1	+1
+1	−1	−1
−1	+1	−1

$\longrightarrow$

+1	−1	−1
−1	+1	+1
−1	+1	+1

Определи ги сите вредности на n, за кои од произволна табела после конечен број чекори може да се добие табела составена само од $+1$.

8. Табела $n\times 2^n$ е пополнета со нули и единици така што нема две еднакви колони. Со a_{ij} да го означиме бројот запишан во $i-$тиот ред и $j-$тата колона. Ако збировите $\sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij}$, за секој $i=1,2,...,n$ се еднакви, определи ја нивната најмала можна вредност, кога:
а) $n=3$, б) $n=4$.

9. Дадена е табела со димензии $n\times n$ чии колони се нумерирани од 1 до n. Во секое поле од табелата е запишан природен број од 1 до n така што во секој ред и во секоја колона броевите се различни. Едно поле се нарекува добро ако бројот запишан во него е поголем од бројот на колоната во која тоа се наоѓа. Определи ги сите природни броеви n за кои сите редови содржат еднаков број добри полиња.

10. Во единечните клетки на $n\times m$ табела е запишан по еден цел број. Дијагонала на табелата се нарекува множеството клетки за кои разликата меѓу бројот на редот и бројот на колоната е еднаква. Во секој чекор имаме право или да додадеме 1 или да одземеме 1 од сите клетки од даден ред, дадена колона или

дадена дијагонала. Докажи, дека ако со помош на овие операции можеме да ги направиме еднакви на нула броевите во секоја 3×3 подтабела, при што останатите броеви не се менуваат, тогаш можеме да ги направиме еднакви на нула сите броеви од табелата.

11. Во квадратна табела со димензии 7×7 Марко ги запишал сите природни броеви од 1 до 49. Горјан треба да го открие распоредот на броевите во табелата. Тој може да избере квадрат кој покрива некои полиња на табелата и на Марко да му постави прашање кои броеви се наоѓаат во внатрешноста на тој квадрат. Определи го најмалиот број прашања кои Горјан треба да ги постави за да врз основа на одговорите на Марко го открие распоредот на сите броеви во табелата?

12. Броевите од 51 до 150 се запишани во полињата на табела со димензии 10×10. Дали е можно за секои два броја a и b кои се наоѓаат во соседни полиња барем една од равенките $x^2-ax+b=0$ и $x^2-bx+a=0$ да има два целобројни корени? (Соседни се полиња кои имаат заедничка страна.)

13. Дадена е квадратна табла со думензии $n\times n$, $n\geq3$ е природен број. На секое поле од главната дијагонала (сите полиња од горниот лев до долниот десен агол на таблата), без првото и последното, е поставен по еден жетон. Дозволена е следнава операција: ако на дадено поле има жетон, а во двете полиња оддесно и одгоре на даденото поле нема жетони, можеме да го отстраниме тој жетон и да поставиме по еден жетон во тие две празни полиња. Дадена операција е применета конечен број пати, после што се покажало дека во полињата на главната дијагонала нема жетони. Определи ги сите можни вредности на бројот на жетоните на таблата во тој момент.

14. Даден е природен број k. Во секое поле на квадратна $n\times n$ табела е запишан ненегативен цел број помал или еднаков на k. Во еден чекор додаваме 1 на броевите од даден ред или дадена колона (броевите еднакви на $k+1$ ги заменуваме со 0). Познато е дека дадената табела е добиена од нултата табела со конечно многу чекори. Докажи дека од секој број од дадената табела може да се добие 0 по најмногу kn чекори.

15. Множеството полиња на табела со димензии $n\times n, n\geq5$ го нарекуваме *убаво*, ако секој ред и секоја колона на табелата содржи барем по две полиња од тоа множество. Определи го најголемиот број m со следното својство: постои убаво множество со m полиња, кое престанува да биде убаво ако од него отстраниме произволно поле.

16. Нека A е множеството од сите низи од 0 и 1 со должина 4. За две такви низи ќе велиме дека се соседни ако се совпаѓаат или ако се разликуваат во точно еден член. Нека M е подмножество од A со својството: За секои два елементи a и b на A постои елемент на M, кој е соседен со a, но не е соседен со b или е соседен со b, но не е соседен со a. Определи го најмалиот можен број елементи на M ?

17. На состанок на комисијата за ЕГМО, 40 членови на комисијата од 30 предложени задачи ја избира првата задача за ЕГМО. Се договориле да биде избрана задача која може да ја решат најмалку половина од членовите на комисијата, но не сите членови. Се покажало дека секој член на комисијата решил точно 26 задачи, при што никои два члена не решиле исто множество задачи. Докажи дека комисијата може да најде соодветна задача.

18. Определи ги сите природни броеви n за кои е можно во секое поле на $n \times n$ табела да се запише една од буквите I, M и O така што се исполнети следниве услови:
   - во секој ред и секоја колона, една третина од запишаните букви се I, третина се M и третина се O;
   - на секоја дијагонала на која бројот на запишаните букви е делив со три, една третина ја сочинуваат буквите I, третина буквите M и третина буквите O.

   Напомена. Редовите и колоните на $n \times n$ табелата се означни со броевите од 1 до n на вообичаениот начин. На секое поле соодветствува пар природни броеви (i, j), $1 \le i, j \le n$ За $n > 1$, табелата има $4n - 2$ дијагонали од два вида. Дијагонала од првиот вид се состои од сите полиња (i, j) за кои збирот $i + j$ е константен, додека дијагонала од вториот вид се састои од сите полиња (i, j) за кои разликата $i - j$ е константна.

19. Определи ги сите природни броеви n, за кои во секое од единечниге квадратчиња на квадратна табла со димензии $n \times n$ може да се запише по еден од броевите $-1, 0$ или 1, но така што сите $2n$ збирови на броевите запишани во колоните и редиците се различни.

20. Дадени се природни броеви m и n. Определи го бројот на начините на кој може да се пополнат полињата на табела $m \times n$ со броеви од множеството $\{-2, -1, 1, 2\}$ така што производот на броевите во секој ред и во секоја колона е еднаков на -2.

21. Правоаголна шема со димензии $m \times n$ е пополнета со броевите -1 и 1. На колку начини може да се направи пополнувањето така што производот на

броевите во секоја колона да е -1, а производот на броевите во секој ред да е еднаков на 1?

22. Матрицата $n \times n$ со елементи од множеството $S=\{1,2,\dots,2n-1\}$ се нарекува *сребрена* матрица, ако за секој $i=1,2,\dots,n$, $i-$тата редица и $i-$тата колона заедно ги содржат сите елементи од S. Покажи дека:
а) не постои сребрена матрица за $n=1997$,
б) сребрени матрици постојат за бесконечно многу броеви n.

23. Во табела со димензии 2007×2007 се обоени неколку полиња. Нека S_{ij} е множеството од обоени полиња (x,y) за кои $x \le i,\ y \le j$. На почетокот во секое обоено поле го запишуваме бројот $|S_{i,j}|$. Во секој следен чекор во секое обоено поле (i,j) го запишуваме збирот на сите броеви кои во претходниот чекор се запишани во полињата од множеството $S_{i,j}$. Докажи, дека постои природен број M таков што по M чекори сите броеви запишани во обоените клетки ќе бидат непарни.

24. Табелата со димензии $n \times n$ во чии единечни полиња се броевите $1,2,\dots,n^2$ (на секое поле точно по еден број и секој број се наоѓа на точно едно поле) ја нарекуваме *добра* ако сите производи од по n броеви кои се наоѓаат на n „расфрлени" полиња даваат ист остаток при делење со n^2+1. Дали постои добра табела за:
а) $n=8$, б) $n=10$?
(n полиња се „расфрлени" ако ниту една редица и ниту една колона не содржи две од овие полиња.)

25. Определи ја најголемата вредност на бројот a таков што за било кој распоред на кружница на броевите 1, 2, 3, ..., 10 мора да постојат три соседни броеви чиј збир е поголем или еднаков на a.

26. Нека $n \in \mathbb{N}$. Броевите $1,2,\dots,n$ се распоредени на кружница така што збирот на никои три последователни броја не е поголем од S. Определи ја најмалата можна вредност на S за $n=9$.

27. Даден е природен број n. Ги разгледуваме сите тројки (a,b,c) различни природни броеви такви што $a+b+c=n$. Со k да го означиме најголемиот број такви тројки кои може да се изберат така што никои две немаат заеднички елемент. Докажи дека $k \le \frac{2n-3}{9}$.

28. Даден е природен број n. Определи го бројот на дисјунктни парови елементи на множеството $\{1,2,...,n\}$ кои може да се изберат така што збировите во паровите се различни и не се поголеми од n.

29. Докажи дека броевите 1, 2, ..., 2013 не може да се распоредат на кружница така што за секои два соседни броја x, y важи $503 \leq |x-y| \leq 1005$.

30. Во p точки од кружницата се запишани знаци плус, а во m точки се запишани знаци минус (во секоја точка по еден знак). Кружницата ја обиколуваме обратно од движењето на стрелките на часовникот. Нека x е бројот на знаци плус кои следуваат по знак плус, а y е бројот на знаци минус кои следуваат по знак минус. Докажи дека $p-m=x-y$.

31. На кружница се запишани 100 цели броеви. Секој од запишаните броеви е поголем од збирот на двата броја запишани по него во насока на движењето на стрелката на часовникот. Определи го најголемиот можен број позитивни броеви.

32. Момчиња и девојчиња, кои се вкупно n^2, се распоредени во $n\times n$ квадрат. За секој ред и за секоја колона, како и за секоја од $2(2n-1)$ дијагонали, знаеме колку девојчиња има во неа. За кои броеви n овие податоци ни се доволни за да ги определиме местата на сите девојчиња? За кои места со сигурност можеме да кажеме дека на нив се девојчиња или момчиња?

33. Ѓердан се состои од 100 сини и неколку црвени монистра. Познато е дека секој дел од ѓерданот кој содржи 8 сини монистра, содржи и најмалку 5 црвени монистра. Определи го најмалиот можен број на црвените монистра.

34. За природниот број $n \geq 4$ ќе велиме дека е *необичен*, ако во секое поле на $n\times n$ квадрат $\mathbf{P}$ може да се запише реален број така што збирот на 9-те броја во секој 3×3 квадрат, кој се содржи во $\mathbf{P}$, е негативен, а збирот на 16-те броја во секој 4×4 квадрат, кој се содржи во $\mathbf{P}$, е позитивен. Определи ги сите необични броеви.

35. Квадрат со страна 5 е поделен на 25 квадратчиња со страна 1. Во секое мало квадратче е запишан по еден позитивен број, помал или еднаков на 1, така што се исполнети следниве услови:
    - збирот на броевите запишани во секој ред и во секоја колона е цел број,
    - збирот на сите 25 броеви е еднаков на 11.

    а) Докажи дека барем еден од броевите е поголем или еднаков на $\frac{3}{5}$.

б) Ако точно еден од запишаните броеви е поголем или еднаков на $\frac{3}{5}$, докажи дека збирот на броевите во неговиот ред е еднаков на збирот на броевите во неговата колона.

36. Едно распоредување на жетони во полињата на $n\times n$ квадрат се нарекува разредено ако секој 2×2 квадрат содржи најмногу 3 жетони. Горјан поставил жетони така што добил разредено распоредување, но забележал дека, ако го премести било кој жетон во било кое слободно поле, тогаш ќе добие распоредување кое не е разредено. Определи ги природните броеви n за кои што ова е можно.

37. а) Докажи дека постојат пет ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1 и се такви што како и да се распоредат овие пет броеви на кружница, постојат два соседни броја чиј производ не е помал од $\frac{1}{9}$.

б) Докажи дека било кои пет ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1 може да се распоредат на кружница така што на секои два соседни броја производот не е поголем од $\frac{1}{9}$.

38. Определи ги сите парови природни броеви a и b за кои во темињата на правилен $(a+b)-$аголник може да се постават a единици и b нули така што броевите кои се поставени во темињата може да се заротираат за некој агол и по ротацијата во однос на почетната положба во две соседни темиња нулата и единицата ги заменат местата, а во сите останати темиња се наоѓаат истите броеви како во почетната положба.

39. Нека m и n се заемно прости природни броеви. Во секое поле на бесконечна шаховска табла е запишан по еден реален број така што важи: збирот на броевите во секој правоаголник $m\times n$ или $n\times m$ е еднаков на нула. Докажи дека барем два од запишаните броеви се меѓусебно еднакви.

40. Еден клас има точно 28 ученици кои учат во училница која има точно 14 клупи. Во секоја клупа седат точно по два ученика. По истекот на месецот класниот раководител ги прераспоредува учениците, така што двајца ученици кои претходно седеле еден до друг не може да седат еден до друг во некој од наредните месеци. Колку месеци редоследно такви распореди на учениците може да направи класниот раководител?

41. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. На кружница се поставени n светилки $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$, во овој редослед. Секоја светилка е запалена или изгасната. На почетокот сите

светилки се запалени. Се прават чекори $S_0, S_1, ..., S_j, ...$. Во чекорот S_j ако светилката L_{j-1} е запалена, тогаш се менува состојбата на L_j и тоа од запалена во изгасната и обратно, а ако светилката L_{j-1} е изгасната тогаш состојбата на светилката L_j не се менува. Во чекорот S_j состојбата на останатите светилки не се менува. Светилките се означени по $\mod n$, т.е. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ итн.

Докажи дека

а) Постои природен број $M(n)$ таков што после $M(n)$ чекори сите светилки ќе бидат запалени.

Б) Ако n е од облик 2^k тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - 1$ чекори.

в) Ако n е од облик $2^k + 1$ сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - n + 1$ чекори.

42. Во секое теме на еден правилен 360-аголник $\boldsymbol{F}$ со центар O е запишан по еден природен број помал или еднаков на 180, така што збирот на сите запишани броеви е непарен. Докажи, дека може да се најдат две темиња A и B на $\boldsymbol{F}$ такви што разликата на запишаните броеви во нив е еднаква на мерката на $\measuredangle AOB$ изразена во степени.

43. На тркалезна маса седат n, $n \geq 3$ луѓе. Секоја минута еден пар соседи ги менува своите места. Кое е најмалото време за кое сите луѓе ќе седат во спротивна насока, (левиот сосед на секој човек ќе стане десен и обратно)?

44. Кејптаунската банка издава монети со вредност $\frac{1}{n}$ за секој природен број *n*. Ако имаме конечно многу такви монети (не задолжително со различни вредности) со вкупна вредност не поголема од $99 + \frac{1}{2}$, докажи дека можеме да ги распоредиме во најмногу 100 групи така што вкупната вредност на монетите во секоја група не е поголема од 1.

25. МЕРЕЊА

1. Марко има 100 јаболки со вкупна маса од $10kg$, такви што масата на секоја јаболка не е помала од $25g$. Марко треба да ги расече јаболките на делови и да ги подели на 100 гости, така што секој гостин да добие по $100g$. Докажи, дека Марко може да го направи расекувањето така што секое парче да има најмалку $25g$.

2. Дадени се n тегови со маси природни броеви $w_1 \le w_2 \le ... \le w_n$. Едно такво множество од тегови се нарекува *комплетно*, ако секој природен број, кој е помал од $w_1 + w_2 + ... + w_n$, може да се претстави како збир од неколку од дадените маси. Докажи, дека ако од комплетно множество се отстрани најголемата мада, тогаш останатите маси повторно формираат комплетно множество.

3. Дадени се n торби и во секоја торба има по 100 монети. Во една од торбите секоја монета е со маса 9 грама, а во останатите $n-1$ торби секоја монета е со маса 10 грама. Располагаме со вага која покажува маси до 1 килограм. Определи го најмалиот можен број мерења, со кои може да се определи торбата со полесните монети.

4. Дадени се N тегови такви што односот на масите на секои два тега е помал или еднаков на 1,25. Петар ги разделил теговите на 10 групи со еднакви маси, а Васил на ги разделил теговите на 11 групи со еднакви маси. Определи ја најмалата можна вредност на N.

5. Нека n е природен број. Дадена е вага и n тегови со маси $2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}$. Сите n тегови се ставаат еден по друг на тасовите на вагата, односно во секој од n – те чекори се избира еден од теговите, кој не се наоѓа на тасовите, и се става или на левиот или на десниот тас. Притоа теговите се ставаат така што во ниту еден момент десниот тас не е потежок од левиот. Определи го бројот на начините на кои оваа постапка може да се реализира.

6. Меѓу 9^k на изглед исти монети една е полесна од останатите. Дадени се три ваги без тегови, едната од кои е неисправна (при секое мерење таа може

случајно да биде како точна, така и неточна). Како може со најмногу $3k+1$ мерења да се определи неисправната монета?

7. Во $n>1$ сандаци се наоѓаат два вида златници: исправни и неисправни, кои на изглед не се разликуваат. Во секој сандак се наоѓаат само златници од едниот вид. Златниците од ист вид имаат еднаква маса, додека златниците од различните видови имаат различна маса. Масата на исправниот златник е позната. Определи го максималниот број мерења на дигитална вага со кои може да се констатира кои сандаци содржат неисправни златници, како и колкава е масата на неисправен златник.
(Од секој сандак можеме да земеме онолку златници колку што ни се потребни при мерењата.)

8. Нумизматичар има 100 на изглед еднакви монети. Тој знае дека 30 од нив се вистински, а 70 се фалсификувани. Освен тоа знае дека сите вистински монети се со еднаква маса, а сите фалсификувани монети имаат различни маси и секоја фалсификувана монета е потешка од секоја вистинска монета. Масите на поединечните монети не му се познати. Нумизматичарот има вага со два таса без тегови, на која може со едно мерење да спореди две групи со еднаков број монети. Определи го најмалиот број мерења со кој со помош на вагата нумизматичарот може со сигурност да најде барем една вистинска монета.

9. Работник располага со контејнер и мала количка. Контејнерот може да собере најмногу $1000\,kg$, а количката најмногу $1\,kg$ жито. Даден е конечен број торби со жито, чија вкупна маса е поголема од $1001\,kg$, но масата на секоја од нив не е поголема од $1\,kg$. Определи го максималното количество жито кое може да биде натоварено заедно во контејнерот и количката, независно од масата на одделните торби.

10. Работник располага со две колички. Едната може да носи не повеќе од $8\,kg$, а другата не повеќе од $9\,kg$. Даден е конечен број торби со жито кои имаат вкупна маса поголема од $17\,kg$, но масата на секоја од нив е не поголема од $1\,kg$. Определи го максималното количество на жито кое може да биде натоварено заедно во двете колички, независно од масите на одделните торби.

11. Нека N е природен број. Дадено е множество тегови кое ги задоволува следниве услови:
   1) Секој тег од множеството има некоја од масите $1,2,...,N$;
   2) За секој $i\in\{1,2,...,N\}$ постои тег со маса i.

3) Збирот на масите на сите тегови од даденото множество е парен број.
Докажи дека даденото множество тегови може да се разбие на две подмножества кои имаат еднакви маси.

12. Емилија и Весна го пребарувале таванот на дедо Марко и нашле вага и кутија со тегови. Кога теговите ги распределиле по маси, констатирале дека има 5 различни групи тегови. Играјќи се со вагата и теговите, констатирале дека ако на едната страна на вагата стават било кои два тега, тогаш е можно во кутијата да се најдат други два тега такви што со нивно ставање на другата страна на вагата, вагата е во рамнотежа.
Определи го најмалиот можен број тегови во кутијата.

13. Разгледуваме комплет тегови, секој од кои има маса цел број грамови, а заедно имаат маса $200\ g$. Таков комплет го нарекуваме правилен, ако секој предмет со целобројна маса од 1 до 200 грама може да се измери со определен број тегови и тоа на единствен начин, при што предметот се поставува на едниот тас, а теговите на другиот тас и две мерења кои се разликуваат со замена на неколку тегови со други, но со иста маса, ќе ги сметаме за еднакви.
а) Да се најде пример за правилен комплет во кој не сите тегови се по $1\ g$.
б) Колку различни правилни комплети постојат? (Два комплети се различни, ако некој тег учетвува различен број пати).

14. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ по парови различни природни броеви и нека M е множество кое се состои од $n-1$ природни броеви и не го содржи бројот $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Скакулец треба да направи n скокови надесно по бројната права, тргнувајќи од точката со координа 0. Притоа, должините на неговите скокови мора да бидат еднакви на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, во некој редослед. Докажи, дека тој редослед може да се избере така што скакулецот никогаш нема да скокне во точка чија координата е во множеството M.

15. Во земјата на математичарите избрале реален број $\sim > 2$ и во оптек пуштиле монети со вредност 1 денар и $\sim^k$ денари за секој природен број k. Притоа бројот $\sim$ бил избран така што сите вредности на монетите, без најмалата, биле ирационални броеви. Дали може да се случи, секоја сума на пари од природен број денари да се исплати со такви монети, при што секој вид монета се користи не повеќе од 6 пати?

16. Дадени се n еднакви топки, три од кои се радиоактивни. Располагаме со уред, кој го определува количеството на радиоактивност. Притоа со едно мерење на произволно множество топки може да се определи дали во него

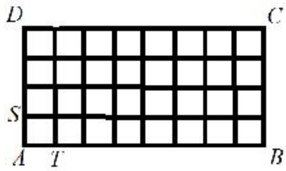
има 0, 1 или повеќе од 1 радиоактивни топки. Ако со $L(n)$ го означиме минималниот број мерења, потребни за наоѓање на трите радиоактивни топки:
а) определи го $L(6)$,
б) докажи, дека $L(n) \leq [\frac{n+5}{2}]$.

26. ПАТИШТА

1. На цртежот десно е прикажана мрежа на патишта меѓу 14 градови. Дали може да се обиколат сите градови така што секој град се посети точно еднаш?

2. Десет улици во еден град се паралелни една на друга, а другите десет ги сечат под прав агол. Колку најмалку кривини може да има затворена маршрута која минува низ сите раскрсници на дваесетте улици?

3. Дадена е правоаголна табла со димензии $m\times n$, каде $n=km$, $k\in\mathbb{N}$ (види цртеж). Да ги разгледаме сите патишта од A до C кои имаат должина $m+n$. Докажи, дека бројот на таквите патишта кои поминуваат низ T е k пати поголем од оние кои поминуваат низ S.



4. Еден град има мрежа од m „хоризонтални“ и n „вертикални“ улици, при што секои две соседни раскрсници се еднакво оддалечени. Определи ја најмалата должина која треба да се асфалтира така што од секоја раскрсница до секоја раскрсница може да се стигне по асфалтен пат.

5. Во една држава постојат n, $n\geq 2$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека ако меѓу два града не постои директен пат, тогаш постои град со кој двата града се поврзани со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

6. Во една држава има $n, n\geq 4$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека ако меѓу два града не постои директен пат, тогаш постојат најмалку два града кои со секој од двата неповрзани градови се поврзани со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

7. Во една држава има $n, n\geq 4$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека за секои два града постои град кој со секој од двата града е поврзан со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

8. Некои парови на множество од n точки $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geq 4$) се меѓусебно поврзани со отсечки, така што секоја точка е поврзана со барем три од дадените точки. Докажи дека постојат различни точки $X_1, X_2, ..., X_{2k} \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ за некој $k \geq 2$ така што точките X_i и X_{i+1} се поврзани за секој i $(1 \leq i \leq 2k)$ каде $X_{2k+1} = X_1$.

9. Некои од n градови се поврзани со авионски линии (сите линии се двонасочни). Постојат точно m линии. Нека d_i е бројот на линиите кои тргнуваат од градот i, за $i = 1, 2, ..., n$. Ако $1 \leq d_i \leq 2010$, за секој $i = 1, 2, ..., n$, докажи дека важи

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 4022m - 2010n.$$

Определи ги сите вредности на n за кои се достигнува знак за равенство.

10. Човек се наоѓа во точката $(1,1)$ во координатната рамнина и сака да најде предмет кој се наоѓа во некоја точка (a, b), каде $a \in \{1, 2, ..., m\}$, $b \in \{1, 2, ..., n\}$ и после тоа да се врати во точката од која тргнал. Определи ја должината на најкраткиот пат кој треба да го помине за да ја заврши работата, ако човекот не знае во која од дадените точки се наоѓа предметот и може да се движи во произволен правец.

11. Во темето A на коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стои мравка. Мравката патува 2015 минути, при што секоја минута поминува преку раб до соседно теме. Нека m е бројот на патеките со кои мравката своето патување го завршува во темето B, а n е бројот на патеките со кои таа своето патување го завршува во темето C_1. Пресметај ја вредноста на изразот $m - n$.

12. Секои два града во една држава се поврзани со еднонасочен пат така што не постои затворена маршрута. Дали е можно за поминувањето по секој пат да се наплатува патарина (за различните патишта патарините може да се различни) така што за секои два града A и B патарина која се плаќа за секоја маршрута, која почнува во A и завршува во B, да биде една иста?

13. Дадени се природни броеви M и N. Иван се наоѓа во точката $(0, N)$ и се движи со чекори до точката $(M, 0)$, при што ги почитува следниве две правила:
   1) Секој чекор е со должина 1 и е паралелен на некоја од координатните оски.

2) За секоја точка (x, y) на неговиот пат важи $x \geq 0,\ y \geq 0$.

При секој чекор тој го запишува растојанието до оската која е паралелна на тој чекор, при што ако чекорот го оддалечува од координатниот почеток, тој тоа растојание го запишува со позитивен знак, а во спротивен случај го запишува со негативен знак.

Докажи дека кога Иван ќе стигне во точката $(M, 0)$, збирот на сите запишани броеви ќе биде еднаков на нула.

14. Во една земја има n градови, секои два града се поврзани со двонасочна железничка линија. Цените на билетите се еднакви во двете насоки за секои два града, но се различни за секоја линија, која директно поврзува два града. Докажи, дека патник може да тргне од некој од градовите и последователно да патува по $n-1$ линија, плаќајќи за секое патување помалку, отколку за претходното. (Патникот има право да минува низ еден ист град повеќе пати.)

15. Нека n е природен број и S_n е множеството точки со целобројни координати (x, y) такви што

$$|x| + |y + \tfrac{1}{2}| < n.$$

Низата различни точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_l, y_l)$ од S_n ја нарекуваме пат ако за $i = 2, 3, ..., l$ растојанието меѓу точките (x_i, y_i) и (x_{i-1}, y_{i-1}) е еднакво на 1, т.е. точките (x_i, y_i) и (x_{i-1}, y_{i-1}) се соседни во целобројната решетка. Докажи дека точките на S_n не може да се разбијат на помалку од n патишта (разбивање на S_n на m патишта е множество P од m непразни патишта при што секоја точка од S_n се користи точно еднаш во патиштата од P).

16. Во едно кралство има N градови при што некои парови градови се поврзани со двонасочни патишта кои не се сечат (градовите од таков пар ги нарекуваме соседни). Познато е дека од секој град може да се стигне до секој друг град, но не е можно, тргнувајќи од некој град и движејќи се по различни патишта, да се вратиме во тој град.

Во секој град кралот имал свој наместник. Кралот наредил реформа во која: секој од $N-$те наместници на градовите станал наместник во некој од градовите, при што секои два наместници кои биле во соседни градови пред реформата биле во соседни градови и по реформата. Докажи дека или во некој град по реформата не се променил наместникот, или некој пар соседни градови си ги замениле наместниците.

17. Во државата Северна Баксузија има 100 градови, некои од кои се поврзани со патишта така што од секој град може да се стигне до секој друг град. Во

земјата има вкупно 1000 патишта. Владата на Северна Баксузија има намера некои од патиштата (може и сите) да ги затвори така што од секој град тргнуваат парен број патишта (и нулата е парен број). На колку начини владата тоа може да го направи?

18. Во една држава има повеќе од 7 градови. Докажи, дека не постои мрежа од еднонасочни патишта со следниве својства:
    1) меѓу секои два града постои точно еден директен пат,
    2) за секои два града A и B постои точно еден град во кој директно може да се стигне и од A и од B,
    3) за секои два града A и B постои точно еден град од кој директно може да се стигне и во A и во B.

19. Нека q е позитивен рационален број. Две мравки на почетокот се наоѓаат во иста точка X во рамнината. Во $n-$тата минута $(n=1,2,...)$ секоја од нив избира дали ќе се движи на север, исток, југ или запад, и притоа минува растојание од q^n метри. По цел број минути тие повторно се наоѓаат во иста точка во рамнината (не задолжително во точката X), а дотогаш изминатите патеки не им се потполно идентични. Определи ги сите можни вредности на бројот q.

27. ПОЗНАНСТВА

1. Во група од $2n+1$ луѓе ($n \in \mathbb{N}$), за секои n луѓе постои еден од човек од преостанатите луѓе кој сите ги познава. Докажи дека во групата постои човек кој ги познава сите членови на групата. (Познанството е симетрична релација.)

2. Докажи, дека во произволна група луѓе постојат најмалку двајца кои меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници. Познанството е симетрична релација, т.е. ако A го познава B, тогаш B го познава A.

3. На еден натпревар секој натпреварувач има најмногу тројца познаници (познанството е симетрична релација). Докажи дека е можно натпреварувачите да се распоредат во две простории така да секој натпреварувач има најмногу еден познаник во просторијата во која е сместен.

4. Секој жител од градовите A, B, C познава најмногу еден од жителите на друг град. Ако
   1) бројот на жителите на градот A е еднаков на 6000,
   2) бројот на жителите на градот B кои имаат познаници во градот C е помал или еднаков на 2000, и
   3) во градовите B и C повеќе од половината жители немаат познаници во градот A,

   докажи дека вкупниот број жители во градовите A, B и C кои немаат познаници во други градови е поголем од 1999.

5. Нека $N = mn - n + 1$, каде $m \geq 3$ и $n \geq 2$ се природни броеви. Докажи, дека ако во група од N лица меѓу секои m постојат две лица кои се познаваат, тогаш постои лице кое познава барем n од преостанатите членови на групата. Дали тврдењето е точно за $N < mn - n + 1$?

6. На устен испит учествуваат 100 студенти. Секој студент го испитува еден од 25 професори. Секој студент подкупил најмногу 15 професори. Докажи дека може да се направи распоред на испрашувања така што ниту еден студент нема да одговара кај професор кој го подкупил, а притоа ниту еден професор нема да испрашува повеќе од 10 студенти.

7. Докажи дека во множество од $\binom{2n}{n}$ луѓе, $n \in \mathbb{N}$, може да се најдат $n+1$ луѓе кои меѓусебно сите се познават или $n+1$ луѓе кои меѓусебно сите не се познаваат.

8. Определи го најмалиот број $n \geq 5$ за кој постои група од n лица, така што секои две лица кои се познаваат немаат заеднички познаник, а секои две лица кои не се познаваат имаат точно два заеднички познаници. (Ако $A \neq B$ и A го познава B, тогаш и B го познава A .)

9. Во група од n лица постојат тројца познаници, секој од кои се познава со повеќе од половината членови на групата. Определи го најмалиот број тројки познаници во оваа група?

10. На математички натпревар некои ученици се пријатели; ако *A* е пријател со *B*, тогаш и *B* е пријател со *A*. Група ученици се нарекува дружина ако секои два ученика во таа групи се пријатели. (Специјално, секоја група со помалку од два ученика е дружина.) Бројот на учениците во една дружина се нарекува големина на дружината.
На овој натпревар максималната големина на дружина е парен број. Докажи, дека учениците може да се распоредат во две соби, така што максималната големина на дружине во едната соба е еднаква на максималната големина на дружина во другата соба.

11. Во една група ученици се исполнети следниве услови:
   - секој ученик познава најмногу N други ученици и
   - за секој $k \in \{1, 2, ..., N\}$ бројот на учениците кои имаат k познаници е еднаков на k .

   Определи ги сите можни вредности на N . (Познанството е симетрична релација, ако A го познава B , тогаш B го познава A .)

12. За едно друштво луѓе ќе велиме дека е *добро*, ако неговите членови може да се распоредат во неколку соби така што во секоја соба не постојат двајца кои се познаваат, но да е можно да се избере по еден човек од секоја соба така што секои двајца од избраните се познаваат. Едно друштво луѓе се нарекува *совршено*, ако секое непразно множество од негови членови е добро друштво.
Едно совршено друштво имало забава. Еден член на друштвото, Васко, го довел својот другар Павле, кој не е од тоа друштво, и го запознал со сите свои познати. Докажи дека новото друштво исто така е совршено.

13. Македонската математичка олимпијада се одржува во две соби означени со броеви 1 и 2. На почетокот сите натпреварувачи влегуваат во соба бр. 1. Краен распоред на натпреварувачите по соби се добива на следниот начин: листа со имиња на неколку од натпреварувачите се чита на глас; кога едно име ќе биде прочитано, тој натпреварувач и сите негови познаници меѓу останатите натпреварувачи ја менуваат просторијата во која моментално се наоѓаат. Така на секоја листа имиња соодветствува по еден краен распоред на натпреварувачите по соби. Докажи дека вкупниот број на можни крајни распореди не е еднаков на 2009. (Познанство меѓу натпреварувачи е симетрична релација).

14. Природните броеви . и n се поголеми од 1. Во една група од kn луѓе, секој член на групата се познава со повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите луѓе од групата. Дали постојат $k+1$ луѓе од групата кои попарно се познаваат меѓу себе? (Да се докаже за било кои k и n кои ги поседуваат дадените својства).

28. ЗАДАЧИ СО ТУРНИРИ

1. На еден шаховски турнир учествувале n жени и $2n$ мажи и сите меѓусебно одиграле по една партија при што ниту една партија не завршила нерешено. Бројот на партии во кои победиле жените во однос на бројот на партии во кои победиле мажите се однесува како $7:5$. Определи го n.

2. На турнир на кој било предвидено секој шахист да одигра по една партија со секој шахист вкупно се одиграни 55 партии. Два учесника го напуштиле турнирот, при што еден по првата одиграна партија, а другиот одиграл 10 партии. Дали овие шахисти играле меѓусебно?

3. На еден шаховски турнир учествувале n шахисти, мајстори и велемајстори. По завршувањето на турнирот се покажало дека секој учесник половина од своите поени ги освоил играјќи против мајсторите. Докажи, дека $\sqrt{n}$ е природен број.

4. На еден фудбалски турнир учествувале 4 екипи, при што секоја екипа со секоја друга екипа одиграла по еден натпрвар. На крајот на турнирот во табелата бројот на освоените поени на секои две соседни екипи се разликувал за 1. Колку бодови може да има првопласираната екипа? (Во фудбалот за победа се добиваат 3 бода, за пораз 0 бодови и за нерешен резултат секоја екипа добива по 1 бод.)

5. На еден фудбалски турнир учествувале 6 екипи, при што секоја екипа со секоја друга екипа одиграла по еден натпрвар. На крајот од турнирот секоја од првите три екипи освоила по a бодови, а секоја од последните три екипи освоила по b бодови, каде $a > b$. Определи го бројот на можните различни вредности на збирот $a+b$.

6. На еден фудбалски турнир учествуваат n екипи, при што секоја екипа со секоја друга екипа одиграла по еден натпрвар. Екипата која освоила најмногу бодови, победила во помалку натпревари од секоја друга екипа. Определи ја најголемата можна вредност на n?

7. На шаховски турнир учествуваат n шахисти од државата A и n шахисти од државата B. Се покажало дека како и да се поделат во парови, тогаш барем еден од паровите се сретнал порано. Докажи, дека може да се изберат a

шахисти од државата A и b шахисти од државата B, $a+b>n$ така, што секој од избраните a шахисти се сретнал порано со секој од избраните b шахисти.

8. На одбојкарски турнир играле $n \geq 4$ тимови и секои два тима одиграле точно по еден натпревар (во одбојката нема нерешен резултат). Познато е дека не постојат четири тима A, B, C, D такви што A го победил B, B го победил C, C го победил D и D го победил A. Определи го најголемиот можен број тројки (A, B, C) такви што A го победил B, B го победил C, C го победил A. (За тројките (A, B, C) и (B, C, A) сметаме дека си исти.)

9. На шаховски турнир учествувале $2n+3$ шахисти, при што секои два шахиста меѓусебно играле по една партија. Партиите се играат последователно, при што секој шахист по изиграна партија одмара најмалку n партии. Докажи дека некој шахист играл во првата и последната партија.

10. Во НБА има 30 тимови, секој од кои во текот на една сезона треба да одигра по 82 натпревари. Дали е можно тимовите да се поделат во две конференции (не задолжително со еднаков број тимови) – Источна и Западна, и натпреварувањето да се организира така што бројот на натпреварите меѓу тимовите од различните конференции да е еднаков на половина од бројот на сите натпревари?

11. На тениски турнир учествуваат 14 тенисери и секој со секого одиграл точно по еден меч. Тројката тенисери (a, b, c) ја нарекуваме *триаголник* ако a го победил b, b го победил c и c го победил a. Кој е најголемиот можен број на триаголници на овој турнир?

12. На тениски турнир учествувале 2^n тенисери. Секој тенисер одиграл по еден меч со секој од останатите тенисери. Докажи, дека можеме да избереме $n+1$ тенисери и да ги подредиме во низа така што секој од нив ги победил сите тенисери кои во низата се наоѓаат по него.

13. На еден тениски турнир секои двајца играчи играле еден против друг. На крајот на турнирот играчот A имал k, $k \geq 2$ победи повеќе од играчот B. Докажи, дека постои група S од играчи, $|S| \geq k-1$, таква што секој играч од S е поразен од A и секој играч од S го победил B.

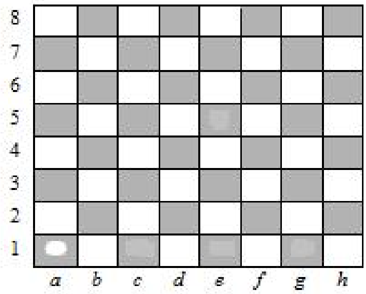
14. На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати, учествувале два ученика и неколку студенти. Играле секој со секого. Двата ученика освоиле

заедно 8 поени, додека секој студент освоил по еднаков број на поени. Колку студенти учествувале на турнирот и колку поени освоиле. Да се најдат сите решенија.

15. Нека n е природен број. Не една конференција се наоѓаат $6n+4$ математичари. Се одржуваат $2n+1$ состаноци. На секој состанок математичарите седат околу една тркалезна маса со 4 места и n тркалезни маси со по 6 места. Растојанието меѓу секои две соседни столици на една маса се еднакви. Ќе велиме дека двајца математичари се во специјална положба ако седат на иста маса и ако се соседи или ако седат на дијаметрално спротивни столици. За кои природни броеви n е можно по завршувањето на сите состаноци никои двајца математичари да не биле во специјална положба повеќе од еднаш?

29. КОМБИНАТОРИКА НА ШАХОВСКА ТАБЛА

1. На колку начини шаховската фигура крал може од полето $a1$ да дојде до полето $h8$, ако во секој потез кралот се поместува на соседното поле десно, горе или по дијагонала десно-горе? Кој пат е најкраток?



2. Шаховската фигура крал може да се придвижи само на соседно поле на таблата (поле кое има барем една заедничка точка со полето на кое се наоѓа кралот), што значи дека може да нападне само фигура која се наоѓа на едно од осумте соседни полиња. Определи го максималниот број на кралеви кои можат да се постават на шаховска табла со димензии 12×12 така што секој крал да напаѓа само еден друг крал.

3. Петар и Никола ја играат следнава игра: на почетокот Петар замислил едно од полињата на шаховска 100×100 табла. Потоа Никола покажува на произволно поле од шаховската табла и го прашува Петар колку најмалку потези и се потребни на шаховската фигура крал за да стигне од посоченото до замисленото поле. Откако ќе го добие одговорот, Никола може повторно на ист начин да постави прашање или да го погоди полето кое Петар го замислил итн. Петар на сите прашања одговара коректно. Колку најмалку прашања треба да постави Никола за да го открие замисленото поле?

4. Растојание меѓу две единечни полиња на бесконечна шаховска табла го нарекуваме минималниот број чекори потребни кралот да стигне од едното до другото поле. На таблата се означени три полиња, такви што растојанието меѓу секои две од нив е еднакво на 100. Определи го бројот на полињата кои од обележените полиња се наоѓаат на растојание еднакво на 50.

5. Дадени се шаховска табла со димензии $n\times n$ и m топови (шаховски фигури), $n\geq m$. Определи го бројот на начините на кои може да се распоредат топовите, но така да тие меѓусебно не се напаѓаат.

6. Во некои полиња на табла со димензии 10×10 се поставени k топови и се означени сите полиња кои се нападнати (топот го напаѓа и полето на кое се

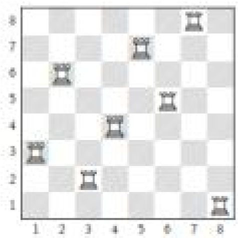
наоѓа). Определи го најголемиот k при кој по отстранување на било кој топ барем едно означено поле не е нападнато.

7. Горната десна четвртина на шаховската табла е покриена со хартија. Колку најмногу топови можеме да поставиме на преостанатиот дел на шаховската таблатака што тие меѓусебно нема да се напаѓаат? На колку начини тоа може да се направи?

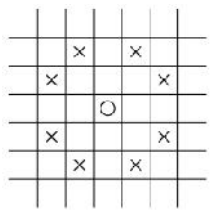
8. Осумте полиња на големата црна дијагонала на шаховската табла ги нарекуваме ограда. Топ се движи по таблата така што не стапнува на едно исто поле повеќе од еднаш и не стапнува на оградата. Кој е најголемиот број скокови кои топот може да ги направи преку оградата?

9. Даден е природен број $n \geq 2$. Разгледуваме шаховска табла $n \times n$ која се состои од n^2 полиња. За распоредот на n топови на таблата ќе велиме дека е *мирољублив* ако во секој ред и во секоја колона се наоѓа точно еден топ. Определи го најголемиот природен број k таков што за секој мирољублив распоред на n топови постои квадрат $k \times k$ кој не содржи топ ниту на едно од своите k^2 полиња.

10. Во полињата на шаховската табла да ги запишеме броевите од 1 до 64, во секое поле по еден број, така што во првот ред од лево на десно ги запишуваме броевите од 1 до 8, во вториот ред од лево на десно броевите од 9 до 16 итн. На таблата произволно поставуваме 8 топови кои меѓусебно не се напаѓаат (еден распоред од можните 40320 е даден на цртежот десно). Определи го збирот на броевите кои се запишани во полињата на кои се поставени топовите.



11. Дали може скокач да обиколи табла со димензија 4×2012 и да се врати на полето од кое тргнал при што на секое поле ќе застане само еднаш?
Скокачот е фигура која во шахот се движи во облик на бквата L: од полето означено со кругче може да скокне на едно од осумте полиња означени со крвче (ако тоа поле е на таблата).



12. Докажи дека скокаќот (скокајќи според правилата како шаховска фигура) не може да го обиколи секое поле на табла со димензии $(2k+1) \times (2r+1)$ и да се врати на почетното поле.

13. Докажи дека скокачот (скокајќи според правилата како шаховска фигура) може да го обиколи секое поле на табла со димензии 8×8 .

14. На колку начини на шаховската табла 8×8 може да се постават црн и бел скокач, така да тие не се напаѓаат (според правилата на шаховската игра)?

15. Колку најмногу ловци можат да се постават на шаховска табла со димензии $n\times n$ така што било кои два од нив да не се напаѓаат (според правилата на шаховската игра).

16. За две кралици поставени на шаховската табла ќе велиме дека се независни ако меѓусебно не се напаѓаат. Нека D_1 и D_2 се две независни кралици, d_i е бројот на полинањата кои ги напаѓа кралицата D_i, $i=1,2$, а $d_{1,2}$ е бројот на полињата кои ги напаѓаат истовремено двете кралици. Со $d(D_1, D_2)$ да го означиме бројот на полињата кои се нападнати барем од една кралица.
Докажи дека за две независни кралици D_i, $i=1,2$ е точно неравенството:
$$d(D_1, D_2)\le 42\,. \qquad (1)$$

17. Определи колку најмногу кралици може да се постават на табла со димензии 2017×2017 така што секоја кралица смее да напаѓа најмногу една од преостанатите кралици.

18. Разгледуваме поделби на шаховска 8×8 табла на p правоаголници кои немаат заеднички внатрешни точки, такви што секоја поделба ги задоволува условите:
а) Секој правоаголник се состои од еднаков број бели и црни полиња.
б) Ако со a_i го означиме бројот на бели полиња во $i-$тиот правоаголник, тогаш $a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_p$.
Најди ја најголемата вредност на p за која ваква поделба е можна. За вака најденото p најди ги сите можни низи броеви $a_1, a_2, a_3, ..., a_p$.

30. ЗАДАЧИ НА ТРИАГОЛНА РЕШЕТКА

1. *Триаголна* $n\times n$ *решетка* е рамностран триаголник со должина на страна n, и поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Пресечните точки на линиите на решетката ги нарекуваме *јазли* на решетката. Докажи дека триаголна решетка со должина на страна n има n^2 мали триаголници и $\binom{n+2}{2}$ јазли.

2. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на ромбовите составени од два мали триаголници.

3. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на паралелограмите од видот $1\times k$ $(k\geq 1)$ чии страни се на делбените линии и темињата се во јазлите на решетката.

4. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Колку паралелограми може да се формираат од малите триаголници?

5. Докажи дека:

   а) $\binom{2k}{2}+\binom{2k-2}{2}+...+\binom{4}{2}+\binom{2}{2}=\frac{1}{2}(\binom{2k+1}{3}+k^2)$,

   б) $\binom{2k-1}{2}+\binom{2k-3}{2}+...+\binom{5}{2}+\binom{3}{2}=\frac{1}{2}(\binom{2k+1}{3}-k^2)$.

6. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на ромбовите чии страни се на делбените линии и темињата се во јазлите на решетката.

7. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на триаголниците чии страни се на делбените линии и темињата се во јазлите на решетката.

8. Докажи дека за секој природен број $k \geq 2$ важи:

а) $\binom{2k}{3}+\binom{2k-2}{3}+...+\binom{4}{3}=\frac{k^2(k+1)(k-1)}{3}$,

б) $\binom{2k-1}{3}+\binom{2k-3}{3}+...+\binom{5}{3}+\binom{3}{3}=\frac{k(k-1)(2k^2-2k-1)}{2}$.

9. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на сите рамнокраки трапези чии страни се на делбените линии и темињата се во јазлите на решетката.

10. Секоја страна на рамностран триаголник ја делиме на k еднакви дела. Низ точките на страните повлекуваме прави паралелни на страните на триаголникот. Повлекуваме искршена линија низ триаголникот, при што:
а) Ниеден триаголник не се јавува два пати;
б) Секој нареден триаголник на искршената линија има заедничка страна со претходниот.
Низ колку триаголници минува искршената линија?

11. Рамностран триаголник со должина на страна $n, n \in \mathbb{N}$ е поделен со прави паралелни на страните на рамнострани триаголници со должина на страна 1. Колку најмногу отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници може да се отстранат така што да не постои триаголник со страни кои се наоѓаат меѓу отстранетите отсечки?

12. Правилен шестаголник е поделен на 24 рамнострани триаголници како што е прикажано на цртеж 1. На 19-те темиња на триаголниците им се придружени 19 различни броеви. Докажи дека меѓу 24-те триаголници постојат најмалку 7 такви што за броевите a, b, c придружени на темињата на овие триаголници и земени во редослед спротивно од движењето на стрелките на часовникот важи $a < b < c$.

13. Дадена е триаголна $n \times n$ решетка. Триаголниците, кои се наоѓаат меѓу две соседни паралелни прави формираат лента.
а) Нека $n = 10$. Колку најмногу полиња може да се обојат така, што никои две обоени полиња не се во иста лента во ниту еден правец на решетката?
б) Нека $n = 9$. Колку најмногу полиња може да се обојат така, што никои две обоени полиња не се во иста лента во ниту еден правец на решетката?

14. Град има форма на триаголна $n \times n$ решетка. *Улици* во овој град ќе ги наречеме сите линии од решетката, а *раскрсници* сите јазли од решетката. Градоначалникот решил да ги осветли сите улици на градот со светилки, поставени

на раскрсниците, при што не смее да има две светилки на една иста улица. Секоја светилка ги осветлува сите улици, кои излегуваат од раскрсницата на која е светилката. Колку најмногу светилки може да постави фирмата која треба да го реализира осветлувањето на градот?

15. Во рамнина, 2014 прави се распоредени во три групи заемно паралелни прави. Определи го најголемиот можен број на триаголници кои ги формираат правите (секоја страна од триаголникот лежи на некоја од правите).

16. Секое множество од n точки во рамнината ќе го наречеме $n-$аголник. Постои дванаесетаголник K во двобојна (сино-црвена) рамнина P така, што P не содржи ниту монохроматска црвена отсечка со должина 1, ниту монохроматски син дванаесетаголник, складен со K. Докажи!

31. КОМБИНАТОРНА ГЕОМЕТРИЈА

Под комбинаторна геометрија обично се подразбираат геометриски задачи со голем или неограничен степен на слобода, како што се геометриските распореди, егзистенцијалните задачи за чие решавање често пати се користи принципот на Дирихле, или разни задачи кои содржат комбинаторни идеи. Во претходните параграфи разгледавме поголем број задачи од комбинаторна геометрија, но заради нивната разновидност овде ќе дадеме дополнителни задачи од оваа интересна област.

1. Докажи дека меѓу било кои четири точки кои лежат во внатрешноста на единичната кружница постојат две кои се на растојание помало од $\sqrt{2}$.

2. (*Задача на Силвестер*). Во рамнината е дадено конечно множество точки S такви што не лежат сите на една права. Докажи дека постои права која содржи точно две точки од множеството S.

3. Рамнинска фигура Φ со плоштина поголема од 1012 е сместена во правоаголник $\boldsymbol{P}$ со димензии 1×2023. Докажи дека Φ содржи две точки на меѓусебно растојание 1.

4. Затворена искршена линија во рамнината се состои од парен број отсечки со должина 1. Докажи, дека постојат две темиња на оваа искршена линија кои се на растојание поголемо од 1.

5. Во координатната рамнина секоја искршена линија која се состои од една вртикална и една хоризонтална отсечка ја нарекуваме *ќоше*. Во рамнината се дадени n сини и n црвени точки чии проекции на координатните оски Ox и Oy се меѓусебно различни. Докажи дека може да се нацртаат n ќошиња без заеднички точки такви што секое ќоше има една црвена и една сина крајна точка.

6. Во рамнината е дадено конечно множество точки. Докажи дека од него секогаш може да се исфрли една точка и остатокот да се подели на две подмножества, секое од кои има дијаметар строго помал од почетното множество.

7. Во внатрешноста на кружница со радиус 1 или на неа се наоѓаат 212 точки. Докажи дека постојат барем 2017 парови точки чие растојание е најмногу 1.

8. Дадени се n, $n \geq 3$ точки во рамнината, такви што растојанието меѓу било кои две од нив не е поголемо од 1. Определи го најголемиот можен број на отсечки со должина 1 чии краеви се во дадените точки.

9. Во рамнината се дадени n прави такви што било кои две не се паралелни и било кои три не се сечат во една точка (прави во општа положба). На колку делови овие прави ја делат рамнината?

10. Во просторот се дадени n рамнини такви што секои три рамнини се сечат и било кои четири немаат заедничка точка (рамнини во општа положба). На колку делови овие рамнини го делат просторот?

11. Дадена е точка T во просторот. На колку најмногу делови може да биде поделен просторот со n рамнини кои минуваат низ точката T?

12. Во рамнината се дадени n кружници такви што секои две се сечат во две точки и било кои три немаат заедничка точка. На колку делови ја делат рамнината овие n кружници?

13. Во просторот се дадени n сфери такви што секои две се сечат во кружница и било кои три немаат заедничка кружница. На колку делови го делат просторот овие n сфери?

14. На колку делови со своите дијагонали е поделен конвексен $n-$аголник таков што било кои три негови дијагонали не се сечат во една точка.

15. Конвексен n-аголник е разделен на триаголници со дијагонали кои не се сечат меѓу себе. Секое теме на n-аголникот е теме на непарен број на делбени триаголници. Определи ги сите можни вредности за n.

16. Во рамнина дадени се 5 точки. Правите кои се определени со овие точки се различни и меѓу нив нема ниту паралелни, ниту нормални прави. Низ секоја точка конструирани се сите нормали така што секоја од нив е нормална на некоја права одредена со две од преостанатите 4 точки. Определи го најголемиот можен број пресечни точки на овие нормали, не сметајќи ги дадените точки.

17. Даден е конвексен n – аголник таков што било кои три негови дијагонали не се сечат во една точка. Определи го бројот на отсечките на кои сите дијагонали на n – аголникот се поделени со пресечните точки.

18. Во рамнина се дадени $n, (n > 4)$ точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Докажи дека постојат најмалку $\binom{n-3}{2}$ конвексни четириаголници кои имаат темиња во четири од дадените точки.

19. Трака со ширина w го нарекуваме множеството точки во рамнината кои се наоѓаат на или меѓу две паралелни прави кои се на растојание w една од друга. Нека S е множество од n точки во рамнината такво што било кои три точки од множеството S може да се покријат со трака со ширина 1. Докажи, дека S може да се покрие со трака со ширина 2.

20. Во рамнината се дадени шест точки, така што било кои три од нив не се колинеарни. Ги повлекуваме петнаесетте прави определени со овие шест точки. Во колку точки, различни од дадените, најмногу можат да се сечат по три од овие петнаесет прави?

21. Дадени се n различни точки на кружницата k. Било кои три отсечки со крајни точки во дадените не се сечат во една точка, која е внатрешна точка за кружницата. На колку области отсечките со крајни точки во дадените точки го делат кругот?

22. Определи ги сите природни броеви n за кои во рамнината постојат n точки, секоја од кои припаѓа на точно $\frac{1}{3}$ од правите определени со тие точки.

23. Даден е природен број n. Во рамнината се избрани точки $P_1, P_2, ..., P_{4n}$ такви што никои три од нив не лежат на иста права. Познато е дека за секој $i = 1, 2, ..., 4n$ сликата на полуправата $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}$ при ротација со центар P_i и агол 90° во насока на движењето на стрелката на часовникот е полуправата $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$. Определи го максималниот можен број подредени парови (i, j), $1 \leq i < j \leq 4n$, за кои отсечките $P_i P_{i+1}$ и $P_j P_{j+1}$ се сечат во точка, различна од крајна точка на отсечка. (Земаме $P_0 = P_{4n}, P_{4n+1} = P_1$.)

24. Дадени се $n \geq 5$ рамнини, такви што било кои три имаат точно една заедничка точка и не постојат четири рамнини кои минуваат низ една точка.

Докажи, дека меѓу деловите на кои со дадените рамнини е поделен просторот има најмалку $\frac{2n-3}{4}$ тетраедри.

25. Квадрат со страна 2 поделен на единечни квадрати може да се нацрта со цртање на три квадрати: два спротивни аголни квадрати и голем квадрат. Колку најмалку квадрати е потребно да се нацртаат за да се добие квадрат со страна n поделен на единечни квадрати?

26. Квадрат е разделен на $n^2 \geq 4$ правоаголници со $2n-2$ прави, $n-1$ од кои се паралелни на едната страна на квадратот, а преостанатите $n-1$ се паралелни на другата страна на квадратот. Докажи дека од овие правоаголници може да се изберат $2n$ такви што за секои два од избраните правоаголници едниот може да се постави во другиот (евектуално по ротација).

27. Квадрат со страна 1 е поделен на многуаголници. Страните на сите многуаголници се паралелни со страните на квадратот. Вкупната должина на внатрешните страни на многуаголниците е еднаква на $2n$. Докажи дека постои барем еден многуаголник чија плоштина е поголема или еднаква на $\frac{1}{(n+1)^2}$.

28. Во координатната рамнина се дадени 2013 квадрати со страна 1, чии страни се паралелни со координатните оски. Докажи дека збирот на плоштините на сите области кои се покриени со непарен број квадрати не е помал од 1.

29. Дадени се n^2 точки наредени во рамнината во форма на квадратна мрежа $n \times n$. Искршена линија со должина l ја нарекуваме унијата на отсечките $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{l-1}A_l$ во таа рамнина. Определи го најмалиот природен број l за кој постои искршена линија со должина l на која лежат сите n^2 дадени точки.

30. Нека n е природен број. Правоаголник со должини на страни $90n+1$ и $90n+5$ е поделен на единечни квадрати со страни паралелни на страните на правоаголникот. Нека S е множеството од сите темиња на овие единечни квадрати. Докажи, дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

31. Во рамнината е даден квадрат, чии страни се хоризонтални и вертикални. Во квадратот се наоѓаат неколку отсечки, паралелни со страните и такви што никои две отсечки не лежат на иста права и не се сечат во точка, која е внатрешна и за двете отсечки. Се покажало, дека отсечките го разбиваат квад-

ратот на правоаголници, при што секоја вертикална права, која го сече квадратот и не содржи отсечки од разбивањето пресекува точно k правоаголници од разбивањето, а секоја хоризонтална права, која го сече квадратот и не содржи отсечки од разбивањето пресекува точно l правоаголници од разбивањето. Определи го бројот на правоаголниците во разбивањето.

32. Определи го најголемиот број правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ кој може да се добие од правоаголник со димензии 50×90, ако е дозволено сечење по прави паралелни на страните на дадениот правоаголник.

33. Во рамнината се дадени неколку правоаголници со страни паралелни со координатните оски. Познато е дека за секои два правоаголника постои вертикална или хоризонтална права кој ги сече. Докажи дека постои една вертикална и една хоризонтална права така што секој правоаголник се сече со барем една од овие прави.

34. Од остроаголен триаголник ABC отсечи 2003 правоаголници секој од кои има страна паралелна на AB и збирот на плоштините да е максимален.

35. Во внатрешноста на конвексен $100-$аголник се избрани k точки, $2\le k\le 50$. Докажи дека може да се изберат $2k$ темиња на $100-$аголникот така што со нив определениот $2k-$аголник во својата внатрешност ги содржи сите k точки.

36. Правилен $n-$аголник е поделен на триаголници со помош на $n-3$ дијагонали такви што меѓу нив никои две немаат заеднички внатрешни точки. Определи го најголемиот број на добиените триаголници кои меѓусебно не се складни.

37. Во конвексен $n-$аголник се повлечени неколку дијагонали. Една од повлечените дијагоналите се нарекува *добра*, ако во внатрешна точка сече точно една од другите повлечени дијагонали. Определи го најголемиот можен број на добри дијагонали.

38. За дијагоналата на правилниот 2006-аголник $\mathcal{R}$ велиме дека е *добра* ако нејзините крајни точки ја делат границата на $\mathcal{R}$ на две дела такви што секој од деловите се состои од непарен број страни на $\mathcal{R}$. За страните на $\mathcal{R}$ исто така сметаме дека за добри.
Ги разгледуваме разбивањата на многуаголникот $\mathcal{R}$ на триаголници со помош на 2003 дијагонали такви што не постојат две дијагонали со заедничка внатрешна точка. Определи го најголемиот можен број рамнокраки триагол-

ници со по две добри страни кои може да се појават во такво разбивање.

39. На секоја страна b на конвексниот многуаголник $\boldsymbol{R}$ и ја придружуваме најголемата плоштина на триаголникот кој се содржи во $\boldsymbol{R}$ и чија една страна е b. Докажи, дека збирот на сите плоштини придружени на страните на многуаголникот $\boldsymbol{R}$ е поголем или еднаков на двократната плоштина P на многуаголникот $\boldsymbol{R}$.

40. Даден е цел број $n \geq 3$. Нека ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 се границите на три конвексни $n-$аголници во рамнината такви да пресекот на секои две од нив е конечно множество точки. Определи го најголемиот можен број точки на $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$.

41. Нека m и n, $n > m > 4$ се природни броеви, $A_1A_2...A_{2n+1}$ е правилен $(2n+1)-$аголник и $P = \{A_1, A_2, ..., A_{2n+1}\}$. Определи го бројот на конвексните $m-$аголници со темиња во множеството P кои имаат точно два внатрешни остри агли.

42. Дадени се неколку тетиви на единичната кружница такви што секој нејзин дијаметар сече најмногу k тетиви. Докажи дека збирот на должините на сите тетиви е помал од k®.

43. Во круг се нацртани n дијаметри кои го делат на $2n$ исечоци. Произволни n исечоци се обоени црвено, а преостанатите n сино. Во сините исечоци, почнувајќи од некој, во насока на движење на стрелките на часовникот се запишани броевите $1, 2, ..., n$. Во црвените исечоци, почнувајќи од некој, во спротивната насока се запишани броевите $1, 2, ..., n$. Дали постои полукруг кој ги содржи сите броеви од 1 до n.

44. На кружница се означени n точки, кои ја делат на n лаци. Кружницата се ротира околу центарот за агол $\frac{2®k}{n}$, k е некој природен број, по што означените n точки се пресликуваат во нови n точки, кои ја делат кружницата на n нови лаци. Докажи дека некој од новите лаци целосно лежи во некој од старите лаци. (Лаците се разгледуваат како затворени множества.)

45. Во рамнита се дадени $n \geq 2$ отсечки така што секои две отсечки се сечат во внатрешна точка и никои три не се сечат во една точка. Ѓорѓи треба да избере по еден крај на секоја отсечка и на него да постави жаба свртена кон другиот крај на отсечката. Потоа тој ќе плесне со рацете $n-1$ пати. Секој пат кога ќе плесне со рацете, секоја жаба одма скокнува напред во следната пресечна

точка на својата отсечка. Жабите никогаш не ја менуваат насоката во која скокаат. Ѓорѓи сака да ги постави жабите така што ниту во еден момент две жаби нема да се најдат во иста пресечна точка.

а) Ако *n* е непарен, докажи дека Ѓорѓи секогаш може да ја постигне целта.

б) Ако *n* е парен, докажи дека Ѓорѓи никогаш не може да ја постигне целта.

46. Во рамнината разгледуваме n кружници $C_1, C_2, ..., C_n$ такви што центарот на кружницата C_i лежи на кружницата C_{i+1}, каде $C_{n+1} = C_1$. Определи го најголемиот можен број парови (i, j) за кои внатрешноста на кружницата C_j лежи во внатрешноста на кружницата C_i.

47. Дадени се природен број $n \geq 3$ и $n+1$ точка кои дадена кружница ја делат на лаци со еднакви должини. Ги разгледуваме сите можни означувања на овие точки со броевите $0, 1, ..., n$, каде секоја ознака се користи точно еднаш и две такви означувања се сметаат за еднакви ако едното може да се добие од другото со ротација на кружницата. За означувањето ќе велиме дека е *убаво* ако за секои четири ознаки $a < b < c < d$, такви што $a + d = b + c$, тетивата која ги поврзува точките означени си a и d не ја сече тетивата која ги поврзува точките означени со b и c.

Нека M е бројот на убавите означувања, а N е бројот на подредени парови природни броеви (x, y) такви што $x + y \leq n$ и $(x, y) = 1$. Докажи дека $M = N + 1$.

48. Нека $\mathcal{S}$ е конечно множество точки во рамнината кое содржи најмалку две точки. Множеството $\mathcal{S}$ не содржи три колинеарни точки. *Ветерница* се нарекува следнава постапка. На почетокот се избира права l која содржи точно една точка $P \in \mathcal{S}$. Правата l се ротира во насока на движењето на стрелките на часовникот околу центарот P до моментот во кој по прв пат содржи некоја друга точка Q од $\mathcal{S}$. Од тој момент таа точка Q станува нов центар, а правата продолжува да се ротира околу Q во насока на движењето на стрелките на часовникот до првиот момент во кој повторно содржи некоја друга точка од множеството $\mathcal{S}$. Оваа постапка бесконечно се повторува.

Докажи дека може да се избере некоја точка P од $\mathcal{S}$ и некоја права l која ја содржи P така што во добиената ветерница секоја точка на множеството $\mathcal{S}$ станува центар бесконечно многу пати.

49. Множеството T содржи 66 точки, а множеството P содржи 16 прави во рамнината. За точка $A \in T$ и права $l \in P$ велиме дека се *инцидентен пар* ако $A \in l$. Докажи, дека бројот на инцидентните парови не може да биде поголем од 159, како и дека постои конфигурација со 159 инцидентни парови.

50. Рамнината е поделена на области со конечен број прави, такви што не постојат три прави кои минуваат низ иста точка. За две области ќе велиме дека се соседни ако нивната заедничка граница е отсечка, полуправа или права. Во секоја област е запишан цел број така што се исполенти следниве услови:
    1) производот на броевите во соседните области е помал од нивниот збир,
    2) збирот на сите броеви од секоја страна на произволна права е еднаков на нула.

    Докажи, дека тоа е можно ако и само ако сите прави не се паралелни.

51. Во рамнината се дадени n конвексни $k-$аголници, такви што секои два од нив имаат заедничка внатрешна точка. Познато е дека секој од $k-$аголниците може да се преслика во секој друг $k-$аголник со хомотетија со позитивен коефициент. Докажи, дека во рамнината постои точка која припаѓа барем на $1+\frac{n-1}{2k}$ од тие $k-$аголници.

52. Коцка со рамнини кои се паралелни на ѕидовите на коцката е разделена на 27 правоаголни паралелопипеди. Ако точно два од овие паралелопипеди се коцки, докажи дека тие имаат еднакви рабови.

53. Тридимензионалниот простор е разбиен на тетраедри и октаедри со рамнини со равенки $x \pm y \pm z = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Нека точката (x_0, y_0, z_0) со рационални координати не лежи во ниту една од рамнините на разбивањето. Докажи дека постои природен број k, за кој точката (kx_0, ky_0, kz_0) лежи во внатрешноста на некој од октаедрите на разбивањето.

54. Нека n е природен број и нека

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0,1,...,n\},\ x + y + z > 1\}$$

    е множество точки кое се состои од $(n+1)^3 - 1$ точка на тридимензионалниот простор. Определи го најмалиот можен број рамнини чија унија ги содржи сите точки на множеството S, но не ја содржи точката $(0,0,0)$.

55. Нека $n > 2$ е природен број и f е присликување од рамнината ® во множеството реални броеви такво што $f(A_1) + f(A_2) + ... + f(A_n) = 0$ за секој правилен $n-$аголник $A_1A_2...A_n$. Докажи дека $f(X) = 0$, за секоја $X \in$ ® .

56. Внатре во кружница k со радиус R се наоѓаат флеки од мастило. Плоштината на секоја флека е помала или еднаква на 1. Секој радиус на кружницата, како и секоја нејзина концентрична кружница, сече најмногу една флека. Докажи дека вкупната плоштина на флеките е помала од $R\sqrt{®}$.

57. Даден е квадрат S со должина на страната 100. Нека $L = A_0 A_1 A_2 ... A_n$ е полигонална линија во S која самата себе не се допира и не се пресекува, таква што $A_0 \neq A_n$. Нека за секоја точка P од страните на квадратот S постои точка од линијата L чија што оддалеченост од P не е поголема од $\frac{1}{2}$.

Докажи дека на L постојат две точки X и Y меѓу кои растојанието не е поголемо од 1, а должината на линијата L меѓу тие точки не е помала од 198.

32. КОМБИНАТОРНА ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Под комбинаторна теорија на броеви обично се подразбираат задачи од теорија на броеви со голем степен на слобода, како што се распоредите на броеви, егзистенцијалните задачи или разни задачи кои содржат комбинаторни идеи. Во претходните параграфи разгледавме повеќе задачи од комбинаторна теорија на броеви, но заради нивната разновидност овде ќе дадеме дополнителни задачи од оваа интересна област.

1. Нека $a_i, b_i, c_i, i=1,2,...,N$ се цели броеви такви што за секоја тројка (a_i, b_i, c_i) барем еден од броевите е непарен. Докажи дека постојат цели броеви x, y и z такви што барем $\frac{4N}{7}$ од броевите $xa_i + yb_i + zc_i$, $i=1,2,...,N$ се непарни.

2. Множеството M се состои од 1985 различни броеви, од кои ниту еден нема прост делител поголем од 26. Докажи дека од множеството M може да се изберат четири различни броја чиј производ е точен четврт степен на природен број.

3. Подмножеството M на множеството $\{1,2,3,...,15\}$ е такво што производот на некои три различни елементи на M не е точен квадрат. Колку најмногу елементи може да има M ?

4. Докажи дека од секое множество од било кои десет различни двоцифрени природни броеви може да се одделат две дисјунктни подмножества такви што збировите на броевите во овие подмножества се еднакви.

5. Определи го најмалиот природен број N со следново својство: ако од множеството $\{1,2,...,N\}$ произволно се избришат 2016 елементи, тогаш секогаш меѓу преостанатите елементи ќе има 2016 броеви чиј збир е еднаков на N .

6. Определи го најголемиот број природни броеви кои што може да се изберат од множеството $\{105,106,...,210\}$ така што било кои два од нив се заемно прости.

7. Даден е природен број n . Определи го максималниот број елементи во подмножество на $\{-n,-n+1,...,n-1,n\}$, кое не содржи три елементи a,b,c (не задолжително различни), такви што $a+b+c=0$.

8. Дадени се природни броеви $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{101} < 5050$. Докажи дека постојат различни броеви a_i, a_j, a_k, a_m такви што $5050 \mid a_i + a_j - a_k - a_m$.

9. На таблата се запишани $N \geq 9$ различни ненегативни броеви, помали од 1. Се покажало дека за секои осум различни броеви запишани на таблата постои деветти број таков што збирот на деветте броја е цел број. Определи ги сите N за кои е ова можно.

10. Даден е природен број n. Определи го минималниот број на броеви од видот $m!$, каде m е природен број со следново својство: за секој природен број $t \leq n!$ збирот на неколку од броевите од видот $m!$ (можно е само еден) е еднаков на t.

11. Во подмножеството S на множеството $\{1, 2, ..., 2011\}$ апсолутната вредност на разликата на било кои два елементи не е 4 или 7. Определи го најголемиот можен број елементи на S.

12. Нека A е подмножество на множеството $S = \{1, 2, 3, ..., 1000000\}$ такво што $|A| = 101$. Докажи дека постојат броеви $t_1, t_2, ..., t_{100} \in S$ такви што множествата $A_i = \{x + t_i \mid x \in A\}$ за $i = 1, 2, ..., 100$ се меѓусебно дисјунктни.

13. Докажи, дека сите природни броеви може да се распоредат во 100 непразни множества така што не постојат три броја a, b, c од три различни множества за кои важи $a + 99b = c$.

14. Определи го најмалиот број подмножества на кои може да се разбие множеството $M = \{1, 2, ..., 40\}$, така што ниту едно подмножество не содржи три (не задолжително различни) елементи a, b, c за кои $a = b + c$.

15. Докажи го или негирај го тврдењето: Во множеството природни броеви $\{1, 2, 3, ..., 10^5\}$ постои подмножество од 1983 елементи, кое не содржи тројка броеви кои се последователни членови на некоја аритметичка прогресија.

16. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$,

$x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S. Докажи, дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S.

17. За секој природен број $n \geq 3$ определи го најмалиот природен број $f(n)$ со следново својство: за секој избор на множество $A \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ со $f(n)$ елементи постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости.

18. Нека $A = \{1, 2, ..., 2008\}$. Ќе велиме дека едно множество е од тип r $(r = 0,1,2)$ ако тоа е подмножество од A и збирот на неговите елементи при делење со 3 дава остаток r. Нека X_r е класата множества од тип r. Определи која од класите X_0, X_1, X_2 е најголема.

19. Даден е природен број n. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ (не задолжително различни) природни броеви чиј збир е еднаков на $2S$ (S е природен број). Природниот број k го нарекуваме *сепаратор* ако може да се изберат k различни индекси $i_1, i_2, ..., i_k$ од множеството $\{1, 2, ..., n\}$ такви што

$$a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k} = S.$$

Определи го најголемиот број сепаратори (во зависност од n).

33. ТЕОРЕМА НА ХОЛ

1. Нека S е непразно множество, $\mathcal{P}(S)$ е партитивното множество на множеството S, $(a_1, a_2, ..., a_m)$ е варијација без повторување на елементи на множеството S, а $(S_1, S_2, ..., S_m)$ е варијација на елементи на множеството $\mathcal{P}(S)$. Ако $a_k \in S_k$ за секој $k \in \{1, 2, ..., m\}$, тогаш варијацијата $(a_1, a_2, ..., a_m)$ ја нарекуваме *систем различни претставници* на варијацијата на множествата $(S_1, S_2, ..., S_m)$. Елементот $a_k \in S_k$ го нарекуваме *претставник* на множеството S_k. Во натамошните разгледувања наместо систем различни претставници кратко ќе пишуваме с.р.п.

   Очигледно, потребен услов за множествата $S_1, S_2, ..., S_m$ да постои с.р.п. е за секој $k \in \{1, 2, ..., m\}$ и за секој комбинација $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ на елементи на множеството $\{1, 2, ..., m\}$ да важи $|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k}| \geq k$.

   Нека $S = \{a, b, c, d, e\}$. Определи с.р.п. за фамилијата множества

   а) $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{a, b\}$, $S_3 = \{a, c\}$, $S_4 = \{b, c, d\}$, $S_5 = \{d, e\}$,

   б) $T_1 = \{a, b, c\}$, $T_2 = \{a, b\}$, $T_3 = \{a, c\}$, $T_4 = \{b, c\}$, $T_5 = \{d, e\}$.

2. (*Теорема на Хол*). Нека за множествата $S_1, S_2, ..., S_m$ важи потребниот услов за егзистенција на с.р.п. и нека секое од овие множества содржи најмалку n елементи. Докажи, дека:

   а) Ако $n \leq m$, тогаш $(S_1, S_2, ..., S_m)$ има најмалку $n!$ с.р.п.

   б) Ако $n > m$, тогаш $(S_1, S_2, ..., S_m)$ има најмалку $\frac{n!}{(n-m)!}$ с.р.п.

3. Нека $S = \{1, 2, ..., n\}$ и $S_k = S \setminus \{k\}$, за $k = 1, 2, ..., n$. Определи го бројот на с.р.п. за варијацијата на множествата $(S_1, S_2, ..., S_n)$.

4. Нека $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $S_i \subseteq S$, за $i = 1, 2, ..., m$. Матрицата $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ определена со

$$c_{jk} = \begin{cases} 1, & a_k \in S_k, \\ 0, & a_k \notin S_k, \end{cases}$$

   ја нарекуваме *матрица на припадност* на елементите $a_1, a_2, ..., a_n$ на множествата $S_1, S_2, ..., S_m$.

Докажи, дека ако матрицата на припадност на елементите $a_1, a_2, ..., a_n$ на множествата $S_1, S_2, ..., S_m$ во секој ред и во секоја клона содржи по k единици, каде $1 \le k \le m$, тогаш постои с.р.п. за варијацијата на множествата $(S_1, S_2, ..., S_m)$.

5. Докажи, дека секој латински правоаголник може да се прошири до латински квадрат.

6. Нека имаме n луѓе кои треба да ги распоредиме на n работни места. Секој човек е квалификуван да работи на точно r од работните места, а на секое од работните места може квалификувано да работат точно r од овие n луѓе, $r < n$. Докажи, дека луѓето може да се распоредат на работните места така што секој од нив ќе работи на работно место за кое е квалификуван.

7. Во еден град живеат вкупно $2k$ луѓе, при што секои двајца се или пријатели или непријатели, и секој има најмногу t непријатели. Ќе велиме дека една група жители е *пријателска* ако секои два члена на групата се пријатели. Познато е дека во градот нема пријателска група која содржи повеќе од k жители, како и дека сите жители на градот може да се распределат во две пријателски групи од по k луѓе во секоја група. Докажи, дека бројот на сите можни пријателски групи од по k луѓе е помал или еднаков на $2^{k-1} + 2^{k-t}$.

8. Дадена е група од B момчиња и G девојчиња, каде $G \ge 2B - 1$. Некои момчиња познават некои девојчиња. Докажи, дека во еден танц сите момчиња може да играат со девојки на таков начин, што секое момче кое не го познава девојчето со кое танцува, да познава само девојчиња кои не танцуваат.

34. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. На остров живеат 100 лажливци и 100 витези. Секој има барем еден другар. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажливците секогаш лажат. Еден ден 100 жители на островот рекле: „Сите мои другари се лажливци“, а останатите 100 жители рекле: „Сите мои другари се витези“. Определи го најмалиот можен број парови другари, од кои едниот е витез, а другиот е лажливец.

2. Во земјата Параноја оперираат 16 тајни агенти, од кои секој следи барем еден од останатите агенти, но никои двајца не се следат еден со друг. Познато е дека било кои 10 агенти може да се наредат во низа така што првиот го следи вториот, вториот го следи третиот итн. десеттиот го следи првиот. Докажи и дека било кои 11 агени може да се наредат во ваква низа.

3. Учениците A, B, C, D и E учествувале на натпревар. Еден гледач се обидел да ги погоди резултатите на натпреварот и претпоставил дека редоследот ќе биде A, B, C, D, E, но тој не го погодил пласманот на ниту еден ученик и ниту еден пар ученици кои што се пласирале непосредно еден по друг. Друг гледач претпоставил дека резултатот ќе биде D, A, E, C, B и тој го погодил точното место на два ученика, а исто така и на два пара ученици кои се пласирале непосредно еден по друг. Кој е резултатот на натпреварувањето?

4. На крајбрежјето на кружен остров има 20 градови. Секој град располага со 20 борачи за учество на турнир. Не постојат двајца борачи кои имаат еднаква сила. Кога двајца борачи ќе се сретнат во борба, победува посилниот борач. За даден природен број n еден град A се нарекува посилен од друг град B, ако постојат најмалку n различни борби меѓу борач од A и борач од B, во кои победува борачот од A. Да се определи најголемата можна вредност на n, за која е можно секој град да е n – посилен од својот сосед кој е во насока на движењето на стрелката на часовникот.

5. Нека S е множество од 100-цифрени броеви. За број кој припаѓа на множеството S ќе велиме дека е *лош*, ако не е делив со збирот на кои било други два (не задолжително различни) броја од множеството S. Определи го најголемиот можен број на елементи на множеството S, ако е познато дека S содржи најмногу 10 лоши броеви.

6. Неколку монети прво се поделени во 200 групи, а потоа во 300 групи. За една монета ќе велиме дека е посебна, ако при втората поделба била во група со помалку монети отколку при првата поделба. Определи го најмалиот можен број посебни монети.

7. Секој од n ученици има некој (позитивен) број жетони, а сите ученици заедно имаат $2n-2$ жетони. Докажи дека за секој природен број $l \le 2n-2$ постои подмножество од множеството ученици кои имаат точно l жетони.

8. Дадени се природни броеви n и k, $n \ge k$ Во група од n луѓе секој човек е член на точно еден од k клубови, означени со $C_1, C_2, ..., C_k$, при што секој клуб има барем еден член. Докажи дека меѓу сите n луѓе може да се распределат n^2 парчиња торта, така што се исполнети следниве услови:
   1) Секој човек добива барем едно парче торта,
   2) За секој $i, 1 \le i \le k$, секој член на клубот C_i добива a_i парчиња торта,
   3) Ако $1 \le i < j \le k$, тогаш $a_i > a_j$.

9. Нека A_n е множеството од сите низи со должина n, составени од q букви $a_1, a_2, ..., a_q$. Со B_n да го означиме подмножеството на A_n со минимален број елементи со следново својство: За секој низа $(c_1, c_2, ..., c_n)$ од A_n постои низа $(b_1, b_2, ..., b_n)$ од B_n, таква што $c_i \ne b_i$ за секој $i = 1, 2, ..., n$. Докажи, дека ако $q > n$, тогаш $|B_n| = n+1$.

10. Даден е збор со најмалку 10 букви, во кој секои две соседни букви се различни. Докажи дека е можно местата на некои две соседни букви да се заменат и како резултат на тоа новодобиениот збор да не е периодичен (т.е. да не може да се подели на еднакви подзборови).

11. Имаме $n \ge 2$ сајтови означени со $1, 2, ..., n$ и треба да ги поврземе со линкови. За секој $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ од сајтот i до сајтот $i+1$ веќе постои линк. Можеме да додадеме нов линк од сајтот i до сајтот j ако $i < j$. Докажи дека со поставување на најмногу $3(n-1)\log_2 \log_2 n$ нови линкови може да се постигне од секој сајт i до секој сајт j ($i < j$) да може да се стигне со користење на најмногу три линка.

12. Дадени се $2n-1$ двоелементни подмножества на множеството $\{1, 2, ..., n\}$. Докажи дека може да се изберат n од овие подмножества чија унија содржи

најмногу $\frac{2}{3}n+1$ елементи.

13. Нека X е множество такво што $|X|=n$. Докажи, дека ако $S=\{X_i\}_{i=1}^r$ е фамилија различни подмножества од X таква што $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ за секои $i, j=1,2,...,r$, тогаш $r \leq 2^{n-1}$.

14. Нека затворениот интервал $[0,1]$ е разделен на две дисјунктни множества A и B, т.е. нека $A \cup B=[0,1]$ и $A \cap B=\emptyset$. Дали постои реален број a таков што $A+a=B$, каде

$$A+a=\{y, y=x+a, x \in A\}.$$

15. Нека n е природен број. Дадени се 2^n+1 различни множества, од кои некои се прогласени за црвени, а преостанатите за сини (од секоја боја има барем по едно множество). Секоја симетрична разлика на црвено и сино множество е наречена црно множество. Докажи дека има најмалку 2^n различни црни множества.

16. Броевите $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}$ се заменуваат со нивниот збир и нивниот производ. За новите броеви $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{25}$ се применува истата операција итн. Докажи, дека во секој момент добиените броеви се помали од $\frac{1}{2}$.

17. Во секое теме на правилниот $n-$аголник $P_1P_2...P_n$ е запишан бројот 1. Ја реализираме следнава операција: Избираме три произволни темиња P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, $(P_{n+1}=P_1, P_{n+2}=P_1)$ и ги заменуваме броевите a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, запишани во нив соодветно со броевите a_i-x, $a_{i+1}-|x-y|$ и $a_{i+2}-y$, каде $x, y \in \mathbb{R}^+$ ги задоволуваат неравенствата $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, $a_i-x \geq 0$ и $a_{i+2}-y \geq 0$. За секоја операција броевите x и y може да се различни.

Дали по неколкукратно применување на горната операција за некој a_i, $1 \leq i \leq n$ е можно да е исполнето неравенството:

а) $a_i > 1,5$,

б) $a_i > \frac{5}{3}$.

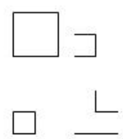
18. Дали постојат 2000 реални броеви (не задолжително различни), кои не се сите еднакви на 0, со следново својство: ако било кои од нив се корени на

полином со степен 1000 и водечки коефициент еднаков на 1, тогаш неговите коефициенти (освен тој пред x^{1000}) се некоја пермутација на останатите 1000 броеви?

19. Археолог на n страници треба да напише труд за градот Хераклеа. На секоја страна може да има само текст или само слики. Трудот треба да е поделен во неколку параграфи, но во секој параграф мора да има и текст и слики. На колку начини археологот може да ги уреди сликите и текстот во параграфот така што ќе бидат исполнети сите барани услови?

20. Определи го бројот на зборовите со должина n составени од буквите a,b,c,d кои содржат непарен број букви b.

21. Определи ги диференцната равенка и генераторната функцијаза бројот на начините на кои може во целост да се покрие табла со димензии $2\times n$ со помош на:
а) квадрати со димензии 1×1 и 2×2,
б) квадрат со димензии 1×1 и L тримино,
при што квадратите и триминото не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата.



22. (*Бесконечен принцип на Дирихле*). Ако елементите на едно бесконечно множество S се обоени во k бои, тогаш S содржи бесконечно монохроматско множество S_1. Докажи!

23. (*Теорема за монотона низа на П. Ердош и Г. Секереш*). За низата реални броеви $\{a_i\}$ ќе велиме дека е монотона ако таа монотоно расте или монотоно опаѓа, т.е. ако $a_{i+1}\geq a_i$ за секој $i\in\mathbb{N}$ или $a_{i+1}\leq a_i$ за секој $i\in\mathbb{N}$. Докажи дека секоја бесконечна низа реални броеви содржи монотона подниза.

24. Докажи, дека секое бесконечно множество $S=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ точки во рамнината такви, што никои три од нив не се колинеарни, содржи бесконечно подмножество S_1, чии елементи се темиња на бесконечен конвексен многуаголник.

14. ПАСКАЛОВ ТРИАГОЛНИК

1. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $d_i, 0,1,...,n$ е произволна конечна низа реални броеви. За конечната низа реални броеви $s_i, 0,1,...,n,n+1$ определена со

$$s_0 = d_0, \, s_k = d_{k-1} + d_k, \, k = 1,2,...,n \text{ и } s_{n+1} = d_n \tag{1}$$

ќе велиме дека е изведена од низата $d_i, 0,1,...,n$ според *Паскаловото правило*. За низата $d_i, 0,1,...,n$ ќе велиме дека е *симетрична* ако за секој $k, 0 \le k \le n$ важи $d_k = d_{n-k}$.

Нека низата $s_i, 0,1,...,n,n+1$ е изведена од низата $d_i, 0,1,...,n$ според Паскаловото правило, докажи дека:

а) Збирот на елементите на добиената низа $s_i, 0,1,...,n,n+1$ е два пати поголем од збирот на елемените на почетната низа $d_i, 0,1,...,n$.

б) Ако почетната $d_i, 0,1,...,n$ е симетрична, тогаш и добиената низа s_i, $0,1,...,n,n+1$ е симетрична.

Решение. а) Од равенствата (1) следува

$$\sum_{i=0}^{n+1} s_i = d_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (d_i + d_{i-1}) + d_n = 2\sum_{i=0}^{n} d_i ,$$

што и требаше да се докаже.

б) Треба да докажеме дека важи

$$s_k = s_{n+1-k} , \tag{2}$$

за секој $k, 0 \le k \le n+1$. За $k = 0$ и $k = n+1$ равенството (2) следува непосредно од претпоставката дека почетната низа е симетрична, односно $d_0 = d_n$ и равенствата (1) според кои $s_0 = d_0$ и $s_{n+1} = d_n$. За $1 \le k \le n$ имаме

$$\begin{aligned} s_k &= d_{k-1} + d_k = d_{n-(k-1)} + d_{n-k} \\ &= d_{n+1-k} + d_{n+1-(k-1)} \\ &= d_{(n+1-k)-1} + d_{n+1-k} \\ &= s_{n+1-k}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Забелешка. Во натамоните разгледувања под низа ќе подразбираме конечна низа ако не е поинаку кажано.

2. За низата која се состои од еден елемент еднаков на 1 ќе велиме дека е *нулта Паскалова низа*. Ако за некој $i \in \mathbb{N}_0$ е дадена $i-$*тата Паскалова низа*, тогаш

низата добиена од оваа низа со помош на Паскаловото правило, т.е. со помош на равенствата (1) од задача 1 ја добиваме $(i+1)$ – *вата Паскалова низа*.

Докажи, дека за Паскаловите низи важи:

а) Збирот на сите елемени на n – тата Паскалова низа е еднаков на 2^n.

б) Сите Паскалови низи се симетрични.

Решение. а) Збирот на елементите во нултата Паскалова низа е $1=2^0$. Сега со математичка индукција тврдењето следува од задача 1 а).

б) Нултата Паскалова низа е симетрична. Сега со математичка индукција тврдењето следува од задача 1 б).

3. Ако почнувајќи од нултата низа, ги запишеме Паскаловите низи така што секој елемент на новата низа се наоѓа во следниот ред меѓу елементите на претходната низа од кои е добиен, добиваме бесконечна табела броеви, која ја нарекуваме *Паскалов триаголник*. Во долната табела се прикажани првите десет реда на Паскаловиот триаголник, запишан на стандарден начин.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1
\end{array} \tag{1}
$$

Ако го ротираме Паскаловиот триаголник за 45° во насока обратна од насоката на движењето на стрелките на часовникот, истиот ќе биде запише во следната форма:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & & \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & & & \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & & & & \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & & & & & \\
1 & 7 & 28 & 84 & & & & & & \\
1 & 8 & 36 & & & & & & & \\
1 & 9 & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & &
\end{array} \tag{2}
$$

Забележуваме дека сега Паскаловиот триаголник може да се конструира ако во првиот ред и првата колона запишеме единици, а потоа последователно секој елемент во секој ред ги добиваме како збир на елементот пред него во редот и елементот над него во претходниот ред.

Докажи дека за елементите на Паскаловиот триаголник запишан во видот (2) важи:

i) Секој елемент A во табелата (2) е еднаков на збирот на сите елементи од претходниот ред, почнувајќи од првиот број, па се до бројот над елементот A.

ii) Секој елемент A во табелата (2) е еднаков на збирот на сите елементи од претходната колона, почнувајќи од првиот број, па се до бројот лево од елементот A.

iii) За секој елемент A од табелата (2) важи дека бројот $A-1$ е еднаков на збирот на сите елементи лево и над од претходните редови и колони, кои не го содржат елементот A.

Решение. *i*) Со $A_{n,m}$ да го означиме елементот кој се наоѓа во $n-$тиот ред и $m-$тата колона. Треба да докажеме дека

$$A_{n,m} = A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + \dots + A_{n-1,m} \,. \qquad (3)$$

За $m=0$ имаме $A_{n,0} = A_{n-1,0}$, бидејќи според дефиницијата на триаголникот сите елементи на првата колона се еднакви на 1. Нека претпоставиме дека за некој $k \in \mathbb{N}_0$ важи

$$A_{n,k} = A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + \dots + A_{n-1,k} \,. \qquad (4)$$

Тогаш за $k+1 \in \mathbb{N}$ од дефиницијата на триаголникот и индуктивната претпоставка (2) имаме:

$$A_{n,k+1} = A_{n,k} + A_{n-1,k+1} = A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + \dots + A_{n-1,k} + A_{n-1,k+1} \,,$$

што значи дека равенството (3) важи и за $k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број m.

ii) Тврдењето, т.е. равенството

$$A_{n,m} = A_{0,m-1} + A_{1,m-1} + \dots + A_{n,m-1}$$

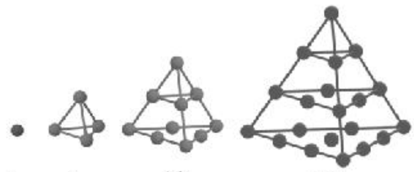
се докажува аналогно како равенството (2). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

iii) Ако прво го искористиме *ii),* а потоа *i)*, последователно добиваме

$$\begin{aligned} A_{n,m} - 1 &= A_{n,m} - A_{0,m-1} \\ &= A_{1,m-1} + A_{2,m-1} + \dots + A_{n,m-1} \\ &= A_{0,0} + A_{0,1} + \dots + A_{0,m-1} \\ &\quad + A_{1,0} + A_{1,1} + \dots + A_{1,m-1} \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + \dots + A_{n-1,m-1}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

4. Нека Паскаловиот триаголник е запишан во обликот (1) од задача 4. Докажи дека:
   a) низата формирана од членовите на неговата прва дијагонал е низата природни броеви,
   b) низата формирана од членовите на неговата втора дијагонала е низата триагиолни броеви,
   c) низата формирана од членовите на неговата трета дијагонала е низата тетраедарни броеви, која всушност е низата парцијални суми на низата триаголни броеви (цртеж десно).



Решение. Нека Паскаловиот триаголник е запишан во обликот (1) од задача 3. Ако со $P_{n,k}$, $n \geq 0, k = 0,1,2,...,n$ го означиме $k-$тиот елемент во $n-$тата Паскалова низа, тогаш за елементите $P_{n,k}$ важи:

$$\begin{aligned} &P_{0,0} = 1, P_{n+1,0} = P_{n+1,n+1} = 1, \quad n \geq 0, \\ &P_{n+1,k} = P_{n,k-1} + P_{n,k}, \quad n \geq 0, k = 1,2,...,n. \end{aligned} \tag{1}$$

Од друга страна, според Паскаловото правило кое го докажавме во задача 7.1 и дефиницијата на биномните коефициенти имаме:

$$\begin{aligned} &\binom{0}{0} = 1, \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1, \quad n \geq 0, \\ &\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad n \geq 0, k = 1,2,...,n. \end{aligned} \tag{2}$$

Според тоа, низите (1) и (2) се совпаѓаат, што значи дека Паскаловиот триаголник запишан во видот (1) од задача 3 има облик:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}$$
$$\binom{9}{0} \quad \binom{9}{1} \quad \binom{9}{2} \quad \binom{9}{3} \quad \binom{9}{4} \quad \binom{9}{5} \quad \binom{9}{6} \quad \binom{9}{7} \quad \binom{9}{8} \quad \binom{9}{9}$$

....

Понатаму, низата формирана од членовите на првата дијагонала е $\binom{n}{1}=n$, $n=1,2,3,\dots$, т.е. тоа е низата природни броеви, а низата формирана од членовите на втората дијагонала е низата $\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$, $n=1,2,3,\dots$ и тоа е низата триаголни броеви.

За тетраедарните броеви t_n^*, $n=1,2,3,\dots$ добиваме

$$t_n^* = \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3},$$

и тоа е токму низата формирана од членовите на третата дијагонала на Паскаловиот триаголник.

Забелешка. Од горното претставување на Паскаловиот триаголник и од задачата 7.6 непосредно следува уште едно решение на задачата 2 а).

5. Докажи дека за секој $n\geq 2$ важи

$$P_{n,1}^2 = P_{n,2} + P_{n+1,2}\,. \tag{1}$$

Решение. Имаме

$$P_{n,2} + P_{n+1,2} = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2}$$
$$= \frac{n^2-n+n^2+n}{2} = n^2 = \binom{n}{1}^2 = P_{n,1}^2.$$

Забелешка. Равенството (1) покажува дека во Паскаловиот триаголник квадратот на секој елемент од втората дијагонала е еднаков на збир на два негови соседни елементи. Истото е прикажано во следната табела

```
                        1
                      1   1
                    1   2   1                      2² = 1+3
                  1   3   3   1
                1   4   6   4   1                  4² = 6+10
              1   5  10  10   5   1
            1   6  15  20  15   6   1              6² = 15+21
          1   7  21  35  35  21   7   1
        1   8  28  56  70  56  28   8   1          8² = 28+36
      1   9  36  84 126 126  84  36   9   1
```

6. Докажи, дека за $n\geq 1$ збирот на квадратите на членовите на $n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник е еднаков на средниот член на $2n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник.

Решение. Имајќи го предвид решението на задача 4 треба да го докажеме равенството

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}^2,$$

кое го докажавме во задача 8.7.

7. (*Давидова ѕвезда*). Докажи дека за секои $n \geq 2$, $k \geq 1$ ($n \geq k$) важи

$$P_{n-1,k-1} \cdot P_{n,k+1} \cdot P_{n+1,k} = P_{n-1,k} \cdot P_{n,k-1} \cdot P_{n+1,k+1}. \qquad (1)$$

Решение. Од една страна имаме:

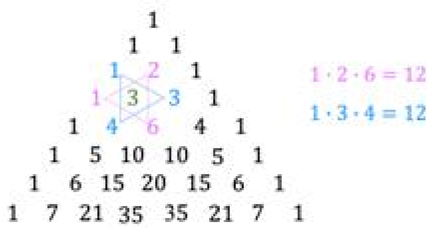
$$\begin{aligned} P_{n-1,k-1} \cdot P_{n,k+1} \cdot P_{n+1,k} &= \binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(k-1)! \cdot k! \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)!}. \end{aligned}$$

Од друга страна имаме:

$$\begin{aligned} P_{n-1,k} \cdot P_{n,k-1} \cdot P_{n+1,k+1} &= \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(k-1)! \cdot k! \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)!}. \end{aligned}$$

Конечно, од последните две равенства следува равенството (1).

Забелешка. За $n = 2$ и $k = 1$ равенството (1) во Паскаловиот триаголник е прикажано на цртежот десно. Како што можеме да видиме броевите кои се јавуваат во ова равенство формираат Давидова ѕвезда. Истото важи секои $n \geq 2$, $k \geq 1$.



8. (*Хокеарска палка*). Докажи дека за секои $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ важи

$$\sum_{i=k}^{n} P_{i,k} = P_{n+1,k+1}. \qquad (1)$$

Решение. Ако членовите на Паскаловиот триаголник ги запишеме со помош на биномните коефициенти, всушност треба да го докажеме еквивалентното равенство

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \qquad (2)$$

Доказот ќе го спроведеме со индукција по n. Ако $n = k$, тогаш важи

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{k} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

т.е. равенството (2) е точно. Нека претпоставимедека (2) за некој $n \geq k$. Тогаш од индуктивната претпоставка и од Паскаловото равенство за $n+1$ важи

$$\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1} .$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството (2) важи за секои $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$.

Забелешка. За неколку вредности на n и k равенството (1) е подолу нагледно прикажано во Паскаловиот триаголник. Забележуваме дека броевите кои учествуваат во равенството во самиот триаголник се распоредени како хокеарска палка, па оттука и името на равеството.

1

1 1

1 2 **1**

1 3 **3** 1

1 4 **6** 4 **1**

1 5 **10** 10 **5** **1**

1 6 **15** 20 **15** **6** 1

1 7 21 **35** **35** **21** 7 1

1 8 28 56 **70** **56** 28 8 1

1 9 36 84 126 **126** **84** 36 9 1

$1+3+6+10+15=35,$

$1+5+15+35+70=126,$

$1+6+21+56=84$

9. Докажи, дека во $2n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник разликата на средниот член и неговиот соседен член е еднаква на $n-$тиот Каталанов број.

Решение. Од решението на задача 13.6 и од својствата на биномните коефициенти добиваме

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = C_n ,$$

што и требаше да се докаже.

10. Докажи, дека во $(2n-1)-$виот ред на Паскаловиот триаголник разликата на еден од двата средни членови и неговиот соседен член кој не е среден е еднаква на $n-$тиот Каталанов број.

Решение. Ако искористиме дека

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n}{n} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = 2\binom{2n-1}{n-1} \text{ и } \binom{2n}{n-1} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n-2},$$

тогаш од претходната задача следува

$$\begin{aligned} C_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = 2\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} \\ &= \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} = \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Забелешка. а) Од формулата $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ добиваме $\binom{2n}{n} = (n+1)C_n$, што значи дека Каталановите броеви се делители на средните членови на парните редови во Паскаловиот триаголник. Така, имаме:

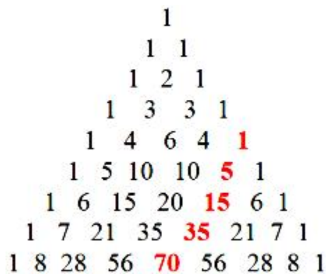
$1 = 1 \cdot 1, \quad 2 = 1 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \; 20 = 5 \cdot 4, \; 70 = 14 \cdot 5, \; 252 = 42 \cdot 6, \; 924 = 132 \cdot 7, \; ....$

б) Уште една поврзаност на Каталановите броеви и Паскаловиот триаголник може да се најде ако во релацијата $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ на последниот член последователно се искористи Паскаловото правило за биномните коефициенти $\binom{r}{s} = \binom{r-1}{s} + \binom{r-1}{s-1}$. Имаме:

$$\begin{aligned} C_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} \\ &= \binom{2n}{n} - \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} - \binom{2n-2}{n-3} \\ &= \binom{2n}{n} - \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} - \binom{2n-3}{n-3} - \binom{2n-3}{n-4} \\ &= ... = \binom{2n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-k}{n-k} - \binom{n+1}{0}. \end{aligned}$$

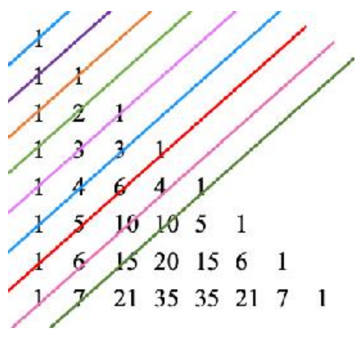
Со примена на горната формула за $n = 4$ добиваме:

$$\begin{aligned} C_4 &= \binom{8}{4} - \sum_{k=1}^{4-1} \binom{8-k}{4-k} - \binom{5}{0} \\ &= \binom{8}{4} - \binom{7}{3} - \binom{6}{2} - \binom{5}{1} - \binom{5}{0} \\ &= 70 - 35 - 15 - 5 - 1 \\ &= 14. \end{aligned}$$



11. На цртежот десно е прикажан Паскаловиот триаголник така што почетните членови во секоја Паскалова низа се запишани во колона, вторите членови во втората колона итн., а потоа се повлечени неговите дијагонали. Ако последователно ги собереме членовите на секоја дијагонала одделно, првите девет добиени броеви се:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.



Забележуваме дека тоа всушност се првите девет ненулти членови на низата на Фибоначи

$$f_1 = 1, \; f_2 = 1 \; \text{ и } \; f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \; n \geq 1.$$

Докажи, дека за

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P_{n-k,k} = f_n \qquad (1)$$

Решение. Ако членовите на Паскаловиот триаголник ги запишеме со помош на биномните коефициенти, всушност треба да го докажеме еквивалентното равенство

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = f_{n+1},$$

кое го докажавме во задача 12.35.

12. Нека P_n е производот на елементите во $n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник. Докажи дека

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n-1}P_{n+1}}{P_n^2} = e\,.$$

Решение. Имаме

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = (n!)^{n+1} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}$$

$$= (n!)^{n+1} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = (n!)^{n+1} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}.$$

Според тоа,

$$P_{n+1} = ((n+1)!)^{n+2} \prod_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k!)^2} \text{ и } P_{n-1} = ((n-1)!)^{n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k!)^2}\,.$$

Според тоа,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{((n+1)!)^{n+2} \prod\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k!)^2}}{(n!)^{n+1} \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}} = \frac{((n+1)!)^{n+2} \cdot \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{((n+1)!)^2}}{(n!)^{n+1} \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}}$$

$$= \frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n!)^n (n+1)^n}{(n!)^n \cdot n!} = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

и аналогно

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1} \cdot n}{(n-1)! \cdot n} = \frac{n^n}{n!}\,.$$

Според тоа,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n-1}P_{n+1}}{P_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

13. *Антипаскалов* триаголник е таблица во облик на рамностран триаголник која се состои од броеви такви што, освен за броевите во последниот ред, важи да секој број е еднаков на апсолутната вредност на разликата на двата броја кои

се непосредно под него. На пример, следната таблица е антипаскалов триаголник со четири реда кој се состои од сите природни броеви од 1 до 10.

4

2 6

5 7 1

8 3 10 9

Дали постои антипаскалов триаголник со 2018 реда кој се состои од сите природни броеви од 1 до $1+2+...+2018$?

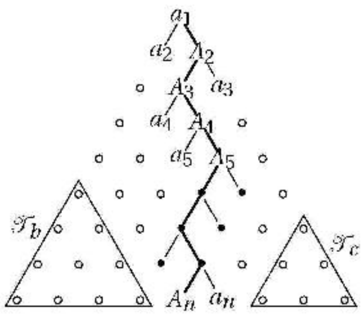
Решение. *Одговор*: НЕ.

Да ставиме $n=2018$. Нека $a_1=A_1$ е бројот во горниот ред, а за $i=2,3,...,n$ нека a_i и A_i се броевите непосредно под бројот A_{i-1}, при што $A_i-a_i=A_{i-1}$. Бидејќи

$$\frac{n(n+1)}{2}\geq A_n=a_1+a_2+...+a_n=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

следува дека $(a_1,a_2,...,a_n)$ е пермутација на броевите $1,2,...,n$ и $A_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Да разгледаме два антипаскалови триаголници: $\mathcal{T}_b$, определен со броевите лево од парот (a_n,A_n), $\mathcal{T}_c$, определен со броевите десно од парот (a_n,A_n).



Да забележиме дека во $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$ нема броеви помали од $n+1$. Нека триаголниците $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$ се составени од k и $n-2-k$ редови. На ист начин како и во големиот триаголник, да ги означиме соодветно со $b_1=B_1$ и $c_1=C_1$ броевите во горните редови на триаголниците $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$, а со b_i и B_i ($2\leq i\leq k$), односно c_j и C_j ($2\leq j\leq n-2-k$), соодветно паровите броеви непосредно под B_{i-1} и B_{j-1}, при што $B_i-b_i=B_{i-1}$ и $C_j-c_j=C_{j-1}$. Бидејќи $b_i,c_j\geq n+1$, важи

$$\begin{aligned}n^2+n-3\geq B_k+C_l&=b_1+...+b_k+c_1+...+c_l\\&\geq(n+1)+(n+2)...+(2n-2)=\frac{3n^2-7n+2}{2},\end{aligned}$$

што не е точно за $n\geq 9$.

Забелешка. Антипаскалов триаголник составен од сите броеви од 1 до $\frac{n(n+1)}{2}$ не постои ниту за еден $n\geq 6$. За $n=5$ единствениот пример (до симетрија) е прикажан на цртежот десно.

5

4 9

7 11 2

8 1 12 10

6 14 15 3 13

15. РАЗБИВАЊЕ НА БРОЕВИ

1. *Композиција* (*подредено разбивање*, *подредена партиција*) на природниот број n на k собирци е било кое решение $(a_1, a_2, ..., a_k)$ во множеството природни броеви на равенката

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = n . \qquad (1)$$

Бројот на композициите на бројот n на k собирци ќе го означуваме со $c_k(n)$. Докажи дека бројот на решенија на равеката (1), т.е. бројот на композиции на природниот број n на k собирци е $c_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$.

Решение. *Прв начин*. Бројот n прво ќе го разбиеме на n единици:

$$1\_1\_1\_...\_1\_1\_1 .$$

Во ова разбивање на секоја цртичка меѓу две 1 можеме да ставиме знак $+$. Бидејќи треба да имаме k собирци, на цртичките треба да ставиме $k-1$ знаци $+$, што може да се направи на $\binom{n-1}{k-1}$ начини. Кога имаме m последователни единици тие ќе даваат собирок m. Понатаму, збирот единиците до првиот знак $+$ го даваат првиот собирок a_1, збирот на единиците кои се меѓу првиот и вториот знак $+$ го даваат вториот собиерок a_2,..., збирот на единиците кои се по $(k-1)-$от знак $+$ го даваат последниот собирок a_k. Затоа $c_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$.

Втор начин. Со $c_k(n) = c(n \mid k \text{ собироци})$ да го означиме бројот на композициите на бројот n на k собирци. Композицијата $(a_1, a_2, ..., a_k)$ соодветствува на членот $x^{a_1} x^{a_2} ... x^{a_k} = x^{a_1 + a_2 + ... + a_k} = x^n$ од производот

$$\underbrace{(x^1 + x^2 + x^3 + ...) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + ...) \cdot ... \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + ...)}_{k},$$

каде множителот x^{a_1} го земаме од првиот $x^1 + x^2 + x^3 + ...$, множителот x^{a_2} од вториот $x^1 + x^2 + x^3 + ...$, ..., множителот x^{a_2} од $k-$тиот $x^1 + x^2 + x^3 + ...$. Затоа генераторната функција за бројот на композициите на бројот n на k собирци е еднаква на токму на горниот производ, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_k(n) x^n = (x^1 + x^2 + x^3 + ...)^k .$$

Според забелешката е) по задача 10.38 имаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_k(n)x^n = (x^1 + x^2 + x^3 + ...)^k$$

$$= \frac{x^k}{(1-x)^k} = x^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{r} x^r$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{n-k} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} x^n .$$

Конечно, со изедначување на коефициентите во овие формални степенски редови, добиваме $c_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$.

2. Докажи, дека вкупниот број композиции на бројот n е $c(n) = 2^{n-1}$.

Решение. Природниот број n можеме да го претставиме како 1 собирок (тоа е самиот број n), како два собирци, како три собирци, ..., како n собирци (тоа е збирот $1+1+...+1$). Затоа во равенката $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$ бројот k се менува од 1 до n . Сега, од задача 1 следува дека

$$c(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1} .$$

3. Докажи, дека бројот на композициите на бројот n, кај кои секој $j \in \mathbb{N}_n$ се јавува точно a_j пати, при што $a_1 + 2a_2 + ... + na_n = n$ е еднаков на

$$\binom{a_1+a_2+...+a_n}{a_1, a_2, ..., a_n} = \frac{(a_1+a_2+...+a_n)!}{a_1! a_2! ... a_n!} .$$

Решение. Секое подредено разбивање на бројот n со наведеното својство, $j \in \mathbb{N}_n$ се појавува a_j пати, е очигледно $(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ -варијација на елементите $1, 2, ..., n$ која што има вид $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Бројот на такви варијации е

$$\binom{a_1+a_2+...+a_n}{a_1, a_2, ..., a_n} = \frac{(a_1+a_2+...+a_n)!}{a_1! a_2! ... a_n!} .$$

4. Дадени се природни броеви r и n, $r \le n$. Ги разгледуваме си n – торки ненегативни цели броеви $(a_1, a_2, ..., a_n)$ за кои важи

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = r \text{ и } a_1 + 2a_2 + ... + na_n = n . \qquad (1)$$

За секоја таква n – торка го пресметуваме количникот $\frac{1}{a_1! a_2! ... a_n!}$. Докажи дека збирот на сите овие количници е еднаков на $\frac{(n-1)!}{(n-r)! r! (r-1)!}$.

Решение. Бројот на композиции на бројот n на r собирци е еднаков на $\binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$. Од друга страна, ако во ваква композиција има точно a_i собирци еднакви на i , тогаш се исполнети равенствата (1). За дадени a_i има точно $\frac{r!}{a_1!a_2!...a_r!}$ такви разложувања. Затоа вкупниот број разложувања е еднаков на $r!\sum\frac{1}{a_1!a_2!...a_n!}$, од каде следува

$$r!\sum\frac{1}{a_1!a_2!...a_n!}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\text{, т.е. }\sum\frac{1}{a_1!a_2!...a_n!}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!r!(n-r)!},$$

што и требаше да се докаже.

5. Нека $n_1, n_2, ..., n_k$ се различни природни броеви и со $c(n\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\})$ да го означиме бројот на сите подредени разбивања на природниот број n кај кои секој од деловите е еднаков на некој од броевите $n_1, n_2, ..., n_k$. Докажи, дека

$$c(n\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = \sum_{j=1}^{k} c(n-n_j\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}), \qquad (1)$$

каде што по дефинција земаме

$$c(m\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}) \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } m<0, \\ 1, & \text{ако } m=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Нека S е множеството од сите композиции на бројот n, кај кои секој од деловите на разбивањето е еднаков на некој од броевите $n_1, n_2, ..., n_k$ и нека S_j е множеството од сите разбивања $(a_1, a_2, ...)\in S$ за кои што $a_1 = n_j$. Ако првиот број во некоја композиција е n_j, тогаш остатокот на таа композиција е компоИција на бројот $n-n_j$ со собирци од множеството $\{n_1, n_2, ..., n_k\,|$. Оттука следува дека $|S_j| = c(n-n_j\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\})$. Според тоа, множеството S е дисјунктна унија на множествата $S_1, S_2, ..., S_k$, па од принципот на збир следува

$$c(n\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = |S| = \sum_{j=1}^{k}|S_j| = \sum_{j=1}^{k} c(n-n_j\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}).$$

Да се осврнеме уште на почетните услови (2). Ако $m<0$, тогаш во некој момент за n_j сме зеле поголем број отколку што можеме и бидејќи немаме таква композиција, тогаш $c(m\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = 0$. Ако $m=0$, тоа значи дека веќе сме ја нашле дадената композиција, па за да ја изброиме во дадениот збир треба да земеме $c(m\,|\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = 1$.

6. Учителката на учениците им задала три прашања и секој ученик точно одговорил на 1, 2 или 3 прашања. Учителката решила да подели чоколада која има 9 реда со по 4 коцки во ред на следниот начин: ако ученикот точно одговорил на i прашања, тој добива i редови, т.е. секој ученик добива чоколадо со димензија $1\times 4, 2\times 4$ или 3×4. Првото дете добило $a_1 > 0$ редови,

второто $a_2 > 0$ редови итн. додека учителката не го подели целото чоколадо. На колку начини може учителката да го подели чоколадото.

Решение. Од условот на задата следува дека треба да го определиме бројот $c(9\,|\,\{1,2,3\})$. Од задача 5 следува

$$c(n\,|\,\{1,2,3\}) = c(n-1\,|\,\{1,2,3\}) + c(n-2\,|\,\{1,2,3\}) + c(n-3\,|\,\{1,2,3\}), \qquad (1)$$

па како $c(-2\,|\,\{1,2,3\}) = c(-1\,|\,\{1,2,3\}) = 0$ и $c(0\,|\,\{1,2,3\}) = 1$, од (1) последователно добиваме

$$c(1\,|\,\{1,2,3\}) = 1+0+0 = 1,$$
$$c(2\,|\,\{1,2,3\}) = 1+1+0 = 2,$$
$$c(3\,|\,\{1,2,3\}) = 2+1+1 = 4,$$
$$c(4\,|\,\{1,2,3\}) = 4+2+1 = 7,$$
$$c(5\,|\,\{1,2,3\}) = 7+4+2 = 13,$$
$$c(6\,|\,\{1,2,3\}) = 13+7+4 = 24,$$
$$c(7\,|\,\{1,2,3\}) = 24+13+7 = 44,$$
$$c(8\,|\,\{1,2,3\}) = 44+24+13 = 81,$$
$$c(9\,|\,\{1,2,3\}) = 81+44+24 = 149.$$

7. Нека претпоставиме дека порака се пренесува со помош на сигнали со должина 1, 2, 3, 4 единици време. Колку различни пораки можат да се пренесат за 10 единици време.

Решение. Од условот на задачата следува дека треба да го определиме бројот $c(10\,|\,\{1,2,3,4\})$. Јасно, $c(-3\,|\,\{1,2,3,4\}) = c(-2\,|\,\{1,2,3,4\}) = c(-1\,|\,\{1,2,3,4\}) = 0$ и $c(0\,|\,\{1,2,3,4\}) = 1$ и како

$$c(n\,|\,\{1,2,3,4\}) = c(n-1\,|\,\{1,2,3,4\}) + c(n-2\,|\,\{1,2,3,4\}) + \\ + c(n-3\,|\,\{1,2,3,4\}) + c(n-4\,|\,\{1,2,3,4\})$$

добиваме

$$c(1\,|\,\{1,2,3,4\}) = 1+0+0+0 = 1,$$
$$c(2\,|\,\{1,2,3,4\}) = 1+1+0+0 = 2,$$
$$c(3\,|\,\{1,2,3,4\}) = 2+1+1+0 = 4,$$
$$c(4\,|\,\{1,2,3,4\}) = 4+2+1+1 = 8,$$
$$c(5\,|\,\{1,2,3,4\}) = 8+4+2+1 = 15,$$
$$c(6\,|\,\{1,2,3,4\}) = 15+8+4+2 = 29,$$
$$c(7\,|\,\{1,2,3,4\}) = 29+15+8+4 = 56,$$
$$c(8\,|\,\{1,2,3,4\}) = 56+29+15+8 = 108,$$
$$c(9\,|\,\{1,2,3,4\}) = 108+56+29+15 = 208 \text{ и}$$
$$c(10\,|\,\{1,2,3,4\}) = 208+108+56+29 = 401.$$

8. *Партиција* (разбивање) ® на бројот n, $n \in \mathbb{N}$, на k собирци, $k \geq 1$, е фамилија ® $= \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, таква што важи $a_i \in \mathbb{N}$ за секој $i = 1, 2, ..., k$ и

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = n .$$

Ако за секој $i \in \{1, 2, 3..., n\}$ во партицијата ® $= \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ на бројот n има f_i делови еднакви на i, партицијата ја означуваме со ® $= [1^{f_1} 2^{f_2} 3^{f_3} ... n^{f_n}]$.

Основната разлика меѓу композициите и партициите е во тоа што кај композициите е важен редоследот на собирците, а додека кај партициите редоследот на собирците не е важен.

Нека $p_k(n)$ е бројот на партициите на n на k собирци. Докажи, дека

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + ... + p_1(n-k) . \qquad (1)$$

Решение. Ако $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$, каде $a_i \geq 1$, тогаш

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + ... + (a_k - 1) = n - k ,$$

при што некои од собирците може да се еднакви на 0. Според тоа, на секоја партиција на бројот n на k собирци и соодветствува партиција на бројот $n-k$ на најмногу k собирци. Точно е и братното и ова соодветствие е биекција, па затоа точна е формулата (1).

Забелешка. Претходната задача може да се искористи за пресметување на вкупниот број партиции $p(n)$ на бројот n. Имено, секоја партиција на бројот n може да има од $k = 1$ до $k = n$ собирци, па затоа важи формулата

$$p(n) = p_1(n) + p_2(n) + ... + p_n(n) ,$$

при што броевите $p_k(n)$ ги пресметуваме користејќи ја формулата (1).

9. Нека $n_1, n_2, ..., n_k$ се различни природни броеви. Со $p(n \mid \{n_1, n_2, ..., n_k\}, \neq)$ да го означиме бројот на партициите на бројот n на различни собирци, кај кои секој од собирците е еднаков на некој од броевите $n_1, n_2, ..., n_k$. Докажи дека

$$p(n \mid \{n_1, ..., n_k\}, \neq) = p(n - n_k \mid \{n_1, ..., n_{k-1}\}, \neq) + p(n \mid \{n_1, ..., n_{k-1}\}, \neq) \qquad (1)$$

каде

$$p(m \mid \{n_1, n_2, ..., n_k\}, \neq) = \begin{cases} 0, & \text{ако } m < 0, \\ 1, & \text{ако } m = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Со S да го означиме множеството од сите барани партиции. Нека S_1 е множеството од сите такви партиции кои го содржат елементот n_k, кој е најголем од броевите $n_1, n_2, ..., n_k$, а S_2 е множеството партиции на различни собирци кои не го содржат елеменот n_k. Тогаш $S = S_1 \cup S_2$ и $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, па затоа $|S| = |S_1| + |S_2|$.

Ако бројот n_k се содржи во бараната партиција, тогаш остатокот од партицијата е партиција на бројот $n-n_k$ на различни собирци, но сега собирците се од броевите $n_1,n_2,...,n_{k-1}$, па затоа важи $|S_1|=p(n-n_k\,|\{n_1,...,n_{k-1}\},\neq)$. Ако бројот n_k не се содржи во бараната партиција, тогаш партицијата всушност е партиција на бројот n на разлини собирци кои се некои од броевите $n_1,n_2,...,n_{k-1}$, па затоа $|S_2|=p(n\,|\{n_1,...,n_{k-1}\},\neq)$. Конечно од претходните разгледувања следува формулата (1). За почетните услови (2) важи истата дискусија како за почетните услови (2) од задача 5.

10. Докажи, дека

$$p(n\,|\,\mathbb{N}_k,\neq)=p(n-k\,|\,\mathbb{N}_{k-1},\neq)+p(n\,|\,\mathbb{N}_{k-1},\neq),$$

каде $p(0\,|\,\mathbb{N}_j,\neq)=1$ и $p(m\,|\,\mathbb{N}_j,\neq)=0$ за $m<0$.

Решение. Непосредно следува од претходната задача за $\{n_1,n_2,...,n_k\}=\mathbb{N}_k$.

11. Нека $n_1,n_2,...,n_k$ се различни природни броеви. Со $p(n\,|\{n_1,n_2,...,n_k\})$ да го означиме бројот на партициите на бројот n, кај кои секој од собирците е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,...,n_k$. Докажи дека

$$p(n\,|\{n_1,...,n_k\})=p(n-n_k\,|\{n_1,...,n_k\})+p(n\,|\{n_1,...,n_{k-1}\}) \qquad (1)$$

каде

$$p(m\,|\{n_1,n_2,...,n_k\})=\begin{cases}0, & \text{ако } m<0,\\ 1, & \text{ако } m=0.\end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Со S да го означиме множеството партиции на бројот n при што секој собирок е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,...,n_k$. Нека S_1 е множеството партиции кои припаѓаат на множеството S и кај кои постои собирок кој е еднаков на n_k. Со S_2 го означуваме множеството партиции на бројот n кои што припаѓаат на множеството S и кај кои што не постои собирок еднаков на n_k. Тогаш $S=S_1\cup S_2$ и $S_1\cap S_2=\varnothing$ и затоа $|S|=|S_1|+|S_2|$. Од друга страна, на секоја партиција од множеството S_1 соодветствува една партиција на бројот $n-n_k$ при што секој собирок е еднаков на $n_1,n_2,...,n_k$. На секој елемент од множеството S_2 соодветствува партиција на бројот n при што секој собирок е еднаков на некој од броевите $n_1,n_2,...,n_{k-1}$. Според тоа,

$$|S|=p(n\,|\{n_1,...,n_k\}),\ |S_1|=p(n-n_k\,|\{n_1,...,n_k\}),\ |S_2|=p(n\,|\{n_1,...,n_{k-1}\}),$$

па затоа точна е формулата (1). За почетните услови (2) важи истата дискусија како за почетните услови (2) од задача 5.

12. Докажи, дека

$$p(n\,|\,\mathbb{N}_k) = p(n\,|\,\mathbb{N}_{k-1}) + p(n-k\,|\,\mathbb{N}_k)\,, \qquad (1)$$

$$p(n\,|\,\mathbb{N}_k) = p(n\,|\,\mathbb{N}_{k-1}) + p(n-k\,|\,\mathbb{N}_{k-1}) + p(n-2k\,|\,\mathbb{N}_{k-1}) + \dots \qquad (2)$$

каде $p(0\,|\,\mathbb{N}_j) = 1$ и $p(m\,|\,\mathbb{N}_j) = 0$ за $m < 0$.

Решение. Равенството (1) непосредно следува од претходната задача за $\{n_1, n_2, ..., n_k\} = \mathbb{N}_k$. Равенството (2) се добива со последователна примена на равенството (1).

13. На колку начини сума од 50 денари може да се исплати со монети и банкноти од 1, 2, 5, 10 и 20 денари, ако секоја од монетите и банкнотите може да се употреби произволен број пати?

Решение. Бараниот број е $p(50\,|\,\{1,2,5,10,20\})$. Очигледно $p(n\,|\,\{1\}) = 1$ за секој $n \geq 0$. Понатаму, користејќи ја формулата (1) од задача 12 последователно наоѓаме

$$p(2k\,|\,\{1,2\}) = p(2k\,|\,\{1\}) + p(2k-2\,|\,\{1,2\}) = 1 + p(2k-2\,|\,\{1,2\})$$
$$= 1 + 1 + p(2k-4\,|\,\{1,2\}) = \dots = k + p(0\,|\,\{1,2\}) = k+1,$$

и

$$p(2k+1\,|\,\{1,2\}) = p(2k+1\,|\,\{1\}) + p(2k-1\,|\,\{1,2\}) = 1 + p(2k-1\,|\,\{1,2\})$$
$$= 1 + 1 + p(2k-3\,|\,\{1,2\}) = \dots = k + p(1\,|\,\{1,2\}) = k+1.$$

Користејќи ги претходните равенства, со примена на задача 11, последователно наоѓаме:

$p(5\,|\,\{1,2,5\}) = p(0\,|\,\{1,2,5\}) + P(5\,|\,\{1,2\}) = 1 + 3 = 4$,

$p(10\,|\,\{1,2,5\}) = p(5\,|\,\{1,2,5\}) + p(10\,|\,\{1,2\}) = 4 + 6 = 10$,

$p(15\,|\,\{1,2,5\}) = p(10\,|\,\{1,2,5\}) + p(15\,|\,\{1,2\}) = 10 + 8 = 18$,

$p(20\,|\,\{1,2,5\}) = p(15\,|\,\{1,2,5\}) + p(20\,|\,\{1,2\}) = 18 + 11 = 29$

$p(25\,|\,\{1,2,5\}) = p(20\,|\,\{1,2,5\}) + p(25\,|\,\{1,2\}) = 29 + 13 = 42$,

$p(30\,|\,\{1,2,5\}) = p(25\,|\,\{1,2,5\}) + p(30\,|\,\{1,2\}) = 42 + 16 = 58$,

$p(35\,|\,\{1,2,5\}) = p(30\,|\,\{1,2,5\}) + p(35\,|\,\{1,2\}) = 58 + 18 = 76$,

$p(40\,|\,\{1,2,5\}) = p(35\,|\,\{1,2,5\}) + p(40\,|\,\{1,2\}) = 76 + 21 = 97$,

$p(45\,|\,\{1,2,5\}) = p(40\,|\,\{1,2,5\}) + p(45\,|\,\{1,2\}) = 97 + 23 = 120$,

$p(50\,|\,\{1,2,5\}) = p(45\,|\,\{1,2,5\}) + p(50\,|\,\{1,2\}) = 120 + 26 = 146$,

$p(10\,|\,\{1,2,5,10\}) = p(0\,|\,\{1,2,5,10\}) + p(10\,|\,\{1,2,5\}) = 1 + 10 = 11$,

$p(20\,|\,\{1,2,5,10\}) = p(10\,|\,\{1,2,5,10\}) + p(20\,|\,\{1,2,5\}) = 11 + 29 = 40$,

$p(30\,|\,\{1,2,5,10\}) = p(20\,|\,\{1,2,5,10\}) + p(30\,|\,\{1,2,5\}) = 40 + 58 = 98$,

$p(40\,|\,\{1,2,5,10\}) = p(30\,|\,\{1,2,5,10\}) + p(40\,|\,\{1,2,5\}) = 98 + 97 = 195$,

$p(50\,|\,\{1,2,5,10\}) = p(40\,|\,\{1,2,5,10\}) + p(50\,|\,\{1,2,5\}) = 195 + 146 = 341$,

$$p(30\,|\,\{1,2,5,10,20\}) = p(10\,|\,\{1,2,5,10,20\}) + p(30\,|\,\{1,2,5,10\})$$
$$= p(10\,|\,\{1,2,5,10\}) + p(30\,|\,\{1,2,5,10\}) = 11 + 98 = 109,$$
$$p(50\,|\,\{1,2,5,10,20\}) = p(30\,|\,\{1,2,5,10,20\}) + p(50\,|\,\{1,2,5,10\}) = 109 + 341 = 450\,.$$

14. Докажи, дека низата $\{f_n\}$ на бројот на партициите кај кои сите собирци се еднакви на i, т.е. $f_n = p(n\,|\,\{i\})$, има генераторна функција $F(x) = \frac{1}{1-x^i}$.

Решение. Партиција од саканиот вид постои ако и само ако бројот n е содржател на бројот i, т.е. $n = mi$ и тогаш постои единствена партиција

$$n = \underbrace{i + i + ... + i}_{m}\,.$$

Според тоа, низата $\{f_n\}$ е зададена со

$$f_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = mi, \text{ за } m = 0,1,2,... \\ 0, & \text{во друг случај.} \end{cases}$$

Оттука следува дека генераторната функција е

$$F(x) = 1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + ... = \frac{1}{1-x^i}\,.$$

15. Нека $i \in S$. Нека $f_n = p(n\,|\,\{i\})$, $g_n = p(n\,|\,S\setminus\{i\})$ и $h_n = p(n\,|\,S)$. Докажи, дека низите $\{f_n\},\{g_n\},\{h_n\}$ имаат генераторни функции $F(x), G(x), H(x)$ за кои важи $H(x) = F(x)G(x)$.

Решение. Нека h_n е бројот на начините да бројот n го претставиме како збир на r и $n-r$, каде f е претставен како збир на собирци кои се сите еднакви на i (тоа може да се направи на f_r начини), а $n-r$ е збир на собирци од $S\setminus\{i\}$ (тоа може да сенаправи на g_{n-r} начини). Затоа h_n е збир на собирци од видот $f_r g_{n-r}$, односно

$$h_n = f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + ... + f_n g_0 = \sum_{r=0}^{n} f_r g_{n-r}\,.$$

Сега, од правилото за множење на генераторни функции следува формулата $H(x) = F(x)G(x)$.

16. Докажи дека генераторната функција за низата броеви $\{p(n)\}$ е

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...}\,.$$

Решение. Секоја партиција на бројот n има собирци од множеството $\mathbb{N}_n = \{1,2,...,n\}$. Сега тврдењето се докажува со повеќекратна примена на претходните две задачи. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

17. Докажи, дека бројот на партициите на бројот n кои немаат собирок 1 е еднаков на $p(n)-p(n-1)$.

Решение. Според претходната задача генераторната функција на низата броеви $\{p(n)\}$ е $P(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$. За генераторната функција на бројот на партициите на бројот n кои немаат собирок 1 имаме

$$\begin{aligned}Q(x) &= \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots} = (1-x)\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots}\\ &= (1-x)P(x) = P(x)-xP(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+1}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} p(n-1)x^n\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(p(n)-p(n-1))x^n,\end{aligned}$$

од каде следува дека бројот на партициите на бројот n кои немаат собирок 1 е еднаков на $p(n)-p(n-1)$

18. На колку начини бројот 10 може да се претстави како збир на броевите 2 и 3.

Решение. Според задачите 14 и 15 на партициите $p(n\,|\,\{2,3\})$ соодветствува генераторната функција

$$\begin{aligned}H(x) &= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\\ &= (1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\ldots)\\ &= 1+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+x^7+x^8+2x^9+2x^{10}+3x^{12}+\ldots.\end{aligned}$$

На членот $p(10\,|\,\{2,3\})$, т.е. на бараниот број партиции на бројот 10 соодветствува коефициентот пред x^{10}, што значи $h_{10}=p(10\,|\,\{2,3\})=2$.

19. (*Ојлеров идентитет*). Бројот на партициите на бројот n на раzлични собирци е еднаков на бројот на партициите на бројот n на непарни собирци, т.е. важи $p(n\,|\neq)=p(n\,|\,\{1,3,5,\ldots\})$. Докажи!

Решение. *Прв начин*. Бидејќи во партицијата на бројот n на различни собирци секој собирок i може да се јавува најмногу еднаш, добиваме дека собирокот кој е еднаков на i во генераторната функција придонесува со полиномот $1+x^i$. Затоа од задачите 14 и 15 следува дека генераторната функција на броевите на партициите со различни собирци е

$$R(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\ldots.$$

Слично, генераторната функција на броевите на партициите со непарни собирци е

$$N(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)...}.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}R(x)&=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)...\\&=\frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)(1-x^2)(1-x^3)(1+x^3)(1-x^4)(1+x^4)(1+x^5)(1-x^5)...}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)...}\\&=\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)...}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)...}\\&=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)...}=N(x).\end{aligned}$$

Значи, низите броеви на партиции со различни собирци и броеви на партиции со непарни собирци имаат иста генераторна функција, па затоа тие се еднакви, т.е. $p(n\,|\neq)=p(n\,|\,\{1,3,5,...\})$.

Втор начин. Да ја разгледаме партицијата $n=n_1+n_2+...+n_k$ на бројот n на различни собирци. Имаме, $n_i=2^{r_i}m_i$, каде r_i е ненегативен цел број, а m_i е непарен природен број. Со групирање по непарниот дел m_i добиваме

$$n=\sum_i 2^{r_i}m_i=\sum_{2\nmid m}k_m m\text{, каде } k_m=\sum_{m=m_i}2^{r_i}.$$

Десната страна страна во изразот за n е партиција на n на непарни собирци (k_m собироци еднакви на m). Останува да се докаже дека вака воспоставеното пресликување е биекција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.
На пример, на партицијата $13=6+4+3$ на различни собирци соодветствува партицијата $13=3+3+3+1+1+1+1$ на неапрни собирци, бидејќи

$$6+4+3=2\cdot 3+2^2\cdot 1+3=(2+1)\cdot 3+4\cdot 1=3\cdot 3+4\cdot 1.$$

20. Докажи, дека бројот на партициите на природниот број n во кои секој парен собирок се појавува најмногу еднаш е еднаков на бројот на партициите на n во кои секој собирок се појавува најмногу три пати.

Решение. Генераторната функција за првиот тип партиции е

$$G(x)=\prod_{2\nmid k}(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+...)\cdot\prod_{2|k}(1+x^k)=\frac{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)...}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)...}.$$

Понатаму, генераторната функција за вториот тип партиции е

$$H(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k+x^{2k}+x^{3k})=\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)(1+x^{2k}).$$

Сега, од задача 19 следува дека

$$H(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k})\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})=\frac{1}{(1-x)(1-x^{3})(1-x^{5})(1-x^{7})\ldots}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})=G(x),$$

од каде што следува тврдењето на задачата.

21. (*Теорема на Глејшер*). Бројот на партициите на природниот број n на собирци кои не се деливи со d е еднаков на бројот на партициите во кои ниту еден собирок на се појавува d или повеќе пати. Докажи!

Решение. Генераторната функција на првиот тип партиции, т.е. на партициите во кои собирците не се деливи со d е:

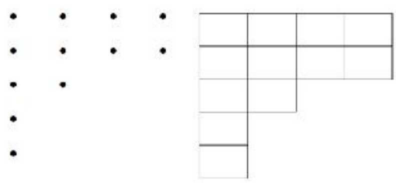
$$G(x)=\prod_{d\nmid k}(1+x^{k}+x^{2k}+x^{3k}+\ldots)=\prod_{d\nmid k}\frac{1}{1-x^{k}}.$$

Генераторната функција на бројот на партициите во кои секој собирок се појавува најмногу $d-1$ пати е:

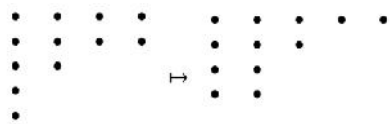
$$H(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k}+x^{2k}+\ldots+x^{(d-1)k})=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{dk}}{1-x^{k}}.$$

Јасно, по скратувањето на броителот во $H(x)$, се добива $H(x)=G(x)$, од каде што следува тврдењето на задачата.

22. Партицијата ® на бројот n може да се претстави со помош на *Ферерсовиот дијаграм* така што делови на партицијата ги подредуваме по големина (т.е. во нерастечка низа, почнувајќи од најголемиот), а потоа секој дел се претставува како ред со соодветен број симболи – ние ќе користиме точки $\bullet$. Партицијата може да се претстави и сопомош на *табла на Ферерс*, која во секој ред наместо точки има единечни квадратчиња. На цртежот десно се прикажани дијаграмот и таблата на Ферерс за партицијата ® $=\{4,4,2,1,1\}$ на бројот 12.



За партицијата « ќе велиме дека е добиена со коњугирање на партицијата ª ако Ферерсовиот дијаграм на « е добиен со замена на колоните и редовите на Ферерсовиот дијаграм на ª. Притоа ќе велиме дека « е *коњугирана партиција* на ª и ќе пишуваме « = ª*. На цртежот десно е прикажано коњугирањето на партицијата ® $=\{4,4,2,1,1\}$.

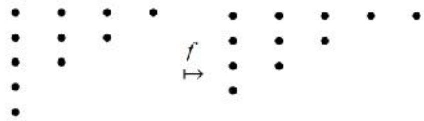


За партицијата која е коњугирана сама на себе ќе велиме дека е *самокоњугирана*.

Докажи, дека бројот на партициите на природниот број n кај кои собирците не се поголеми од m, т.е. $p(n\,|\,\mathbb{N}_m)$ е еднаков на бројот на партициите на бројот n кои имаат најмногу m собироци $p_{\leq m}(n)$, односно дека важи $p(n\,|\,\mathbb{N}_m) = p_{\leq m}(n)$.

Решение. Биекцијата f меѓу множествата партиции од двата вида е пресликувањето кое дадена партиција ја пресликува во најзината коњугирана партиција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

На цртежот десно е прикажано $f(\{4,3,2,1,1\}) = \{5,3,2,1\}$.

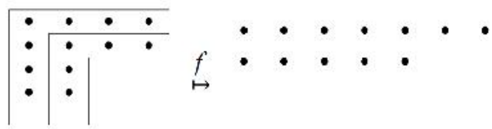


23. Докажи, дека бројот $p(n\,|\,\text{с.к.})$ на самокоњугираните партиции на бројот n е еднаков на бројот $p(n\,|\neq,\text{непарни})$ на партициите на бројот n кај кои сите собирци се различни непарни броеви, т.е. дека $p(n\,|\,\text{с.к.}) = p(n\,|\neq,\text{непарни})$.

Решение. Јасно, Ферерсовиот дијаграм на секоја самокоњугирана партиција е симетричен во однос на главната дијагонала. Сега, ако првиот ред и првата колона ги споиме во еден ред, добиваме ред со непарна должина. Потоа остатокот од вториот ред и втората колона ги спојуваме во еден ред, па повторно добиваме ред со непарна должина, кој има помала должина. Продолжувајќи ја постапката добиваме биекција меѓу самокоњугираните партиции на бројот n и партициите кај кои сите собирци се различни непарни броеви. Оттука следува дека

$p(n\,|\,\text{с.к.}) = p(n\,|\neq,\text{непарни})$.

На цртежот десно е прикажано $f(\{4,4,2,2\}) = \{7,5\}$.

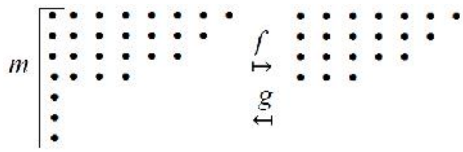


24. Докажи, дека бројот на партициите $p_{\leq m}(n)$ на бројот n кои немаат повеќе од m собирци е едаков на бројот на партициите $p_m(n+m)$ на бројот $n+m$ кои имаат точно m собирци, односно дека важи $p_{\leq m}(n) = p_m(n+m)$.

Решение. Нека S е множеството од сите партиции на бројот $m+n$ кои имаат точно m собирци, а T е множеството партиции на бројот n кои немаат повеќе од m собирци. Пресликувањето $f: S \to T$ кои секој собирок на партиција од S го намалува за 1 е биекција од множеството S во множеството T.

Пресликувањето f на Ферерсовиот дијаграм на партиција од S ја брише првата колона која има точно m точки, со што се добива Ферерсов дијаграм на партиција од T. Понатаму, инверзното пресликување $g = f^{-1}$ додава колона со m точки пред првата колона на Ферерсовиот дијаграм на партиција од T со што се добива партиција од S.

На цртежот десно се прикажани



$f(\{8,7,6,4,1,1,1\}) = \{7,6,5,3\}$ и
$g(\{7,6,5,3\}) = \{8,7,6,4,1,1,1\}$,
односно пресликувањата f и g
за $m = 7$ и $n = 21$.

Ќе докажеме дека пресликувањата f и g се инејкции. Навистина, ако важи $f(x) = a_1 + a_2 + ... + a_k = f(y)$, за $k \le m$, тогаш важи

$$x = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + ... + (a_k + 1) + \underbrace{1 + ... + 1}_{m-k} = y,$$

т.е. функцијата $f : S \to T$ е инјекција, па затоа $|S| \le |T|$. Од друга страна, ако $g(x) = a_1 + a_2 + ... + a_m = g(y)$, тогаш

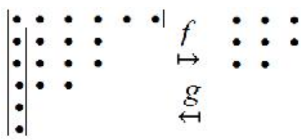
$$x = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + ... + (a_m - 1) = y,$$

т.е. функцијата $g : T \to S$ е инјекција, па затоа $|T| \le |S|$. Конечно, од $|S| \le |T|$ и $|T| \le |S|$, следува $|S| = |T|$, што значи $p_{\le m}(n) = p_m(n + m)$.

25. Докажи, дека бројот на самокоњугираните партиции на бројот n кај кои најголемиот собирок е еднаков на k е еднаков на бројот на самокоњугираните партиции на бројот $n - 2k + 1$ кај кои најголемиот собирок е помал од k, односно важи равенството

$$p(n \,|\, \text{с.к., н.с.} = k) = p(n - 2k + 1 \,|\, \text{с.к., н.с.} < k + 1).$$

Решение. Пресликувањето $f : S \to T$ кое во Ферерсовиот дијаграм ги брише точките од првата редица е првата колона е биекција меѓу самокоњугираните партиции на бројот n кај кои најголемиот собирок е еднаков на k и самокоњугираните партиции на бројот $n - 2k + 1$ кај кои најголемиот собирок е помал од k. Јасно, инверзното пресликување g од горе и од лево додава ред и колона со по k точки, односно додава „агол“ на чии краци има по k точки. Доказот е аналоген на доказот во задача 24. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.



На цртежот десно е прикажано
$f(\{6,4,4,3,1,1\}) = \{3,3,2\}$ и
$g(\{3,3,2\}) = \{6,4,4,3,1,1\}$,
односно пресликувањата f и g за $n = 19$ и $k = 6$.

26. Докажи, дека бројот на партициите на бројот n на парни собирци е еднаков на бројот на партициите на бројот n кај кои секој собирок се јавува парен број пати, т.е. дека

$$p(n \,|\, \text{парни}) = p(n \,|\, \text{секој собирок парен број пати}).$$

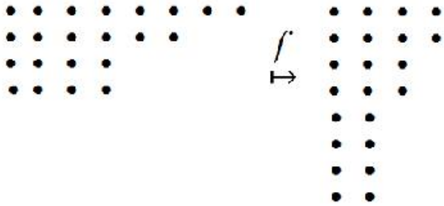
Решение. Биекцијата меѓу множеството партиии на бројот n на парни собирци и множеството партиции на бројот n кај кои се кој собирок се јавува парен број пати се воспоставува со

$$f:\{2a_1,2a_2,...,2a_k\}\to\{a_1,a_1,a_2,a_2,...,a_k,a_k\}$$

за секоја партиција $® =\{2a_1,2a_2,...,2a_k\}$ на n на парни собирци. Лесно се гледа дека ова пресликување е биекција меѓу разгледуваните множества партиции. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

На цртежот десно за $n=22$ е прикажано

$f(\{8,6,4,4\})=\{4,4,3,3,2,2,2,2\}$.



27. Докажи, дека бројот на партициите на бројот n кои имаат најмногу m собирци е еднаков на бројот на партициите на бројот $n+\frac{m(m+1)}{2}$ со точно m различни собирци, т.е. важи равенството $p_{\le m}(n)=p_{m,\neq}(n+\frac{m(m+1)}{2})$.

Решение. Нека $® =\{a_1,a_2,...,a_k\},\ k\le m$ е партиција на бројот n и нека важи $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_k$. Тогаш $®’=\{a_1+m,a_2+m-1,...,a_k+m-k+1,m-k,...,2,1\}$ е партиција на бројот $n+\frac{m(m+1)}{2}$ со точно точно m различни собирци. Лесно се докажува дека пресликувањето $f:® \to ®’$ е инјекција. Обратно, нека $\sim’=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ е партиција на бројот $n+\frac{m(m+1)}{2}$ со точно m различни собирци. Тогаш важи $b_1>b_2>...>b_m\ge 1$, па затоа

$$b_1-m\ge b_2-m+1\ge ...\ge b_m-1\ge 0$$

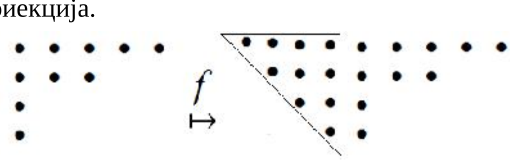
од каде следува дека $\sim =\{b_1-m,b_2-m+1,...,b_m-1\}$ е партиција на бројот n со најмногу n собирци. Лесно се докажува дека пресликувањето $g:\sim’\to\sim$ е инјекција. Конечно, од горните разгледувања следува равенството

$$p_{\le m}(n)=p_{m,\neq}(n+\frac{m(m+1)}{2}) .$$

Коментар. Во горниот доказ всушност на даден Ферерсов дијаграм на партицијата ® од левата страна додаваме „триаголник“ кој има m редици кои последователно содржат $m,m-1,...,2,1$ точки, со што ја добиваме партицијата ®’. Јасно, ова пресликување е биекција.

На цртежот десно за $n=10$ и $m=4$ е прикажано

$f(\{5,3,1,1\})=\{9,6,3,2\}$.



28. Докажи, дека $p(n) > p(n-1)$ за секој $n \geq 2$.

Решение. Според задача 17 бројот на партициите на бројот n кои немаат собирок 1 е еднаков на $p(n) - p(n-1)$, т.е. $p(n) - p(n-1) = p(n \mid \mathbb{N} \setminus \{1\})$. Бидејќи за $n \geq 2$ секогаш имаме партиција $\{n\}$ на бројот n, која се состои од еден собирок и која нема собирок 1, заклучуваме дека $p(n \mid \mathbb{N} \setminus \{1\}) > 0$, од каде што следува $p(n) > p(n-1)$.

29. Докажи дека $p(n) - 2p(n-1) + p(n-2) \geq 0$.

Решение. Од секоја партиција на бројот $n-1$ која не содржи собирок 1 можеме да добиеме партиција на бројот n која не содржи собирок 1, така што најголемот собирок на партицијата на бројот $n-1$ ќе го зголемиме за 1. Сега, од ова и од задача 17 последователно следува

$$p(n \mid \mathbb{N} \setminus \{1\}) > p(n-1 \mid \mathbb{N} \setminus \{1\}),$$
$$p(n) - p(n-1) > p(n-1) - p(n-2),$$
$$p(n) - 2p(n-1) + p(n-2) > 0,$$

што и требаше да се докаже.

30. За секој природен број n, со $f(n)$ е означен бројот од различни претставувањана бројот n како збир од степени на бројот 2 со ненегативни целобројни показатели. Претставувањата кои се разликуваат само во редоследот на собирците се сметаат за еднакви. На пример, $f(4) = 4$ бидејќи бројот 4 може да се претстави на следните четири начини: 4, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1. Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ важи

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}.$$

Решение. Ако $n = 2k+1$ е било кој непарен цел број поголем од 1, тогаш секое запишување на n во бараниот вид го има 1 како еден од собирците. Ако го отстраниме, добиваме запис на бројот $2k$. Обратно, ако додадеме 1 во зписот на бројот $2k$ ќе добиеме запис на бројот $2k+1$. Ова придружување е биективно. Затоа важи рекурентната формула

$$f(2k+1) = f(2k) \qquad (1)$$

Понатаму, ако $n = 2k$ е било кој позитивен парен цел број, тогаш секој запис на n има еден од следните два вида: или содржи еден собирок 1 или нема таков собирок. Во првиот случај мажеме да одземеме 1 и да добиеме запис на бројот $2k-1$. На тој начин добиваме биекција меѓу записот од првиот вид на $2k$ и сите записи на $2k-1$. Во записите од вториот вид (овде ниту еден член не е 1), можеме секој член да го поделиме со 2 и ќе го добиеме записот на бројот k. На тој начин ќе добиеме друга рекурентна формула

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k) \qquad (2)$$

Секоја од овие формули важи за секој цел број $k \geq 1$. Очигледно $f(1)=1$. Ако ставиме $f(0)=1$, формулата (1) ќе важи и за $k=0$. Од (1) и (2) следува дека функцијата f е неопаѓачка.

Од (1) следува дека бројот $f(2k-1)$ во формулата (2) може да се замени со $f(2k-2)$, па добиваме

$$f(2k)-f(2k-2)=f(k), \quad k=1,2,3,\dots .$$

Ако ги собериме овие равенства за $k=1,2,\dots,n$, ја добиваме формулата

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\dots+f(n), \text{ за } n=1,2,\dots,n \tag{3}$$

Во формулата (3) ниту еден собирок не е поголем од последниот. Бидејќи $2=f(2)\leq f(n)$ за $n \geq 2$, добиваме

$$f(2n)=2+\left(f(2)+\dots+f(n)\right)\leq 2+(n-1)f(n)\leq f(n)+(n-1)f(n)=nf(n),$$

за $n=2,3,\dots$. Специјално, во нашиот случај имаме:

$$f(2^n)\leq 2^{n-1}\cdot f(2^{n-1})\leq 2^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot f(2^{n-1})\leq\dots$$
$$\leq 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+1}\cdot f(2)=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2.$$

Бидејќи $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2<2^{\frac{n^2}{2}}$ за $n>3$, следува дека важи десната оценка.

Пред да ја докажеме левата оценка, ќе го покажеме прво неравенството

$$f(b+1)-f(b)\geq f(a+1)-f(a) \tag{4}$$

за целите броеви $b \geq a \geq 0$ со иста парност. Имено, ако a и b се парни броеви, тогаш од (1) следува дека двете страни се нула; ако a и b се двата непарни, тогаш од (2) следува

$$f(b+1)-f(b)=f(\tfrac{b+1}{2}),\ f(a+1)-f(a)=f(\tfrac{a+1}{2}),$$

па неравенството (4) важи бидејќи функцијата f е непоаѓачка.

Нека r и k се цели броеви така што $r \geq k \geq 1$ и r е парен. Ставајќи во (4)

$$a=r-j,\ b=r+j,\ j=0,1,2,\dots,k-1$$

и собирајќи ги добиените неравенства, добиваме

$$f(r+k)-f(r)\geq f(r+1)-f(r-k+1)$$

Бидејќи r е парен, $f(r+1)=f(r)$ и

$$f(r+k)-f(r-k+1)\geq 2f(r),\ k=1,2,\dots,r .$$

Собирајќи ги овие неравенства, добиваме

$$f(1)+f(2)+\dots+f(2r)\geq 2rf(r).$$

Од (3) следува дека збирот на левата страна е $f(4r)-1$ и

$$f(4r)\geq 2rf(r)+1>2rf(r) \text{ за секој цел број } r>2 .$$

Ставајќи $r=2^{m-2}$, добиваме

$$f(2^m)>2^{m-1}f(2^{m-2}) \tag{5}$$

За $r = 2^{m-2}$ да биде парен број, m мора да биде цел број поголем од 2; да забележиме дека (5) важи за $m = 2$.

Нека n е било кој цел број поголем од 1. Ако l е позитивен цел број таков што $2l < n$, тогаш применувајќи го неравенството (5) за $m = n, n-1, \dots, n-2l+2$ и добиваме

$$f(2^n) > 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-4})$$
$$> \dots > 2^{(n-1)+(n-3)+\dots(n-2l+1)} \cdot f(2^{n-2l}) = 2^{l(n-l)} \cdot f(2^{n-2l})$$

Ако n е парен број, ставаме $l = \frac{n}{2}$; ако n е непарен, нека $l = \frac{n-1}{2}$. Се добиваат следниве неравенства:

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} \cdot f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}} \quad \text{за } n \text{ парен број,}$$

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2-1}{4}\frac{n^2-1}{4}} \cdot f(2^1) = 2^{\frac{n^2-1}{4}} \cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}} \quad \text{за } n \text{ непарен број.}$$

Ја добивме бараната оценка за $n \geq 2$. Таа важи и за $n = 1$, што може непосредно да се провери.

*

* *

Во следните задачи ќе се осврнеме на примена на генераторните функции во пребројувањата. Притоа, како што читателот ќе може сам да согледа во некои случаи пребројувањата се тесно поврзани со партициите на природните броеви.

31. Определи ги бројот на решенијата на равенката

$$a + b + c + d = r,$$

каде $0 \leq r \leq 6$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ и $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 2, 0 \leq d \leq 2$.

Решение. Имаме партиција на природен број со ограничувања, па затоа генараторната функција на проблемот е полиномот

$$H(x) = (1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2)$$
$$= 1 + 4x + 8x^2 + 10x^3 + 8x^4 + 4x^5 + x^6.$$

Сега, за $0 \leq r \leq 6$ коефициентот пред x^r го дава бројот на решенијата на равенката

$$a + b + c + d = r,$$

каде $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ и $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 2, 0 \leq d \leq 2$.

32. Нека A е множество кое содржи 1 објект од тип a, 1 објект од тип b, 2 објекта од тип c и 2 објекта од тип d. Определи го бројот на начините на кои може да се изберат 4 објекти од дадените 4 типа во множеството A.

Решение. Аналогно како во претходната задача, генераторната функција на проблемот е

$$\begin{aligned} H(x) &= (1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2) \\ &= 1+4x+8x^2+10x^3+8x^4+4x^5+x^6. \end{aligned}$$

Сега, бројот на начините на кои може да се изберат 4 објекти од дадените 4 типа во множеството A е еднаков на коефицинтот a_4 пред степенот x^4 во генераторната функција $H(x)$, т.е. тој е $a_4 = 8$.

33. Во сад имаме 4 црвени, 5 сини и 2 зелени топчиња.
а) На колку различни начини од садот можат да се изберат 7 топчиња?
б) На колку различни начини можат да се извлечат 7 топчиња, но притоа да мора да се извлече 1 црвено и 2 сини топчиња?

Решение. а) Генераторната функција на поставениот проблем е:

$$H(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)$$

и бараниот број избори е еднаков на коефициентот пред x^7. Лесно се добива дека тоа е коефицинтот $a_7 = 12$ во полиномто $H(x)$.

б) Бидејќи мора да се извлече барем едно црвено топче, множителот кој соодветствува на барањето на црвените топчиња е $x+x^2+x^3+x^4$. Слично, множителот кој соодветствува на барањето на сини топчиња е $x^2+x^3+x^4+x^5$. Значи генераторната функција е

$$G(x) = (x+x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)$$

и бараниот број е еднаков на коефициентот пред x^7. Лесно се добива дека тоа е коефицинтот $a_7 = 10$ во полиномто $G(x)$.

34. Нека претпоставиме дека во сад се наоѓаат 3 црвени, 8 зелени, 9 портокалови и 2 бели топчиња. На колку начини можат да се изберат 12 топчиња, ако мора да се изберат барем едно црвено топче, парен број зелени топчиња и непарен број портокалови топчиња?

Решение. Бидејќи од 3 црвени мора да се избере барем едно топче полиномот за црвените топчиња е $x+x^2+x^3$. Бидејќи од 8 зелени топчиња мора да се избере парен број топчиња, може да се изберат 0 или 2 или 4 или 6 или 8 зелени топчиња, па полиномот за зелените топчиња е $1+x^2+x^4+x^6+x^8$. Слично, полиномот за портокаловите топчиња е $x+x^3+x^5+x^7+x^9$, а полиномот за белите топчиња е $1+x+x^2$.

Според тоа, за поставениот проблем генераторната функција е

$$H(x) = (x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8)(x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9)(1 + x + x^2)$$

и бараниот број е коефициентот пред x^{12}. Определи го!

35. На колку начини 12 објекти можат да се изберат од 5 видови објекти, при што мора да има најмногу 2 објекти од првите три видови, а неограничен број објекти од останатите два видови објекти?

Решение. Генераторната функција е:

$$\begin{aligned} H(x) &= (1 + x + x^2)^3 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^2 \\ &= (\tfrac{1-x^3}{1-x})^3 (\tfrac{1}{1-x})^2 \\ &= (1 - x^3)^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^5} \\ &= (1 - 3x^3 + 3x^6 - x^9)(1 + 5x + \tbinom{6}{2} x^2 + \dots + \tbinom{5+n-1}{n} x^n + \dots). \end{aligned}$$

Ако ги помножиме последните два полиноми, добиваме дека коефициентот пред x^{12}, т.е. бараниот број избори е

$$a_{12} = 1 \cdot \tbinom{5+12-1}{12} - 3\tbinom{5+9-1}{9} + 3\tbinom{5+6-1}{6} - \tbinom{5+3-1}{3} = \tbinom{16}{12} - 3\tbinom{13}{9} + 3\tbinom{10}{6} - \tbinom{7}{3}.$$

36. На колку начини 20 објекти можат да се изберат, ако објектите од првиот вид можат да се изберат само во пакети од по 5 објекти, од вториот вид само во пакети од по 3 објекти, од третиот вид можат да се земат најмногу 4, од четвртиот вид најмалку 3 објекти и може да се земат најмногу 2 објекти од петтиот вид?

Решение. Генераторната функција за поставениот проблем е:

$$\begin{aligned} &(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(x^3 + x^4 + \dots)(1 + x + x^2) = \\ &= \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot \frac{x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^3}{1-x} = \frac{x^3}{(1-x)^3} \\ &= x^3 (1 + 3x + \tbinom{4}{2} x^2 + \tbinom{5}{3} x^3 + \dots + \tbinom{3+n-1}{n} x^n + \dots). \end{aligned}$$

Бараниот број избори е коефициентот пред x^{20}. Но коефициентот пред x^r е $\binom{r-1}{r-3}$, па затоа бараниот број избори е $\binom{19}{17}$.

37. Најди ја генераторната функција чиј n – ти коефициент го дава бројот на ненегативните решенија на равенката

$$a + 4b + 5c + 3d = n .$$

Решение. Бараниот број е еднаков на бројот на начините за избор на n објекти при што објектите од вториот вид се земаат во пакети од по 4 објекти, објектите од третиот вид се земаат во пакети од по 5 објекти и објектите од четвртиот вид се земаат во пакети од по три објекти. Според тоа, бараната генераторна функција е

$$H(x)=(1+x+x^2+...)(1+x^4+x^8+...)(1+x^5+x^{10}+...)(1+x^3+x^6+...)$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^3)}.$$

16. РАЗБИВАЊЕ НА МНОЖЕСТВА

1. *Партиција (разбивање) на множеството* M на k блокови е фамилија множества ® $=\{M_1, M_2, ..., M_k\}$ таква што

   а) $M_j \neq \varnothing$ за $j = 1, 2, 3, ..., k$,

   б) $M_i \cap M_j = \varnothing$ за $i, j = 1, 2, 3, ..., k$, $i \neq j$ и

   в) $M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_k$.

   На секое разбивање ® на множеството M на k блокови му соодветствуваат $k!$ подредени разбивања на M на k блокови. Тоа се пермутациите на блоковите на разбивањето ®. Нека $\sim_1, \sim_2, ..., \sim_k$ се природни броеви чиј збир е еднаков на n и нека со $B_n(\sim_1, \sim_2, ..., \sim_k)$ го означиме бројот на сите подредени разбивања $(M_1, M_2, ..., M_k)$ на множеството M, $|M| = n$ на k блокови, при што за деловите на тоа разбивање е исполнето $|M_j| = \sim_j$, $j = 1, 2, 3, ..., k$.

   Со $S_{n,k}$ ќе го означиме бројот на разбивања на множеството M, $|M| = n$ на k блокови, а со B_n бројот на сите разбивања на множеството M, $|M| = n$. Од дефиницијата на броевите $S_{n,k}$ и B_n е јасно дека $S_{n,0} = 0$ за $n \geq 1$, $S_{n,n} = 1$ за $n \geq 1$ и $S_{n,k} = 0$ за $k > n$. По дефиниција ставаме $S_{0,0} = B_0 = 1$. Бројот B_n го нарекуваме *n-ти Белов број*. Броевите $S_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$ се познати како *Стирлингови броеви од втор вид*, за кои се користат уште и ознаките $S(n,k)$ и $\{{n \atop k}\}$. Во нашите разгледувања ние ќе ја користиме ознаката $S_{n,k}$.

   Нека $n, k, \sim_1, \sim_2, ..., \sim_k$ се природни броеви за кои важи $\sim_1 + \sim_2 + ... + \sim_k = n$. Докажи, дека

$$B_n(\sim_1, \sim_2, ..., \sim_k) = \frac{n!}{\sim_1! \sim_2! ... \sim_k!}. \qquad (1)$$

   Решение. Од множеството M на $C_n^{\sim_1} = \binom{n}{\sim_1}$ начини можеме да избереме елементи за блокот M_1 (множество кое содржи $\sim_1$ елементи). Во случај кога се избрани елементите за блокот M_1, од преостанатите $n - \sim_1$ елементи можеме да формираме блок M_2, кој содржи $\sim_2$ елементи на $C_{n-\sim_1}^{\sim_2} = \binom{n-\sim_1}{\sim_2}$ начини. Според тоа, од подредната низа ® $= (M_1, M_2, ..., M_k)$, првите две множества последователно можеме да ги избереме на

$$C_n^{\sim_1} C_{n-\sim_1}^{\sim_2} = \binom{n}{\sim_1}\binom{n-\sim_1}{\sim_2}$$

начини. Продолжувајќи ја постапката, добиваме дека бројот на подредени разбивања е еднаков на

$$B_n(\sim_1, \sim_2, ..., \sim_k) = C_n^{\sim_1} C_{n-\sim_1}^{\sim_2} ... C_{n-\sum_{j=1}^{k-1}\sim_j}^{\sim_k} = \frac{n!}{\sim_1!\sim_2!...\sim_k!}.$$

2. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и нека $n \geq k$. Докажи дека важат равенствата

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sim_1+\sim_2+...+\sim_k=n} \frac{n!}{\sim_1!\sim_2!...\sim_k!}, \qquad (1)$$

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n, \qquad (2)$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n. \qquad (3)$$

Решение. За секое разбивање на бројот n на k собироци, $\sim_1+...+\sim_k = n$, постојат $\frac{n!}{\sim_1!\sim_2!...\sim_k!}$ подредени разбивања. Според тоа, бројот на подредени разбивања на множеството $M, |M| = n$ е еднаков на

$$\sum_{\sim_1+\sim_2+...+\sim_k=n} \frac{n!}{\sim_1!\sim_2!...\sim_k!}.$$

Бидејќи на секое разбивање на множеството $M, |M| = n$ постојат $k!$ подредени разбивања, добиваме дека

$$\sum_{\sim_1+\sim_2+...+\sim_k=n} \frac{n!}{\sim_1!\sim_2!...\sim_k!} = k! S_{n,k},$$

т.е. важи формулата (1).

Бројот на подредените разбивања на множеството $M, |M| = n$ на k блокови е еднаков на $k! S_{n,k}$, бидејќи секое разбивање (неподредено) на множеството M на k блокови определува $k!$ подредени разбивања од истите блокови. Секое подредено разбивање $(M_1, M_2, ..., M_k)$ на множеството $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ е определено со пресликување $f : M \to \{1, 2, 3, ..., k\}$, кое за секој j секој елемент на множеството M_j го пресликува во j. Точно е и обратното, секоја сурјекција $f : M \to \{1, 2, 3, ..., k\}$ определува едно подредено разбивање на множеството $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и тоа е

$$(f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\}), ..., f^{-1}(\{k\}))$$

(бидејќи f е сурјекција, секоја компонента е непразно множество). Според тоа, бројот на подредените разбивања на множеството $M, |M| = n$ на k

блокови е еднаков на бројот на сите сурјекции F од множеството S во множеството $Y=\{1,2,...,k\}$. Да го определиме бројот на овие сурјекции. Ставаме

$$F(y)=\{f:S\to Y \mid \text{за секој } x\in S,\ f(x)\neq y\}.$$

Тогаш, за секој $j\in\{1,2,...,k\}$ и секоја комбинација $\{y_1,...,y_j\}$ на елементи на множеството Y важи

$$|F(y_1)\cap F(y_2)\cap...\cap F(y_j)|=(k-j)^n.$$

Сега од принципот на вклучување и исклучување следува

$$|F(1)\cup F(2)\cup...\cup F(k)|=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^n,$$

па затоа

$$|F|=k^n-|F(1)\cup F(2)\cup...\cup F(k)|=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n,$$

т.е. точна е формулата (2). Точноста на формулата (3) непосредно следува од претходните разгледувања.

3. Докажи, дека за броевите $S_{n,k}$ за $k,n\in\mathbb{N}_0$ и $S_{n,0}=0$, $S_{n,1}=S_{n,n}=1$ важи

$$S_{n+1,k}=S_{n,k-1}+kS_{n,k}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Од задача 2 следува

$$S_{n,k-1}+kS_{n,k}-S_{n+1,k}=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\binom{k-1}{j}j^n+k\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n-\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{n+1}$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}(-1)^{k-1-j}\binom{k-1}{j}j^n+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n+\frac{1}{k!}(-1)^{k-k}\binom{k}{k}k^{n+1}$$

$$-\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{n+1}-\frac{1}{k!}(-1)^{k-k}\binom{k}{k}k^{n+1}$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}j^n\left[\binom{k}{j}-\frac{1}{k}\binom{k}{j}j-\binom{k-1}{j}\right]$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}j^n\left[\frac{k!}{j!(k-j)!}-\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{j}{k}\frac{(k-1)!}{j!(k-1-j)!}\right]$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}j^n\frac{(k-1)!}{j!(k-1-j)!}\left[\frac{k}{k-j}-\frac{j}{k-j}-1\right]=0,$$

од што следува формулата (1).

Втор начин. Го разгледуваме множеството од сите разбивања на $n-$елементното множество $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ на $k-1$ подмножества. Од овие $S_{n,k-1}$ разбивања можеме да добиеме партиција на $(n+1)-$елементното множество $\{x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}\}$ на k множества со додавање на едноелементното подмножество $\{x_{n+1}\}$.

Елементот x_{n+1} може да биде додаден и во некое од k – те подмножества на разбивањето на n – елементното множество $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ на k подмножества. Бидејќи ова множество можеме да го избереме на $\binom{k}{1} = k$ начини, вакви разбивања на множеството $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$ на k подмножества има $kS_{n,k}$. Конечно, од претходно изнесеното следува равенството (1).

4. Користејќи ја рекурзијата (1) од претходната задача пресметај ги Стирлинговите броеви од втор вид за $0 \le n, k \le 10$.

Решение. Имаме

n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$	$S_{n,3}$	$S_{n,4}$	$S_{n,5}$	$S_{n,6}$	$S_{n,7}$	$S_{n,8}$	$S_{n,9}$	$S_{n,10}$
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2466	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

5. На колку начини може 8 разнобојни топчиња да се разместат во 3 идентични кутии така што

а) ниту една кутија нема да остане празна,

б) може да има празна кутија?

Решение. а) Имаме 8 различни топчиња и треба да ги поделиме на три дела така што во секој дел да има барем по едно топче. Со други зборови треба да го определиме бројот на разбивања на множество $M, |M| = 8$ на три блокови. Како што знаеме овој број е Стирлинговиот број $S_{8,3} = 966$.

б) Бидејќи можеме да имаме празна кутија, разбивањето може да биде во 1-блок, 2-блока и 3 блока. Според тоа, вкупниот број на сместувања на 8 разнобојни топчиња во три идентични кутии, при што може да има празна кутија е: $S_{8,1} + S_{8,2} + S_{8,3} = 1 + 127 + 966 = 1094$.

6. Имам 10 различни разгледници и сакам сите да ги испратам, но така што секој од моите 6 пријатели ќе добие барем една разгледница. На колку начини тоа можам да го направам?

Решение. Множеството разгледници $\{r_1, r_2, ..., r_{10}\}$ сакам да го разбијам на 6 блокови. Од секое такво разбивање имам $6!$ начини да ги поделам разгледниците (ова е бидејќи ги разликувам пријателите). Бројот на разбивања е Стирлинговиот број од втор вид $S_{10,6} = 22827$.

Конечно, бројот на сите можни начини на испраќање на разгледниците е $6!S_{10,6} = 720 \cdot 22827 = 16435440$.

7. Докажи дека Стирлинговите броеви од втор вид ја задоволуваат рекурентната формула

$$S_{n+1,k} = \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} S_{j,k-1} . \qquad (1)$$

Решение. Нека $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$. Го разгледуваме множеството од сите разбивања на $(n+1)-$елементното множество X на k подмножества. Тоа содржи $S_{n+1,k}$ разбивања. Секое од овие разбивања содржи едно подмножество на кое му припаѓа елементот x_{n+1} и уште $k-1$ подмножества, па тоа определува едно разбивање на $j-$елементно множество J (J е унијата на тие $k-1$ подмножества) на $k-1$ подмножества, при што важи $k-1 \le j \le n$.

На тој начин добиваме меѓусебно различни разбивања на множеството J (во спротивно, ако овде имаме две еднакви разбивања и меѓу разбивањата на множеството X ќе имаме две еднакви разбивања). На овој начин ги добивме сите разбивања на било кое множество $J \subset X$ (кое има најмалку $k-1$ елемент) на $k-1$ подмножества.

Преостанатите $n-j$ елементи, кои заедно со x_{n+1} го формираат $m-$тото множество може да ги избереме на $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$ начини, па од претходните разгледувања следува формулата (1).

8. Докажи, дека за Беловите броеви важи следнава рекурентна формула

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \text{, каде } B_0 = 1 .$$

Решение. Нека R е фамилија од сите разбивања на множеството $M = \{1, 2, ..., n, n+1\}$. Тогаш $R = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_n$, каде R_k е фамилијата од оние разбивања на множеството M, кај кои елементот $n+1$ припаѓа на блокот кој содржи $k+1$ елемент, каде $0 \le k \le n$. Блокот (ќе го означиме со M_0) кој содржи $k+1$ елементи на множеството M и меѓу нив и елементот $n+1$ може да биде избран на $\binom{n}{k}$ начини. Множеството $M \setminus M_0$ кое содржи $n-k$ елементи може да биде разбиено на B_{n-k} начини. Според тоа, точно е равенството $|R_k| = \binom{n}{k} B_{n-k}$. Бидејќи разбивањето е дисјунктно и $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, добиваме дека

$$B_{n+1} = |R| = \sum_{k=0}^{n} |R_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k .$$

9. Нека $B(x)$ е експоненцијалната генераторна функција за низата Белови броеви $B(n)$. Докажи дека $B(x)=e^{e^x-1}$.

Решение. Според претходната задача имаме

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\,, \tag{1}$$

каде $B_0=1$. Нека $B(x)$ е експоненцијалната генераторната функција за низата Белови броеви, т.е.

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B(n)\frac{x^n}{n!}\,.$$

Ако (1) ја помножиме со $\frac{x^n}{n!}$, а потоа сумираме по сите ненегативни n добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{n+1}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\frac{x^n}{n!}\,.$$

Сега, од забелешката по задача 10.34 за диференцирањето на експоненцијалните генераторни функции и од определбата на биномната конволуција, бидејќи функцијата $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ е експоненцијална генераторна функција на низата $a_k=1, k=0,1,2,...$, седува дека горното равенство е еквивалентно со равенството $B'(x)=B(x)e^x$, т.е. со равенството $\frac{B'(x)}{B(x)}=e^x$. По интегрирање на последното равенство добиваме $\ln B(x)=e^x+C$. Ако ставиме $x=0$, добиваме дека $\ln B(0)=e^0+C$, па затоа $c=-1$. Според тоа, $\ln B(x)=e^x-1$ односно $B(x)=e^{e^x-1}$.

10. Докажи дека за Стирлингоите броеви од прв и втор вид важи

$$s_{n,,k}\ge S_{n,k}\text{ , за секои } k,n\in\mathbb{N}_0\,. \tag{1}$$

Решение. Нека е дадено множеството $\{1,2,...,n\}$. На секое разбивање на множеството $\{1,2,...,n\}$ на k блокови, соодветствува барем една негова пермутација која има k циклуси. Навистина, секој блок определува најмалку еден циклус, па затоа точно е неравенството (1).

Во неравенството (1) знак за равенство важи ако и само ако $k=n$ или $k=n-1$. Навистина, во првиот случај имаме само тривијални циклуси, а во вториот случај имаме тривијални циклуси и една транспозиција, па затоа

$$s_{n,n}=S_{n,n}=1 \text{ и } s_{n,n-1}=S_{n,n-1}=\binom{n}{2}\,.$$

11. Користејќи ги експоненцијалните генераторни функции докажи дека бројот на начините на кои n различни објекти може да се ставaт во k различни кутии, при што ниту една кутија не смее да биде празна и $1 \le k \le n$, е

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \ . \qquad (1)$$

Решение. За дадениот проблем експоненцијалната генераторна функција е

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^k = (e^x - 1)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{(k-i)x} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k-i)^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$

и коефициентот пред $\frac{x^n}{n!}$ е даден со (1), со што е докажана формулата (1).

Коментар. Бидејќи сместувањето на n различни елементи во k различни кутии, при што ниту една кутија не смее да биде празна е $A_{n,k}$, добиваме дека сместувањето на n различни елементи во k исти кутии, при што ниту една кутија не смее да биде празна е еднакво на $\frac{1}{k!} A_{n,k}$. Но, ваквто сместување всушност е разбивање на множество од n елементи на k блокови, а тоа е Стирлинговиот број од втор вид, т.е.

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} A_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{k-j} j^n \ ,$$

и ова е уште еден доказ на формулата 2) од задача 2.

12. Определи ја експоненцијалната генераторната функција која може да се искористи за наоѓање на бројот на начините на кој n лица може да се сметат во 3 соби со најмалку 2, но не повеќе од 9 лица.

Решение. Од својствата на експоненцијалните генераторни функции, добиваме дека бараната експоненцијална генераторна функција е

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^9}{9!}\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^9}{9!}\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^9}{9!}\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^9}{9!}\right)^3. \end{aligned}$$

13. Определи ја експоненцијалната генераторна функција за низата варијации со повторување од n елементи од класа k.

Решение. Бројот на варијациите со повторување од n елементи од класа k е еднаков на n^k. Затоа за екпоненцијалната генераторна функција за варијациите со повторување од n елементи од класа k добиваме

$$F(x)=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n^2x^2}{2!}+\frac{n^3x^3}{3!}+...+\frac{n^kx^k}{k!}+...$$
$$=1+\frac{nx}{1!}+\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^3}{3!}+...+\frac{(nx)^k}{k!}+...$$
$$=e^{nx}=(e^x)^n.$$

14. Определи го бројот на сместување на n гости во три сали, при што во првата сала мора да има барем еден гостин, во втората сала мора да има непарен број гости и во третата сала мора да има парен број гости.

Решение. Нека n гости се сметени во три сали, при што во првата сала мора да има барем еден гостин, во втората сала мора да има непарен број гости и во третата сала мора да има парен број гости. Експоненцијалната генераторна функција за овој проблем е

$$F(x)=(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...)(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}...)(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}...)\,. \qquad (1)$$

Ако ги искористиме равенствата

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^k}{k!}+...\,,$$
$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^k\frac{x^k}{k!}+...$$

добиваме

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+...$$

и

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+...\,,$$

па со замена во (1) за експоненцијалната генераторна функција добиваме

$$f(x)=(e^x-1)\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$=(e^x-1)\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}$$
$$=\frac{1}{4}[e^{3x}-e^{-x}-e^{2x}+e^{-2x}].$$

Коефициентот пред $\frac{x^n}{n!}$ во последната функција е $\frac{1}{4}[3^n-(-1)^n-2^n+(-2)^n]$ и тој е еднаков на бројот на начините на сместување на n-те гости во трите сали, при дадените услови.

15. Множеството $S=\{1,2,...,n\}$ првиот пат е разбиено на m, а вториот пат на $m+k$ непразни подмножества ($k>0$). Докажи дека најмалку $k+1$ елемент на множеството S првиот пат се наоѓа во побројно множество отколку вториот пат.

Решение. Нека $S=A_1\cup A_2\cup...\cup A_m=B_1\cup B_2\cup...\cup B_{m+k}$ се дадените разбивања. За $t\in S$ со x_t и y_t соодветно да го означиме бројот елементите на она множество A_i и B_j кое го содржи t. Бидејќи за секој $t \in A_i$ важи $x_t = |A_i|$, добиваме дека $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t} = m$. Аналогно важи $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{y_t} = m + k$. Според тоа, $\sum_{t=1}^{n} (\frac{1}{y_t} - \frac{1}{x_t}) = k$, па бидејќи сите собироци во оваа сума се помали од 1, меѓу собироците мора да има најмалку $k+1$ позитивен, т.е. за $k+1$ вредност на t важи $y_t < x_t$, што и требаше да се докаже.

16. Дали може множеството природни броеви да се разбие на три непразни по парови дисјунктни множества A, B, C така што ако x и y припаѓаат на две од мнижествата, тогаш $x + y + xy$ припаѓа на третото множество.

Решение. Нека претпоставиме дека бараното разбивање постои.
Ќе докажеме дека во тој случај 1 и 3 припаѓаат на исто множество.
Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека $1 \in A$ и $3 \in B$. Тогаш

$$1+3+1\cdot 3 = 7 \in C, 1+7+1\cdot 7 = 15 \in B \text{ и } 3+7+3\cdot 7 = 31 \in A .$$

Од друга страна $1+15+1\cdot 15 = 31 \in C$, штое противречност, па затоа 1 и 3 се во исто множество. Нека $1,3 \in A$ и $n \in B$. Тогаш

$$1+n+1\cdot n = 2n+1 \in C \text{ и } 3+n+3n = 4n+3 \in C .$$

Од друга страна, $1+(2n+1)+1\cdot(2n+1) = 4n+3 \in B$, што е противречност, па затоа бараното разбивање не е можно.

17. Множеството природни броеви дисјунктно е разбиено на следниот начин:

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{4,5,6\}, A_4 = \{7,8,9,10\}, \dots$$

Определи го збирот на членовите од n-тото по ред множество.

Решение. За секој природен број m, точно е равенството

$$1+2+...+m = \frac{m(m+1)}{2} .$$

Од дефиницијата на низата множества $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ следува дека бројот на елементите на k-тото множество A_k е $|A_k| = k$. Во унијата

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}$$

се содржат сите природни броеви од бројот 1 до бројот

$$1+2+3+...+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} .$$

Според тоа, n-тото множество A_n се состои од следните n природни броеви поголеми од $\frac{n(n-1)}{2}$, односно од броевите:

$$\frac{n(n-1)}{2}+1, \frac{n(n-1)}{2}+2, ..., \frac{n(n-1)}{2}+n .$$

Нивниот збир е еднаков на

$$\frac{n(n-1)}{2}+1+\frac{n(n-1)}{2}+2+....+\frac{n(n-1)}{2}+n=n\frac{n(n-1)}{2}+(1+2+3+...+n)$$
$$=n\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\tfrac{n}{2}[n(n-1)+n+1]=\tfrac{n}{2}(n^2+1).$$

18. Броевите $1,2,...,2n-1,2n$ се поделени на две групи, по n во секоја. Нека $a_1<a_2<...<a_n$ се броевите од првата група запишани во растечки редослед, а $b_1>b_2>...>b_n$ се броевите од втората група запишани во опаѓачки редослед. Докажи дека
$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_n-b_n|=n^2.$$
Решение. Да забележиме дека од двата броја a_k и b_k едниот секогаш е помал или еднаков на n, а другиот е поголем од n. Навистина, ако $a_k\le n$ и $b_k\le n$, тогаш сите броеви $a_1,a_2,...,a_k$ и $b_k,b_{k+1},...,b_n$ се помали или еднакви на n. Според тоа, добиваме дека постојат $k+(n-k+1)=n+1$ различни природни броеви кои се помали или еднакви на n, што не е можно. Аналогно се докажува дека и двата броеви a_k и b_k не може да се поголеми од n.
Според тоа, секој собирок $|a_k-b_k|$ во нашата сума е еднаков на разлика на број поголем од n и помал или еднаков на n. Ако се ослободиме од апсолутните вредности и ги прегрупираме собирците добиваме
$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_n-b_n|=(n+1)+(n+2)+...+(n+n)-(1+2+...+n)=n^2.$$

19. Дадени се природните броеви $1=a_1,a_2,...,a_n$ закои важи $a_i\le a_{i+1}\le 2a_i$, за $i=1,2,...,n-1$ и бројот $\sum_{i=1}^{n}a_i$ е парен. Докажи, дека овие броеви може да се поделат во две групи со еднакви збирови.
Упатство. Индуктивно се докажува, дека ако за низата $\{a_n\}$ се исполнети условите на задачата, тогаш во збирот $S=\pm a_1\pm a_2\pm...\pm a_n$ знаците може да се изберат така, што важи $-a_1\le S\le a_1$. Сега, од $a_1=1$ следува $S=0$, па во едната група треба да ги земеме броевите со знак +, а во другата броевите со знак $-$.

20. Дадени се реални броеви $x_i>1, i=1,2,...,2n$. Докажи, дека интервалот $[0,2]$ содржи најмногу $\binom{2n}{n}$ збирови од видот
$$\sum_{i=1}^{2n}a_ix_i \text{ , каде } a_i\in\{-1,1\} \text{ за } i=1,2,...,2n.$$

Решение. На секој збир $\sum_{i=1}^{2n} a_i x_i$ соодветствува разбивање $S \cup T$ на множеството $\{1, 2, ..., 2n\}$ определено со

$$k \in S \quad \Leftrightarrow \quad a_k = -1 \text{ и } k \in T \quad \Leftrightarrow \quad a_k = 1 .$$

Нека $\pm_1 = \sum_{i=1}^{2n} a_i x_i$ и $\pm_2 = \sum_{i=1}^{2n} b_i x_i$ се два збира од дадениот вид, $a_i, b_i \in \{-1,1\}$ и нека $S_1 \cup T_1$ и $S_2 \cup T_2$ се соодветните разбивања на множеството $\{1, 2, ..., 2n\}$. Нека претпоставиме дека $S_1 \subset S_2$. Тогаш збировите $\pm_1$ и $\pm_2$ се разликуваат за удвоениот збир на неколку од броевите x_i, што значи за повеќе од 2, па не е можно и двата да припаѓаат на интервалот $[0, 2]$. Значи, ако $\pm_1, \pm_2, ..., \pm_m$ се сите збирови од дадениот вид кои припаѓаат на интервалот $[0, 2]$ и $S_1 \cup T_1, S_2 \cup T_2, ..., S_m \cup T_m$ се соодветните разбивања на множеството $\{1, 2, ..., 2n\}$, тогаш множествата $S_1, S_2, ..., S_m$ се неспоредливи во однос на инклузијата, т.е. ниту едно од нив не се содржи во друго како подмножество. Конечно, имаме $m \le \binom{2n}{n}$.

21. Нека $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и M е множеството од сите позитивни делители на m кои се производ на два прости делители на m. Определи го најмалиот природен број n со следното својство: од било кои n различни броеви од M може да се изберат три чиј производ е m.

Решение. Множеството M има $\binom{6}{2} = 15$ елементи, односно

$$M = \{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 11, 2 \cdot 13, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 3 \cdot 11, 3 \cdot 13, 5 \cdot 7, 5 \cdot 11, 5 \cdot 13, 7 \cdot 11, 7 \cdot 13, 11 \cdot 13\} .$$

Од друга страна, ако избереме 5 од 6-те прости делители на бројот m, може да направиме $\binom{5}{2} = 10$ елементи од множеството M. Производот на било кои три од нив не може да е бројот m. Значи, $n \ge 11$.

Ќе докажеме дека $n = 11$. Елементите на множеството M ќе ги разделиме на пет попарно дисјунктни подмножества од M при што производот на елементите од секое од тие множества одделно е бројот m. Една таква поделба е

$$\{2 \cdot 3, 5 \cdot 13, 7 \cdot 11\}$$
$$\{2 \cdot 5, 3 \cdot 7, 11 \cdot 13\}$$
$$\{2 \cdot 7, 3 \cdot 13, 5 \cdot 11\}$$
$$\{2 \cdot 11, 3 \cdot 5, 7 \cdot 13\}$$
$$\{2 \cdot 13, 3 \cdot 11, 5 \cdot 7\} .$$

Ако избереме 11 елементи од множеството M, според принципот на Дирихле три елементи ќе бидат од едно исто множество, од претходните делбени множества. Нивниот производ е бројот m.

22. Дали е можно множеството природни броеви да се раздели на две дисјунктни подмножества, така да ниту едно од нив не содржи бесконечна аритметичка прогресија, која што не е константна.

Решение. Може. Ќе пример на две дисјунктни множества чија унија е $\mathbb{N}$, такви што било кое од нив не содржи бесконечна аритметичка прогресија што не е константна.

Нека

$$A_{2k} = \{n \mid (2k)^2 < n \le (2k+1)^2, n \in \mathbb{N}\},\ k = 0,1,2,...$$

$$B_{2k+1} = \{n \mid (2k+1)^2 < n \le (2k+2)^2, n \in \mathbb{N}\},\ k = 0,1,2,...$$

и $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, $B = \bigcup_{k=2}^{\infty} B_{2k+1}$.

Ќе докажеме дека не постои неконстантна аритметичка прогресија која целосно се содржи во едно од множествата A или B. Нека го претпоставиме спротивно, т.е. дека постои бесконечна аритметичка прогресија $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, со почетен член a_1 и разлика $d > 0$, која се содржи само во множеството A. Ќе го разгледаме множеството

$$B_{2d+1} = \{n \mid (2d+1)^2 < k \le (2d+2)^2, k \in \mathbb{N}\}.$$

Ова множество има

$$4d^2 + 8d + 4 - 4d^2 - 4d - 1 = 4d + 3$$

елементи. Остатоците на овие елементи при делење со d се $\{0,1,2,...,d-1\}$. Од друга страна, постојат $l, r \in \mathbb{N}$, $0 \le r \le d-1$ така што $a_1 = ld + r$. Затоа, за некој $s = 5,6,7$ и добиеното r во претставувањето на a_1 имаме

$$\begin{aligned} 4d^2 + sd + r &= ld + r + 4d^2 + sd - ld \\ &= a_1 + d(4d + s - l) \\ &= a_{4d+s-l+1} \in B_{2d+1}. \end{aligned}$$

Според тоа, постои член на прогресијата кој припаѓа на B.

23. Докажи, дека множеството $\{1,2,3,...,12001\}$ може да се разбие на пет подмножества такви, што ниту едно од нив не содржи 11-члена аритметичка прогресија.

Решение. Нека k е бројот на 11-члените аритметички прогресии, формирани од дадените броеви. Ако a и d се соодветно првиот член и разликата на една таква прогресија, тогаш $1 \le a \le 11991$ и $1 \le d \le [\frac{12001-a}{10}]$. Затоа

$$k \le \sum_{a=1}^{11991} [\tfrac{12001-a}{10}] < 5^{10}.$$

Бројот на разбивања на множеството $\{1,2,...,12001\}$ на пет подмножества (вклучувајќи кога некои од множествата се празни) е еднаков на 5^{12001} (за секој број имаме по 5 можности). Вкупниот број разбивања, при што има барем една 11-члена аритметичка прогресија е помал од $5k\cdot 5^{12001-11}$ (бидејќи фиксирана прогресија може да се избере по k, по што за неа и за секој од преостанатите $12001-11$ броеви има по 5 можности).

Сега, бидејќи $k<5^{10}$, важи $5k\cdot 5^{12001-11}<5^{12001}$, што значи дека постои разбивање кое не содржи 11-члена аритметичка прогресија

24. Нека $n\ge 3$ е природен број. Докажи, дека множеството $\{1,2,3,...,n^2-n\}$ може да се разбие на две дисјунктни множества такви, што ниту едно од нив не содржи n броеви $a_1<a_2<...<a_n$ за кои важи $a_k\le\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ за секој $k=2,3,...,n$.

Решение. За $k=1,2,...,n-1$ дефинираме

$$S_k=\{k^2-k+1,k^2-k+2,...,k^2\}$$
$$T_k=\{k^2+1,k^2+2,...,k^2+k\}$$

и нека $S=\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k$ и $T=\bigcup_{k=1}^{n-1}T_k$. Лесно се проверува дека важи $S\cap T=\varnothing$ и $S\cup T=\{1,2,3,...,n^2-n\}$. Ќе докажеме дека ова разбивање го има саканото својство.

Нека претпоставиме, дека S содржи n броеви $a_1<a_2<...<a_n$ такви што $a_k\le\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ за секој $k=2,3,...,n$. Нека $a_1\in S_i$ и нека $S'=\bigcup_{j=i+1}^{n-1}S_j$. Бидејќи S_{n-1} има $n-1$ елемент, добиваме $i<n-1$. Според тоа, множеството $S'\cap\{a_1,a_2,...,a_n\}$ содржи најамалку $n-|S_i|=n-i>0$ елементи. Но, множеството S' е унија на $n-i-1$ множества, па затоа најмалку едно од овие множества содржи два елементи од $\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Значи, постојат k и j такви што $a_{k-1}\in\bigcup_{l=1}^{j-1}S_l$ и $\{a_k,a_{k+1}\}\subset S_j$. Но, тогаш важи

$$a_{k+1}-a_k\le|S_j|-1=j-1 \text{ и } a_k-a_{k-1}\ge|T_j|+1=j.$$

Според тоа, $a_{k+1}-a_k<a_k-a_{k-1}$, т.е. $2a_k>a_{k+1}+a_{k-1}$, што е противречност. Аналогно се докажува дека множеството T не содржи n броеви $a_1<a_2<...<a_n$ такви што $a_k\le\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ за секој $k=2,3,...,n$.

25. Нека $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ се произволни реални броеви. Докажи, дека овие броеви можат да се разделат на две дисјунктни множества A и B од по n броеви така што разликата на збировите $S(A)$ и $S(B)$ на броевите во множествата го задоволуваат неравенството

$$|S(A)-S(B)| \leq \max_{1\leq i<2n} |x_{i+1}-x_i|.$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=1$ тврдењето е очигледно.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $n \geq 1$ и да ги разгледаме броевите $x_1, x_2, ..., x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}$. Тогаш, ако $M = \max\limits_{1\leq i<2n+2} |x_{i+1}-x_i|$, точни се неравенствата $\max\limits_{3\leq i<2n+2} |x_{i+1}-x_i| \leq M$ и $|x_1-x_2| \leq M$.

Од индуктивната претпоставка следува дека броевите $x_3, ..., x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}$ може да се разделат во две дисјунктни множества A и B од по n броеви, за кои важи

$$|S(A)-S(B)| \leq \max_{2\leq i<2n+2} |x_{i+1}-x_i| \leq M.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $S(A) \geq S(B)$ и $x_1 \geq x_2$. Да ги разгледаме множествата $A \cup \{x_2\}$ и $B \cup \{x_1\}$. Јасно, овие множества се дисјунктни, па ако искористиме дека за позитивни реални броеви x и y важи $|x-y| \leq \max\{x,y\}$, тогаш за соодветните збирови имаме

$$\begin{aligned}|S(A)+x_2-S(B)-x_1| &= |(S(A)-S(B))-(x_1-x_2)| \\ &\leq \max\{S(A)-S(B), x_1-x_2\} \leq M.\end{aligned}$$

Според тоа, тврдењето важи за $n+1$, со што задачата е решена.

26. Нека $A=(A_i)_{1\leq i\leq n}$ и $B=(B_i)_{1\leq i\leq n}$ се две разбивања на множеството M, такви што унијата $A_i \cup B_j$, на произволни две дисјунктни множества A_i и B_j не содржи помалку од n елементи. Докажи дека $|M| \geq \frac{n^2}{2}$.

Дали е можно равенството $|M| = \frac{n^2}{2}$?

Решение. Од условот на задачата имаме $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, за $i \neq j$, $i,j=1,2,...,n$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = M$, Со $|A_i|, |B_j|$, $i,j=1,2,3,...,n$ ќе го означиме бројот на елементи во множествата A_i и B_j, соодветно.

Множеството $S=\{|A_i|,|B_i| \,\vdots\, i=1,2,...,n\}$ е конечно, па според тоа во него постои најмал елемент, т.е. постои $k \in S$, таков што

$$k \leq |A_i|,\ k \leq |B_i|,\ i=1,2,...,n.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $|A_1| = k$ (во спротивен случај, понатаму наместо да работиме со множеството A_1 ќе работиме со некое множество A_i или B_i кое има k елементи).

Нека претпоставиме дека $k \le \frac{n}{2}$. Ако го претпоставиме спротивно, т.е. $k > \frac{n}{2}$, тогаш заради дисјунктноста на фамилиите множества имаме

$$|M| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| > \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{2} = n\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2},$$

што значи дека е исполнето е тврдењето од задачата.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $B_1, B_2, ..., B_m$ се сите множества од фамилијата $B = (B_i)_{1 \le i \le n}$ кои имаат непразен пресек со множеството A_1, а $B_{m+1}, B_{m+2}, ..., B_n$ имаат празен пресек. Јасно, $m \le k$. Заради $B_i \cap B_j = \varnothing$ $i \ne j$, $i, j = 1, 2, ..., n$, добиваме дека

$$(A_1 \cap B_i) \cap (A_1 \cap B_j) = \varnothing,$$

па според тоа

$$\begin{aligned} k = |A_1| &= |A_1 \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_m| \\ &= |(A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_3) \cup ... \cup ((A_1 \cap B_m)| \\ &= \sum_{i=1}^{m} |(A_1 \cap B_i)| \ge \sum_{i=1}^{m} 1 = m. \end{aligned}$$

Секое од множествата $B_1, B_2, ..., B_m$ содржи барем k елементи, и заради нивната дисјунктност, добиваме дека

$$|\bigcup_{i=1}^{m} B_i| = \sum_{i=1}^{m} |B_i| \ge \sum_{i=1}^{m} k = mk.$$

Од условите на задачата и од начинот на избор на $B_{m+1}, B_{m+2}, ..., B_n$, имаме

$$|A_1 \cap B_i| \ge n, \ i = m+1, ..., n.$$

Од формулата за вклучување и исклучување имаме

$$|A_1 \cup B_j| = |A_1| + |B_j| - |A_1 \cap B_j| = k + |B_j| \ge n, \ j = m+1, ..., n,$$

т.е. $|B_j| \ge n-k$. Тогаш

$$|\bigcup_{j=m+1}^{n} B_j| = \sum_{j=m+1}^{n} |B_j| \ge \sum_{j=m+1}^{n} (n-k) = (n-k)(n-m).$$

Сега

$$\begin{aligned} |M| = |\bigcup_{j=1}^{n} B_j| &= |\bigcup_{j=1}^{m} B_j \cup \bigcup_{j=m+1}^{n} B_j| = |\bigcup_{j=1}^{m} B_j| + |\bigcup_{j=m+1}^{n} B_j| \\ &\ge km + (n-k)(n-m) = n(n-k) - m(n-2k) \\ &\ge n(n-k) - k(n-2k) = 2(k-\tfrac{n}{2})^2 + \tfrac{1}{2}n^2 \ge \tfrac{1}{2}n^2. \end{aligned}$$

Равенството $|M|=\frac{n^2}{2}$ важи, што го покажува следниов пример. Нека n е парен број и нека важи за $A_i=B_i$, $i=1,2,...,n$ и $|A_i|=|B_i|=\frac{n}{2}$, $i=1,2,...,n$.

27. Нека $A=(A_i)_{1\le i\le n}$, $B=(B_i)_{1\le i\le n}$ и $C=(C_i)_{1\le i\le n}$ се разбивања на конечното множество M такви што за било кои i,j,k, $1\le i,j,k\le n$ важи

$$|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|\ge n.$$

Докажи дека $|M|\ge\frac{n^3}{3}$. Докажи дека за $n\in\mathbb{N}$, $n\equiv 0(\operatorname{mod}3)$ важи знак за равенство.

Решение. Бидејќи $B=(B_i)_{1\le i\le n}$ е разбивање на множеството M, за секои $i,k\in\{1,2,...,n\}$, тоа е разбивање на A_i и C_k. Според тоа

$$\sum_{j=1}^{n}(|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|)=|A_i|+n|C_k\cap A_i|+|C_k|\ge n^2.$$

Бидејќи $A=(A_i)_{1\le i\le n}$ е разбивање на множеството M таа е разбивање и на множеството C_k за секое $k=1,2,...,n$, па според тоа

$$\sum_{i=1}^{n}(|A_i|+n|C_k\cap A_i|+|C_k|)=|M|+n|C_k|+n|C_k|\ge n^3.$$

Конечно, бидејќи $C=(C_i)_{1\le i\le n}$ е разбивање на множеството M, добиваме дека

$$\sum_{k=1}^{n}(|M|+n|C_k|+n|C_k|)=n|M|+n|M|+n|M|\ge n^4.$$

Од последното неравенство добиваме дека $|M|\ge\frac{n^3}{3}$.

Нека $n\equiv 0(\operatorname{mod}3)$ и M е множество со $\frac{n^3}{3}$ елементи. Множеството M ќе го разбиеме на n^2 множества $A_{i,j}$, $i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n$, такви што

$$A_{i,j}\cap A_{k,l}=\varnothing,\ (i,j)\ne(k,l) \text{ и } |A_{i,j}|=\frac{n}{3}.$$

Ќе ги формираме множествата

$$A_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{i,j},\ B_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{j,i},\ C_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{j,i+j-1(\operatorname{mod} n)}$$

Не е тешко да се провери дека $A=(A_i)_{1\le i\le n}$, $B=(B_i)_{1\le i\le n}$ и $C=(C_i)_{1\le i\le n}$ се разбивања на множеството M, при што

$$|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|=|A_{i,j}|+|A_{j+k-1(\operatorname{mod}n),j}|+|A_{i,k+i-1(\operatorname{mod}n)}|$$
$$=\frac{n}{3}+\frac{n}{3}+\frac{n}{3}=n.$$

28. Докажи дека множеството $\{1,2,....,1989\}$ може да се подели на 117 дисјунктни подмножества $A_1, A_2, ..., A_{117}$ за кои е исполнето:

1) A_i има 17 елементи за $i = 1,2,3,...,117$;

2) во секое множество A_i, $i = 1,2,3,...,117$ збирот на елементите е еднаков.

Решение. Ќе докажеме поопшто тврдење во кое бројот 17 може да се замени со било кој делител k на бројот $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17$, при што $1 < k < 1989$ и $\frac{1989}{k} \geq 3$.

Множеството $\{1,2,3,...,1989\}$ ќе го претставиме како унија на множествата

$$X = \{1,2,3,...,3k\} \text{ и } Y_j = \{(3k+2kj)+1, ..., (3k+2kj)+2k\},\ j = 1,2,3,...,L,$$

каде $L = \frac{1989-3k}{2k} - 1$.

Множеството X можеме да го поделиме на k дисјунктни подмножества $X_1, X_2, ..., X_k$ од по 3 броја, така што сите тие да имаат ист збир на елементи. Секое од множествата Y_j може да се подели на k дисјунктни подмножества $Y_{j_1}, Y_{j_2}, ..., Y_{j_k}$ од по 2 броја, така што сите тие имаат ист збир на елементите. Бараната поделба на множеството $\{1,2,3,...,1989\}$ ја добиваме така што ги формираме множествата

$$A_i = X_i \cup (\bigcup_{j=1}^{L} Y_{j_i}),\ i = 1,2,3,...,k.$$

29. Определи го најголемиот природен број n за кој постојат различни множества $S_i, i = 1,2,...,n$ такви што:

1) $|S_i \cup S_j| \leq 2004$, за секои i, j, такви што $1 \leq i < j \leq n$, и

2) $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1,2,...,2008\}$, за секои i, j, k такви што $1 \leq i < j < k \leq n$.

Решение. Секое множество S_i има најмногу 2003 елементи. Навистина, ако $|S_i| = 2004$, тогаш од условот 1) следува дека $S_j \subset S_i$, за секој j, што противречи на условот 2). Да ги разгледаме множествата

$$G_{\{i,j\}} = \{1,2,...,2008\} \setminus (S_i \cup S_j),\ \text{за } 1 \leq i < j \leq n.$$

Важи $|G_{\{i,j\}}| \geq 4$ и сите $\binom{n}{2}$ множества $G_{\{i,j\}}$ се меѓусебно дисјунктни (во спротивно ако $x \in G_{\{i,j\}} \cap G_{\{k,l\}}$, тогаш $x \notin S_i \cup S_j \cup S_k \cup S_l$, што не е можно бидејќи барем три од индексите i, j, k, l се различни). Според тоа, $4\binom{n}{2} \leq 2008$, од каде добиваме $n \leq 32$.

Ќе конструираме 32 множества кои ги задоволуваат условите 1) и 2).

Произволно го разбиваме множеството $\{1,2,...,2008\}$ на $\binom{32}{2}=496$ дисјунктни множества $G_{\{i,j\}}$, такви што $|G_{\{i,j\}}|\geq 4$ за $1\leq i,j\leq 32$ и дефираме

$$S_i=\{1,2,...,2008\}\setminus \bigcup_{j\neq i} G_{\{i,j\}},\text{ за } i=1,2,...,32 .$$

Условот 1) е очигледно исполнет. Освен тоа, секој $s\in\{1,2,...,2008\}$ припаѓа најмногу на едно од множествата $G_{\{p,q\}}$, што значи дека постојат најмногу две множества S_i кои не го содржат (тоа се S_p и S_q), па затоа и условот 2) е исполнет. Според тоа, бараниот најголем природен број е $n=32$.

30. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството $\{1,2,...,3n\}$ може да се подели на n дисјунктни триелементни подмножества $\{a,b,c\}$ за кои $b-a$ и $c-b$ се различни броеви од множеството $\{n-1,n,n+1\}$.

Решение. Бараната поделба на множеството $\{1,2,...,3n\}$ соодветствува на поделбата на темињата на правилен $3n-$аголник $P_1P_2...P_{3n}$ на тројки $\{A_i,B_i,C_i\}$ такви да аглите на секој од триаголниците $A_iB_iC_i$ се еднакви на $\frac{n-1}{3n}$®, $\frac{n}{3n}$® и $\frac{n+1}{3n}$® . Со погодно означување на темињата на $3n-$аголникот можеме да постигнеме темињата A_1,B_1,C_1 да бидат точно темињата P_n, P_{2n-1},P_{3n} . Со други зборови, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека меѓу тројките $\{a,b,c\}$ на кои множеството $\{1,2,...,3n\}$ е поделено се наоѓа и тројката $\{n-1,n,n+1\}$.

Една од преостанатите тројки мора да содржи два броја од интервалот $[2n,3n-1]$, а тоа единствено може да бидат броевите $2n$ и $3n-1$. Единствена тројка која ги содржи овие броеви и не го содржи n е $\{n-1,2n,3n-1\}$. Сите останати тројки содржат точно по еден број од секој од интервалите $[1,n-2]$, $[n+1,2n-2]$ и $[2n+1,3n-2]$. Со пресликувањето $(a,b,c)\to(a,b-2,c-4)$, за $a<b<c$ добиваме соодветна поделба на множеството $\{1,2,...,3n-2\}$. Бидејќи за $n=1$ ваква поделба не е можна со едноставна индукција се докажува дека поделбата не е можна ниту за еден непарен број n .

Од друга страна, за $n=2m$ тројките

$$(2i-1,2i+n,2i+2n-1) \text{ и } (2i,2i+n-1,2i+2n),$$

за $i=1,2,...,m$ ги задоволуваат условите на задачата.

31. Нека $S=\{1,2,3,...,2006\}=A\cup B, A\cap B=\emptyset, A\neq\emptyset, B\neq\emptyset$, при што важи:

1) $13\in A$;

2) ако $a\in A,b\in B,a+b\in S$, тогаш $a+b\in B$;

3) ако $a \in A, b \in B, ab \in S$, тогаш $ab \in A$.

Определи го бројот на елементите на множеството *A*.

Решение. Ако $1 \in A$ и $x \in B$ (таков *x* постои, бидејќи $B \neq \varnothing$), тогаш според 3) имаме $x = 1 \cdot x \in A$, што е противречност. Значи, $1 \in B$. Понатаму, имаме $6+7=13 \in A$, па од 2) следува дека или $6,7 \in A$ или $6,7 \in B$. Ако $6,7 \in A$, бидејќи $1 \in B$, од 2) следува $7 = 1+6 \in B$, што е противречност. Аналогно, со користење на равенствата $3+10=13,\ 5+8=13,\ 4+9=13,\ 2+11=13$, последователно добиваме дека сите броеви кои се помали од 13 се во множеството *B*. Сега со индукција лесно се докажува дека сите елементи на *S* кои не се деливи со 13 се во множеството *B* (претходно е добиена базата; ако $13k+r \in B$, за $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq r \leq 12$ и ако $13(k+1)+r \in S$, тогаш од 1) и 2), следува дека $13(k+1)+r \in S$).

Значи, треба уште да се распределат броевите од S кои се деливи со 13. Ако некои броеви деливи со 13 се во множеството *B*, тогаш меѓу нив постои најмал. Нека тоа е бројот $13k,\ 2 \leq k \leq [\frac{2006}{12}] = 154$. Како и претходно, со индукција следува дека тогаш и броевите $13m,\ (k \leq m \leq 154)$ се во множеството *B*, па затоа $13 \cdot 154 \in B$. Меѓутоа, бидејќи $13 \nmid 154$, од 3), бидејќи $13 \in A$ и $154 \in B$, следува дека $13 \cdot 154 \in A$, што е противречност.

Според тоа, во множеството *A* се наоѓаат сите броеви од *S* кои се деливи со 13 и само тие, па затоа $|A| = 154$.

32. Определи ги сите подредени тројки (A,B,C) од непразни множества цели броеви такви што $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$, а множествата $A+B, B+C$ и $C+A$ се по парови дисјунктни ($X+Y=\{x+y \mid x \in X,\ y \in Y\}$).

Решение. Ќе докажеме дека единствено разбивање со саканите својства е

$$A=\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ B=\{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\},\ C=\{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad (1)$$

со точност до пермутација на множествата. Нека $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$, каде множествата $A+B, B+C$ и $C+A$ се по парови дисјунктни. Да забележиме, дека од $a \in A, b \in B, c \in C$ следува $a+b-c \in C, b+c-a \in A$ и $c+a-b \in B$. Навистина, ако на пример $a+b-c \in A$, тогаш $a+b \in A+B \cap A+C = \varnothing$, што е противречност.

Да фиксираме два последователни природни броја од различни множества, $b \in B$ и $c = b+1 \in C$. Тогаш за секој $a \in A$ имаме $a-1 = a+b-c \in C$ и $a+1 = a+c-b \in B$, т.е. секој број од A има претходник во C и следбеник во B. Во случајов, постои подреден пар $(c, c+1)$ таков што $c \in C$ и $c+1 \in A$. Сега, како погоре добиваме дека секој број $b \in B$ има претходник во A и следбеник во C. Продолжувајќи ја постапката, добиваме дека секој број $c \in C$ има претходник во B и следбеник во A. Конечно, од претходните разгледувања следува дека со точност до пермутација множествата A, B, C се точно множествата (1).

33. Дали може целите броеви да се поделат во три дисјунктни множества така што за секој $n \in \mathbb{Z}$ броевите $n, n-2^6$ и $n+3^6$ припаѓаат во трите различни множества?

Решение. За даден n броевите $n, n-64, n+729$ припаѓаат на различни подмножества. Според условот на задачата за $n-64$ и $n+729$, добиваме дека $n-64, n-128, n+665$, односно $n+665, n+729, n+1458$ се во различни подмножества. Значи, $n+665$ не е во исто подмножество ниту со $n-64$ ниту со $n+729$, па затоа мора да лежи во подмножеството кое го содржи n. Последното значи дека сите три подмножества се периодични по модул 665.
Понатаму, $n+64$ и $n+729$ се во исто подмножество, па според условот на задачата следува дека $n-64, n, n+64$ се во три различни подмножества. Според тоа, $n-64$ и $n+128$ се во исто подмножество, па затоа подмножествата се периодични и по модул 192. Но, $(192, 665) = 1$, па затоа секое од трите подмножесва има период 1, што не е можно.
Конечно, од добиената противречност следува дека бараната поделба не е можна.

34. Нека N е природен број. На таблата се запишани природни броеви, кои ги задоволуваат следниве услови:

1) За секој запишан број k важи $1 \le k \le N$.
2) Секој природен број k таков што $1 \le k \le N$ е запишан барем еднаш.
3) Збирот на сите запишани броеви е парен број.

Докажи дека е можно некои од запишаните броеви да се означат со $\odot$, а преостанатите со $\times$ така што збирот на означените броеви со $\odot$ да е еднаков на збирот на означените броеви со $\times$.

Решение. *Прв начин.* Без ограничување на општоста мжеме да сметаме дека на таблата се запишани броевите $a_1, a_2, ..., a_m$ при што

$$N = a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_m = 1. \qquad (1)$$

Да ја разгледаме следнава стратегија: ги означуваме последователно броевите $a_1, a_2, ..., a_m$ при што произволно го означуваме a_1 и во $i-$тиот чекор (при означување на a_i, $i \ge 2$) прво ги споредуваме збировите на броевите означени со $\odot$ и означени со $\times$, по што a_i го означуваме со знакот кој соодветствува на помалиот збир.
Со индукција ќе докажеме дека по $i-$тиот чекор разликата меѓу двата збира не е поголема од a_i. За $i = 1$ тоа е очигледно. Нека тврдењето е точно за $i = k-1$. Со d да ја означиме разликата меѓу двата збира пред означувањето

на a_k. Од правилото за означување следува дека по означувањето разликата станала $|d-a_k|$. Освен тоа, од условот на задачата и од (1) следува дека $a_k = a_{k-1}$ или $a_k = a_{k-1} - 1$. Сега, од индуктивната претпоставка следува дека $0 \le d \le a_k + 1$ и затоа $-a_k \le d - a_k \le 1 \le a_k$, односно $|d - a_k| \le a_k$.

Бидејќи последниот број е 0 или 1, разликата по неговото означување е 0 или 1. Останува да забележиме дека збирот на сите броеви е парен, т.е. па затоа броевите не може да бидат разбиени во две групи со различна парност.

Втор начин. Да го претпоставиме спротивното и да разгледаме такво означување во кое разликата на двата збира е минимална. Бидејќи имаме конечен број маркирања, изборот е коректен. Како на крајот на првиот начин на решавање се гледа дека разликата е најмалку 2.

Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека збирот на броевите означени со $\odot$ е поголем. Нека t е најмалиот број означен со $\odot$. Тогаш ќе го направиме следново „преозначување“:

- ако $t=1$, го менуваме означувањето на t во $\times$,
- ако $t>1$, го менуваме означувањето на t во $\times$, и го менуваме означувањето на еден од броевите $t-1$ или $t+1$ во $\odot$.

Не е тешко да се види дека горните операции се секогаш можни и дека водат до ново маркирање со помала разлика, што е противречност.

35. Нека X е делумно подредено множество, со релација на подредување $\le$. Множеството $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ го нарекуваме *верига* во X ако

$$x_{i_1} \le x_{i_2} \le ... \le x_{i_n}$$

за некоја пермутација $i_1, i_2, ..., i_n$ на $1, 2, ..., n$. Множеството $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ го нарекуваме *антиверига* во X ако секои два негови елементи не се споредливи.

Докажи, дека ако во делумно подредено множество X не постои верига со $m+1$ елемент, тогаш X може да се претстави како унија од најмногу m антивериги.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по m.

За $m=1$ тврдењето е тривијално. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $m \ge 1$. Нека X нема верига со $m+2$ елементи. Ако X нема верига со $m+1$ елемент, тогаш тврдењето следува од индуктивната претпоставка. Нека X има верига со $m+1$ елемент. Да го разгледаме множеството P од најмалите елементи на сите вериги со $m+1$ елемент. Јасно, секои два елементи од ова множество се неспоредливи, бидејќи во спротивно ќе постои верига со $m+2$ елементи. Според тоа, ова множество е антиверига. Сега множеството $X \setminus P$ не содржи верига со $m+1$ елемент, па од индуктивната претпоставка следува дека може да се претстави како унија од најмногу m

антивериги. Последното значи дека X може да се претстави како унија од најмногу $m+1$ антиверига, со што тврдењето е докажано.

36. Нека M е множество природни броеви, секој од кои има 2013 цифри и во декадниот запис не ја содржи нулата. За два броја од M велиме дека се *соседни*, ако цифрите им се совпаѓаат барем во една класа. Определи го најголемиот можен број елементи на M, ако меѓу секои 9 броеви од M можеме да избереме 3 броја кои се соседни по парови.

Решение. Нека A е множеството од сите природни броеви со 2013 цифри, такви што на првите 2012 места може да стои секоја од цифрите 1, 2, 3, ..., 9, а на последното место може да стојат само цифрите 1, 2 , 3 и 4. Тогаш $|A|=4\cdot 9^{2012}$. Од принципот на Дирихле следува, дека меѓу произволни 9 броеви од A најмалку три имаат иста последна цифра, што значи дека тие се соседни по парови. Според тоа, $|M|\geq|A|=4\cdot 9^{2012}$.

Ќе докажеме, дека ако B е множество броеви секој од кои има 2013 цифри и во декадниот запис не ја содржи нулата и ако $|B|>4\cdot 9^{2012}$, тогаш можеме да избереме 9 броеви, меѓу кои нема три кои се по парови соседни. Нека N е множеството од сите броеви со 2013 ненулти цифри. Тогаш $|N|=9^{2013}$. Да ги подредиме цифрите 1, 2, ...,9 на кружница во насока на движењето на стрелката на часовникот. Ќе велиме дека 2 е по 1, 3 е по 2, ..., 1 е по 9. За два 2013-цифрени броја a и b ќе велиме дека a е по b, ако секоја од цифрите на a е по соодветната цифра на b. Множеството N може да се разбие на 9^{2012} подмножества $N_1,N_2,...,N_{9^{2012}}$ од по 9 елементи, такви што во секое подмножество деветте броеви се еден по друг.

Бидејќи $|B|>4\cdot 9^{2012}$, од принципот на Дирихле следува дека можеме да избереме 5 елементи од едно од множествата N_i. Од останатите елементи на B можеме да избереме 4 елементи од едно исто подменожество N_j, $i\neq j$. Повторно од принципот на Дирихле следува дека од секои три од овие елементи два се содржат во едно од множествата N_i или N_j. Последното значи, дека овие два елементи не се соседни. Според тоа, $|M|\leq 4\cdot 9^{2012}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека $|M|=4\cdot 9^{2012}$.

37. Даден е прост број $p>3$. Дали броевите $1,2,...,p-1$ можеме да ги поделиме (разбиеме) на две непразни множества така што збирот на броевите во едното и производот на броевите во другото множество да даваат ист остаток при делење со p?

Решение. Ќе докажеме дека постојат два ненулти остатоци a и b по модул p, такви што нивниот производ е конгруентен со збирот на останатите ненулти остатоци по модул p. За збирот на остатоците имаме

$$\frac{p(p-1)}{2}-a-b\equiv-(a+b)(\operatorname{mod} p),$$

па затоа нашиот услов е еквивалентен на

$$ab\equiv-(a+b)(\operatorname{mod} p),$$

т.е. на условот

$$(a+1)(b+1)\equiv 1(\operatorname{mod} p).$$

Бидејќи $p>3$ постојат ненулти остатоци m и n такви што $mn\equiv 1(\operatorname{mod} p)$ и $m\neq n$. Освен тоа, јасно е дека $m,n\not\equiv 1(\operatorname{mod} p)$, па затоа можеме да избереме $a=m-1$ и $b=n-1$.

Според тоа, бараното разбивање можеме да го направиме.

38. Нека m е природен број, $A=\{-m,-m+1,...,m-1,m\}$ и $f:A\to A$ е пресликување такво што $f(f(n))=-n$ за секој $n\in A$.

а) Докажи, дека m е парен број.

б) Определи го бројот на сите функции со даденото својство.

Решение. а) Нека $n\in A$ и $O_n=\{n,f(n),-n,f(-n)\}$. Бидејќи $f(f(n))=-n$ и $f(f(-n))=n$, лесно се докажува дека ако $k\in A$, тогаш или $O_k=O_n$ или $O_k\cap O_n=\varnothing$. Од овие равенства уште следува дека $f(n)\neq f(-n)$ кога $n\neq 0$. Понатаму, ако $f(\pm n)=\pm n$, тогаш

$$\mp n=f(f(\pm n))=f(\pm n)=\pm n \text{, т.е. } n=0.$$

Исто така, ако $f(\pm n)=\mp n$, тогаш

$$\mp n=f(f(\pm n))=f(\mp n)=\pm n \text{, т. } n=0.$$

Според тоа, $|O_n|=4$, кога $n\neq 0$. Од претходните разгледувања следува дека $A\setminus\{0\}$ се разбива на дисјунктни четворки броеви, т.е. m е парен број.

б) Нека $m=2k$, $f:A\to A$ е пресликување со даденото својство и $A_+=\{1,2,...,m\}$. Да забележиме дека

$$f(-n)=f(f(f(n)))=-f(n),$$

па затоа $f(0)=0$. Според тоа, за $n\neq 0$ важи или $f(n)>0$ или $f(-n)<0$. Значи, за четворката O_n соодветствува пар $(n',f(n'))$ од различни броеви од A_+: $(n,f(n))$ или $(f(-n),n)$. Така f индуцира разбивање на A_+ на подредени парови броеви.

Обратно, на секое разбивање на A_+ на подредени парови броеви (n,k) соодветствува (непарна) функција со дадените својства:

$$f(0)=0,\ f(n)=k,\ f(k)=-n,\ f(-n)=-k,\ f(-k)=n\ .$$

Останува да ги преброиме овие разбивања. Ако ги наредиме сите парови од даденот разбивање еден по друг, добиваме пермутација на броевите од 1 до m. Подредувањето на паровите може да се направи на $k!$ начини, па затоа вкупниот број од $m!$ пермутации се разделува на $k!$ „еквивалентни“ пермутации. Според тоа, бараниот број е еднаков на $\frac{m!}{k!}=\frac{(2k)!}{k!}$.

39. Даден е природен број n. Докажи дека множеството $\{1,2,...,n\}$ може да се подели на m дисјунктни подмножества со еднакви збирови на елементите ако и само ако m е делител на бројот $\frac{n(n+1)}{2}$ и не е поголем од $\frac{n+1}{2}$.

Решение. Бидејќи бројот n припаѓа на некое од $m-$те дисјунктни подмножество заклучуваме дека збирот на елементите во секое подмножество е поголем или еднаков на n и тој е делител на збирот $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, па затоа $m\,|\,\frac{n(n+1)}{2}$ и $m\le\frac{n+1}{2}$.

Нека сега $\frac{n(n+1)}{2}=ms$ и $m\le\frac{n+1}{2}$ (или еквивалентно $s\ge n$). Ќе докажеме со индукција по n дека (за секој m) бараната поделба е можна. За $n=2m-1$ и $n=2m$ единствена можна поделба е

$$\{2m-1\}\cup\bigcup_{i=1}^{m-1}\{i,2m-1-i\}\text{, односно }\bigcup_{i=1}^{m}\{i,2m+1-i\}$$

Нека $n\ge 4m-1$. Според индуктивнта претпоставка доволно е множеството $\{1,2,...,n-2m\}$ да се подели на $m\le\frac{n-2m+1}{2}$ подмножества со еднакви збирови и на секое подмножество да се додаде по еден од паровите

$$\{n+1-i,n-2m+i\}\text{, за } i=1,2,...,m\ .$$

Нека $2m<n<4m-1$ (и $n+1<s<2n$). Разликуваме два случаја.

1) Ако s е непарен, според индуктивната претпоставка доволно е да се подели множеството $\{1,...,s-n-1\}$ на подмножества со збир $s\ge s-n+1$ и на секое подмножество да му се додаде по еден од паровите $\{n,s-n\}$, $\{n-1,s-n+1\}$, ..., $\{\frac{s+1}{2},\frac{s-1}{2}\}$.
2) Ако s е парен, според индуктивната претпоставка го делиме множеството $\{1,...,s-n-1\}$ на подмножества со збир $\frac{s}{2}\ge s-n-1$. Овие подмножества и едноелементното подмножество $\{\frac{s}{2}\}$ во парови формираат $m-n+\frac{s}{2}$ подмножества со збир s. Преостанатите $n-\frac{s}{2}$ подмножества со збир s се $\{i,s-i\}$, $i=\frac{s}{2}+1,...,n$.

40. За секое подмножество S на множеството природни броеви $\mathbb{N}$ со $r_S(n)$ го означуваме бројот на подредените парови $(a,b),\ a,b\in S, a\neq b$, за кои $a+b=n$. Докажи, дека $\mathbb{N}$ може да се разбие на две подмножества A и B, така што $r_A(n)=r_B(n)$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Го разбиваме $\mathbb{N}$ на две множества A и B, при што во A ги ставаме сите природни броеви, кои имаат парен број единици во нивното претставување во бинарниот броен систем, а во B сите природни броеви, кои имаат непарен број единици во нивното претставување во бинарниот броен систем. Ќе докажеме дека $r_A(n)=r_B(n)$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

За таа цел ќе конструираме биекција меѓу подредените парови $(a,b),\ a,b\in A$, за кои важи $a+b=n$ и соодветните парови од множеството B.

Нека $a=\overline{a_1a_2...a_k}$ и $b=\overline{b_1b_2...b_k}$ се записите на a и b во бинарен броен систем. Тоа значи дека

$$a=a_1 2^{k-1}+a_2 2^2+...+a_k 2^0,$$

каде $a_i=0$ или 1, при што бројот на единиците е парен број. Бидејќи $a\neq b$, постои $i, 1\le i\le k$, таков што $a_i\neq b_i$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека сме го избрале најголемиот i со тоа својство. Тогаш $a_i=1, b_i=0$ или $a_i=0, b_i=1$. Нека a' и b' се броевите добиени соодветно од a и b, во кои во бинарниот запис на a на местото на a_i сме ја запишале b_i, а во b на местото на b_i сме ја запишале a_i. Тогаш во бинарните записи на a' и b' ќе има непарни броеви единици, т.е. $a',b'\in B$ и уште ќе важи $a+b+a'+b'=n$.

Непосредно се проверува дека ова пресликување е биекција. Според тоа, најдовме разбивање со саканото својство.

41. Множеството од сите дијагонали на правилен $(4n+3)-$аголник $(n\in\mathbb{N})$ е поделено на k дисјунктни подмножества $S_1,S_2,...,S_k$ така што за секои $1<i<j<k$ барем една дијагонала од S_i во внатрешна точка сече барем една дијагонала од S_j. Определи ја најголемата можна вредност на k.

Решение. Одговор $k=n(4n+3)$. Следниов пример покажува дека овој број се достигнува. Дефинираме

$$S_{ij}=\{A_iA_{i+j+1}, A_{i+j}A_{i+2n+2}\},\ 1\le i\le 4n+3,\ 1\le j\le n.$$

Множествата S_{ij} се разбивање (партиција) на S за која лесно се гледа дека ги задоволува условите на задачата.

Нека претпоставиме дека постои бараната партиција со повеќе од $n(4n+3)$

множества. Тогаш, бидејќи бројот на дијагоналите на $(4n+3)-$аголникот е $2n(4n+3)$ барем едно од овие множества е едночлено, да кажеме $S_i=\{d\}$. Нека од едната страна на d има m темиња, а од другата страна има $4n+1-m$ темиња. Според тоа, има вкупно $m(4m+1-m)\leq 2n(2n+1)$ дијагонали кои ја сечат d, па затоа бројот на множествата не е поголем од $2n(2n+1)+1\leq n(4n+3)$, што е противречност.

17. ИНВАРИЈАНТИ И ПОЛУИНВАРИЈАНТИ

Во овој параграф прво ќе се задржиме на задачи од следниов вид:

Задача. *Дадени се некој математички објект A и дозволени трансформации на истиот. Се поставува прашањето дали со повеќекратна примена на дозволените трансформации дадениот објект A може да се претвори (трансформира) во некој друг однапред зададен објект B.*

Решавањето на задачите од овој вид се сведува на следниве два случаја:

- ако одговорот на поставеното прашање е позитивен, тогаш доволно е да се наведе било кој пример кој покажува како може со помош на допустливите трансформации од објектот A да се добие објектот B и
- ако одговорот на поставеното прашање е негативен, тогаш е потребно да се докаже дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B.

Во првиот случај треба да го докажеме постоењето на низа допустливи трансформации која ја обезбедува трансформацијата на објектот A во објектот B, а тоа не е секогаш едноставна задача. Како да постапиме во вториот случај? Иако одговорот на ова прашање не е еднозначен, а уште помалку едноставен, сепак во многу случаи го користиме следниов метод:

- наоѓаме својство кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени која било од допустливите трансформации,
- докажуваме дека објектот B го нема наведеното својство, и
- заклучуваме дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B.

Својството кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени допустлива трансформација го нарекуваме *инваријанта* на допустливата трансформација, а претходно опишаниот метод го нарекуваме *метод на инваријанти*.

1. Квадратна табела 3×3 е пополнета со броевите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, како на цртжот десно. Во секој чекор можеме да одбереме две соседни полиња и од двата броја запишани во нив да одземеме помалиот број, без да ги менуваме другите броеви. Дали со вакви трансформации може да се добие табела пополнета само со нули?

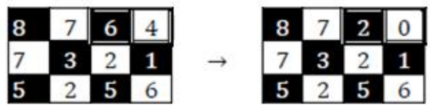
0	1	2
3	4	5
6	7	8

Решение. Полињата на табелата да ги обоиме црвено и бело како на цртежот десно. Разликата на збировите на броевите запишани во црвените и белите полиња е еднаква на 4. Меѓутоа со секој потег одземаме едени ист број од две разнобојни

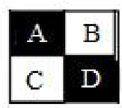
0	1	**2**
3	**4**	5
6	7	**8**

полиња, па затоа разликата на двата збира не се менува, т.е. е инваријанта. Конечно, бидејќи во табела пополнета само со нули разликата би била еднаква на 0 заклучуваме дека со допустливите трансформации не е можно од дадената табела да се добие табела пополнета само со нули.

2. Во секое поле на шаховска $m \times n$ табла е запишан по еден природен број. Во еден потег може на било два соседни броја да се додаде број цел број k така што се добиваат ненегативни броеви, а притоа другите броеви не се менуваат (два броја се соседни ако се во полиња кои имаат заедничка страна). Најди потребен и доволен услов, по конечно многу потези, сите запишани броеви на таблата да се еднакви на нула.



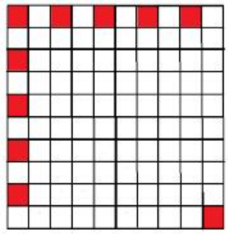
Решение. Таблата е шаховска, што значи дека соседните полиња се различно обоени, т.е. во еден потег го додаваме истиот број на две различно обоени полиња. Ако со S_b и S_c ги означиме збировите на броевите запишани соодветно во белите и црните полиња, тогаш $S_b - S_c$ е инваријанта. Тоа значи дека ако сите броеви на крајот се еднакви на нула, тогаш на крајот важи $S_b - S_c = 0$, што значи дека на почетокот важи $S_b - S_c = 0$. Според тоа, овој услов е потребен. Ќе докажеме дека всушност условот е и доволен.
Нека $S_b = S_c$. Да претпоставиме дека a, b, c се броевите запишани во полињата A, B, C, соодветно каде A, B, C се полиња такви што A и C се соседни полиња на B. Ако $a \le b$, можеме да додадеме на двете полиња $(-a)$, па на местото на a го добиваме бројот 0. Ако $a \ge b$, тогаш додаваме $(a-b)$ на броевите b и c, по што наместо b го запишуваме бројот a, а потоа на двете додаваме $(-a)$ по што и во двете полиња е запишан бројот 0. Јасно, со наведениот алгоритам на местото на секој број можеме да го запишеме бројот 0. Оваа постапка ја применуваме во секој ред, по што во сите полиња освен можда во последните две е запишан бројот нула. Сега, постапката да ја примениме од горе на последните две колони, по што во секоја од двете колони во сите полиња освен можда во најдолните четири (по две во секоја колона) сите броеви се еднакви на нула. Конечно, на крајот ако постапката прво го примениме на полињата A, B, D, а потоа на полињата B, D, C во полињата A и B ќе биде запишан бројот 0, а бидејќи $S_b = S_c$ во полињата C и D ќе бидат запишани два еднакви броја, по што е јасно дека и во овие полиња може да се запише бројот 0.



3. Дадена е бела квадратна табла со димензии 10×10, на која во црвено се обоени девет полиња. Никола дополнително во црвено смее да обои поле кое

има заеднички страни со најмалку веќе две обоени полиња. Дали е можно, на дозволениот начин, Никола целата табла да ја обои во црвено?

Решение. На почетокот периметарот на обоениот дел од таблата е помал или еднаков на 36, при што е еднаков на 36 кога меѓу обоените полиња нема две кои имаат заедничка страна. Лесно се гледа дека периметарот на обоениот дел не може да се зголеми, а бидејќи периметарот на целата табла е еднаков на 40, заклучуваме дека Никола на дозволениот начин не може да ја обои целата табла.



Коментар. Овде уште да забележиме дека доколку во 10×10 табла имаме 10 обоени полиња, тогаш постојат распореди на обоените полиња такви што при дадените услови таблата може да биде обоена. Еден таков распоред на десетте обоени полиња е даден на цртежот десно.

4. Во една сала има 101^2 светилки распоредени во темиња на квадратна решетка со должина на страна 100. На почетокот се запалени k светилки. Во секој чекор избираме единечен квадрат, и ако во него се запалени три светилки, ја палиме и четвртата. Определи го најмалиот број k за кој постои почетен распоред на светилките кој овозможува во конечно време сите светилки да се запалат.

Решение. За палење на една светилките секој единечен квадрат може да се употреби најмногу во еден чекор. Бидејќи имаме 100^2 единечни квадрати, а 101^2 светилки, заклучуваме дека бројот на светилките кои мора да се запалени на почетокот е $k\geq 101^2-100^2=201$.

Од друга страна, ако се запалени сите светилки кои се наоѓаат на две соседни страни на квадратот, тогаш имаме точно 201 запалена светилка и лесно се гледа дека во овој случај може да се запалат сите светилки.

5. Круг е поделен на 10 сектори и во секој сектор е ставен по еден жетон. Дозволено е во еден чекор да се преместат два жетони, но така што секој жетон се премести во соседно поле и тие два жетони при преместувањето се движат во спротивни насоки. Дали со повторување на оваа операција може сите жетони да се преместат во едно поле?

Решение. Секторите редоследно во избрана насока да ги нумерираме со броевите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. На секој жетон му го придружуваме бројот на полето во кое се наоѓа тој жетон и да видиме како со примена на наведената операција се менува остатокот кој при делење со 10 го дава збирот на броевите придружени на тие жетони.

а) Реализираме операција при која не се преместува жетон од полето 9 на полето 0 или од полето 0 на полето 9. Тогаш жетон од полето k се преме-

стува на полето $k+1$ и жетон од полето m се преместува на полето $m-1$, каде $0\le k\le 8$ и $1\le m\le 9$. Во овој случај збирот на придружените броеви пред и по операцијата е еднаков, па затоа и остатокот е еднаков.
б) Едниот жетон се преместува од полето 9 на полето 0, а другиот од полето m се преместува на полето $m-1$, каде $1\le m\le 9$. Притоа збирот на придружените броеви се намалува за 10, па затоа остатокот не се менува.
в) Едниот жетон се преместува од полето 0 на полето 9, а другиот од полето k се преместува на полето $k+1$, каде $o\le k\le 8$. Притоа збирот на придружените броеви се зголемува за 10, па затоа остатокот не се менува.
г) Едниот жетон се преместува од полето 0 на полето 9, а другиот жетон се преместува од полето 9 на полето 0. Збирот на броевите не се менува, па затоа и остатокот не се менува.
Во почетната положба збирот на броевите придружени на жетоните е еднаков на $\sum\limits_{i=0}^{9} i=45$, а остатокот при делење со 10 е еднаков на 5. Во положба при која сите жетони ќе бидат во полето k збирот на придружените броеви ќе биде $10k$, и тој збир е делив со 10. Според тоа, со дозволената операција не е можно сите броеви да се преместат на едно поле.

6. Нека n е непарен природен број. На таблата се запишани броевите $1,2,...,2n$. Во секој чекор бришиме било кои два броја и наместо нив ја запишуваме нивната разлика. Постапката ја реализираме се додека на таблата не остане еден број. Докажи дека овој број е непарен.
Решение. Нека на таблата во еден момент се запишани броевите $a_1,a_2,...,a_k$ и нека $S_1=a_1+a_2+...+a_k$. Нека се избрани броевите $x=a_i$ и $y=a_j$ без ограничување на општоста да претпоставие дека $x\ge y$. Тогаш $x-y=a_i-a_j$, па затоа по реализирање на чекорот збирот на броевите на таблата ќе биде еднаков на $S_2=S_1-x-y+x-y=S_1-2x$. Последното значи, дека при реализирање на дозволената операција парноста на збирот на запишаните броеви не се менува. Сега, бидејќи n е непарен број, збирот на запишаните броеви е $S=1+2+3+...+2n=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$ е непарен број, па затоа бројот кој последен ќе остане запишан на таблата ќе биде непарен број.

7. На почеток на три плочки се наоѓаат броевите 2012, 2014 и 2016. Марко во секој чекор броевите на плочките ги означува со a,b и c по некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a-b, 3b-c$ и $3c-a$. Дали може, со последователна примена на оваа постапка, Марко во некој момент на трите плочки да има три еднакви броеви?

Решение. Нека претпоставиме дека во некој момент може да се добијат три еднакви броеви. Тогаш $3a-b=3b-c=3c-a=t$. Единствено решение на последниот систем по непознатите a,b и c е $a=b=c=\frac{t}{2}$. Според тоа, во некој чекор може да се добијат три еднакви броеви, ако во претходниот чекор веќе се добиени три еднакви броеви. Но, почетните броевите 2012, 2014 и 2016 се различни, па затоа со повторување на дозволената операција не е можно да се добијат три еднакви броеви.

8. Карти со броевите од 1 до 11 се дадени последователно во насоката на движењето на стрелките на часовникот на 11 луѓе, кои стојат околу тркалезна маса на еднакви растојанија. Во секој чекор човек може да даде една од картите на свој сосед, ако бројот i на таа карта има својство, да пред и по чекорот картите со броевите $i-1, i$ и $i+1$ не се темиња на остроаголен триаголник (картата 0 е картата 11, а картата 12 е картата 1). Докажи дека не може во ниту еден момент сите карти да се кај еден човек.

Решение. Да ја поделиме масата на 11 енакви лаци. Растојание меѓу две карти ќе го наречеме помалиот број лаци меѓу позициите на тие карти. Лесно се гледа дека парноста на збирот на растојанијата меѓу картите со последователни броеви се запазува (ако картата со број i лежи на помалиот лак меѓу $i-1$ и $i+1$, тогаш збирот не се менува, а во спротивно се менува за 2). Бидејќи на почетокот овој збир е непарен број (всушност е 11), тој секогаш е различен од 0 (вредност кога сите карти се кај еден човек). Со тоа задачата е решена.

9. На еден остров живеат 1995 камелеони, меѓу кои има сини, црвени и жолти. Ако се сретнат два камелеони со различна боја, тие истовремено ја менуваат својата боја во преостанатата трета боја. Во еден момент имало 1000 сини, 395 црвени и 600 жолти камелеони. Дали по извесно време може сите камелеони да бидат во една иста боја.

Решение. Нека во даден момент имаме a - сини, b - црвени и c - жолти камелеони. Тогаш од тројката (a,b,c) се добива тројка еднаква на некоја од тројките:

$$(a-1,b-1,c+2)\ ,\ (a-1,b+2,c-1)\ \text{ или }\ (a+2,b-1,c-1)\ .$$

Затоа при секоја промена на боите на два камелеони разликите на броевите на камелеоните во трите пара бои $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$ се инваријантни по модул 3.

На почетокот ја имаме тројката $(1000,395,600)$, за која важи

$$1000-395\equiv 2(\text{mod}\,3)\ ,\ 1000-600\equiv 1(\text{mod}\,3)\ \text{ и }\ 600-395\equiv 1(\text{mod}\,3)\ .$$

Ако може сите камелеони да бидат во една иста боја, тогаш се добива една од тројките $(1995,0,0)$, $(0,1995,0)$ или $(0,0,1995)$. Но, соодветните разлики во секоја од овие три тројки се конгруентни со 0 по модул 3, од каде следува дека во ниту еден момент, камелеоните не можат да бидат во една иста боја.

10. Четири цели броеви се запишани во четири различни точки на една кружница. За еден број, негов соседен е бројот што е прв до него во насока обратна од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Во еден чекор секој од броевите се заменува со разликата меѓу него и неговиот соседен број. Дали по 2012 вакви чекори може да се добијат четири броја a,b,c,d такви што броевите $|ab-cd|,|ac-bd|,|bc-ad|$ ќе бидат прости?

Решение. Нека m,n,p,q се четири цели броја запишани во четири различни точки од кружницата, во насока на движење на стрелките на часовникот. Во првиот чекор добиените броеви се

$$m-q, n-m, p-n, q-p\ ,$$

во вториот чекор ги добиваме броевите

$$m-2q+p, n-2m+q, p-2n+m, q-2p+n\ ,$$

во третиот броевите

$$m-3q+3p-n, n-3m+3q-p, p-3n+3m-q, q-3p+3n-m$$

и во четвртиот чекор ги добиваме броевите

$$2m-4q+6p-4n, 2n-4m+6q-4p, 2p-4n+6m-4q, 2q-4p+6n-4m\ .$$

Забележуваме дека добиените четири броја се парни. Оттука, во секој следен чекор добиените броеви ќе бидат парни, што значи дека по 2012 чекори добиените броеви a,b,c,d ќе бидат парни. Но, тоа значи дека броевите $|ab-cd|,|ac-bd|,|bc-ad|$ ќе бидат деливи со 4, па затоа тие не може да се прости броеви.

11. На таблата се запишани некои цели броеви. Во секој чекор избираме два броја a и b кои се запишани на таблата, ги бришеме и на нивно место ги запишуваме броевите $3a-b$ и $13a-3b$. Ако на почетокот се запишани броевите 1, 2, 3, 4, ..., 2011, 2012, дали е можно по конечен број чекори на таблата да бидат запишани броевите 2, 4, 6, 8, …, 4022, 4024?

Решение. Со s да го означиме збирот на запишани броеви пред примена на дозволената трансформација. При бришењето на броевите a и b и запишувањето на нивно место на броевите $3a-b$ и $13a-3b$ збирот на броевите се променил за $3a-b+13a-3b-(a+b)=5(3a-b)$. Според тоа, ако s' го означиме збирот на броевите по примена на дадената трансформација, тогаш $s'-s=5(3a-b)$, што значи дека разликата на почетниот и новиот збир е делива со 5, т.е. деливоста со 5 на разликата на двата збира е инваријанта.

Сега, ако со s_p го означиме збирот на почетните броеви и со s_k збирот на крајните броеви заклучуваме дека нивната разлика мора да е делива со 5. Но,

$$s_p - s_k = \sum_{k=1}^{2012} 2k - \sum_{k=1}^{2012} k = \sum_{k=1}^{2012} k = \frac{2012\cdot(2012+1)}{2} = 1006\cdot 2013 = 2025078\,,$$

и како $5 \nmid 2025078$ заклучуваме дека со дозволената трансформација од броевите 1, 2, 3, 4, ..., 2011, 2012 не може да се добијат броевите 2, 4, 6, 8, …, 4022, 4024.

12. На таблата е запишан природен број. Ако на таблата веќе е запишан бројот x, тогаш можеме да допишеме $2x+1$ или $\frac{x}{x+2}$. Докажи, дека ако во некој момент на таблата се појави бројот 2008, тогаш и првиот запишан број е 2008.

Решение. Ќе ги разгледаме само броевите кои учествуваат во добивањето на бројот 2008. Да забележиме, дека сите броеви се позитивни и рационални. Ако на таблата веќе е запишана нескратливата дропка $x = \frac{p}{q}$, тогаш може да допишеме

$$2x+1 = \frac{2p+q}{q} \text{ или } \frac{x}{x+2} = \frac{p}{p+2q}\,.$$

Ако можеме да скратиме некоја од овие дропки, тогаш можеме да скратиме само со 2. Навистина,

$$(2p+q,q) = (2p,q) \le 2(p,q) \text{ и } (p,p+2q) = (p,2q) \le 2(p,q)\,.$$

Значи, збирот на броителот и именителот во нескратливиот запис на секој од новите броеви е или

$$(2p+q)+q = p+(p+2q) = 2(p+q) \text{ или } \frac{2(p+q)}{2} = p+q\,.$$

Според тоа, збирот или се запазува или се удвојува. Ако во некој момент се појави бројот 2008, тогаш во тој момент збирот броителот и именителот е непарен број $2008+1 = 2009$, заклучуваме дека во ниту еден момент пред тоа немало удвојување, што значи дека и на почетокот тој збир бил 2009. Но, почетниот број е природен број, што значи дека неговиот именител е 1, па затоа почетниот број е $2009-1 = 2008$.

13. Дадена се реалните броеви a,b и c. Во еден чекор се прави некоја пермутација на броевите a,b и c, на пример (a,b,c) и од неа се добива тројката $(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c)$, т.е. се добиваат броевите $\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}$ и c. Потоа од овие броеви се прави нова пермутација итн. Дали со оваа трансформација од броевите $2, \sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ може да се добијат броевите $1, \sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$.

Решение. Нека почетните броеви се a,b и c и нека во следниот чекор се добиени броевите $\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}$ и c. Тогаш

$$(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2+(\frac{a-b}{\sqrt{2}})^2+c^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{2}+\frac{a^2-2ab+b^2}{2}+c^2=a^2+b^2+c^2 .$$

Според тоа, во секој чекор при дадената трансформација збирот на квадратите на дадените броеви не се менува, т.е. тој е инваријантен. Но,

$$2^2+(\sqrt{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{13}{2}\neq 6+2\sqrt{2}=1^2+(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2 ,$$

па затоа при дадената трансформација од броевите $2,\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ не може да се добијат броевите $1,\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$.

14. Компјутер ги врши следниве операции:

1° Паротот (a,b) го трансформира во парот $(a+1,b+1)$.

2° Ако a и b се парни, тогаш парот (a,b) го трансформира во $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$.

3° Од паровите (a,b) и (b,c) може да го добие парот (a,c) .

Дали е можно компјутерот со комбинација на претходно опишаните операции, од парот $(5{,}19)$ да го добие парот $(17,2009)$. (Компјутерот ги има на располагање сите добиени парови до тој момент)

Решение. При првата операција $(a,b)\to(a+1,b+1)$, имаме

$$(a+1)-(b+1)=a-b . \qquad (1)$$

При втората $(a,b)\to(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$ имаме

$$\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2} . \qquad (2) .$$

При третата операција (a,b), (b,c) $\to$ (a,c) имаме

$$a-c=(a-b)+(b-c) . \qquad (3)$$

Нека сега $p\neq 2$ е прост делител на разликата на даден пар (x,y), т.е. $p\,|\,x-y$. Тогаш поради (1), (2) и (3) имаме дека $p\,|\,a-b$ каде (a,b) е било кој новодобиен пар тргнувајќи од парот (x,y) .

Сега бидејќи $7\,|\,5-19$ мора да важи $7\,|\,17-2009=-1992=7\cdot(-285)+3$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека од парот $(5{,}19)$ не може да се добие парот $(17,2009)$.

15. На таблата се напишани броевите $\frac{49}{k}$, каде $k=1,2,...,97$. Во еден чекор можеме да избришеме два од дадените броеви a и b и на нивно место на таблата го запишуваме бројот $2ab-a-b+1$. Оваа постапка ја повторуваме се додека на таблата не остане само еден број. Определи кои броеви може да бидат последниот број кој ќе биде запишан на таблата.

Решение. Да забележиме дека за секои два броја a и b важи:

$$2(2ab-a-b+1)-1=(2a-1)(2b-1)\ . \qquad (1)$$

Да го разгледаме производот $(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_n-1)$, каде $a_1,a_2,...,a_n$ се броевите кои во даден момент се наоѓаат на таблата. Од (1) следува дека овој производ е инваријантен при секој чекор. Имено, ако во некој чекор ги избришеме броевите a_1 и a_2 тогаш на нивно место го запишуваме бројот $2a_1a_2-a_1-a_2+1$, па споменатиот производ по овој чекор ќе биде

$$(2(2a_1a_2-a_1-a_2+1)-1)(2a_3-1)...(2a_n-1)=(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_n-1)\ .$$

Според тоа, ако бројот што ќе остане на таблата го означиме со N, тогаш важи

$$2N-1=(\tfrac{2\cdot 49}{1}-1)(\tfrac{2\cdot 49}{2}-1)...(\tfrac{2\cdot 49}{97}-1)=\tfrac{97}{1}\cdot\tfrac{97}{2}\cdot...\cdot\tfrac{1}{97}=1$$

од каде добиваме дека $N=1$.

16. На таблата се запишани броевите $0,1,\sqrt{2}$. Во еден чекор е дозволено на еден од овие броеви да се додаде раликата на другите два помножена со некој рационале број. Дали може со помош на овие операции да се добијат броевите $0,2,\sqrt{2}$?

Решение. Секој број кој се добива со наведените операции може да се запише во видот $a+b\sqrt{2},\ a,b\in\mathbb{Q}$ и тоа на единствен начин. На бројот $a+b\sqrt{2}$, $a,b\in\mathbb{Q}$ во кординатната рамнина му придружуваме точка (a,b). Според тоа, на трите броја запишани на таблата во секој момент им соодветствуваат три точки во координатната рамнина, кои определуваат некој триаголник. Лесно се докажува дека со наведените операции, во секој чекор едно теме на триаголникот паралелно се поместува во однос на спротивната страна. Тоа значи дека во секој чекор плоштината на триаголникот не се менува, т.е. таа е инаријанта. Понатаму, на броевите $0,1,\sqrt{2}$ соодветствуваат точките $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ и плоштината на почетниот триаголник е $\frac{1}{2}$, а на броевите $0,2,\sqrt{2}$ соодветствуваат темињата $(0,0),(2,0),(0,1)$ и плоштината на овој триаголник 1, па затоа со наведените операции од броевите $0,1,\sqrt{2}$ не може да се добијат броевите $0,2,\sqrt{2}$.

17. На почетокот на таблата се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 2010. Во еден чекор е дозволено да се избришат два броја a и b и да се запише бројот $ab+a+b$. Дали е можно на овој начин на таблата да се добие само бројот:

а) $2^{2011}-1$, б) 2^{2011}.

Решение. Ако сите броеви запишани на таблата ги зголемиме за 1, тогаш нивниот производ е еднаков на 2011!. Но, производот на два броја запишани на таблата зголемени за 1 е $(a+1)(b+1)=ab+a+b+1$, што значи дека при бришење на два вакви броја тој не се менува.

а) Ако може да се добие бројот $2^{2011}-1$, тоа значи 2^{2011} е делител на 2011!, што не е точно.

б) Ако може да се добие бројот 2^{2011}, тоа значи дека бројот $2^{2011}+1$ е делител на 2011!, што е точно бидејќи сите прости делители на бројот $\frac{1}{3}(2^{2011}+1)$ се поголеми од 2011 (Докажи!).

18. Нека (x,y) е подреден пар природни броеви во кој точно една координата е парна. Во еден *чекор* парот (x,y) го пресликуваме во парот $(\frac{x}{2}, y+\frac{x}{2})$ ако $2\,|\,x$, односно во парот $(x+\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$ ако $2\,|\,y$. Докажи дека за секој непарен природен број n, $n>1$, постои парен природен број b, $b<n$, таков што со последователна примена на конечно многу чекори од подредениот пар (n,b) се добива подредениот пар (b,n).

Решение. Нека по k чекори се добива парот (x_k, y_k). Збирот $x_k + y_k$ е инваријантен во текот на постапката и тој е еднаков на $s=n+b$. Бидејќи $2(x+\frac{y}{2})\equiv x(\operatorname{mod}\ x+y)$, важи $2x_k \equiv x_{k-1}(\operatorname{mod} s)$. Со индукција добиваме $2^k x_k \equiv x_0 = n(\operatorname{mod} s)$. Бидејќи $(s,2^k)=1$, доволно е да докажеме дека постои непарен број s, $n<s<2n$, таков што за некој k важи $2^k b \equiv n(\operatorname{mod} s)$, т.е. $(2^k+1)n\equiv 0(\operatorname{mod} s)$. За последното да го докажеме доволно е да земеме $s=2^r+1$ и $k=r$, каде $2^{r-1}<n<2^r$ $(r\in\mathbb{N})$. Тогаш $b=2^r+1-n$.

19. Кругот е поделен на шест кружни исечоци, во кои во насока на движењето на стрелките на часовникот последователно се запишани броевите 1, 0, 1, 0, 0, 0. Во секој потез е дозволено да се зголемат броевите во два соседни исечоци за 1. Дали може се конечно многу повторување на дозволениот потег сите запишани броеви во кругот да се еднакви?

Решение. Со $a_1, a_2, ..., a_6$ редоследно во насока на движењето на стрелките на часовникот да ги означиме запишаните броеви во кружните исечоци. Нека $a_1 = a_3 = 1$. Да го разгледаме алтернативниот збир

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6. \tag{1}$$

На почетокот $S=2$. Понатаму, ако на било кои два соседни броја додадеме 1, тогаш бидејќи во збирот два соседни броја учествуваат со спротивни знаци, заклучуваме дека вредноста на збирот не се менува. Меѓутоа, ако сите шест запишани броја се еднакви, тогаш вредноста на збирот треба да биде еднаква на 0, па затоа од дадената состојба не може да добиеме состојба во која сите запишани броеви ќе бидат еднакви.

20. На кружница се запишани 299 нули и една единица. Дозволени се следниве потези:
 1) од секој број истовремено да се одземат двата негови соседни броја,
 2) да се изберат два броја меѓу кои се наоѓаат точно два броја и двата избрани броја истовремено да се зголемат или намалат за 1.

 Дали може со конечна низа дозволени потези да се постигне на кружницата да се запишани:

 а) две последователни единици и 298 нули,

 б) три последоваелни единици и 297 нули.

 Решение. Да забележиме дека на почетокот на кружницата се запишани 300 броја, а нивниот збир е еднаков на 1. Со a_k да ги означиме броевите запишани на кружницата, и тоа така што a_1 на местото на кое на почетокот се наоѓа единицата, а броевите $a_2, a_3, ..., a_{300}$ се наоѓаат последователно на кружницата во насока на движењето на стрелките на часовникот.

 а) Нека $S = \sum_{i=1}^{300} a_i$. Ако го примениме првиот дозволен потег, добиваме

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - a_{300} - a_2, \\ b_k &= a_k - a_{k-1} - a_{k+1}, k = 2, ..., 299, \\ b_{300} &= a_{300} - a_{299} - a_1, \end{aligned} \tag{1}$$

 па затоа

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{300} b_i = (a_1 - a_{300} - a_2) + \sum_{i=2}^{299} (a_i - a_{i-1} - a_{i+1}) + (a_{300} - a_{299} - a_1) \\ &= -\sum_{i=1}^{300} a_i = -S, \end{aligned}$$

 што значи дека апсолутната вредност на збирот не се менува, па затоа не се менува ниту неговата парност.

 Да го примениме вториот дозволен потег. Ако двата избрани броја ги зголемиме за 1, тогаш збирот S ќе се зголеми за 2, а ако ги намалиме за 1, тогаш збирот S ќе се намали за 2, што значи дека и при примена на вториот чекор не се менува парноста на збирот на запишаните броеви.

 Бидејќи на почетокот збирот на запишаните броеви е 1, тој со примена на секој дозволен потег ќе биде непарен број, па затоа не може да се добие состојба во која ќе имаме две единици и 298 нули, бидејќи збирот на брпеите во овој случај е парен.

 б) Да го разгледаме алтернативниот збир

$$S^* = \sum_{i=1}^{300} (-1)^{i+1} a_i \ .$$

Со примена на првиот дозволен потег ги добиваме броевите (1), па затоа

$$S_1^* = \sum_{i=1}^{300} (-1)^{i+1} b_i = a_1 - a_{300} - a_2 + \sum_{i=2}^{299} (-1)^{i+1} (a_i - a_{i-1} - a_{i+1}) - (a_{300} - a_{299} - a_1)$$

$$= a_1 - a_{300} - a_2 + \sum_{i=2}^{299} (-1)^{i+1} a_i + \sum_{i=2}^{299} (-1)^{i+2} a_{i-1} + \sum_{i=2}^{299} (-1)^{i+2} a_{i+1} - a_{300} + a_{299} + a_1$$

$$= a_1 - a_{300} - a_2 + \sum_{i=2}^{299} (-1)^{i+1} a_i + \sum_{k=1}^{298} (-1)^{k+1} a_k + \sum_{k=3}^{300} (-1)^{k+1} a_k - a_{300} + a_{299} + a_1$$

$$= a_1 + \sum_{i=2}^{299} (-1)^{i+1} a_i - a_{300} + a_1 - a_2 + \sum_{k=3}^{300} (-1)^{k+1} a_k) + (\sum_{k=1}^{298} (-1)^{k+1} a_k + a_{299} - a_{300}$$

$$= 3S^*.$$

Да го примениме вториот дозволен потег. Ако избраните броеви се a_k и a_{k+3}, тогаш изменетите собирци во алтернативниот збир S^* учествуваат со

$$(-1)^{k+1}(a_k + 1) + (-1)^{k+4}(a_{k+3} + 1) = (-1)^{k+1} a_k + (-1)^{k+4} a_{k+3} \, ,$$

односно со

$$(-1)^{k+1}(a_k - 1) + (-1)^{k+4}(a_{k+3} - 1) = (-1)^{k+1} a_k + (-1)^{k+4} a_{k+3} \, ,$$

што значи дека алтернативниот збир не се менува.

Да претпоставиме дека имаме состојба со три последователни единици и 297 нули. Тогаш алтернативниот збир S_1^* е еднаков на 1 (ако двете единици се наоѓаат на места со непарни индекси) или -1 (ако двете единици се наоѓаат на места со парни индекси). Бидејќи со дозволените потези алтернативниот збир се утростручува или не се менува, три последователни единици може да се добијат само ако алтернативниот збир е 1, т.е. две единици се наоѓаат на места со непарни индекси и ако се користел само вториот дозволен потег.

Да го разгледаме збирот на броевите на местата со индекси кои се содржатели на бројот 3. Овој збир да го означиме со S_0, т.е.

$$S_0 = \sum_{i=1}^{100} a_{3i} \ .$$

Пред потегот имаме $S_0 = 0$, бидејќи на кружницата е запишана само една единица на местото a_1. Ако на кружницата би биле три последователни единици и 297 нули, тогаш би бил $S_0 = 1$, бидејќи во збирот ќе учествува само една од трите последователни единици. Со примена само на вториот потег, збирот S_0 може да се менува само за 2 (доколку двата броја ги избереме на места со разгледуваните индекси) или нема да се менува во спротивно. Во секој случај, збирот S_0 не ја менува парноста, па затоа од состојба

$S_0 = 0$ не можеме да преминеме во состојба $S_0 = 1$, т.е. не може да постигнеме на кружницата последо-вателно да се запишани 3 единици и 297 нули.

21. На квадратен трином Пабло може да ги изврши следниве операции:
1) Да ги промени местата на водечкиот и слободниот коефициент.
2) Да го замени x со $x-m$, каде m е произволен реален број.

Дали е можно, со помош на конечен број дозволени дејствија, тргнувајќи од $6x^2+2x+1996$ Пабло да го добие триномот $25x^2+5x+2014$.

Решение. Од полиномот $f(x)=ax^2+bx+c$ со дозволените операции може да се добие полиномот $g(x)=cx^2+bx+a$ или полиномот

$$h(x)=a(x-m)^2+b(x-m)+c=ax^2+(b-2ma)x+am^2-bm+c .$$

Понатаму дискриминантите на полиномите се

$$D_f = D_g = b^2-4ac \text{ и } D_h = (b-2ma)^2-4a(am^2-bm+c)=b^2-4ac .$$

Значи, при наведените операции дискриминантата на триномите не се менува, т.е. таа е инваријанта. Но дискриминантата на триномот $6x^2+2x+1996$ е $D=-47900$, а на триномот $25x^2+5x+2014$ е $D' = -201375$, што значи дека Пабло не може да ја посигне поставена цел.

22. На таблата прво се запишани полиномите $x, x^3, x^5, ..., x^{2k+1}, ...$ Ако во еден момент на таблата се запишани полиномите $f(x)$ и $g(x)$, дозволено е да се допишат и некои од полиномите $af(x)+b, (a,b\in\mathbb{R}, a\geq 0)$, $f(x)+g(x)$ или $f(g(x))$. Дали е можно, во конечен број чекори со дозволените операции, да се добие полиномот $x^{2023}-20x+11$?

Решение. Дадените полиноми се монотоно растечки. Понатаму, со дозволените операции полиномите кои се добиваат во секој чекор се монотоно растечки на множеството реални броеви. Според тоа, својството полиномот е мо-нотоно растечки е инваријанта. Но, за полиномот

$$p(x)=x^{2023}-20x+11$$

важи $p(0)=11>-8=p(1)$, т.е. не е монотоно растечки, па затоа од дадените полиноми со помош на дозволените операции не може да се добие полиномот $p(x)$.

23. Дали е можно, тргнувајќи од полиномото $f(x)=x^2+4x+3$ да се добие полиномот $g(x)=x^2+10x+9$, со конечен број пати примена на трансформациите $f(x)\to x^2 f(\frac{1}{x}+1)$ или $f(x)\to (x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$.

Решение. Нека $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ е даден квадратен трином. Со првата трансформација го добиваме полиномот

$$\begin{aligned}h(x)&=x^2(a(\tfrac{1}{x}+1)^2+b(\tfrac{1}{x}+1)+c)\\&=a(x+1)^2+b(x+1)x+cx^2\\&=(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a,\end{aligned}$$

а со втората трансформација го добиваме полиномот

$$\begin{aligned}h'(x)&=(x-1)^2)(a(\tfrac{1}{x-1})^2+\tfrac{b}{x-1}+c)\\&=a+b(x-1)+c(x-1)^2\\&=cx^2+(b-2c)x+(a-b+c).\end{aligned}$$

Притоа за дискриминантите на добиените полиноми имаме

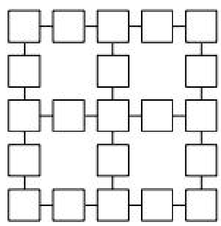
$$D_h=(2a+b)^2-4(a+b+c)a=b^2-4a$$

и

$$D_{h'}=(b+2c)^2-4(a-b+c)c=b^2-4a\,.$$

Според тоа, за наведените трансформации вредноста на детерминантата е инваријанта. Но, $D_f=4^2-4\cdot3=4$, а $D_g=10^2-4\cdot9=64$, што значи дека со дадените трансформации од полиномот $f(x)=x^2+4x+3$ не може да се добие полиномот $g(x)=x^2+10x+9$.

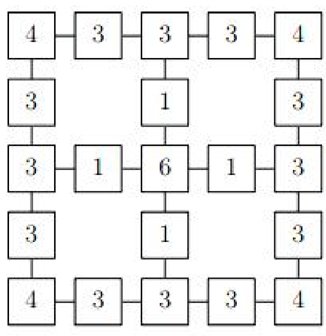
24. Дадена е фигурата прикажана на цртежот десно. На почетокот во секој квадрат е запишан бројот 0. Во секој потег се избира еден од квадратите и истовремено броевите кои се наоѓаат во тој квадрат и во нему соседните квадрати се зголемуваат за 1. Докажи дека по конечно многу потези:



а) може да се постигне во секој квадрат да е запишан бројот 2010;

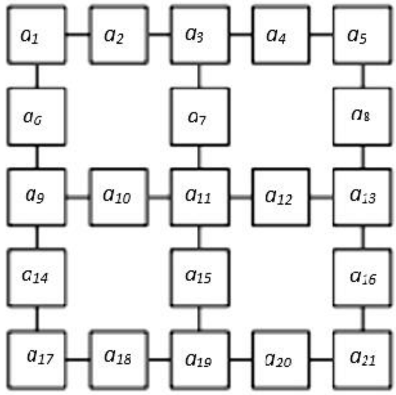
б) не може да се постигне во секој квадрат да е запишан бројот 2011.

Решение. а) Во секој од квадратите на цртежот десно се запишани броеви кои покажуваат колку пати го избираме соодветниот квадрат. Бидејќи збирот на броевите запишани во секој квадрат и нему соседните квадрати е еднаков на 10, по реализирањето на наведените чекори во секој од квадратите ќе биде запишан бројот 10. Сега, бидејќи $2010:10=201$, ако опишаната по-



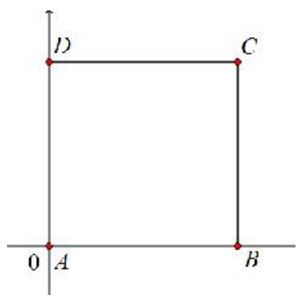
стапка ја повториме 201 пат, во секој од квадратите ќе биде запишан бројот 2010.

б) Во некој момент, по определен број потези, во секој квадрат се запишани некои броеви $a_1, a_2, ..., a_{21}$, како на цртежот десно. Нека се $b_1 = 4, b_2 = 3$, $..., b_7 = 1, ..., b_{21} = 4$ броевите запишани во квадратите на горниот цртеж. Дефинираме $X = \sum_{i=1}^{21} a_i b_i$. За почетната конфигурација, кога во квадрат е запишан бројот 0, важи $X = 0$. Да видиме што станува со бројот X во еден потег кога ќе го избереме полето a_k, $k \in \{1, 2, ..., 21\}$ и кога ќе го реализираме потезот. Бидејќи во полето a_k и во нему соседните броеви го додаваме бројот 1, а збирот на соодветните броеви b_i е еднаков на 10, заклучуваме дека по секој потег бројот X се зголемува за 10. Последното значи дека X по секој потег е делив со 10. Ако можеме да постигнеме во секој квадрат да биде запишан бројот 2011, тогаш бројот вредноста на бројот X ќе биде $2011\sum_{i=1}^{21} b_i = 2011 \cdot 62$. Но, последното не е можно бидејќи бројот $2011 \cdot 62$ не е делив со 10. Конечно, од ова следува дека не е можно да се постигне во секој квадрат да се запише бројот 2011.



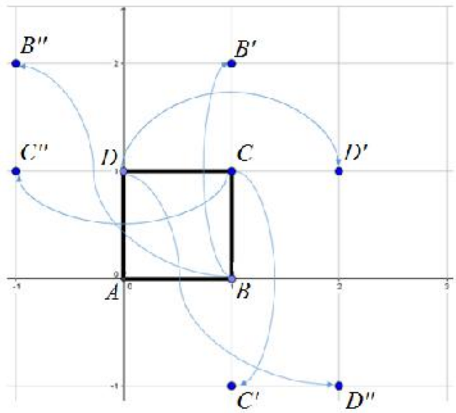
25. Три скакулци се наоѓаат во три темиња на квадрат. Секоја минута еден од нив прескокнува некој од преостанатите два скакулци и доскокнува во точката која е централно симетрична на точката од која скокнал во однос на скакулецот кој што го прескокнал. Дали може некој од скакулците по конечно многу такви скокови да стигне во четвртото теме на квадратот?

Решение. Квадратот да го сместиме во координатен систем во рамнината. Заради поедноставно пресметување, квадратот ќе го сместиме во првиот квадрант со едно теме во $A(0,0)$. Нека скакулците се сместени во темињата $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$, цртеж десно.



Секој скакулец има две можности за централно симетрично да скокне. Положбите во кои скакулците може да се најдат се дадени на долниот цртеж.

- Ако прво скока $B(1,0)$, ќе скокне или во точката $(1,2)$ или во точката $(-1,2)$.
- Ако прво скока $C(1,1)$, ќе скокне или во точката $(1,-1)$ или во точката $(-1,1)$.
- Ако прв скока $D(0,1)$, ќе скокне или во точката $(2,1)$ или во точката $(2,-1)$.



Забележуваме дека ниту еден од скакулците не скокнал во точката $A(0,0)$ и парноста на координатите на точките во кои еден скакулец скокнал останува иста. Имено, ако две координати пред скокот биле непарни, тогаш и по скокот ќе бидат непарни, а ако пред скокот биле парна и непарна, тогаш и по скокот ќе бидат парна и непарна и обратно. Ќе докажеме дека ова важи за било кој скакулец, независно од точката од која скокнува и точката преку која скока.

Нека скакулец моментално се наоѓа во точката $T(x,y)$ и прескокнува во точката $T'(x',y')$ која е централно симетрична на точката $S(a,b)$. Бидејќи според дефиницијата на централна симетрија, точката S е средина на отсечката TT', важи $a=\frac{x+x'}{2}, b=\frac{y+y'}{2}$. Но, броевите a,b,x,x',y,y' се цели, па од претходните равенства следува дека $x+x'$ и $y+y'$ се деливи со 2, што значи дека x и x' се со иста парнос, односно y и y' се со иста парност.

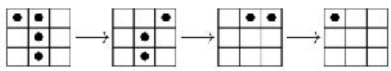
Конечно, ниту еден скакулец не тргнува од точка во која двете координати се парни, ниту еден скакулец не може да доскокне во точката $A(0,0)$,чии две координати се парни.

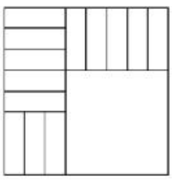
26. На бесконечна шаховска табла во квадрат $n\times n$ се распоредени n^2 жетони, на секое поле по еден жетон. Се игра следнава игра. Во еден потег еден жетон се преместува во хоризонтален или вертикален правец, преку жетон на

соседното поле, на следното поле, ако истото е слободно. Прескокнатиот жетон се отстранува од таблата. За кои n може да се постигне на таблата да остане само еден жетон?

Решение. Нека претпоставиме дека играта може да заврши за $n = 3k$. Колоните и редовите последователно ги нумерираме со природни броеви. Нека S_m, $m = 0,1,2$ е бројот на жетоните на полињата (i, j) за кои е исполнето $i + j \equiv m (\bmod 3)$. На почетокот имаме $S_0 = S_1 = S_2 = 3k^2$, што значи дека броевите S_m, $m = 0,1,2$ имаат иста парност. Со секој потег се менува парноста на сите три броја, двата се намалуваат за 1, а третиот се зголемува за 1, што значи дека својството *броевите* S_m, $m = 0,1,2$ *имаат иста парност* е инваријанта. Но, ако на таблата може да остане само еден жетон, тогаш два од овие броеви се еднакви на 0 и еден е еднаков на 1, што значи дека броевите S_m, $m = 0,1,2$ немаат иста парност. Значи, за $n = 3k$ целта не може да се постигне.

Ако $3 \nmid n$ тогаш целта може да се постигне. За $n \le 2$ лесно се проверува дека целта може да се постигне. За $n \ge 4$,



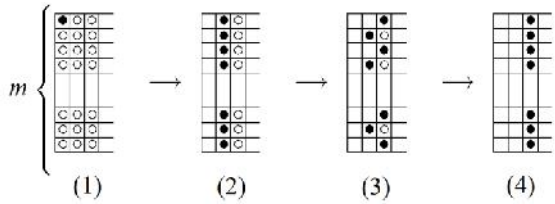


со низата потези прикажани на десниот цртеж може да се отстранат три жетони од било кој 1×3 правоаголник. Притоа дополнително се користи еден жетон и едно слободно поле, по што жетонот кој се користи повторно се враќа на полето на кое на почетокот се наоѓал. На овој начин играта може да ја сведеме од квадрат $n \times n$ на квадрат $(n-3) \times (n-3)$.

27. На полињата на правоаголна $m \times n$ табла се поставени жетони кои се бели од едната страна и црни од другата страна, така што сите полиња се свртени на белата страна, освен еден жетон кој се наоѓа во еден од аглите на таблата и тој е свртен на црната страна. Во еден потег е дозволено да се земе еден жетон кој е свртен на црната страна, по што сите негови соседни по страна жетони се превртуваат. За кои m и n од таблата можеме да ги земеме сите жетони?

Решение. Нека A е бројот на жетоните завртени на белата страна, а B е бројот на парови жетони соседни по страни. Со отстранување на црн жетон со k бели и p црни соседни, A се намалува за $k - p$, а B за $k + p$, што значи дека збирот $A + B$ не ја менува парноста. На почетокот важи $A + B =$ $3mn - m - n - 1$. Ако успееме да ги отстраниме сите жетони, на крајот ќе важи $A + B = 0$. Според тоа, важи $2 \mid (3mn - m - n - 1)$, од каде следува дека барем еден од броевите m и n мора да е непарен.

Навистина, ако на пример m е непарен, тогаш можеме да ја постигнеме целта (види цртеж).



Имено, од позицијата (1) во позицијата (2) можеме да стигнеме со m чекори. Потоа во позицијата (3) можеме да стигнеме со $\frac{m+1}{2}$ чекори, па во позицијата (4) можеме да стигнеме со $\frac{m-1}{2}$ чекори. Понатаму, ги повторуваме чекорите за премин од позицијата (2) во позицијата (4) се додека не ја испразниме таблата.

28. Во ред се наредени n жетони, кои се бели од едната страна и црни од другата страна. На почетокот сите жетони се завртени со белата страна нагоре. Во секој чекор, ако е можно, отстрануваме по еден жетон со белата страна нагоре, но не еден од крајните жетони, при што жетоните кои од двете страни му се најблиски на тој жетон (лево и десно) ги превртуваме. Докажи дека може да постигнеме да ни останат само два жетона ако и само ако бројот $n-1$ не е делив со 3.

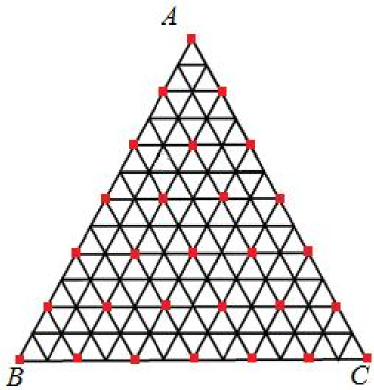
Решение. На почетокот да забележиме дека парноста на бројот на црните жетони не се менува, што значи дека по секој чекор тој број е парен. На секој бел жетон ќе му го придружиме бројот $(-1)^k$, ако лево од него има точно k црни жетони. Збирот S на сите придружени броеви по модул 3 не се менува. Во крајната позиција $S=0$ ако останале два црни жетони, а $S=2$ ако останале два бели жетони. На почетокот е $S=n$, па затоа не е можно $n \equiv 1(\operatorname{mod} 3)$.

Од друга страна, играта со n жетони се сведува на игра со $n-3$ жетони ако ги отстраниме вториот, четвртиот и третиот жетон, по овој редослед. Бидејќи случаите $n=2$ и $n=3$ се тривијални, заклучуваме дека играта може да заврши за секој $n \not\equiv 1(\operatorname{mod} 3)$.

29. Рамностран триаголник ABC со должина на страна $\overline{AB}=n\in\mathbb{N}$ е поделен на n^2 единечни рамнострани триаголници. Во секое теме на некој од малите триаголници е запишан по еден број, и тоа 1 во темињата A,B,C и точката D за која важи $\overline{AD}=\sqrt{3}$, а 0 во сите други темиња. Во еден чекор можеме броевите запишани во темињата на некој ромб со должина на страна 1 (кој се состои од два мали триаголника) да ги зголемиме или намалиме за иста

вредност. За кои n може да се постигне сите запишани броеви да се еднакви на нула?

Решение. Да ги означиме со $\vec{u}$ и $\vec{v}$ векторите со должина 2, паралелни на страните AB и BC. Да ги означиме сите точки M за кои $\overrightarrow{AM} = m\vec{u} + n\vec{v}$, за некои $m, n \in \mathbb{Z}$ (за $n = 12$ означувањето е прикажано на цртежот десно). Секој ромб со должина на страна 1 има точно едно означено теме. Нека S е збирот на сите запишани броеви, а S' е збирот на сите броеви во означените точки. Бидејќи во секој чекор ги менуваме броевите во темињата на ромб со должина на страна 1, вредноста на изразот $4S' - S$ не се менува.



За n парен број, почетната вредност на $4S' - S$ е 8, па затоа не е можно да се постигне сите запишани броеви да се еднакви на 0.

Нека $n > 3$ е непарен број и нека B' и C' се точки на страните AB и AC соодветно такви што $\overline{BB'} = \overline{CC'} = 2$. Во два потези можеме секој од броевите во B и C да го намалиме за 1, а секој од броевите во B' и C' да го зголемиме за 1, при што другите броеви не се менуваат. Сега задачата ја сведовме на истата задача за триаголник со должина на страна $n-2$. Продолжувајќи ја постапката задачата ја сведуваме на триаголник со должина на страна $n = 3$, за кој лесно се гледа дека целта може да се постигне (Провери!).

*

*   *

Ако за истиот вид задача дадена на почетокот од овој параграф најдеме величина која при примена на дозволената операција се менува строго монотоно растечки (опаѓачки), тогаш за ваквата величина велиме дека е *полуинваријанта* (*моноинваријанта*).

30. Во секое теме на петаголникот е запишан по еден цел број, при што збирот на сите пет броја е позитивен. Се додека меѓу запишаните броеви има негативни, ја реализираме следнава операција: избираме три последователни броја x, y, z $(y < 0)$ и ги заменуваме со броевите $x + y, -y, z + y$. Докажи дека овој процес завршува по конечен број чекори.

Решеиие. Со S да го означиме збирот на петте броеви, кој со наведената операција не се менува. Да го разгледаме изразот

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \sum_i (a_{i+1} - a_{i-1})^2 ,$$

каде $a_i, i=1,2,3,4,5$ е бројот запишан во темето $A_i, i=1,2,3,4,5$ на петаголникот $A_1A_2A_3A_4A_5$ $(a_0=a_5, a_6=a_1)$. Имаме

$$F(u,x+y,-y,z+y,v)-F(u,x,y,z,v)=2yS<0,$$

што значи дека со секоја примена на дадената операција вредноста на F се намалува. Но, вредноста на F е природен број, па затоа таа не може неограничено да се намалува, од што следува тврдењето на задачата.

31. На почетокот на таблата се запишани n единици. Во еден чекор е дозволено од таблата да се избришат броевите x и y и наместо нив за са запише бројот $\frac{x+y}{4}$. По $n-1$ чекори на таблата останува само еден број. Докажи дека овој број е поголем или еднаков на $\frac{1}{n}$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина $\frac{x+y}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ следува $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$, што значи дека во секој чекор збирот на реципрочните вредности на запишаните броеви монотоно опаѓа. Овој збир на почетокот е еднаков на n, па ако на крајот остане само еден број a, добиваме $\frac{1}{a}\leq n$, од каде следува $a\geq\frac{1}{n}$.

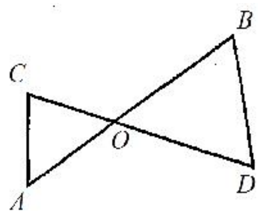
32. Во полињата на правоаголна табела $m\times n$ се запишани цели броеви. Дозволено е операција со која се заменуваат знаците на сите броеви, кои се наоѓаат во произволен ред или произволна колона на табелата. Докажи, дека со помош на вакви операции може да се добие табела, во која збирот на броевите во секој ред и во секоја колона е ненегативен.

Решение. За поедноставно колоните и редовите на табелата ќе ги наречеме линии. Да го разгледаме збирот на сите броеви во табелата. При примената на операцијата овој збир се зголемува, ако збирот на броевите во линијата во која се менуваат знаците е негативен, се намалува, ако збирот бил позитивен и не се менува ако збирот бил 0. Според тоа, ако во табелата има линија со негативен збир на броевите во неа, тогаш применувајќи ја операцијата, ние можеме да го зголемиме збирот на сите броеви во табелата. Освен тоа овој збир не може бесконечно да се зголемува. Навистина, бројот кој е во дадено поле на табелата се совпаѓа со почетниот или со спротивниот број, т.е. може да има најмногу две вредности. Табелата има mn полиња, па затоа бројот на различните табели кои можеме да ги добиеме не е поголем од 2^{mn}. Затоа збирот на сите броеви во табелата може да прима само конечен број вредности. Значи, збирот на броевите во табелата при примена на операцијата од условот на задачата се менува монотоно и тој е ограничен, т.е. тоа е полуинваријанта.

Сега да ја разгледаме почетната табела. Во неа да избереме линија со негативен збир на броевите во неа (ако таква линија нема, тогаш бараната табела е најдена). Да ја примениме операцијата на оваа линија. Во добиената табела повторно да најдеме линија со негативен збир на броевите во неа, да ја примениме операцијата итн. Бидејќи во секој чекор збирот на броевите во табелата се зголемува и овој збир може да прима само конечен број различни вредности, во некој чекор ќе добиеме табела со максимално можен збир на броевите во неа. Јасно, ова е бараната табела, бидејќи ако во неа сѐ уште има линија со негативнен збир, тогаш со примена уште еднаш на операцијата, ќе добиеме табела со уште поголем збир, што не е можно.

33. Во рамнината се дадени $2n\ (n>1)$ различни точки. Докажи, дека постојат n отсечки со краеви во овие точки такви, што не постојат две отсечки со заедничка внатрешна точка.

Решение. Да повлечеме n отсечки со краеви во дадените точки. Ако никои две од нив не се сечат, тогаш задачата е решена. Во спротивно да разгледаме две отсечки AB и CD кои се сечат во точката O (цртеж десно). Ја разгледуваме операцијата: замена на отсечките AB и CD кои се сечат со отсечките AC и BD кои не се сечат. Бидејќи збирот на должините на дијагоналите AB и CD на конвексниот четириаголник $ADBC$ е поголем од збирот на должините на спротивните страни AC и BD, за полуинваријанта може да се земе збирот на должините на сите отсечки. Јасно, овој збир може да прима само конечно многу различни вредности (конечен е бројот на точките, па значи и на отсечките кои ги поврзуваат) и се намалува при примена на спомenатата операција.



Затоа со последователна примена на операцијата, ќе дојдеме до конфигурација со минимално можен збир на должините на сите отсечки. Јасно, ова е бараната конфигурација, бидејќи ако се уште има отсечки кои се сечат, ќе ја примениме операцијата уште еднаш и ќе добиеме збир на должините на отсечките, помал од најмалиот можен збир, што е противречност.

За да го комплетираме решението, треба уште да докажеме дека збирот на должините на дијагоналите AB и CD на конвексен четириаголник $ADBC$ е поголем од збирот на должините на спротивните страни AC и BD. Навистина, од неравенството на триаголник, применето на $\triangle AOC$ и $\triangle BOD$, следува

$$\overline{AC}+\overline{BD}<(\overline{AO}+\overline{CO})+(\overline{OD}+\overline{DB})=(\overline{AO}+\overline{OD})+(\overline{CO}+\overline{OD})=\overline{AB}+\overline{CD}.$$

34. Секој член на еден парламент има најмногу три непријатели. Докажи дека парламентот може да се подели на две групи така, што секој парламентарец

во својата група ќе има најмногу еден непријател. (Непријателството е симетрична релација.)

Решение. Да го поделиме парламентот на две групи на произволен начин. Ако секој парламентарец во својата група има најмногу еден непријател, тогаш задачата е решена. Во спротивно нека A е парламентарец кој во својата група има најмалку двајца непријатели. Јасно, ако го префрлиме A во другата група, ќе се намали бројот на паровите непријатели. Според тоа, откривме величина (бројот на паровите непријатели во двете групи), која при примената на операцијата префрлање на парламентарец од групата во која има најмалку два непријатели во другата група, монотоно се менува (се намалува) и прима само конечно многу вредности (конечен е бројот на парламентарците и секој има конечен број непријатели), т.е. откривме полуинваријанта.

Затоа, со последователна примена на операцијата, ќе добиеме распределба на парламентарците во две групи со најмал можен број непријатели во двете групи. Јасно, ако и сега има парламентарец со барем двајца непријатели во својата група, тогаш преместувајќи го во другата група, ќе добиеме број на парови непријатели, помал од минималниот, што е противречност.

35. На пазарот има тезга за размена на килими. Ако има килим со димензии $a\times b$, клиентот може да добие или килим со димензии $\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$ или два килима со димензии $c\times b$ и $\frac{a}{c}\times b$ (при секоја таква размена бројот c го избира клиентот). Патник раскажал дека на почетокот имал еден килим со страни поголеми од 1, а по неколку такви размени се здобил со неколку килими, кај секој од кои едната страна е поголема од 1, а другата е помала од 1. Дали може патникот да ја говори вистината? (Ако клиентот сака, килимот со димензии $a\times b$ може да го смета за килим со димензии $b\times a$.)

Решение. За еден килим ќе велиме дека е голем ако неговите страни се поголеми од 1, а дека е мал ако неговите страни се помали од 1. На почетокот патникот имал еден голем килим. Ќе докажеме дека вкупниот број на големите и малите килими не се намалува. Доволно е да го разгледаме случаите во кои патникот заменува голем и мал килим.

При замена од првиот вид голем килим се менува за мал и обратно, т.е. вкупниот број големи и мали килими не се намалува.

Да ги разгледаме замените од вториот вид. При замената на голем килим $a\times b$ патникот ќе добие килими $a_1\times b$ и $a_2\times b$. Ако $0<a_1,a_2\le 1$, тогаш $a=a_1a_2\le 1$, што не е можно. Бидејќи $b>1$ барем еден од новите килими ќе биде голем. Аналогно, при замена на мал килим барем еден од новите килими ќе биде мал.

Од претходните разгледувања следува дека патникот не ја говорел вистината.

36. Околу тркалезна маса седат 2024 гусари кои распоредуваат златници меѓу себе. На почетокот сите златници се кај капетанот. Во секој чекор, ако некој гусар има најмалку два златника, еден од тие гусари му дава по еден златник на своите соседи.

а) Докажи дека за $n \geq 2024$ гусарите никогаш нема да ја завршат распределбата.

б) Докажи дека за $n < 2024$ како и да постапуваат гусарите ќе ја завршат распределбата.

Решение. а) Случајот $n > 2024$ е триијален, бидејќи секогаш ќе постои гусар кој има најмалку два златника. Нека $n = 2024$. Нека претпоставиме дека распределбата може да заврши, што значи дека ќе дојдеме во ситуација секој гусар да има по еден златник. Да ги нумерираме гусарите, со броевите од 1 до 2024. Во секој момент на секој златник да му го придружиме редниот број на гусарот кој го поседува. Нека C е збирот на овие броеви, каде сумирањето е по сите златници. Во секој чекор C не се менува или се менува точно за 2024. Но, на почетокот C е делив со 2024, што значи дека во секој чекор ќе биде делив со 2024. На крајот C е еднаков на $1+2+...+2024 = 2012 \cdot 2025$ и овој број не е делив со 2024, што е противречност.

б) Нека $n < 2024$. Ако гусарот A му го дава на својот сосед златникот z_{AB}, и во некој момент подоцна B му дава по еден златник на своите соседи, без ограничување на општоста може да сметаме дека на гусарот A му го дава точно златникот z_{AB}. Вака можеме да сметаме дека секој златник само циркулира меѓу двајца фиксираи соседни гусари. Бидејќи има помалку златници отколку парови соседни гусари, постојат соседни гусари кои никогаш нема да разменат златници. Тоа значи дека постои гусар G кој дава златници само конечно многу пати. Ако некој негов сосед дава златници бесконечно многу пати, тогаш бројот на златниците кај G постојано ќе се зголемува, што не е можно бидејќи бројот на златниците е $n < 2024$. Значи, секој гусар дава златници само конечен број пати, па затоа распределбата ќе заврши во конечно време.

37. Нека a,b,c,d се различни цели броеви. Во секој чекор броевите a,b,c,d ги заменуваме редоследно со броевите $a-b, b-c, c-d, d-a$. Докажи дека по конечен број чекори апсолутната вредност на барем еден од броевите ќе биде поголема од однапред зададен број позитивен број M .

Решение. Нека $P_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$ е подредената четворка добиена по n чекори. Според условот на задачата важи $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$, за секој $n \geq 1$. Да го разгледаме збирот на квадратите на подредените четворки P_n и P_{n+1}. Имаме:

$$0=(a_n+b_n+c_n+d_n)^2=(a_n+c_n)^2+(b_n+d_n)^2+2(a_n+c_n)(b_n+d_n)$$
$$=(a_n+c_n)^2+(b_n+d_n)^2+2a_nb_n+2b_nc_n+2c_nd_n+2d_na_n,$$

односно

$$-2a_nb_n-2b_nc_n-2c_nd_n-2d_na_n=(a_n+c_n)^2+(b_n+d_n)^2.$$

Затоа

$$a_{n+1}^2+b_{n+1}^2+c_{n+1}^2+d_{n+1}^2=(a_n-b_n)^2+(b_n-c_n)^2+(c_n-d_n)^2+(d_n-d_n)^2$$
$$=2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-2a_nb_n-2b_nc_n-2c_nd_n-2d_na_n$$
$$=2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)+(a_n+c_n)^2+(b_n+d_n)^2$$
$$\geq 2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2).$$

Понатаму, a,b,c,d се различни цели броеви, што значи дека апсолутната вредност на барем еден од нив е поголема или еднаква на 2. Нека k е природен број таков што $2^{k+1}(a^2+b^2+c^2+d^2)>4M$. Тогаш, од горното неравенство следува дека

$$a_{n+1}^2+b_{n+1}^2+c_{n+1}^2+d_{n+1}^2\geq 2^{k+1}(a^2+b^2+c^2+d^2)>4M.$$

Конечно, од последното неравенство следува дека апсолутната вредност на барем еден од броевите $a_{k+1},b_{k+1},c_{k+1},d_{k+1}$ е поголема или еднаква на M.

38. Нека $n\geq 2$. На хоризонтална права се наоѓаат n болви но така што не се сите во една точка. За позитивен број ª *потез* се дефинира на следниов начин: Се избираат две болви кои се наоѓаат во произволни точки A и B при што точката A се наоѓа лево од точката B. Болвата од точката A скока во точката C, која на дадената права се наоѓа десно од B така што важи $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=$ ª.

Определи ги сите вредности на ª така што за секоја точка M на дадената права и произволен почетен распоред на $n-$те болви постои конечна низа потези после која сите болви ќе се најдат десно од точката M.

Решение. Ќе докажеме дека за ª $\geq\frac{1}{n-1}$ сите болви може да отидат произволно далеку во десно. Со d и ¢ да го означиме најголемото и најмалото растојание меѓу две болви во дадениот момент, соодветно. Јасно, $d\geq(n-1)$¢. Ако крајната лева болва ја прескокне крајната десна болва, тогаш најмалото растојание меѓу две болви нема да се намали бидејќи ª$d\geq$ ¢, а притоа позицијата на крајната десна болва се поместила во десно за најмалку ¢. Со низа на вакви скокови на болвите се постигнува саканата цел.

Сега нека ª $<\frac{1}{n-1}$. На секоја болва нека и ја придружиме координатата на нејзината положба на реалната права. Со w_k и s_k да ги означиме координатата на крајната десна болва и збирот на координатите на сите болви по k скокови, соодветно. Ако во $(k+1)-$от скок болвата од точка a прескокне преку болвата во точка b во точка c, тогаш

$$s_{k+1}-s_k=c-a=\frac{1+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}(c-b)\geq\frac{1+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}(w_{k+1}-w_k)\ .$$

Ако за $k=0,1,2,...,i-1$ ги собереме овие неравенства добиваме

$$nw_i\geq s_i\geq s_0+\frac{1+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}(w_i-w_0)\ ,$$

т.е.

$$(\frac{1+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}-n)w_i\leq\frac{1+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}w_0-s_0\ ,$$

што покажува дека низата w_i е ограничена бидејќи $\frac{1+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}-n>0$. Според тоа, во овој случај сите болви не може да стасаат произволно далеку.

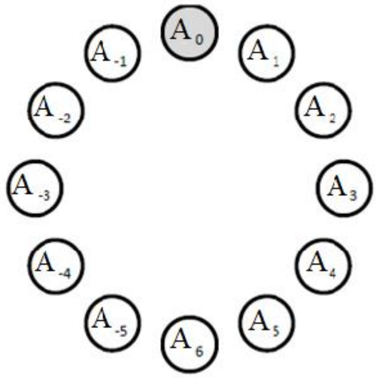
39. Нека $2n$ луѓе седат на кружна маса на кои им се поделени m колачиња. Колачињата може да се подаваат под следниве услови:
а) Секој може да подаде колаче само на соседите.
б) Ако некој подаде на некого колаче, тогаш тој мора и да изеде едно колаче.
Нека A е еден од тие луѓе. Најди го најмалиот број m така што без разлика како колачињата првично се поделени, постои стратегија за подавање на колачињата така што A да добие најмалку едно колаче.

Решение. Нека ги означиме луѓето со $A_{-n+1},A_{-n+2},...,A_0,A_1,A_2,...,A_n$, така што $A=A_0$. Исто така означуваме $A_{-n}=A_n$. Припишуваме тежина $\frac{1}{2^{|i|}}$ за секое колаче кое го поседуваме лицето A_i. Ако за секој i лицето A_i има a_i колачиња, па тогаш вкупната тежина на колачињата е $W=\sum_{i=-n+1}^{n}\frac{a_i}{2^{|i|}}$.

Понатаму, ако $i>0$ и лицето A_i му даде колаче на лицето A_{i-1}, тогаш тежината на колачето се зголемува од $\frac{1}{2^i}$ на $\frac{1}{2^{i-1}}$, па како лицето A_i изедува едно колаче и $\frac{1}{2^{i-1}}=\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^i}$, заклучуваме дека вкупната тежина на колачињата не се менува. Исто така, ако A_{-i} му даде колаче на лицето A_{-i+1}, повторно заклучуваме дека вкупната тежина на колачињата не се менува.

Понатаму, ако за $0<i<n-1$ лицето A_i му даде колаче на лицето A_{i+1}, тогаш вкупната тежина на колачињата ќе се намали, а ако лицето A_{-i} му даде колаче на лицето A_{-i-1}, тогаш вкупната тежина на колачињата повторно ќе се намали. Вкупната тежина на колачињата не се менува ако A_n му даде колаче на A_{-n+1}, а се намалува ако A_{-n+1} му даде колаче на A_n.

Од досега изнесеното следува дека при секое давање на колаче вкупната тежина на колачињата не се зголемува, што значи дека таа е полуинваријанта



Нека $m < 2^n$. Ако сите колачиња на почетокот се доделени на A_n, тогаш нивната вкупна почетна тежина е еднаква на $\frac{m}{2^m} < 1$. Тоа значи дека при било какво подавање на колачињата вкупната тежина ќе биде помала од 1, па A_0 не може да добие колаче, бидејќи ако A_0 добие колаче, тогаш тоа би имало тежина 1.

Значи, мора да е $m \geq 2^n$. Сега ќе докажеме дека за $m \geq 2^n$, можеме секогаш да обезбедиме A_0 да добие колаче.

Нека W_+ е збирот на тежините на колачињата кои ги имаат $A_0, A_1, ..., A_n$ и нека W_- е збирот на тежините на колачињата кои ги имаат $A_0, A_{-1}, ..., A_{-n}$. Без губење на општоста може да претпоставиме дека $W_+ \geq W_-$. Ова сугерира дека мора A_n да додава колачиња само на A_{n-1} и треба да работиме само во полукругот кој ги содржи само ненегативните индекси, бидејќи колачињата во овој полукруг имаат поголема тежина. Со алгоритамот A_n додава што е можно повеќе колачиња на A_{n-1}, потоа A_{n-1} додава што е можно повеќе колачиња на A_{n-2} итн. се додека A_0 не добие колаче. Но, ова важи ако и само ако $W_+ \geq 1$. Јасно, $W_+ \geq 1$ е потребен услов бидејќи W_+ е моноваријанта, па останува уште да покажеме дека тоа е и доволен услов.

Нека $W_+ \geq 1$. Да забележиме дека алгоритамот го остава W_+ инваријанта. Да претпоставиме дека алгоритамот завршува, односно не можеме да подадеме повеќе колачиња од било кое A_i, каде i е позитивен, понатаму и A_0 нема колачиња. Тогаш секој од луѓето $A_1, A_2, ..., A_n$ има најмногу едно колаче (ако некој има повеќе од едно, тогаш тој може да подаде едно и да изеде едно, па алгоритмот не би бил завршен). Тогаш $W_+ \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} < 1$, што е контрадикција со фактот дека W_+ е инваријанта поголема од 1. Значи добивме дека $W_+ \geq 1$ е доволен услов за алгоритамот да фунцкионира.

Конечно, докажавме дека мора $W_+ \geq 1$, при претпоставка $W_+ \geq W_-$. Сега да забележиме дека секое колаче влијае со најмалку $\frac{1}{2^{n-1}}$ на збирот $(W_+ + W_-)$, бидејќи секое колаче има маса најмалку $\frac{1}{2^{n-1}}$, освен колачињата на A_n. Но, колачињата на A_n се броени двапати, по еднаш во W_+ и во W_-, па тие исто така придонесуваат со $\frac{1}{2^{n-1}}$ на збирот. Бидејќи имаме најмалку 2^n колачиња, добиваме $W_+ + W_- \geq 2$. Затоа, $W_+ \geq 1$, со што покажавме дека алгоритамот навистина функционира.

40. Пабло има три сметки во банка, секоја од нив со цел број на долари на неа. На Пабло му е дозволено да префрла пари од една на друга сметка така, што сумата на сметката на која се префрлаат пари се дуплираат. Докажи дека Пабло секогаш може да ги префрли сите пари на две сметки. Дали секогаш Пабло може да ги префрли сите пари само на една сметка?

Решение. Прашањето дали Пабло може да ги префрли сите пари на една сметка е тривијално. Имено, ако вкупната сума на долари кои ги има Пабло на сите три сметки е непарна, тогаш не е можно да се префрлат сите пари на една сметка.

Сега да го докажеме првиот дел од задачата. Нека A, B, C, каде $A \leq B \leq C$, е соодветно бројот на доларите на првата, втората и третата сметка во одреден момент. Ако $A = 0$, тогаш нема што да се докажува. Затоа, нека $A > 0$ и нека $B = qA + r$, каде $0 \leq r < A$. Наша цел е до го намалиме бројот на долари на втората сметка од B на r. Бидејќи $r < A$, вредноста $\min\{A, B, C\}$ ќе се намали.

Задачата вклучува дуплирање на дадени броеви, па затоа ќе го разгледуваме бинарното претставување на броевите. Нека

$$q = m_0 + 2m_1 + 2^2 m_2 + ... + 2^k m_k$$

е бинарниот запис на q, каде $m_i = 0$ или $m_i = 1$, за секој i. За да го намалиме B до r, префрламе пари на првата сметка. Префрлањето е од втората сметка ако $m_{i-1} = 1$ и од третата сметка ако $m_{i-1} = 0$. Бројот на долари на првата сметка почнува со A и со горниот алгоритам се дуплира во секој чекор. Сега, имаме префрлање од втората на првата сметка на

$$A(m_0 + 2m_1 + ... + 2^k m_k) = Aq$$

долари, па на втората сметка останануваат $B - Aq = r$ долари. Значи, имаме алгоритам со кој се намалува $\min\{A, B, C\}$, од што следува првиот дел на задачата.

18. БОЕЊА БРОЕВИ, ТОЧКИ И ОТСЕЧКИ

1. Дадени се 6 триелементни подмножества на множеството X. Докажи дека елементите на X може да се обојат во две бои така што ниту едно од дадените подмножества не е еднобојно (монохроматско).

Решение. Може да сметаме дека множеството X е конечно, $|X|=n\geq 6$, и да примениме математичка индукција. За $n=6$ има $\binom{6}{3}=20>2\cdot 6$ триелементни подмножества, па постои едно од нив кое не е еднакво на ниту едно од дадените множества или на неговиот комплемент. Неговите елементи ќе ги обоиме со една боја, а преостанатите елементи со друга боја.

Нека сега $n>6$ и нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k=n-1$. Парови елементи на множеството X има најмалку $\binom{7}{2}=21>6\binom{3}{2}$, па затоа постои пар $\{u,v\}$ кој не се содржи во ниту едно од дадените подмножества. Да ги замениме сите појавувања на u и v со некој нов елемент w и да го примениме боењето од индуктивната претппставка. Јасно, ова боење ги задоволува условите на задачата, со што доказот е завршен.

2. Сите реални броеви поголеми од 1 се обоени во две бои, при што се користат и двете бои. Докажи, дека постојат реални броеви a и b за кои броевите $a+\frac{1}{b}$ и $b+\frac{1}{a}$ се обоени во различни бои.

Решение. Нека $a+\frac{1}{b}=x$ и $b+\frac{1}{a}=y$. Ако го елиминираме $b=y-\frac{1}{a}$ по a ја добиваме квадратната равенка $a^2y-axy+x=0$, која треба да има реални ненулти корен. Според тоа, $x^2y^2-4xy\geq 0$, од каде добиваме $xy\geq 4$.

Ако тврдењето на задачата не е точно, тогаш секои два броја x и y со производ $xy\geq 4$ треба да се обоени во иста боја (во спротивно од горниот систем наоѓаме a и b и имаме противречност). Тоа значи, дека секој број поголем од 1 треба да е обоен како и бројот 4 (зошто?), што е противречност.

3. Докажи дека природните броеви можат да бидат обоени во две бои така што истовремено се исполнети условите:

   1) За секој прост број p и секој природен број n броевите p^n, p^{n+1} и p^{n+2} не се монохромаски.
   2) Не постои бесконечна геометриска прогресија од монохроматски броеви.

Решение. Прво ќе ги обоиме сите природни броеви и нулата во две бои (зелена и црвена) така што да не постои бесконечна монохроматска аритметичка прогресија и да нема три последователни еднобојни броеви.

Природните броеви и нулата ги делиме во групи така што $i-$тата група за $i = 0,1,2,...$ почнува со бројот $2^i - 1$ и завршува со бројот $2^{i+1} - 2$. Во секоја група броевите ги боиме алтернативно во две бои така што за i парен првиот број во групата го боиме во зелено, а за i непарен првиот број го боиме во црвено.

Очигледно, при ова боење нема три последователни монохроматски броеви. Ако претпоставиме дека постои бесконечна монохроматска аритметичка прогресија со разлика d, тогаш за доволно големо i должината на $i-$тата група ќе биде поголема од d. Тоа значи дека d е парен број, но тогаш два последователни члена на прогресијата кои лежат во различни групи се разнобојни. Според тоа, не постои бесконечна аритметичка прогресија составена од монохроматски броеви. Ова боење ќе го наречеме боење A.

Ќе конструираме боење B кое ги задоволува условите на задачата. Секој природен број $n = p_1^{\sim_1} p_2^{\sim_2} ... p_k^{\sim_k}$ да го обоиме во бојата на бројот $\sim_1 + \sim_2 + ... + \sim_k$ од боењето A. Бидејќи во A нема три последователни монохроматски броеви, заклучуваме дека за секој прост број p и секој природен број n броевите p^n, p^{n+1} и p^{n+2} не се монохроматски. Понатаму, бидејќи во A нема бесконечна монохроматска аритметичка прогресија, заклучуваме дека при боењето B нема бесконечна монохроматска геометриска прогресија.

4. Определи го минималниот број бои со кои може да се обојат природните броеви од 1 до 2004 така што да не постојат тројки различни монохроматски броеви a,b,c за кои $a \mid b$ и $b \mid c$.

Решение. Нека $f(n)$ е минималниот број бои со кои може да се обојат природните броеви од 1 до n така што да не постојат тројки различни монохроматски броеви a,b,c за кои $a \mid b$ и $b \mid c$. Ќе докажеме дека $f(n) = [\frac{k+1}{2}]$, каде $2^{k-1} \le n < 2^k$.

Јасно, во низата $1, 2, 2^2, ..., 2^{k-1}$ не може да има три монохроматски броеви, па затоа $f(n) \ge [\frac{k+1}{2}]$. Да ги нумерираме искористените бои со првите $[\frac{k+1}{2}]$ природни броеви и нека $m = p_1^{\sim_1} p_2^{\sim_2} ... p_t^{\sim_t} \le n$. Очигледно,

$$h(m) = \sim_1 + \sim_2 + ... + \sim_t < k .$$

Го боиме бројот m во бојата со број $[\frac{h(m)+1}{2}]$. Ако $a \mid b$ и $b \mid c$, тогаш важи

$h(a) < h(b) < h(c)$, т.е. $h(c) - h(a) \geq 2$. Според тоа, броевите a и c се обоени со различни бои. Затоа $f(n) = [\frac{k+1}{2}]$. Конечно, за $n = 2004$ добиваме $f(2004) = 6$.

5. Нека E е бројната оска (т.е. ориентирана права со единечна отсечка на неа) и нека S е множеството точки од E кои имаат координати $19x + 85y$, каде x и y се природни броеви. Точките од S се обоени во црвено, а останатите точки од E кои имаат целобројни координати се обоени во зелено. Дали постои точка A од E (не задолжително со целобројна координата) таква што секои две точки B и C од E со целобројни координати кои се симетрични во однос на A да се различно обоени?

Решение. Ќе докажеме дека точката A со координата $\frac{19 \cdot 85 + 19 + 85}{2} = \frac{1719}{2}$ го задоволува условот на задачата. За таа цел треба да докажеме дека секои две точки кои се симетрични во однос на A се разнобојни. Нека точките p и q се симетрични во однос на A. Тоа значи, дека $p + q = 2A = 1719$.

1) Нека точките p и q се црвени. Тогаш постојат природни броеви x_1, y_1, x_2 и y_2 такви што $p = 19x_1 + 85y_1$, $q = 19x_2 + 85y_2$. Оттука
$$19 \cdot 85 + 19 + 85 = 19(x_1 + x_2) + 85(y_1 + y_2),$$
односно
$$19 \cdot 85 = 19(x_1 + x_2 - 1) + 85(y_1 + y_2 - 1).$$
Броевите 19 и 85 се заемно прости, па од последното равенство следува дека $x_1 + x_2 - 1$ е делив со 85, а $y_1 + y_2 - 1$ е делив со 19. Од $x_1 + x_2 - 1 \geq 1$ и $y_1 + y_2 - 1 \geq 1$ заклучуваме дека $x_1 + x_2 - 1 \geq 85$ и $y_1 + y_2 - 1 \geq 19$, што значи дека
$$19 \cdot 85 = 19(x_1 + x_2 - 1) + 85(y_1 + y_2 - 1) \geq 2 \cdot 19 \cdot 85,$$
што е противречност.

2) Нека претпоставиме дека p и q се зелени. Бидејќи 19 и 85 се заемно прости броеви, постојат x_1, y_1, x_2 и y_2 за кои што важи $p = 19x_1 + 85y_1$, $q = 19x_2 + 85y_2$. Притоа можеме да сметаме дека сме избрале решенија за кои x_1 и x_2 се можните најмали природни броеви. Бидејќи p и q се зелени, важи $y_1 \leq 0$, $y_2 \leq 0$. Ако $x_1 > 85$ од
$$19(x_1 - 85) + 85(y_1 + 19) = 19x_1 + 85y_1 = p$$
добиваме противречност со минималноста на x_1. Според тоа, $x_1 \leq 85$ и аналогно $x_2 \leq 85$. Како во случајот 1) добиваме дека $x_1 + x_2 - 1$ е делив со 85 и $x_1 + x_2 \geq 86$. Но, $x_1 + x_2 < 2 \cdot 85$, па затоа $x_1 + x_2 = 86$. Тогаш

$$19\cdot 85+19+85=19(x_1+x_2)+85(y_1+y_2)=19\cdot 86+85(y_1+y_2)\ ,$$

па затоа $y_1+y_2=1$, што противречни на $y_1\le 0,\ y_2\le 0$.

Конечно, останува единствена можност p и q да се разнобојни точки.

6. Множеството $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$ е поделено на три подмножества. Докажи, дека постојат два броја (може и еднакви) од едно исто подмножество чиј збир е во истото тоа подмножество.

Решение. Нека трите дисјунктни подмножества се A_1,A_2,A_3. Избираме 17 точки во рамнината и ги нумерирамесо броевите 0, 1, 2, 3, 4, ..., 16. Отсечката со краеви i и j, ($i>j$) ја боиме со црвено, сино или жолто во зависност од тоа во кое множество A_1,A_2 или A_3 припаѓа разликата $i-j$. Од принципот на Дирихле следува дека постои триаголник со темиња $i,j,k,\ (i>j>k)$ чии страни се обоени во една иста боја, што значи дека броевите $i-j,\ j-k$ и $i-k=i-j+(j-k)$ се од едно исто подмножество.

7. Нека $n,k\in\mathbb{N}$, $(n,k)=1$, $1\le k\le n-1$ и $M=\{1,2,3,...,n-1\}$. Секој елемент од M е обоен со една од две бои, бела или сина така што:

(i) за секој i од M, броевите i и $n-i$ имаат иста боја;

(ii) за секој $i\in M, i\ne k$, броевите i и $|i-k|$ имаат иста боја.

Докажи дека сите елементи од M се обоени во иста боја.

Решение. Сите природни броеви ќе ги обоиме така што за броевите $i\in\{1,...,n-1\}$, броевите од облик $i+qn$ имаат иста боја. Нека сите броеви од облик qn се обоени како и k. Ако докажеме дека сите броеви k, $2k$, $3k$, ..., pk,... се исто обоени, тогаш сме докажале дека и сите броеви $i\in\{1,...,$ $n-1\}$ се исто обоени. Имено, бидејќи k и n се заемно прости, за секој број i постои $p\in\{1,2,...,n-1\}$ таков што $pk\equiv i\ (\mathrm{mod}\ n)$, т.е. $pk=qn+i$. Значи, броевите i и pk се исто обоени, па според тоа и сите броеви од множеството M се исто обоени.

Ќе го докажеме претходното тврдење. Постојат две можности:

1° $pk<qn<(p+1)k$,

2° $qn<pk<(p+1)k$.

Ознаката "$i\leftrightarrow j$" означува дека „броевите i и j имаат иста боја". Во првиот случај

$$(p+1)k=qn+i\leftrightarrow i\ \text{(по деф.)}\ \leftrightarrow k-i\ \text{(заради } ii)\ \leftrightarrow\ n-k+i\ \text{(заради } i)$$
$$\leftrightarrow\ qn-k+i=pk\ \text{(по деф.)}.$$

Во вториот случај

$$(p+1)k = qn + j \leftrightarrow j \text{ (по деф)} \leftrightarrow k - i \text{ (заради } ii\text{))}$$
$$\leftrightarrow \; qn - k + i = pk \text{ (по деф.).}$$

8. Дали може природните броеви да се обојат во 2009 бои така што секоја боја да се среќава бесконечно многу пати и производот на секои два разнобојни броја да има боја на некој од нив?

Решение. *Одговор*. Можно е такво боење.

Нека $p_1 < p_2 < ... < p_{2008}$ се првите прости броеви. Нека A_1 е множеството природни броеви кои се деливи со p_1, A_2 е множеството природни броеви кои се деливи со p_2, но не се деливи со p_1, A_3 - на оние броеви кои се деливи со p_3, но не се деливи со p_1 или p_2, ..., A_{2008} - на природни броеви кои се деливи со p_{2008} но не се деливи со ниту еден од броевите $p_1, p_2, ..., p_{2007}$. Во множеството A_{2009} ги вклучуваме останатите природни броеви. Јасно е дека ако $x \in A_k$, $y \in A_n$ и $k < n$, тогаш $xy \in A_k$. Останува да ги обоеиме броевите од A_k во боја k, за $k = 1, 2, ..., 2009$.

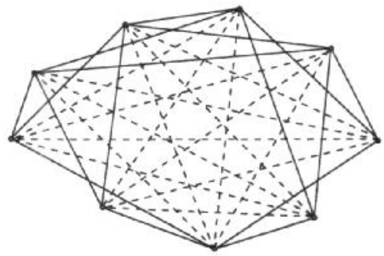
9. Секоја точка од рамнината е обоена во црвена или сина боја. Докажи дека постои многуаголник со еднобојни темиња од барем еден од следниве видови:
   - рамностран триаголник со должина на страна 2,
   - рамностран триаголник со должина на страна $\sqrt{3}$,
   - ромб со должина на страна 1.

Решение. Прво ќе докажеме дека постои еднобоен рамностран триаголник со должина на страна 1 или таков со должина на страна $\sqrt{3}$. Нека претпоставиме дека не постои триаголник од првиот вид. Тогаш постојат точки A и B, A е црвена, B е сина и $\overline{AB} = 1$. Да ја разгледаме точката C за која важи $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека C е сина. Ако M е средината на AC, тогаш таа има иста боја како A или како C, па без ограничување на општоста можеме да земеме дека е бојата на A. Да ги разгледаме рамностраните триаголници ADM и AEM. По претпоставка точките D и E се обоени во сина боја, па затоа триаголникот CDE е син, рамностран и има должина на страна $\sqrt{3}$.

Сега да претпоставиме дека постои еднобоен (црвен) триаголник PQR, кој е рамностран и има должина на страна 1. Надворешно од него конструираме рамнострани триаголници PQW, QRU и RPV. Тогаш или точките U,V,W се сите сини и тогаш имаме рамностран син триаголник со должина на страна 2, или една од нив е црвена, на пример U и во тој случај четириаголникот $PQUR$ е ромб со саканите својства.

10. Во просторот се дадени девет точки, такви што било кои четири не лежат во иста рамнина. Секои две точки се поврзани со отсечка и секоја од нив е обоена со сина или со црвена боја или не е обоена. Определи го најмалиот број n таков што при било какво боење на избраните n отсечки, меѓу нив постојат три еднакво обоени кои се страни на триаголник.

Решение. Ако $n=32$, тогаш може да се изберат и обојат отсечките така да не постои ниту еден триаголник, обоен со иста боја, како што е покажано на цртежот десно.



Притоа со полна линија се претставени отсечките обоени со сина боја, а со испрекината линија се претставени отсечките обоени со црвена боја.

Меѓу деветте точки има $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ отсечки. Да претпоставиме дека сме избрале 33 обоени отсечки. Тогаш, само три отсечки се необоени.

Сека можеме да отстраниме 3 темиња така што преостанатите 6 бидат поврзани сите со обоени отсечки. Да земеме некое теме, на пример A_1. Тоа е поврзано со останатите 5 точки со обоени отсечки, па затоа постојат три исто обоени отсечки, на пример сини отсечки $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Ако ниту еден од триаголниците $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_3A_4$ не е обоен во сина боја, тогаш триаголникот $A_2A_3A_4$ е обоен во црвена боја.

Според тоа, ако избереме 33 обоени отсечки, секогаш ќе постои триаголник така што сите негови страни се обоени со иста боја. Значи, најмалата вредност за n со бараните својства е $n=33$.

11. Определи го најмалиот природен број n за кој важи: како и да ги обоиме во три бои темињата на правилен $n-$аголник, постои рамнокрак трапез чии темиња се монохроматски.

Решение. Нека M е правилен 17-аголник и да претпоставиме дека постои боење во три бои на темињата на M, при кое нема рамнокрак трапез чии темиња се монохроматски. Од принципот на Дирихле следува дека постојат 6 монохроматски темиња на M. Овие темиња определуваат $\binom{6}{2}=15$ страни и дијагонали на M кои имаат најмногу $[\frac{17}{2}]=8$ различни должини. Можни се два случаја.

Случај 1. Три од 15-те отсечки се со еднаква должина. Бидејќи 17 не е делив со 3, не е можно секои две од овие три отсечки да имаат заедничко теме, т.е. да постои рамностран триаголник. Тогаш двете еднакви монохроматски отсечки без заедничко теме определуваат рамнокрак трапез чии темиња се монохроматски.

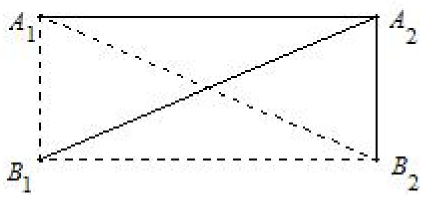
Случај 2. Имаме 7 парови отсечки со еднакви должини. Секој таков пар мора да има заедничко теме, бидејќи во спротивно како во случајот 1 добиваме дека постои рамнокрак трапез чии темиња се монохроматски. Тогаш постојат два пара во кои учествува едно исто теме. Затоа четирите останати темиња од тие два пара отсечки определуваат рамнокрак трапез чии темиња се монохроматски.

Останува да докажеме дека ако $A_1A_2...A_n$ е правилен $n-$аголник со $n \le 16$ темиња, тогаш неговите темиња може да се обојат во три бои така што не постои рамнокрак трапез чии темиња се монохроматски. За $n=16$ темињата $A_5, A_8, A_{13}, A_{14}, A_{16}$ ги боиме во една боја, $A_3, A_6, A_7, A_{11}, A_{15}$ во втора боја и $A_1, A_2, A_4, A_9, A_{10}, A_{12}$ во трета боја. Непосредно се проверува дека ова боење ги има саканите својства. Слични конструкции се можни за $10 \le n \le 15$ (направи ги!), а за $3 \le n \le 9$ едноставно не треба да допуштиме четири монохроматски темиња.

12. Дадена е петстрана призма со основи $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Сите рабови на основите и сите отсечки A_iB_j $(i, j = 1,2,3,4,5)$ се обоени со црвена или зелена боја, така што во секој триаголник, чии темиња се во темињата на основите на призмата, постојат две страни обоени со различна боја. Докажи дека сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

Решение. 1° Ќе докажеме дека, ако некој раб од некоја од основите е обоен со една боја, тогаш за секое теме кое е крајна точка на тој раб постојат барем три отсечки кои го поврзуваат со темињата на другата основа и кои се обоени со друга боја.

Претпоставуваме дека, на пример работ A_1A_2 е обоен со зелена боја, и спротивно на тврдењето, барем три од отсечките A_2B_i, $i=1,2,3,4,5$ се исто така обоени со зелена боја. Нека се тоа отсечките A_2B_j, A_2B_k, A_2B_m. Од три темиња на петаголникот барем две се соседни. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $j=1$, $k=2$. Тогаш отсечките A_2A_1, A_2B_1 и A_2B_2 се обоени зелено (на цртежот се означени со полна линија). Според условот на задачата, отсечките A_1B_1, A_1B_2 и B_1B_2 се обоени црвено, т.е. $\triangle A_1B_1B_2$ е еднобоен, што противречи на претпоставката. Според тоа, најмалку три отсечки A_2B_i, $i=1,2,3,4,5$ се обоени црвено.



2° Ќе докажеме дека петаголниците при основите се еднобојни. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека во некој од нив постојат рабови со различна боја. Нека на пример, работ A_1A_2 е зелен, а работ A_2A_3 е црвен. Според 1°, најмалку три од отсечките A_2B_i, $i=1,2,3,4,5$ се црвени, а најмалку три се зелени, што не е можно.

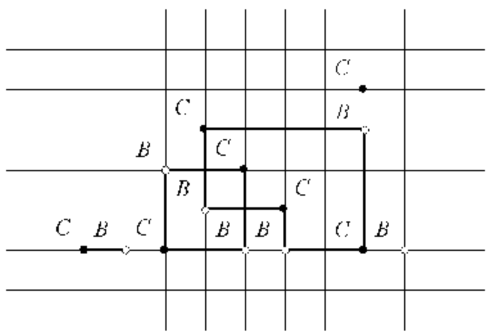
3° Да претпоставиме дека сите страни на основата $A_1A_2A_3A_4A_5$ се зелени, а сите страни на основата $B_1B_2B_3B_4B_5$ се црвени. Ако 1° го примениме на страните на основата $A_1A_2A_3A_4A_5$, добиваме дека од дваесет и петте отсечки A_iB_j, $i,j=1,2,3,4,5$ има најмалку $5\cdot 3=15$ црвени. Аналогно, од петаголникот $B_1B_2B_3B_4B_5$ заклучуваме дека меѓу тие отсечки барем 15 се зелени. Бидејќи ова не е можно, сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

На крајот да забележиме дека призма со саканите својства постои. Дади пример!

13. Дадено е конечно множество точки во рамнината, такво што секоја точка има целобројни координати. Дали е можно некои точки од тоа множество да се обојат со црвена боја, а преостанатите со бела боја, така што за секоја права L која е паралелна со било која од координатните оски, разликата меѓу бројот на белите и бројот на црвените точки на L да биде -1 ,0 или 1?

Решение. Одговорот е позитивен, т.е. секогаш е можно на бараниот начин да се обојат точките.

Нека L е произволна права паралелна со една од координатните оски која го пресекува множеството A. Нека $P_1, P_2,...$ се точки од $A\cap L$ подредени така што слободните координати им растат (т.е. ако L е паралелна со $x-$оска, сите точки имаат иста $y-$координата и точките $P_1, P_2,...$ ги подредуваме така што $x-$координатите им растат; аналогно и во случајот кога L е паралелна со $y-$оската).



Ги поврзуваме P_1 со P_2, P_3 со P_4 итн. со отсечки, при што евентуално ќе остане една слободна точка. Тоа го правиме со секоја таква права L. Бидејќи A е конечно множество имаме конечно многу такви прави. На тој начин добивме фамилија од отсечки, со тоа што секоја точка од A припаѓа најмногу на две од тие отсечки. Унијата на овие отсечки се распаѓа на полигонални линии (затворени или незатворени) без заеднички темиња и определен број изолирани точки).

Затворените полигонални линии содржат парен број отсечки бидејќи две последователни отсечки се нормални меѓу себе. Ги боиме точките на секоја полигонална линија редоследно: црвено, бело, црвено, бело итн. (што е можно согласно со парноста во случај на затворени криви), а преостанатите изолирани точки по желба. Таквиот начин на боење е саканиот: на секоја права L точките се во парови, во кои се обоени различно, и постои најмногу една точка без свој пар.

14. Секоја точка од рамнината е обоена во сино или црвено. Докажи дека постојат две сини точки на растојание 1 или четири колинеарни црвени точки A_1, A_2, A_3, A_4 такви што $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = 1$.

Решение. Нека претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно. Тогаш постои барем една точка P која е обоена во сино. Во спротивно, тривијално е исполнет условот од задачата. Околу точката P ќе опишеме кружница k со радиус еднаков на 1. Сите точки од кружницата и кругот се обоени во црвена боја. Во спротивно постојат две точки кои се на растојание 1 и се обоени во сино. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник впишан во кругот, $AB \cap CD = X$, $CD \cap EF = Y$ и $EF \cap AB = Z$ (точките X, Y, Z се темиња на рамностран триаголник). Барем две од точките X, Y, Z се обоени во сино. Во спротивно, ако имаме две црвени, заедно со двете црвени од шестаголникот кои припаѓаат на отсечката определена со тие точки се четири црвени точки кои го исполнуваат условот на задачата.

Ќе направиме ротација, така што $\overline{XX'} = \overline{YY'} = \overline{ZZ'} = 1$. Шестаголникот $A'B'C'D'E'F'$ е обоен црвено, бидејќи тој е впишан во кружницата K. Ако две точки од X', Y', Z' се црвени, тогаш од точките $A', B', C', D', E', F', X', Y', Z'$ може да се одвојат четири црвени кои го исполнуваат условот од задачата. Тоа е контрадикција со претпоставката. Според тоа, најмалку две точки од X', Y', Z' се обоени во сино. Конечно, барем една од отсечките XX', YY', ZZ' има крајни точки кои се обоени во сино. Повторно контрадикција со претпоставката. Значи, претпоставката дека нема две точки кои се на растојание 1 и се обоени сино и нема четири колинеарни точки кои се обоени црвено и се на растојание 1 води до противречност.

15. Нека T е конвексна фигура во рамнина, која содржи барем три неколинеарни точки. Секоја точка од фигурата е обоена во една од p дадени бои. Докажи дека за $n \geq 3$ постојат бесконечно многу складни n-аголници такви што сите нивни темиња се обоени со една иста боја.

Решение. Нека A, B, C се три неколинеарни точки кои припаѓаат на конвексното множество S. Според тоа, секоја точка од триаголникот ABC припаѓа на множеството S. Впишаната кружница k припаѓа на множеството S. Понатаму, во кружницата k може да се впишат бесконечно многу различни $N=(n-1)p+1$ многуаголници кои се правилни. Според принципот на Дирихле, за еден фиксен N-аголник постојат барем n-темиња кои се обоени во иста боја, една од p-те бои.

Бидејќи множеството од N-аголници е бесконечно, постојат бесконечно многу n-аголници кои се обоени во иста боја, една од p-те бои. Значи, постојат бесконечно многу n-аголници, сите обоени во иста боја. Од еден N-аголник може да се издвојат $\binom{N}{n}=\binom{(n-1)p+1}{n}$ различни n-аголници. Бидејќи множеството од n-аголници чии темиња се и темиња на $N=(n-1)p+1$ аголници е бесконечно и бидејќи $\binom{N}{n}=\binom{(n-1)p+1}{n}$ е конечен број, добиваме дека постојат бесконечно многу складни n-аголници кои се обоени во иста боја.

16. Права е обоена во две бои. Докажи, дека постои отсечка чии крајни точки и средина се монохроматски (обоени во иста боја).

Решение. *Прв начин.* На правата земаме девет тројки на точки чии координати имаат вид $(x, x+1, x+2)$, (за девет различни вредности на x). Секоја тројка на точки може да се обои во две бои на $2^3=8$ различни начини и како имаме 9 тројки на точки, од принципот на Дирихле следува дека постојат две тројки кои се обоени на ист начин. Од друга страна во секоја тројка постојат две монохроматски точки. На таков начин добивме четири точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11} кои се монохроматски, да кажеме во бела боја, при што $\overrightarrow{A_{00}A_{01}}=\overrightarrow{A_{10}A_{11}}$ (види цртеж).

Нека точките A_{02} и A_{12} ги избереме така што точките A_{01} и A_{11} се средини на отсечките $A_{00}A_{02}$ и $A_{10}A_{12}$, соодветно. Ако било која од овие точки е бела, тогаш бараната тројка точки е најдена. Ако и двете точки A_{02} и A_{12} се црни, тогаш избираме точка A_{22} така што точката A_{12} е средина на отсечката $A_{02}A_{22}$. Ако точката A_{22} е црна, тогаш бараната тројка е (A_{02}, A_{12}, A_{22}), а ако е бела, тогаш бараната тројка е (A_{00}, A_{11}, A_{22}).

Втор начин. Нека AB е отсечка чии крајни точки се обоени во бела боја. Нека D и E се точки од правата такви што A е меѓу D и B, B е меѓу A

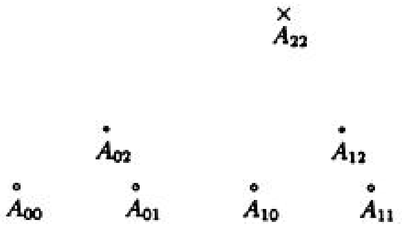
и E и важи $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{BE}$. Тогаш ако некоја од точките D и E е обоена во бела боја, бараните точки се A, B и таа точка. Нека точките D и E се обоени во црна боја. Средината F на отсечката AB е средина и на отсечката DE и F е обоена или во бела или во црна боја. Во првиот случај точките A, B и F се бараните точки, а во вториот случај тоа се точките D, E и F.

17. Рамнина е обоена во две бои. Докажи, дека постои триаголник кој е сличен на даден триаголник и чии темиња се монохроматски.

Решение. *Прв начин*. Во рамнината да разгледаме произволна права и на неа да најдеме четири монохроматски точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11}, распоредени како во првиот начин од решението на задача 16, да кажеме сите се обоени во бела боја. Точките A_{02}, A_{12} и A_{22} ги избираме така што триаголниците

$$A_{00}A_{01}A_{02},\ A_{10}A_{11}A_{12},\ A_{02}A_{12}A_{22}$$

се слични на дадениот триаголник, при што распоредот на темињата е суштествен (цртеж десно). Јасно, ако една од точките A_{02}, A_{12} и A_{22} е бела, тогаш еден од триаголниците $A_{00}A_{01}A_{02}$, $A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{00}A_{11}A_{22}$ го задоволува условот на задачата, а во спротивно тоа е триаголникот $A_{02}A_{12}A_{22}$.



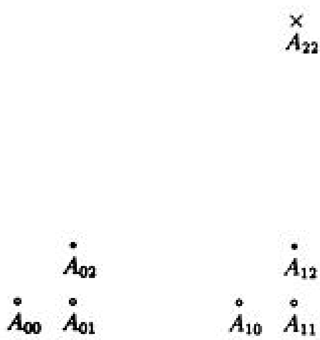
Втор начин. Според претходната задача постојат три бели точки A, B и C такви што B е средина на AC. Од иста страна на правата AC конструираме триаголници ABD, BCE и ACF слични на дадениот триаголник. Можни се следниве случаи:

1) Ако една од точките D, E или F е бела, тогаш бараниот триаголник е ABD, BCE или ACF, соодветно.
2) Ако трите точки D, E или F се црни, тогаш бараниот триаголник е DEF.

18. Рамнината е обоена во две бои. Докажи, дека постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.

Решение. *Прв начин*. Сите рамнокраки правоаголни триаголници се слични, па доказот непосредно следува од претходната задача.

Втор начин. Во рамнината да разгледаме произволна права и на неа да најдеме четири монохроматски точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11}, распоредени како во решението на задача



16, да кажеме сите се обоени во бела боја. Точките A_{02}, A_{12} и A_{22} ги избираме така што триаголниците $A_{00}A_{01}A_{02}$, $A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{02}A_{12}A_{22}$ се рамнокраки правоаголни со прави агли во темињата A_{01}, A_{11} и A_{12}, соодветно (види цртеж). Јасно, ако една од точките A_{02}, A_{12} и A_{22} е бела, тогаш еден од триаголниците $A_{00}A_{01}A_{02}$, $A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{00}A_{11}A_{22}$ го задоволува условот на лемата, а во спротивно тоа е триаголникот $A_{02}A_{12}A_{22}$.

19. Тврдењата во секоја од задачите 16, 17 и 18 се точни ако наместо целата рамнина се разгледува конечно множество точки (за секоја задача множеството е различно).

Решение. Во задачата 16 четирите монохроматски точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11}, кои го задоволуваат условот $\overrightarrow{A_{00}A_{01}} = \overrightarrow{A_{10}A_{11}}$ се наоѓаат меѓу единаесет последователни точки со целобројни координати. Навистина, доволно е за x последователно да ги земеме вредностите од 1 до 9. Тогаш, точката A_{22} од решението на задача 16 има координата помала или еднаква на 21. Затоа, тврдењето е точно ако наместо целата права ги разгледуваме само точките со координати од 1 до 21.

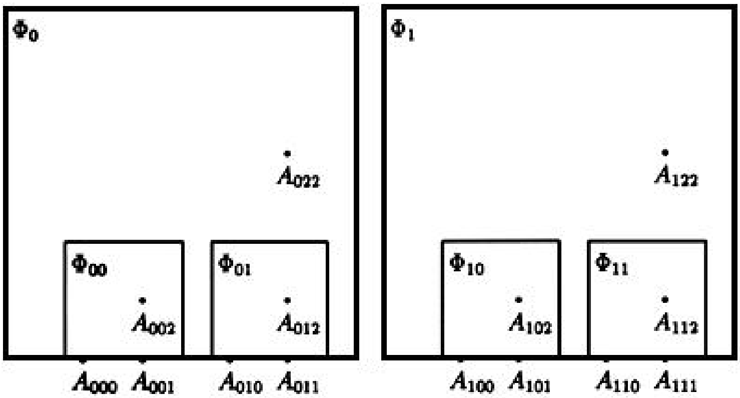
Во задача 17 треба да се разгледа само целобројна решетка со димензија 11×11, на пример множеството точки од рамнината (x, y) со целобројни кординати и такви што $1 \le x \le 11$ и $1 \le y \le 11$, во косоаголен координатен систем чии оски се паралелни со две страни на дадениот триаголник.

Аналогно во задачата 18 доволно е да се разгледа само целобројна решетка со димензија 11×11, на пример множеството точки од рамнината (x, y) со целобројни кординати и такви што $1 \le x \le 11$ и $1 \le y \le 11$.

20. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во три бои. Докажи, дека постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.

Решение. Во рамнината да разгледаме доволно голем квадрат (смислата на изразот „доволно голем“ ќе ја објасниме покасно), чија страна лежи на апсцисната оска и сите негови транслации долж апсцисата за целоброен вектор. Бидејќи бројот на сите боења на квадратите е конечен, а имаме бесконечно многу квадрати добиваме дека меѓу добиените квадрати има два еднакво обоени. Овие квадрати да ги означиме со Φ_0 и Φ_1 (види цртеж).

Аналогно, внатре во квадратот Φ_0 наоѓаме два еднакво обоени квадрати Φ_{00} и Φ_{01} кои се со помала димензија и чии страни лежат на апсцисата. Соодветните квадрати во квадратот Φ_1 да ги означиме со Φ_{10} и Φ_{11}. Внатре во квадратот Φ_{00} наоѓаме две монохроматски точки A_{000} и A_{001} кои лежат на апсцисата, да кажеме бели. Од условот за егзистенција на овие точки ги



наоѓаме димензиите на претходно споменатите квадрати. Така квадратот Φ_{00} мора да има димензија 4×4, а квадратот Φ_0 мора да има димензија $(3^{16}+1)\times(3^{16}+1)$. Соодветните парови $(A_{010},A_{011}),(A_{100},A_{101}),(A_{110},A_{111})$ бели точки ќе бидат внатре во квадратите Φ_{01}, Φ_{10} и Φ_{11}. Да ги конструираме точките A_{ij2}, $0\le i,j\le 1$ така што триаголниците $A_{ij0}A_{ij1}A_{ij2}$ се рамнокраки и правоаголни. На крајот да конструираме точка A_{222}, така што триаголникот $A_{022}A_{122}A_{222}$ е рамнокрак правоаголен. Ако една од новоконструираните точки е бела, тогаш имаме монохроматски триаголник. Во спротивно, овие точки се обоени во другите две бои и на конструкцијата од овие точки може да се применат размислувањата од вториот начин на решавање на задачата 18. Навистина, бидејќи квадратите Φ_{00} и Φ_{01} се еднакво обоени добиваме дека точките A_{002} и A_{012} се монохроматски, па како квадратите Φ_0 и Φ_1 се еднакво обоени добиваме дека сите точки A_{ij2}, $0\le i,j\le 1$ се монохроматски.

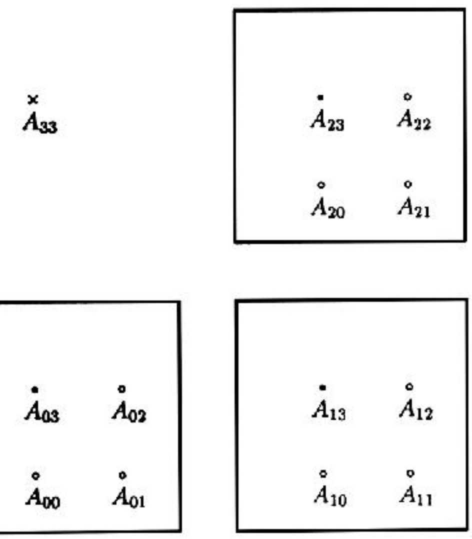
21. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во N бои. Докажи, дека постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.
Упатство. Постапи аналогно на решението на задача 20.

22. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во N бои. Докажи, дека постои правоаголник чии темиња се монохроматски.
Решение. Доволно е да разгледаме боење на правоаголен дел од целобројната решетка со димензии $(N+1)\times(N^{N+1}+1)$. Имено, при боење во N бои

меѓу $N+1$ точка на апсцисата имаме две монохроматски точки. Понатаму, множеството од сите пресликувања $f: A \to B$, каде $|A| = N+1, |B| = N$ има N^{N+1} елемент, па затоа меѓу првите $N^{N+1}+1$ редови мора да има два еднакво обоени. Во едниот од нив се наоѓаат две монохрометски точки, па затоа и точките кои се наоѓаат во другиот еднакво обоен ред се монохроматски и тие заедно со првите две точки формираат правоаголник чии темиња се монохроматски.

23. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во две бои. Докажи, дека постои квадрат чии темиња се монохроматски.

Решение. Според задача 19 секој 11×11 квадрат обоен во две бои содржи рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски. Секој 11×11 квадрат во две бои може да се обои на 2^{121} начини. Сега целобројната решетка да ја замислиме како решетка во која 11×11 квадрати се точки и секое од 2^{121} – те различни боења да го земеме како една боја со која се бои вака замисленaта решетка. Според задача 21, при ваквото боење постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски. Тоа значи дека постојат три 11×11 квадрати кои се еднакво обоени и кои се распоредени како да се темиња на рамнокрак правоаголен триаголник (види цртеж).
Понатаму, во секој од овие три квадрати се наоѓа по еден рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски. Да земеме во првиот квадрат еден таков триаголник и во останатите два квадрати да ги разгледаме соодветните триаголници.



Според тоа, добивме три монохроматски рамнокраки правоаголни триаголници, да кажеме бели: $A_{00}A_{01}A_{02}$, $A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{20}A_{21}A_{22}$, (види цртеж).

Секој од нив да го дополниме до квадрат со точките A_{03}, A_{13} и A_{23}. Ако една од овие точки е бела, тогаш е добиен бараниот квадрат чии темиња се монохроматски. Ако точките A_{03}, A_{13} и A_{23} се црни, тогаш да разгледаме точка A_{33} која триаголникот $A_{03}A_{13}A_{23}$ го дополнува до квадрат. Ако оваа точка е црна, тогаш бараниот монохроматски квадрат е $A_{03}A_{13}A_{23}A_{33}$, а ако е бела тогаш тоа е квадратот $A_{00}A_{11}A_{22}A_{33}$.

24. Во рамнината точките со целобројни координати се обоени во N бои. Докажи, дека постои квадрат чии темиња се монохроматски.
Упатство. Постапи аналогно на решението на задача 23.

25. Нека во рамнината точките со целобројни координати се обоени во k бои и M е произволно конечно множество точки од решетката. Тогаш постои монохроматско множество, слично на множеството M.
Решение. Нека е дадено конечно множество $M=\{M_0, M_1, ..., M_n\}$ и природен број k. Воведуваме ознаки $\vec{v_i}=\overrightarrow{M_0M_i}, i=1,2,...,n$. Ќе докажеме дека постои ограничено множество Φ такво, што за секое негово боење во k бои, постои монохроматско подмножество $A=\{A_0, A_1, ..., A_n\}\subset\Phi$, слично на M, т.е. постои $a>0$ таков што $\overrightarrow{A_0A_i}=a\vec{v_i}, i=1,2,...,n$. Според тоа, наместо сличност докажуваме хомотетичност со позитивен коефициент.
Доказот ќе го спроведеме со индукција по бројот на точките на множеството M, кој при нашите ознаки е еднаков на $n+1$.
База на индукцијата. Нека $n=1$, т.е. множеството M се состои од две точки. Правата која минува низ овие две точки содржи бесконечно многу точки од решетката. Да рагледаме област која содржи $k+1$ точка од овие точки на правата. Согласно принципот на Дирихле, меѓу овие две точки постојат две монохроматски и тие го формираат множеството A.
Индуктивен чекор. Нека $M=\{M_0, M_1, ..., M_n\}$ е множество со $n+1$ точка и е дадено боење на рамнината во k бои. По претпоставка за множеството $M'=\{M_0, M_1, ..., M_{n-1}\}$ кое содржи n точки е исполнето тврдењето на задачата, кое важи не само за даденото боење, туку и за секое боење во произволен број бои.
Во рамнината последователно избираме области $\Phi^{(i)}, i=0,1,...,k$ на следниот начин. $\Phi^{(0)}$ се состои од една точка. За $i\geq 1$, користејќи ја областа $\Phi^{(i-1)}$ областа $\Phi^{(i)}$ ја конструираме на следниот начин. Прво ја определуваме областа $\Phi'^{(i)}$ така што при секое нејзино боење во $k^{N_{i-1}}$ бои (N_{i-1} е бројот на точките кои се содржат во областа $\Phi^{(i-1)}$) постои монохроматско

множество слично на M'. Потоа ја проширувame $\Phi'^{(i)}$ до $\Phi^{(i)}$ така што при секое вложување на множество $A=\{A_0, A_1, ..., A_n\}$, слично на множеството M, во решетка која го содржи множеството $\Phi'^{(i)}$, при кое $\{A_0, A_1, ..., A_{n-1}\}$ $\subset \Phi'^{(i)}$, е исполнет условот $A_n \in \Phi^{(i)}$.

Ќе докажеме дека $\Phi = \Phi^{(k)}$ е бараното множество. Од секоја фигура $\Phi^{(i)}$ ќе избереме точка $F_{\Phi^{(i)}}$. Да го разгледаме следното боење на множеството $\Phi^{(i)}$ во $k^{N_{i-1}}$ бои. Две точки F_1 и F_2 ги боиме во една боја ако почетните боења на фигурата $\Phi'^{(i-1)}$ при транслациите за векторите $\overrightarrow{F_{\Phi^{(i-1)}}F_1}$ и $\overrightarrow{F_{\Phi^{(i-1)}}F_2}$ се совпаѓаат. При таквото боење постои монохроматско множество слично на M'. Тоа значи, дека постои еднакво почетно боење на множествата $\Phi_j^{(i-1)}$, $j=0,1,...,n-1$ кои се добиваат од $\Phi_0^{(i-1)} = \Phi^{(i-1)}$ со транслација за вектор $\alpha_i \overrightarrow{M_0 M_j}$ за некој позитивен број α_i. Ќе го разгледаме множеството $\Phi_n^{(i-1)}$ кое се добива од $\Phi_0^{(i-1)}$ со транслација за вектор $\alpha_i \overrightarrow{M_0 M_n}$, за чие боење не можеме ништо да кажеме. Соодветно определените точки $F_{\Phi_j^{(i-1)}} \in \Phi_j^{(i-1)}$, $j=0,1,2,...,n$ се добиваат од $F_{\Phi^{(i-1)}}$ со транслации за вектори $\alpha_i \overrightarrow{M_0 M_j}$ и формираат монохроматско множество во разгледуваното боење на множеството $\Phi'^{(i)}$. Бидејќи $F_{\Phi_j^{(i-1)}} \in \Phi'^{(i)}$, за $j=0,1,...,n-1$, добиваме $F_{\Phi_n^{(i-1)}} \in \Phi^{(i)}$.

Ја применуваме опишаната конструкција на множеството $\Phi = \Phi^{(k)}$ и добиваме множества Φ_i, $i=0,1,...,n$. Потоа, на истиот начин од нив добиваме множества $\Phi_{i_1 i_2}$, $i_1, i_2 = 0,1,...,n$. Продолжувајќи ја постапката конструираме $(n+1)^k$ точки $A_{i_1 i_2 ... i_k}$, $i_1, i_2, ..., i_k = 0,1,...,n$. Притоа

$$\overrightarrow{A_{00...0}A_{i_1 i_2 ... i_k}} = \alpha_{i_1}\vec{v}_{i_1} + \alpha_{i_2}\vec{v}_{i_2} + ... + \alpha_{i_k}\vec{v}_{i_k}.$$

Точките $A_{i_1 i_2 ... i_k}$, во која сите индекси се помали од n ќе ги наречеме *основни*, а оние во кои постои индекс еднаков на n ќе ги наречеме *додадени*. По конструкција сите основни точки се обоени во една боја. Ова боја да ја наречеме прва. Да разгледаме некоја додадена точка $A_{i_1 i_2 ... i_k}$, при што нејзините индекси кои се еднакви на n се $j_1, j_2, ..., j_s$. Оваа точка да ја означиме A_n и да ги разгледаме точките A_i, $i=0,1,...,n-1$ кои се добиваат од точката $A_{i_1 i_2 ... i_k}$ кога во индексите сите броеви n се заменат со i.

Добиеното множество е слично со множеството M , бидејќи

$$\overrightarrow{A_0A_i} = (a_{j_1} + a_{j_2} + ... + a_{j_s})\overrightarrow{M_0M_i} .$$

Бидејќи сите точки A_i , $i = 0,1,...,n-1$ се монохроматски, ако една од додадените точки е обоена во првата боја, тогаш монохроматското множество слично на M е најдено. Ако меѓу додадените точки не постои точка обоена во правата боја, тогаш го разгледуваме множеството точки $A_{ni_2...i_k}$ во кои првиот индекс е еднаков на n . Тие сите се обоени во една боја, која ја нарекуваме втора. Со аналогни расудувања докажуваме дека во случај кога една точка во која еден од индексите, освен првиот, е еднаков на n е обоена во втората боја, тогаш тврдењето е докажано. Продолжувајќи ја постапката, добиваме дека тврдењето е докажано ако барем една точка за која првите p индекси се еднакви на n е обоена во една од првите p бои. Последното сигурно е точно бидејќи при $p = k$ точката $A_{nn...n}$ е обоена во една од дадените k бои.

26. Во точките на целобројната решетка на рамнината се запишани природни броеви. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои квадрат со страни паралелни на линиите на решетката, таков што збирот на броевите внатре во квадратот е делив со n .

Решение. Бројот кој се наоѓа во точката со координати (i, j) да го означиме со a_{ij} . Точките од решетката со целобројни координати да ги обоиме во n бои на следниот начин. Боја на точката (k,m) го нарекуваме остатокот од делењето на бројот $N(k,m) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}$ со n . Од задача 24 следува дека постои квадрат чии темиња се монохроматски. Нека темињата на тој квадрат имаат координати $(k,m), (k+l,m), (k,m+l)$ и $(k+l,m+l)$. Тогаш, збирот на броевите во квадратот чии темиња се

$$(k+1,m+1), (k+l,m+1), (k+1,m+l) \text{ и } (k+l,m+l)$$

е еднаков на

$$N(k+l,m+l) - N(k+l,m) - N(k,m+l) + N(k,m)$$

и тој е делив со n .

27. Нека рамнината е обоена во k бои и M е произволно конечно множество точки од рамнината. Докажи, дека постои монохроматско множество, слично на множеството M .

Решение. Нека е дадено конечно множество $M = \{M_0, M_1,..., M_n\}$. Точката M_0 ја нарекуваме координатен почеток и ги разгледуваме векторите

$\vec{v_i} = \overrightarrow{M_0 M_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Множеството точки од облик $\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v_i}$, каде x_i се цели броеви, го нарекуваме $n-$димензионална целобројна решетка. Според тоа, при ознаките од задача 25, во својство на координатен почеток ја имаме точката M_0, а бараната решетка е распната на векторите $\vec{v_i} = \overrightarrow{M_0 M_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Понатаму, доказот е наполно аналоген на доказот во задача 25, ако под решетка се подразбира $n-$димензионалната целобројна решетка во рамнината.

28. Во рамнината се дадени две различни точки O и A. За секоја точка X во рамнината, различна од O, со $\sim(X)$ ја означуваме големината на аголот AOX изразена во радијани $(0 \le \sim(X) < 2®$ и аголот се мери од кракот AO во насока обратна од движењето на стрелките на часовникот) и со $C(X)$ ја означуваме кружницата со центар во O и радиус $\overline{OX} + \frac{\sim(X)}{\overline{OX}}$. Точките од рамнината се обоени со конечно многу бои. Докажи дека во рамнината постои точка Y за која $\sim(Y) > 0$ и таква што на кружницата $C(Y)$ се наоѓа точка обоена со истата боја како и Y.

Решение. Разгледуваме произволни кружници $R = (O, r)$ и $S = (O, s)$. На кружницата R земаме точка X со $\sim(X) = r(s - r)$. За да $0 \le \sim(X) < 2®$ доволно е да земеме $0 < r < s < 1$. Кружницата $C(X)$ има радиус

$$\overline{OX} + \frac{\sim(X)}{\overline{OX}} r + \frac{r(s-r)}{r} = s,$$

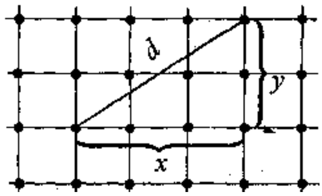
т.е. таа се совпаѓа со кружницата $S = (O, s)$.

Нека претпоставиме дека бојата на точката X не се појавува на кружницата S, т.е. дека множеството бои на кружницата R е различно од множеството бои на кружницата S. Тоа повлекува дека секои две кружници со радиус помал од единица се обоени со различни множества бои. Според тоа, на секоја кружница $S = (O, s_¬), 0 < ¬ < 1$, а нив ги има бесконечно многу, постои боја што ја нема на кружницата R. Последното противречи на условот на задачата дека обојувањето на рамнината е со конечно многу бои.

29. Дадена е бесконечна квадратна решетка. Определи го најмалиот природен број n со следново својство: За секој позитивен број d јазлите на решетката може да бидат обоени во n бои така, што секои два јазли меѓу кои растојанието е d се обоени во различни бои.

Бројот n се нарекува *хроматичен број* на решетката.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека должината на страната на квадратите во решетката е еднаква на 1.



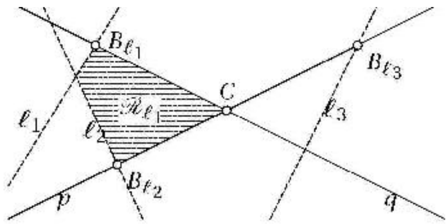
Од условот на задачата следува дека треба да ги разгледуваме само оние реални броеви d, за кои постојат два јазли на решетката кои се на растојание d (за сите други броеви едноставно решетката може да ја обоиме во една боја). Од Питагоровата теорема (цртеж десно) следува $x^2+y^2=d^2$, каде $x,y\in\mathbb{N}$. Значи, d^2 е природен број. Ако d^2 е непарен број, тогаш $x+y$ е непарен број. Во овој скучај шаховското обојување на јазлите на решетката во две бои ќе ги задоволува условите на задачата (бидејќи двата краја на отсечка со должина d ќе бидат обоени во различна боја). Ако d^2 е парен број, тогаш шаховскотообојување на решетката во две бои ја дели на две подрешетки (формирани од дијагоналите на почетната решетка), секоја со должина на страна $\sqrt{2}$. Сега можеме да ги обоиме овие две подрешетки независно една од друга: квадратот на растојанијата меѓу темињата обоени со различна боја е непарен број и затоа не е еднаков на парниот број d^2. Така задачата за бројот d ја сведовме на истата задача за бројот $\frac{d}{\sqrt{2}}$. Ако продолжиме по индукција заклучуваме дека две бои се доволни за да го добиеме саканото боење за секое растојание d.

30. За множеството прави во рамнината ќе велиме дека се во општа положба ако никои две прави не се паралелни и никои три не минуваат низ иста точка. Множеството прави во општа положба ја дели рамнината на области; *ограничени* области во поделбата ги нарекуваме оние кои имаат конечна плоштина. Докажи дека за секој доволно голем *n*, во секое множество од *n* прави во општа положба може да се обојат во сино барем $\sqrt{n}$ прави така што ниту една од ограничените области во поделбата нема потполно сина граница.

Решение. Пресечната точка на две сини прави ја нарекуваме *сина*. Да претпоставиме дека сме обоиле *k* прави и дека веќе ниту една права не може да се обои без да се наруши условот на задачата. Тоа значи дека за секоја необоена права ℓ постои ограничена област $\Re_\ell$ чија единствена необоена страна лежи на ℓ. Нека A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ се три последователни темиња на областа $\Re_\ell$ во насока на движењето на стрелките на часовникот, при што A_ℓ и B_ℓ лежат на правата ℓ. На правата ℓ и доделуваме сина точка C_ℓ. Ќе докажеме дека секоја сина точка е доделена најмногу на две прави. Бидејќи сини точки има $\binom{k}{2}$, а необоени прави $n-k$, ќе следува дека $n-k\le 2\binom{k}{2}=k(k-1)$, т.е.

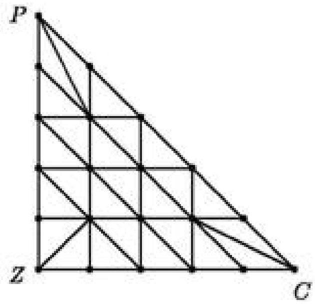
$k^2 \geq n$.

Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат три прави ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 на кои им е доделена иста точка $C = C_{\ell_1} = C_{\ell_2} = C_{\ell_3}$. Нека правите p и q се сечат во точката C. Точките $B_{\ell_1}, B_{\ell_2}, B_{\ell_3}$ се различни и лежат на сини прави p и q, при што на отсечките CB_{ℓ_i} $(i = 1,2,3)$ нема



други пресечни точки на дадените прави. Нека B_{ℓ_2} и B_{ℓ_3} лежат на правата p. Четирите последователни страни на областа $\Re_{\ell_1}$ во насока ма движењето на стрелките на часовникот се ℓ_1, p, q и (без ограничување на општоста) ℓ_2, па оваа област има две необоени страни, што е спротивно на претпоставката.

31. Триаголникот ZCP е поделен на 25 мали триаголници како на цртежот десно, а потоа сите темиња на овие триаголници се обоени во три бои на следниот начин: темето Z е обоено со зелена боја, темето C со црвена и темето P со сина; секое од темињата на отсечката ZC е обоено или со зелена или со црвена боја, секое од темињата на отсечката CP е обоено или со црвена или со сина боја, а секое од темињата на отсечката ZP е



обоено или со зелена или со сина боја. Секое теме кое се наоѓа во внатрешноста на триаголникот е обоено без ограничување, со една од трите бои.

Докажи, дека за секое боење барем на еден од 25-те мали триаголници темињата се обоени со различна боја.

Решение. Ќе ги разгледуваме страните на малите триаголници кои имаат едно теме обоено со црвена, а друго со сина боја. Таквите страни ќе ги нарекуваме црвено-сини страни.

Секоја црвено-сина страна која се наоѓа во внатрешноста на $\triangle ZCP$ е страна на точно два мали триаголници. Понатаму, секоја црвено-сина страна која се наоѓа на една од страните на $\triangle ZCP$ според условот мора да припаѓа на отсечката CP. Бидејќи темето C е обоено со црвена боја, а темето P со сина боја, заклучуваме дека бројот на црвено-сините страни на отсечката CP е непарен.

Според тоа, мора да постои барем еден мал триаголник кој има непарен број црвено-сини страни. На тој триаголник мора сите три темиња да се обоени со различни бои.

32. Секоја точка во рамнината е обоена со една од три бои. Докажи, дека постои триаголник за кој важи:

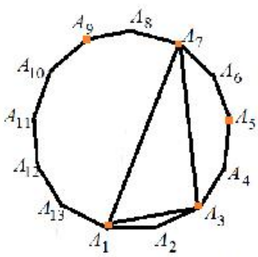
i) Темињата на триаголникот се монохроматски.

ii) Радиусот на опишаната кружница околу триаголникот е 2008.

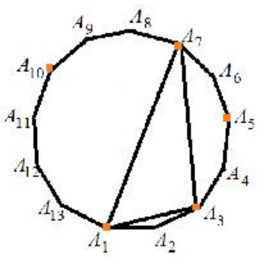
iii) Еден агол на триаголникот е два или три пати поголем од некој од другите два агли на триаголникот.

Решение. Нека $A_1A_2...A_{13}$ е правилен тринаесетаголник впишан во кружница со радиус 2008. Од принципот на Дирихле следува дека постојат 5 монохроматски точки, на пример црвени. Можни се два случаја.

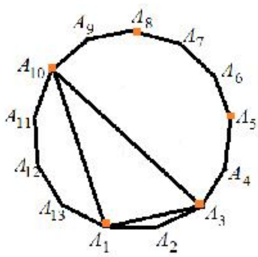
1) Меѓу петте точки нема две соседни. На секоја положба на црвените точки со точност до ротација, соодветствува разбивање на бројот 13 на пет собирци поголеми од 1. Постојат распореди кои не се совпаѓаат и тие се прикажани на долниот цртеж, со истакнат триаголник.



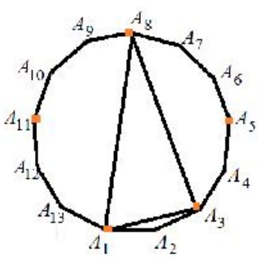
2 + 2 + 2 + 2 + 5



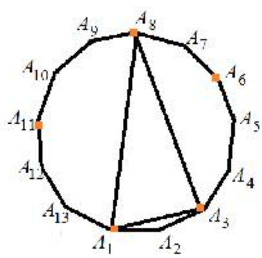
2 + 2 + 2 + 3 + 4



2 + 2 + 3 + 2 + 4



2 + 2 + 3 + 3 + 3



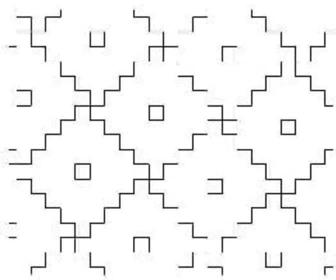
2 + 3 + 2 + 3 + 3

2) Нека две црвени темиња се соседни, на пример A_1 и A_2 . Ако е црвена било која од точките $A_4, A_5, A_6, A_{10}, A_{11}, A_{12}$, тогаш бараниот триаголник е определен со оваа точка и точките A_1 и A_2 . Затоа, нека претпоставиме дека ниту една од овие шест точки не е црвена. Тогаш меѓу темињата $A_3, A_7, A_8, A_9, A_{13}$ има барем три црвени. Ако меѓу нив е A_3 (аналогно за A_{13}), тогаш барем една од точките A_7, A_9, A_{13} е црвена, па барем еден од триаголниците определен со оваа точка и точките A_1, A_2 и A_3 ги задо-

волува условите. Единствен преостанат случај е кога точките A_7, A_8, A_9 се црвени, па тогаш бараниот триаголник е $A_1A_7A_9$.

33. Рамнината е поделена на единечни квадрати со помош на две множества паралелни прави кои формираат бесконечна решетка. Секој единечен квадрат е обоен во една од 1201 боја така што ниту еден правоаголник со периметар 100 не содржи два единечни квадрати обоени со иста боја. Докажи дека ниту еден правоаголник со димензии 1×1201 (или 1201×1) не содржи два квадрата обоени со иста боја.

Напомена. Се претпоставува дека страните на сите разгледувани правоаголници припаѓаат на решетката.



Решение. Ќе сметаме дека центрите на полињата (т.е. единичните квадрати) се точки со целобројни координати. Дијамант со центар (a,b) го нарекуваме множеството од сите полиња со центри (x, y) за кои важи $|x-a|+|y-b|<24$. Секои две полиња од еден ист дијамант припаѓаат на еден правоаголник со периметар 100. Бидејќи дијамантот се состои од $24^2+25^2=1201$ полиња, меѓу нив мора да се појават сите 1201 бои.

Да фиксираме една боја, да кажеме сина. Секое поле *A* припаѓа барем на еден дијамант со центар во сино поле. Навистина, дијамант со центар *A* содржи едно сино поле, да кажеме *B*, а тогаш *A* припаѓа на дијамантот со центар *B*. Од друга страна, ако некои два дијаманти со центри во сини полиња *B* и *C* имаат заедничко поле *A*, тогаш двете полиња *B* и *C* припаѓаат на дијамантот со центар *A*, што не е можно. Според тоа, дијамантите со сини центри го покриваат секое поле точно еднаш.

Лесно се гледа дека поплочувањето со дијаманти е единствено до симетрија (на цртежот е прикажано аналогно поплочување со помали дијаманти). Без ограничување на општоста, центрите на тие дијаманти се точки (x, y) за кои $1201 \mid 24x-25y$. Бидејќи за секој $x\in\mathbb{Z}$ постои точно еден ваков y по модул 1201, добиваме дека тврдењето на задачата е точно.

34. Определи ги сите природни броеви n такви што страните и дијагоналите на правилен $n-$аголник може да се обојат така што се исполнети следниве услови:

а) Секоја страна или дијагонала е обоена во една боја.

б) За секои три различни бои постои триаголник со темиња меѓу темињата на правилниот $n-$аголник чии страни се обоени со тие три бои.

Решение. *Одговор*. Сите непарни $n\geq3$.

Бидејќи имаме $\binom{n}{3}$ начини да избереме три различни бои и исто толку начини да избереме триаголник, при саканото боење треба да имаме биекција меѓу множеството триаголници и множеството тројки различни бои. Во случајот, не е можно едно теме на дадениот правилен $n-$аголник да биде заедничка точка на две еднобојни отсечки.

Бидејќи секоја комбинација од три бои се користи точно за еден триаголник, треба да имаме $\binom{n-1}{2}$ триаголници со една страна од фиксирана боја. Но секоја обоена отсечка учествува во $n-2$ триаголника. Според тоа, бројот на отсечките обоени во оваа фиксирана боја (оттука и во секоја боја) е

$$\binom{n-1}{2}:(n-2)=\frac{n-1}{2}.$$

Тоа значи дека n е непарен број.

Нека $n\geq 3$ е непарен број. Да ги обоиме страните и дијагоналите на следниов начин: со секоја боја боиме една страна и сите дијагонали кои се паралелни со таа страна. Да забележиме дека тоа се $\frac{n-3}{2}$ дијагонали и сите се со различна должина.

Да допуштиме дека при ваквото боење има два различни триаголници со една иста комбинација од три бои.Тогаш страните на тие триаголници се две по две паралелни, т.е. триаголниците се слични. Но, овие триаголници се впишани во иста кружница, па бидејќи се слични, тое се складни, што значи дека се совпаѓаат.

35. На кружница е дадено множество E од $2n-1$ ($n\geq 3$) различни точки, меѓу кои точно k точки се обоени со црна боја. За боењето на точките велиме дека е „добро“ ако постојат две црни точки такви што во внатрешноста на еден од соодветните лаци кои тие точки ги определуваат се наоѓаат точно n точки од E. Определи го најмалиот број k за кој секое боење на множеството E е „добро“.

Решение. *Прв начин.* Да ги означиме точките со броеви $1,2,...,2n-1$. Ќе го определиме најголемиот број k таков што постои боење кое не е „добро”. Тогаш $k+1$ е решение на задачата.

Нека на некој лак меѓу точките со броеви p и q постојат точно n точки од E (таквите точки ќе ги наречеме „соседни”). Тогаш:

$$|p-q|\equiv n+1 (\text{mod}\, 2n-1).$$

Да ги разгледаме броевите од облик

$$a_i \equiv p+i(n+1) \ (\text{mod}\, 2n-1) \qquad (*)$$

каде $i, a_i \in\{0,1,2,...,2n-2\}$. Секои два последователни члена од оваа низа се парови соседни точки (бидејќи $a_{i+1}-a_i \equiv n+1 (\text{mod}\, 2n-1)$).

Ако боењето не е добро, соседните точки не смеат истовремено да бидат црни. Доволно е точките да се прикажат со помош на членови од низата (*) и да се констатира дека соседните членови не се црни, па обоени се најмногу половина од членовите на низата.

Според Евклидовиот алгоритам важи

$$(2n-1, n+1) = (n+1, n-2) = (n-2, 3) \in \{1, 3\} .$$

па затоа разликуваме два случаи:

а) $(n+1, 2n-1) = 1$. Нека $a_i \equiv 1 + i(1+n) \pmod{2n-1}$. Броевите a_i формираат полн систем на остатоци по модул $2n-1$. Од тука следува дека може да бидат обоени најмногу

$$[\tfrac{2n-1}{2}] = [n - \tfrac{1}{2}] = n-1$$

членови на низата. Сега бараниот број е еднаков на n.

б) $(n+1, 2n-1) = 3$. Нека

$$a_i \equiv 1 + i(n+1) \pmod{2n-1}, \quad b_i \equiv 2 + i(n+1) \pmod{2n-1},$$

$$c_i \equiv 3 + i(n+1) \pmod{2n-1}, \quad i = 0, 1, ..., \tfrac{2n-1}{3} - 1 .$$

Низите a_i, b_i, c_i имаат различни членови. Слично како во предходниот случај можеме да обоиме најмногу

$$[\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2n-1}{3}] = [\tfrac{n-2}{3} + \tfrac{1}{2}] = \tfrac{n-2}{3}$$

членови на низата. Значи можеме да обоиме најмногу $3 \cdot \frac{n-2}{3} = n-2$ точки, а притоа боењето да не биде добро. Решението во овој случај е $n-1$.

Втор начин. Со M да го означиме множеството на тетиви на дадената кружница со крајни точки во множеството E, при што еден од кружните лаци што го определува една тетива содржи точно n точки од E не сметајќи ги крајните точки на лаците. На кружницата избираме насока, на пример насоката на движење на стрелките на часовникот. Од произволна точка се движиме по избраната насока и ја одделуваме $(n+1)-$та точка по ред во E. Тетивата што ги поврзува овие точки припаѓа на M. Затоа секоја од тетивите во M е страна на еден многуаголник впишан во кружницата и со темиња во множеството E. Да го пресметаме бројот на тие многуаголници. Бидејќи

$$(2n-1, n+1) = (n+1, n-2) = (n-2, 3) \in \{1, 3\} ,$$

ќе разгледаме два случаја:

а) Ако $2n-1$ не е делив со 3, тогаш $(2n-1, n+1) = 1$ па секој многуаголник ќе минува низ некое теме. Значи, во овој случај бројот на многуаголниците е 1. Во овој случај најмалата вредност за бројот k со бараното својство е

$$[\tfrac{2n-1}{2}] + 1 = [n - \tfrac{1}{2}] + 1 = n .$$

Навистина, ако обоиме само $n-1$ точка, може да обоиме $n-1$ последователни точки и тогаш бараниот услов не е исполнет. Ако обоиме барем n

точки од E, тогаш ќе постои тетива во множеството M за која крајните точки се обоени.

б) Ако $2n-1$ е делив со 3, тогаш $(2n-1,n+1)=3$. Во овој случај бројот на впишаните многуаголници е 3, а секој од нив има $\frac{2n-1}{3}$ темиња. Затоа во овој случај минималната вредност за бројот k е

$$3\cdot[\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{3}]+1=3\cdot[\frac{n-2}{3}+\frac{1}{2}]+1=3\cdot\frac{n-2}{3}+1=n-1,$$

бидејќи меѓу k обоени точки мора да има повеќе од половина темиња на еден од тие многуаголници.

36. Во рамнината се дадени 2012 точки, секоја обоена во една од n бои. Познато е дека нема две бои со кои се обоени еднаков број точки. Да се определи оној број n, за кој бројот на множествата со по n точки, по една од секоја боја, е максимален.

Решение. Нека имаме соодветно $x_1,x_2,...,x_n$ точки од секоја боја, при што без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x_1<x_2<...<x_n$. Бројот на множествата со по n точки, по една од секоја боја е $x_1x_2...x_n$. Според тоа, задачата се сведува на наоѓање на оној број n за кој

$$x_1+x_2+...+x_n=2012$$

и производот $x_1x_2...x_n$ е најголем.

Ако за некои $i,j,1\le i<j-1\le n$ важи $x_i\le x_{i+1}-2$ и $x_j\ge x_{j-1}+2$, тогаш можеме x_i и x_j да ги замениме соодветно со x_i+1 и x_j-1, при што добиваме ист збир, а производот се зголемува (провери!). Зачи, броевите $x_1,x_2,...,x_n$ се последователни, со исклучок најмногу на еден број,

Нека $\{x_1,x_2,...,x_n\}=\{x,x+1,...,x+l,x+l+k,x+l+k+1,...,x+n+k-2\}$, каде $n=k+l-2$. Ако $k\ge 3$, како и претходно ги заменуваме $x+l$ и $x+l+k$ соодветно со $x+l+1$ и $x+l+k-1$ и добиваме поголем производ при ист збир. Ако $x\ge 5$, можеме да го замениме x со $x-2$ и 2, при што производот се зголемува, бидејќи $2(x-2)>x$. Според тоа, $x\le 4$ и $k=1$ или 2.

Ако $k=1$, со непосредна проверка на равенството

$$\frac{n(n+1)}{2}-x+1=2012,$$

за $1\le x\le 4$ се добива дека во овој случај немаме решение.

Останува да го разгледаме случајот $k=2$, при што броевите се сите броеви од x до $x+n$, со исклучок на $x+l+1$. Според тоа,

$$\frac{(n+x)(n+x+1)}{2}-\frac{x(x-1)}{2}=2012+x+l+1$$

$$(n+x)(n+x+1)=2[2013+l+\frac{x(x+1)}{2}],$$

каде $1 \le x \le 4$ и $0 \le l \le n-2$. Бидејќи десната страна во последното равенство е меѓу 4028 и $4052+2l \le 4048+2n$, лесно се заклучува дека $n+x=63$. Тогаш $2l+x(x+1)=6$, од каде се добива $x=1, l=2$ и соодветно $n=62$ и $x=2$, $l=0$ и соодветно $n=61$. Во првиот случај производот е $\frac{63!}{4}$, а во вториот $\frac{63!}{3}$. Значи, бараниот брај е $n=61$.

37. Целобројните точки во рамнината се обоени со три бои. Определи го најмалиот позитивен реален број S со следново својство: за секое такво боење постои триаголник со плоштина S, чии темиња се монохроматски?

Решение. Да ги разгледаме следниве две боења:

1) точката (x,y) ја боиме во бојата $i, 1 \le i \le 2$ таква што $x \equiv i(\bmod 2)$,

2) точката (x,y) ја боиме во бојата $i, 1 \le i \le 3$ таква што $x \equiv i(\bmod 3)$.

Јасно, ако бројот S постои, тогаш S е од видот n или $\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$. Боењето 1) покажува дека S може да биде еднаков на 1, 2 или 3, а боењето 2) покажува дека S може да се $\frac{3}{2}, 3$ или поголем број. Според тоа, ако S постои, тогаш $S \ge 3$. Ќе докажеме дека при произволно боење од дадениот вид секогаш постои монохроматски триаголник со плоштина еднаква на 3.

На почетокот да забележиме дека за некој $d \in \{1,2,3\}$ постои монохроматски пар точки од видот $A(x,y), B(x+d,y)$. Навистина, последното следува од принципот на Дирихле применет на точките $(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)$. Сега, ако $m \equiv AB$ и l е паралелна права на m на растојание $\frac{6}{d}$, тогаш правата $l \| Ox$ е двобојна или имаме монохроматски триаголник со плоштина 3.

Ќе велиме дека бојата c во правата l реализира растојание a, ако на правата l постојат две точки обоени во бојата c кои се на растојание a.

Ако има растојание $a \in \{1,2,3,6\}$, кое се реализира и од двете бои во l, тогаш правата $p \| l$ на растојание $\frac{6}{a}$ од l треба да биде монохроматска (во спротивно имаме монохроматски триаголник со плоштина 3). Ако такво растојание не постои, тогаш една од боите во l ги реализира сите растојанија во множеството $\{2,3,6\}$. Навистина, нека претпоставиме дека бојата c_1 не го реализира растојанието 1 и дека барем една точка P_0 од l е обоена во c_1. Тогаш во l соседните точки P_{-1} и P_1 на точката P_0 треба да се обоени во бојата c_2, што значи дека c_2 реализира растојание 2. Тоа значи, дека c_1 не реализира растојание 2, па затоа P_{-2} и P_2 се обоени во c_2. Значи, c_2 реализира растојание 3, па затоа c_1 не реализира растојание 3. Но, тоа значи дека P_{-3} и P_3 се обоени во c_2, што значи дека c_2 реализира растојание 6, т.е. c_2

ги реализира сите растојанија во множеството $\{2,3,6\}$. Според тоа, и во двата случаја постои права $p \parallel Ox$ и боја c од p која ги реализира сите растојанија во множеството $\{2,3,6\}$ или веќе сме нашле монохроматски триаголник со плоштина 3.

Да ги разгледаме правите u_1, u_2, u_3 паралелни на p и такви што u_i, $i = 1,2,3$ е на растојание i над p. Тогаш од претходните разгледувања следува дека овие три прави се двобојни. Да ги разгледаме деветте точки во кои правите u_1, u_2, u_3 ги сечат правите $x = 0, x = 3, x = 6$. Лесно се покажува дека три од овие девет точки се темиња на монохроматски триаголник со плоштина 3.

38. Во целобројна решетка е даден 10×10 квадрат. Единечните отсечки на квадратот се обоени во неколку бои. Познато е дека контурата на секој квадрат со страни на целобројната решетка е обоена најмногу во две бои. (Не е задолжително таков квадрат да се содржи во дадениот.) Определи го максималниот број искористени бои?

Решение. Прво ќе докажеме дека за боење кое соодветствува на условите на задачата се потребни не повеќе од 11 бои.

Контурата на дадениот квадрат е обоена во најмногу две бои. Овие бои (или оваа боја) да ги наречеме *стари* (*стара*), а останатите бои да ги наречеме *нови*. Доволно е да докажеме дека се потребни најмногу 9 нови бои.

Лема 1. На секоја хоризонтална (вертикална) права има најмногу една нова боја.

Доказ. Да разгледаме хоризонтална (вертикална) отсечка од дадениот квадрат, која поврзува две спротивни страни. Оваа отсечка е страна на 10×10 квадрат, кој содржи и отсечки од дадениот квадрат, кои се обоени со најмалку една од старите бои. Според тоа, на неговата контура, во случајов на разгледуваната отсечка, може да има најмногу една нова боја. ■

Лема 2. Ако вертикална и хоризонтална единечна отсечка се обоени со нови бои, тогаш тие бои се исти.

Доказ. Не е тешко да се види дека постои квадрат со страни на целобројната решетка, кој ги содржи ргледуваните две отсечки и дел од контурата на дадениот квадрат. Тогаш на неговата контура, што значи и на двете отсечки може да има најмногу една нова боја. ■

Од Лема 2 следува, дека ако постојат вертикални и хоризонтални отсечки, обоени во нови бои, тогаш имаме најмногу една нова боја. Понатаму, ако новите бои се само на вертикалните (или само на хоризонталните) отсечки, тогаш од лема 1 следува дека може да имаме најмногу 9 нови бои.

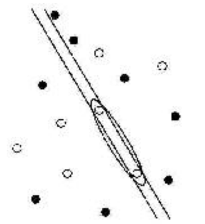
Пример, во кој се искористени точно 11 бои е следниов: единечните отсечки кои ги поврзуваат темињата (i,i) и $(i+1,i)$ ги боиме во бојата $i = 1,2,...,10$, а сите останати се обоени во 11-тата боја. Лесно се гледа дека контурата на произволен квадрат со страни на целобројната решетка содржи најмногу една отсечка со боја од 1 до 10, па затоа содржи најмногу две бои.

39. Конфигурацијата од 4027 точки во рамнината ја нарекуваме *колумбиска* ако се состои од 2013 црвени и 2014 сини точки, при што никои три точки од конфигурацијата не се колинерани. Со повлекување на прави рамнината се дели на области. За распоредот на правите ќе велиме дека е *добар* за колумбиската конфигурација, ако се исполнети следниве услови:

- нити една права не минува низ некоја точка од конфигурацијата,
- нити една област не содржи различно обоени точки.

Определи го најмалиот број k таков што за секоја колумбиска конфигурација од 4027 постои добар распоред на k прави.

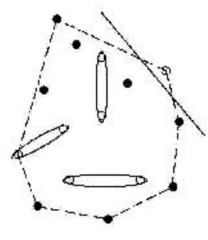
Решение. *Прв начин.* Да разгледаме конфигурација на точки $A_1, A_2, ..., A_{4027}$ во која $A_1A_2...A_{4027}$ е правилен 4027-аголник и точката A_n е сина за $2\nmid n$ и црвена за $2\mid n$. Во добиениот распоред на прави, секоја од 4026 отсечки A_nA_{n+1}, за $n=1,2,...,\ 4026$ мора да биде пресечена барем со една права. Од друга страна, секоја права може да сече најмногу две такви отсечки. Затоа во овој случај, за добар распоред ни се потребни барем $2013=\frac{4026}{2}$ прави, односно $k\geq 2013$.



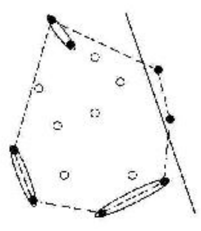
Ќе докажеме дека за секоја колумбиска конфигурација постои добар распоред на 2013 прави.

На почетокот да забележиме дека било кои две еднобојни точки може да се одделат од конфигурацијата со помош на две прави. Доволно е да се земат две прави кои се паралелни со правата определена со овие две точки и кои се доволно блиску до неа (цртеж десно).

Ја разгледуваме конвексната обвивка $\boldsymbol{P}$ на дадените 4027 точки. Можни се два случаја.



1) Ако на $\boldsymbol{P}$ постои теме кое е црвена точка, тогаш неа можеме да ја одделиме со една права (цртеж десно). Преостанатите 2012 црвени точки можеме да ги поделиме во 1006 парови и според претходно изнесеното да ги одделиме со помош на 2012 прави. На овој начин повлековме 2013 прави кои формираат добар распоред.



2) Ако сите темиња на конвексната обвивка $\boldsymbol{P}$ се сини, тогаш со помош на една права може да одделиме две сини точки (цртеж десно). На ист начин како во случајот 1), преостанатите 2012 сини точки можеме да ги одделиме со помош на 2012 прави, со што

добивме добар распоред на 2013 прави.

Втор начин. Со индукција по n ќе докажеме дека за произволно множество од n точки обоени во црвено или сино постои добар распоред на $[\frac{n}{2}]$ прави. За $n \leq 2$ тврдењето тривијално важи. Нека $n > 2$. Ја разгледуваме конвексната обвивка на дадените n точки и нека A и B се две нејзини соседни темиња. Според индуктивната претпоставка, за преостанатите $n-2$ точки можеме да повлечеме $[\frac{n-2}{2}] = [\frac{n}{2} - 1] = [\frac{n}{2}] - 1$ прави во добар распоред. Можни се три случаи:

1) Ако точките A и B се истобојни, тогаш од преостанатите $n-2$ точки можеме да ги одделиме со една права l. Така добиваме добар распоред на вкупно $[\frac{n}{2}] - 1 + 1 = [\frac{n}{2}]$ прави.
2) Ако A и B се различно обоени, но се одделени со некоја од веќе нацртаните прави, повторно е доволно да се додаде правата l.
3) Ако A и B се различно обоени, но лежат во иста област определена со повлекувањето на $[\frac{n}{2}] - 1$ прави, тогаш во таа обаст точките кои се различни од A и B се еднобојни, да кажеме дека се сини. Точно една од точките A и B е црвена, па неа можеме да ја одделиме од другите точки со една права, со што добиваме добар распоред на $[\frac{n}{2}] - 1 + 1 = [\frac{n}{2}]$ прави.

19. БОЕЊА И ПОПЛОЧУВАЊА

1. Дадена е квадрат 4×4 и четири различни бои. На колку начини може да се обои квадратот, секое квадратче во една боја, така да во секоја колона и во секоја редица, секоја боја се јавува точно еднаш.

Решение. Нека претпоставиме дека боите во кои се обоени квадратчињата на квадратот се бела, црна, пороткалова и зелена. Нив ќе го означуваме со буквите B, C, P, Z соодветно.

Првата хоризонтала (прва редица броејќи од горе кон долу) можеме да ја обоиме на $4!$ начини. Кога првата хоризонтала е обоена, првата вертикала (првата колона броејќи од лево кон десно) можеме да ја обоиме на $3!$ различни начини. Според тоа, бројот на различни боења на првата хоризонтала и првата вертикала истовремено е $4!\cdot 3!$.

Ќе определиме на колку начини може да се обојат преостанатите девет полиња, кога првата хоризонтала и првата вертикала се фиксно обоенпорти. Нека претпоставиме дека првата хоризонтала и првата вертикала се обоени како на цртеж 1. Во преостанатите три бои во кои треба да ги обоиме трите полиња од втората хоризонтала, две бои веќе ги има во полињата над нив. При тоа трите полиња од втората хоризонтала можеме

B	C	P	Z
Z			
C			
P			

Цртеж 1

B	C	P	Z
Z	B	C	P
C			
P			

B	C	P	Z
Z	P	B	C
C			
P			

B	C	P	Z
Z	P	C	B
C			
P			

Цртеж 2

да ги обоиме на точно три начини (види цртеж 2). Во првиот и вториот случај на цртеж 2 (од лево кон десно) понатамошното боење може да се направи на еден единствен начин. Во третиот случај, понатамошното боење може да се направи на два начини (провери).

Според тоа квадратната шема може да се обои на $4!\cdot 3!(3+1) = 24^2$ начини.

2. Секое поле на квадратна 50×50 табела е обоено со една од 10 бои. Докажи дека на табелата постојат полиња M, A, B, C, D обоени со иста боја така што

A е во ист правец лево од M (не задолжително соседно), B е во ист правец десно од M , C е во ист правец горе од M и D е во ист правец долу од M .

Решение. Според принципот на Дирихле најмалку $\frac{50^2}{10}$ полиња се обоени со иста боја, да кажеме црна. Меѓу црните полиња има најмногу 50 крајно леви (т.е. во ист ред нема црни полиња лево од нив), најмногу 50 крајно десни, најмногу 50 крајно долни и најмного 50 крајно горни. Остануваат најмалку 50 црни полиња кои не се крајно леви, десни, долни и горни, па било кое од нив може да се земе за полето M .

3. Определи ги сите природни броеви n за кои квадрат со должина на страна n може да се расече на квадрати со должини на страни 2 или 3.

Решение. Ако $2|n$ или $3|n$, тогаш очигледно поделбата е можна.

Ќе докажеме дека во останатите случаи поделбата не е можна. Нека n е непарен број. Да го поделиме квадратот на единечни квадрати и секој парен ред да го обоиме со сина боја, а секој непарен ред со црвена боја. Разликата на црвената и сината плоштина во квадратот $n\times n$ е n . Од друга страна, разликата на црвената и сината плоштина во секој 2×2 или 3×3 квадрат е $-3,0,3$. Затоа n мора да биде делив со 3.

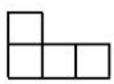
4. Дадена е табла со димензии 8×8 која е шаховски обоена во две бои црна и бела, т.е. полињата кои имаат заедничка страна се обоени во различни бои. Во еден потег треба да избереме еден ред или една колона и на секое од осумте полиња во тој ред или колона да ја смениме бојате, од црна во бела и обратно. Дали може со конечна низа вакви потези да се постигне точно едно поле на таблата да е црно?

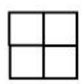
Решенне. На почетокот на таблата имаме 32 црни и 32 бели полиња. Во еден потег менуваме боја во 8 полиња. Ако пред потезот вкупниот број на црни полиња е C , а во тој момент во одбраниот ред/колона имаме k црни полиња, $k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, по потегот бројот на црните полиња ќе се намали за k и ќе се зголеми за $8-k$, што значи дека по потегот ќе имаме

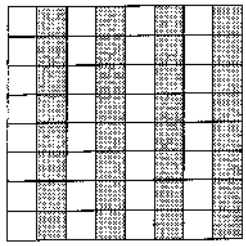
$$C-k+(8-k)=C-2(k-4)$$

црни полиња. Според тоа, парноста на бројот на црните полиња е инваријанта, а како на почетокот имаме 32, т.е. парен број црни полиња, заклучуваме дека по секој потег ќе имаме парен број црни полиња. Но, 1 е непарен број, па затоа по конечна низа потези не може да остане едно црно поле.

5. Докажи, дека табла со димензии 8×8 не може да се покрие со 15 тетрамина од облик на цртеж а) и едно тетрамино од облик на цртеж б).

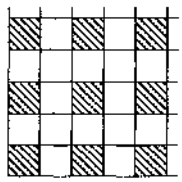

а)


б)



Решение. Таблата ќе ја обоиме како на цртежот десно. При вакво боење секое тетрамино а) покрива три бели и едно црно поле или три црни и едно бело поле, а секое тетрамино б) покрива 2 бели и 2 црни полиња. Според тоа, 15 тетрамина од облик а) покриваат непарен број црни и непарен број бели полиња, па како едното тетрамино од облик б) покрива 2 бели и 2 црни полиња заклучуваме дека со расположливите тетрамина може да покриеме непарен број црни и непарен број бели полиња. Но, нашето боење на таблата има парен број црни и парен број бели полиња, па затоа таа не може да се покрие со дадените тетрамина.

6. Правоаголна табла со димензии $m\times n$ е покриена со 2×2 и 1×4 тетрамина, кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата. Докажи, дека таблата не може да се покрие на опишаниот начин со истите тетрамина, ако едно од тетраминатa 2×2 се замени со тетратмино 1×4.



Решение. Броејќи од долниот лев агол на таблата со димензии $m\times n$ да ги обоиме непарните квадратчињата на непарните редови (цртеж десно). При вакво боење 1×4 тетрамино покрива или две или ниту едно обоено квадратче, а 2×2 тетрамино со покрива едно обоено квадратче. Ќе разгледаме два случаја.

Нека со 2×2 тетраминатa се покриени $2k+1$ обоени полиња, а со 1×4 се покриени $2m$ обоени полиња, т.е. вкупно се покриени $2(k+m)+1$ обоени полиња. Ако едно од тетраминатa 2×2 се замени со тетрамино 1×4, тогаш вкупно ќе да бидат покриени $2(k+m+1)$ обоени полиња, што е противречност бидејќи бројот на обоените полиња е константен.

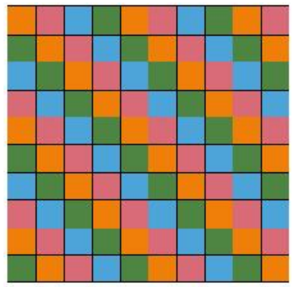
Нека со 2×2 тетраминатa се покриени $2k$ обоени полиња, а со 1×4 се покриени $2m$ обоени полиња, т.е. вкупно се покриени $2(k+m)$ обоени полиња. Ако едно од тетраминатa 2×2 се замени со тетрамино 1×4, тогаш вкупно ќе да бидат покриени $2(k+m)+1$ обоени полиња, што е противречност бидејќи бројот на обоените полиња е константен.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека таблата не може да се покрие на опишаниот начин со истите тетрамина, ако едно од тетраминатa 2×2 се замени со тератмино 1×4.

7. Дали може квадратна табла со димензии 10×10 да се покрие со 1×4 тетрамина?

Решение. *Прв начин.* Да ја обоиме таблата како во претходната задача. При вакво боење имаме 25 обоени квадратчиња, што е непарен број, а секое 1×4 тетрамино покрива 0 или 2 обоени квадратчиња, т.е. со 25 тетрамина ќе бидат покриени парен број обоени квадратчиња. Според тоа, квадратна табла со димензии 10×10 не може да се покрие со 1×4 тетрамина.

Втор начин. Да ја обоиме таблата како во четири бои и тоа дијагонално како на цртежот десно. Секое тетрамино, без разлика како ќе се постави покрива по едно поле од секоја боја. Значи, бројот на покриените полиња во секоја од четирите бои ќе биде еднаков. Ако таблата може да се покрие на саканиот начин ќе бидат покриени по 25 полиња од секоја боја. Но, на таблата има 26 полиња обоени портокалово и 24 полиња обоени сино, па затоа саканото покривање не е можно.



8. Квадратна табла со димензии 2004×2004 се покрива со 1×4 тетрамина Дали постои покривање во кое бројот на хоризонтално поставени домина е еднаков на бројот на вертикално поставени тетрамина?

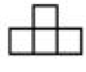
Решение. Нека претпоставиме дека е дадено покривање во кое бројот на хоризонтално поставените тетрамина е еднаков на бројот на вертикално поставените тетрамина. Притоа се искористени $\frac{2004\cdot2004}{4}=1004004$ од кои половината, т.е. 502002 се хоризонтални, а половината се вертикални.

Почнувајќи од првиот најгорен ред секој четврти ред заедно со првиот ќе го обоиме со црна боја. Според тоа, бројот на полиња кој е обоен во црно е еднаков на $501\cdot2004$. Секое хоризонтално тетрамино покрива или 0 или 4 црни полиња, што значи дека бројот на црните полиња покриени со хоризонтални тетрамина е делив со 4. Секое вертикално поставено домино покрива точно едно црно поле, па затоа со вертикално поставените тетрамина се покриени 502002 црни полиња. Значи, хоризонталните тетрамина треба да покријат

$$501\cdot2004-502002502002=2(501\cdot1002-251001)$$

црни полиња. Но, бројот на покриени црни полиња со хоризонталните тетрамина треба да е делив со 4, а бројот $2(501\cdot1002-251001)$ не е делив со 4. Според тоа, не постои покривање со еднаков број хоризонтални и вертикални тетрамина.

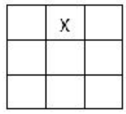
9. Дали може табла со димензии 10×10 да се покрие со 25 T – тетрамина (цртеж десно)?



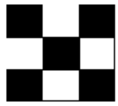
Решение. Таблата да ја обоиме шаховски црно-бело, при што имаме 50 црни и 50 бели полиња. Како и да поставиме T – тетрамино на таблата тоа покрива три полиња од едната боја и едно поле од другата боја (цртеж десно). Нека a е бројот на тетрамината кои покриваат три црни и едно бело поле, а b е бројот на

тетрамината кои покриваат три бели и едно црно поле. Тогаш вкупнот број покриени црни полиња ќе биде $3a+b$, а вкупниот број покриени бели полиња ќе биде $3b+a$. Треба да покриеме по 50 полиња од секоја боја, па затоа $3a+b=3b+a$, од каде добиваме $a=b$. Но, вкупниот број $T-$тетрамина е $100:4=25$, ша затоа не можеме да имаме еднаков број тетрамина од двата вида. Значи, бараното покривање не е можно.

10. На секое поле на табла 3×3 се наоѓа по 1 жетон. Во секој чекор преместуваме било кои два жетони, секој од нив на соседно поле (соседни се полиња кои имаат заедничка страна). Дали е можно, по определен број чекори, сите жетони да се најдат на полето означено со буквата X ?



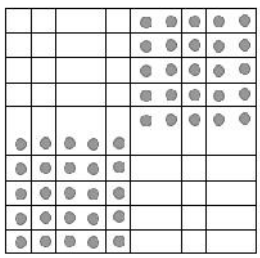
Решение. Полињата на таблата да ги обоиме шаховски како на црежот десно. На почетокот на црните полиња имаме 5 жетони, а на белите полиња имаме 4 жетони. При преместувањето можни се следниве случаи:



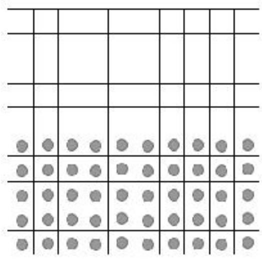
- ако преместуваме два жетони од различно обоени полиња, тогаш бројот на жетоните на белите полиња, односно на црните полиња не се менува,
- ако преместуваме два жетони кои се наоѓаат на црните полиња, тогаш бројот на жетоните на црните полиња се намалува за 2, а на белите се зголемува за 2,
- ако преместуваме два жетони кои се наоѓаат на белите полиња, тогаш бројот на жетоните на белите полиња се намалува за 2, а на црните се зголемува за 2.

Според тоа, бројот на жетоните на белите полиња не ја менува парноста, па како на почетокот е парен број, заклучуваме дека при секој потег ќе биде парен број. Конечно, ова значи дека не може по определен број потези сите 9 жетони да се најдат на белото поле означено со X .

11. На табла со димензии 10×10 се поставени 50 жетони така што никои два не се на исто поле. Притоа 25 жетони се поставени на долниот лев дел од таблата, а преостанатите 25 жетони се поставени на горниот десен дел од таблата (цртеж десно). Нека X,Y,Z се редоследно три последователни полиња (хоризонтално, вертикално или дијагонално. Ако два жетони се на полињата X и Y и ако полето Z е слободно, жетонот од полето X може да се премести на полето Z, прескокнувајќи го жетонот на полето Y.

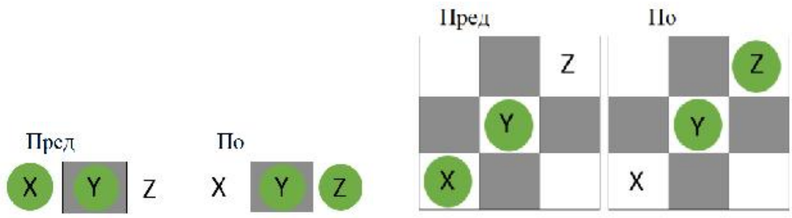


Дали со конечна низа вакви потези може да се преместат сите жетони на долниот дел од таблата, т.е. на првите пет реда гледајќи оддолу-нагоре?



Решение. Бараниот распоред на жетоните е прикажан на цртежот десно. Таблата да ја обоиме шаховски. Од вкупно 100 полиња имаме 50 бели и 50 црни полиња. Да ги поставиме сите 50 жетони на зададениот начин. Притоа таблата е поставена така што полето во долниот лев агол, односно полето во горниот десен агол е црно. Во долнит лев агол на четвртина од плочата имаме 25 жетони од кои 12 жетони се на белите и 13 жетони се на црните полиња. Истото важи и за жетоните кои се поставени во горната десна четвртина од таблата.

Да видиме сега што се случува кога жетоните ги преместуваме на саканиот начин. На долните цртежи се прикажани три полиња X, Y, Z на кои жетоните се движат. Движењето на жетоните вертикално е слично како и движењето на жетоните хоризонтално.



На опишаниот начин жетонот секогаш поминува на поле со иста боја како што е бојата на полето од кое тргнал, независно дали се движи хоризонтално, вертикално или дијагонално. Затоа бројот на црните, односно белите полиња на кои има жетони не се менува. Но, на почетокот имаме $12+12=24$ бели и $13+13=26$ црни полиња, а на крајот треба да имаме 25 бели и 25 црни полиња, па затоа не може да ја постигнеме сакана цел.

12. Даден е правилен $n-$аголник. Повлечени се некои дијагонали на $n-$аголникот, така што никои две не се сечат во внатрешна точка и тие го делат $n-$аголникот на триаголници. Притоа од секое теме на $n-$аголникот излегуваат парен број дијагонали. Определи ги сите природни броеви $n \geq 4$ за кои ова е можно.

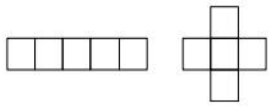
Решение. *Одговор*. Сите природни броеви n деливи со 3.

Тврдењето ќе го докажеме за сите конвексни $n-$аголници.

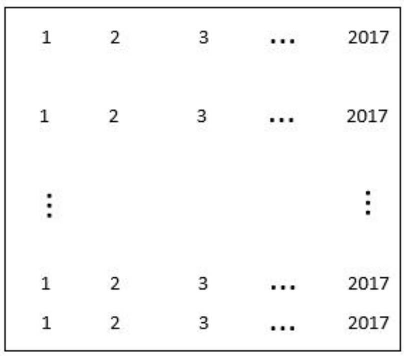
Прво ќе докажеме дека за $n=3k$ постои конфигурација. Нека $A_1, A_2, ..., A_{3k}$ се темињата на $n-$аголникот. Го поврзуваме A_1 со A_{3i} и со A_{3i+2} и ги поврзуваме A_{3i} и A_{3i+2} за секој $i=1,2,...,k-1$.

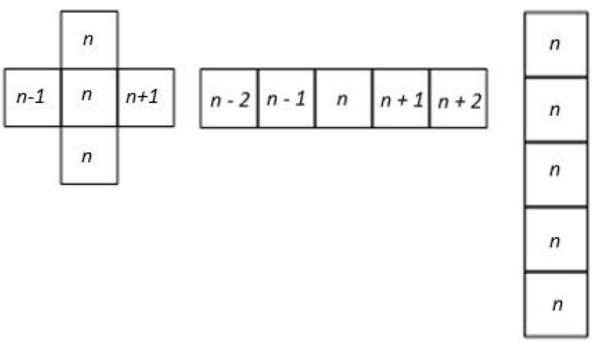
Нека претпоставиме дека многуаголникот е поделен со дијагонали на саканиот начин. Тогаш внатрешностите на добиените триаголници може да се обојат со две бои, сина и црвена, така што секои два триаголници кои имаат заедничка страна се обоени во различни бои. Ова се постигнува така што многуаголникот на почетокот се бои во една боја, а потоа се конструираат дијагоналите една по друга и по секоја конструкција на нова дијагонала, сите обоени површини од една страна на дијагоналата се пребојуваат во другата боја. Очигледно е дека секои два триаголника, кои имаат дијагонала како заедничка страна, се обоени со различни бои. Забележуваме, дека заради условот на задачата дека од секое теме излегуваат парен број дијагонали, сите триаголници кои имаат страна која се совпаѓа со страна на многуаголникот се обоени со иста боја. Без ограничување на општоста нека тоа е сината боја. Ако s е бројот на сините триаголници, а c е бројот на црвените триаголници, тогаш $n+3c=3p$, бидејќи секоја дијагонала е страна на еден син и еден црвен триаголник, а секоја страна на многуаголникот е страна само на еден син триаголник. Затоа n мора да е делив со 3.

13. Дадена е табла со димензии 2016×2017. Дали е можно во последната колона да се отстранат две полиња и така добиената плоча да се покрие со пентонима дадени на цртежот десно? Пентонимата може да се ротираат.



Решение. Во полињата на почетната табла 2016×2017 редоследно да ги запишеме броевите од 1 до 2017 во растечки редослед во секој ред. На цртежот десо е прикажана таквото запишување. Забележуваме дека во секоја колона се запишани исти броеви. Секое пентонимо покрива пет броеви: пентонимото во облик на крст ги покрива броевите $n, n-1, n, n+1, n$, а пентонимото во облик на правоаголник покрива или пет последователни броја (ако е оставено хоризонтално) или пет исти броја (ако е поставено вертикално).





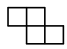
Важи

$$n+(n-1)+n+(n-1)+n=5n,$$
$$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n,$$
$$n+n+n+n+n=5n, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

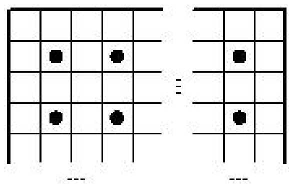
Гледаме дека збирот на броевите кои ги покрива секое пентонимо е делив со 5. Значи, ако саканото покривање е можно, тогаш збирот на сите броеви на полињата покриени со пентонимата треба да е делив со 5. Меѓутоа, за овој збир имаме

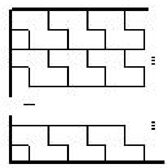
$$\begin{aligned}S&=2016\cdot(1+2+3+...+2017)-2\cdot 2017\\&=2016\cdot\tfrac{2017\cdot 2018}{2}-2\cdot 2017\\&=2017\cdot(2016\cdot 1009-2).\end{aligned}$$

Цифрата на единиците на бројот $2017\cdot(2016\cdot 1009-2)$ е 4, па затоа овој број не е делив со 5, што значи дека саканото покривање не е можно.

14. Определи го најголемиот можен број на тетрамина од вид  кои може да се поставaт на квадратна табла со димензии 2003×2003 (не се дозволени ротации) така да без преклопувања секое од нив да покрива точно четири квадратчиња од таблата.

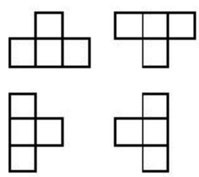
Решение. Со исклучување на последниот ред и последната колона од таблата се добива квадратна шема која може да се подели на квадрати со димензии 2×2, и во секое единечно квадратче од таквиот квадрат кое се наоѓа долу и десно ќе ставиме црна точка. Секое тетрамино од дадениот облик ако го поставиме на квадратната шема со димензии 2003×2003 ќе покрие точно една црна точка. Според тоа, на таблата може да се стават најмногу $[\frac{2003}{2}]\cdot[\frac{2003}{2}]=1002001$ тетрамина.


Цртеж 1

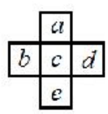

Цртеж 2

Еден таков начин на поставување е даден на цртеж 2.

15. Дали е можно во единечните квадратчиња на табла со димензии 6×6 да се запишат броевите од 1 до 36, во секое квадратче по еден број, така што збирот на броевите запишани во секоја од фигурите дадени на цртежот десно е делив со бројот 2?



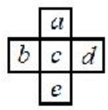
Решение. Нека претпоставиме дека бараното запишување е можно. Да ја разгледаме фигурата дадена на цртежот десно во која се запишани броевите a,b,c,d и e. Од условот на задачата следува дека збировите $a+b+c+d$ и $a+c+d+e$ се парни, па



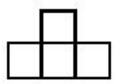
затоа броевите b и e се со иста парност. Аналогно се добива дека броевите a и e и броевите b и d се со иста парност. Значи, броевите a, b, d, e се со иста парност, па бидејќи збирот $a+c+d+e$ е делив со 2 добиваме дека и бројот e со иста парност. Бидејќи дадената фигура на таблата може да се постави така што може да се покрие секое нејзино поле, освен четирите аголни полиња, добиваме дека во сите полиња освен во четирите аголни полиња мора да се запишани броеви со иста парност. Но, меѓу броевите од 1 до 36 има 18 парни и 18 непарни, а треба да се запишат 32 броја со иста парност, што е противречност.

16. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем xOy. Во секоја точка $(k,0), k \in \mathbb{Z}$ е повлечена права паралелна со $y-$оската и во секоја точка $(0,n), n \in \mathbb{Z}$ е повлечена права паралелна со $x-$оската, со што е добиена бесконечна табла. Во секое единечно квадратче на таблата се запишани ненегативни цели броеви такви што секој број е еднаков на аритметичката средина на броевите запишани во соседните квадратчиња (соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна). Докажи дека сите запишани броеви се еднакви.

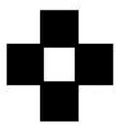
Решение. Бидејќи се запишани цели ненегативни броеви, постои број c кој е помал или еднаков од сите запишани броеви. Да ја разгледаме фигурата на цртежот десно, во која во централното квадратче е запишан бројот c, а во соседните квадратчиња се запишани броевите a, b, d и e. Ако броевите a, b, c, d, e не се сите еднакви меѓу себе, тогаш меѓу нив постои најголем. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \geq b \geq d \geq e \geq c$, при што во едно од првите три неравенства имаме строго неравенство. Тогаш $c < \frac{1}{4}(a+b+d+e) = c$, што е противречност. Според тоа, $a = b = c = d = e$. Сега лесно заклучуваме дека сите запишани броеви се еднакви меѓу себе.



17. Во секое единечно квадратче на квадратна табла со димензии 50×50 е запишан по еден број. Притоа каде и да ја поставиме фигурата прикажана на цртежот десно (дозволени се ротации), таа покрива четири полиња за кои збирот на запишаните броеви е еднаков на 4. Докажи, дека сите запишани броеви се еднакви меѓу себе.



Решение. Лесно се докажува дека во секој крст прикажан на цртежот десно броевите во црните квадратчиња се еднакви меѓу себе. Последното значи дека ако таблата ја обоиме шаховски, тогаш во сите црни полиња е запишан ист број a и во сите бели полиња е запишан ист број b.



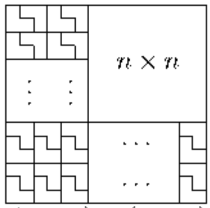
Да ги разгледаме фигурите прикажани на цртежот лево. Од претходно изнесеното следува дека

$$3a+b=4=3b+a\text{, т.е. } a=b=1.$$

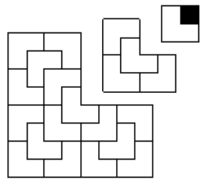
Според тоа, во сите квадратчиња е запишан бројот 1.

18. Од квадратна 2012×2012 табла е исечено едно единечно кавдратче. Докажи дека остатокот од таблата може да се покрие со L– тримина.

Решение. Ако тврдењето на задачата важи за табла со должина на страна $n\geq6$, тогаш важи и за табла со должина на страна $n+6$. Последното следува од фактот дека ако од квадрат со должина на страна $n+6$ се исече квадрат со должина на страна n, тогаш остатокот од таблата може да се покрие со правоаголници 2×3, секој од кои е составен од две L– тримина (види го левиот цртеж).



$(n+6)\times(n+6)$



8×8

Сега, бидејќи $2012=334\cdot6+8$, останува да докажеме дека табла $8\cdot8$ без едно аголно поле може дасе покрие на саканиот начин. Исеченото поле припаѓа на еден од аголните 4×4 квадрати. Остатокот на таблата се покрива како на цртежот, па тврдењето се сведува на случајот $n=4$. Слично, случајот $n=4$ го сведуваме на тривијалниот случај $n=2$.

19. Агол со рамо n се нарекува фигура составена од $2n-1$ квадратчиња 1×1, која се добива кога на две соседни страни на едно квадратче 1×1 се залепи по еден правоаголник со димензија $1\times(n-1)$ така, што единичните страни на квадратчето и правоагоникот се совпаѓаат.

Квадратчињата на табла со димензии 100×100 се обоени во 15 бои. Ќе велиме дека еден агол со рамо 8 е *разнобоен*, ако тој содржи по едно квадратче од секоја боја. Определи го најголемиот број разнобојни агли со рамо 8 на таблата.

Решение. Опишан квадрат на еден агол со рамо 8 ќе го наречеме единствениот квадрат 8×8 кој го содржи разгледуваниот агол.

Да ги групираме сите агли со рамо 8 на таблата во четворки така, што аглите во секоја четворка имаат еден ист опишан квадрат. Ќе докажеме дека секоја четворка содржи најмногу два разнобојни агли.

Навистина, нека P е еден опишан квадрат и L,R,D и U се соодветно најлевата и најдесната негова колона и најдолниот и најгорниот негов ред. Да претпоставиме дека барем три од опишаните во овој квадрат агли се разнобојни. Без губење на општоста може да земеме, дека $L\cup D$ и $R\cup D$ се разнобојни. Бидејќи $R\cup D$ е разнобоен, бојата во горниот десен агол на P не се среќава во D. Бидејќи $L \cup D$ е разнобоен, оваа боја се среќава во L. Според тоа, $L \cup U$ не е разнобоен. Аналогно се докажува дека $R \cup U$ не е разнобоен, што противречи на претпоставката дека барем три од опишаните во овој квадрат агли се разнобојни.

Според тоа, најмногу половина од аглите на таблата се разнобојни. Од друга страна, при боење, во кое секое квадратче (i, j) е обоено во остатокот на $i + j$ при делење со 15, точно половината од сите агли се разнобојни (Зошто?).

20. Располагаме со 19 аголни тримина (2×2 квадрат од кој е отстрането едно квадратче) и неограничен број 2×2 квадрати. Определи го најголемиот непарен број n за кој квадрат $n\times n$ може да се покрие со дадените фигури.

Решение. Ќе докажеме дека, за покривање на $(2k-1)\times(2k-1)$ квадрат со аголни тримина и 2×2 квадрати ни се потребни $4k-1$ аголни тримина.

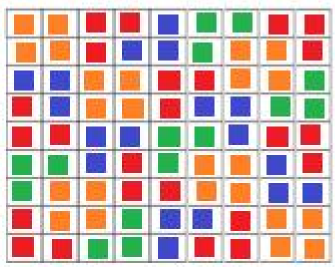
Нека $(2k-1)\times(2k-1)$ квадратот е покриен со x аголни тримина и y квадрати 2×2. Тогаш $3x+4y=(2k-1)^2$. Квадратчето кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона го означуваме со (i, j). Да ги обоиме црвено квадратчињата (i, j), за кои i и j се непарни броеви. Имаме точно k^2 обоени квадратчиња и бидејќи секој 2×2 квадрат покрива точно едно обоено квадратче, а секое аголно тримино покрива најмногу едно обоено квадратче, добиваме $x + y \geq k^2$. Значи, $y \geq k^2 - x$, од каде добиваме

$(2k-1)^2 = 3x+4y \geq 3x+4(k^2-x) = 4k^2 - x$,

т.е.

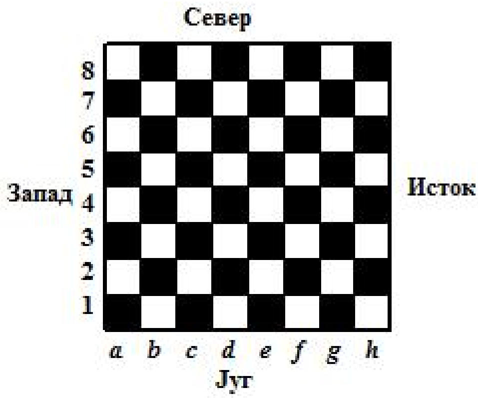
$$x \geq 4k-1.$$

Ако допуштиме дека $n \geq 11 = 2\cdot6-1$, тогаш за покривање на квадрат $n\times n$ ни се потребни најмалку $4\cdot6-1=23$ квадратчиња. Според тоа, $n \leq 9$. Нацртежот десно е прикажано едно покривање за $n=9$.



21. На секое поле на квадратна табла со димензии 8×8 е поставена коцка (работ на поставените коцки е еднаков страната на полињата на таблата). Една од шесте страни на секоја од поставените коцки е обоена црно, а останатите пет страни се обоени бело. Цел ред или цела колона коцки може да ротира за $90^\circ, 180^\circ$ или 270° (ротира како паралелопипед со основа квадрат и висина осум пати поголема од страната на неговата основа). Дали постои редослед на ротации после кој сите црно обоени полиња се на горната страна на поставените коцки.

Решение. Редовите од долу нагоре ќе ги означиме редоследно со броевите од 1 до 8 а колоните од лево на десно ќе ги означиме редоследно со буквите од a до h (види цртеж). Таблата ќе ја ориентираме како страните на светот. Најдолниот ред, т.е. редот 1 ќе биде југ, а колоната a ќе биде запад (види цртеж).



Коцката $a1$ со вртење само на редот број 1 и колоната a можеме да ја наместиме така што нејзината црна страна да е на југ. Со понатамошно вртење на првата колона, без да се врти првиот ред црната страна ќе остане на југ.

Коцката $a2$ со вртење на првата колона и вториот ред (без вртење на првиот ред) можеме да ја наместиме така што нејзината црна страна е на југ. Со понатамошно вртење на првата колона, без да се вртат првиот и вториот ред црните страни на $a1$ и $a2$ ќе останат на југ.

Истата постапка ја повторуваме за коцките $a3, a4, a5, a6, a7$ и $a8$ при што во секој нареден чекор од вртење ги исклучуваме претходните редови (при местење на црната страна на југ од коцката ai редовите $1,2,...,i-1$ не ги вртиме). Со оваа постапка сите црни страни на коцките од првата колона ќе бидат насочени кон југ. Потоа сите редици ги ротираме за 90° така што црните страни на коцките од прва колона да бидат поставени нагоре, и на крајот првата колона ја вртиме за 90° така што црните страни на коцките од првата колона да бидат на запад. Со вртење на било кој редица или било која колона повеќе не ја вртиме првата колона.

Претходната постапка ја повторуваме за останатите колони b, c, d, e, f, g, h последователно во запишаниот редослед. При што кога црните страни на коцките од една колона ќе ги наместиме на запад, таа и колоните лево од неа, не ги ротираме.

По конечен број на чекори, црните страни на сите коцки ќе бидат завртени кон запад. На крајот, секоја колона ја ротираме за 90° во насока на стрелките на часовникот, после што црните страни на сите коцки ќе бидат завртени нагоре.

22. Дадени се природни броеви m, n и r, $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ и квадратна табла со димензии $(mn+r)\times(mn+r)$. Таблата е покриена со квадрати со димензии $n \times n$ со страни паралелни со страните на таблата, така што секое единечно

поле е покриено барем еднаш. Определи го најмалиот можен број единечни полиња кои се покриени повеќе од еднаш.

Решение. Полињата кои се покриени повеќе од еднаш ќе ги наречеме *лоши*.

Да фиксираме еден ред и да ги разгледаме полињата кои се во колоните со броеви $r+1, r+n+1, ... r+(m-1)n+1$. Овој ред е покриен со најмалку $m+1$ „лента“ од нашите $n\times n$ квадрати, а разгледуваме m полиња, па затоа барем едно од нив е лошо.

Аналогно добиваме барем едно лошо поле во пресекот на нашиот ред со колоните со броеви $r+2, r+n+2, ..., r+(m-1)n+2$ итн. Според тоа, во избраниот ред ќе имаме најмалку $n-r$ лоши полиња. Истото размислување во останатите неискористени колони дава по најмалку $n-r$ лоши полиња во секоја од нив. Според тоа, имаме најмалку

$$(mn+r)(n-r)+(m+1)r(n-r)=(mn+mr+2r)(n-r)$$

лоши полиња.

Ќе дадеме пример на покривање со точно $(mn+mr+2r)(n-r)$ лоши полиња. Во долниот лев агол на таблата одделуваме квадрат $(n+r)\times(n+r)$ и го покриваме поставувајќи квадрати во неговите четири агли. Понатаму, почнувајќи од горниот десен агол на дијагоналата на таблата поставуваме $m-1$ квадрати со димензија $n\times n$ кои не се преклопуваат и за секој од овие квадрати поставувајќи лево и долу по еден $n\times n$ квадрат ги дуплираме сите полиња кои се наоѓаат надвор од горниот десен $r\times r$ квадрат. Конечно, останатиот дел од таблата го покриваме со $n\times n$ квадрати кои не се преклопуваат. На ваков начин добиваме точно

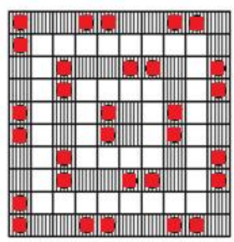
$$(n+r)^2-r^2+(m-1)(n^2-r^2)=(mn+mr+2r)(n-r)$$

лоши полиња.

23. Дадена е квадратна табла со димензија $n\times n$, каде n е парен број. Таблата е поделена на n^2 единечни квадрати. Два различни единечни квадрати на таблата се соседни ако имаат заедничка страна.

Означени се N единечни квадрати така што секој единечен квадрат (означен или неозначен) е соседен со барем еден означен квадрат.

Определи ја најмалата можна вредност на бројот N.



Решение. Нека $n=2k$. Множеството квадратни полиња чии центри се на растојание $i-\frac{1}{2}$ од најблиската страна на квадратот ($i=1,2,...,k$) го нарекуваме $i-$та рамка. Полињата на $i-$тата рамка ги боиме во црно за непарно i, а во бело за парно i. Сега секое поле на таблата (обоено во било која боја) е соседно со точно две црни полиња. Бидејќи имаме $2k(k+1)$ црни полиња, мораме да означиме најмалку $k(k+1)$ поле. Останува да докажеме дека овој број може да се достигне. Во секоја црна рамка да го означиме полето во долниот лев агол и полето непосредно над него, а потоа одејќи долж оваа рамка во насока на движењето на стрелката на часовникот, наизменично прескокнуваме и означуваме по две полиња (означените полиња се со црвени квадратчиња). Лесно се гледа дека секое поле има точно по едно означено соседно поле, а се означени

$$2(2k-1)+2(2k-5)+2(2k-9)+...=k(k+1)$$

полиња. Според тоа, одговорот на задачата е $k(k+1)$.

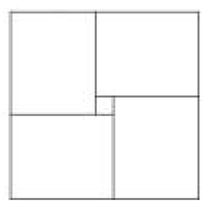
Забелешка. На сличен начин може да се решат случаите кога $n=4k-1$ и $n=4k+1$. Во општи случај одговорот е $(2[\frac{n}{4}]+1)(n-2[\frac{n}{4}])$.

24. Нека $n\geq 2$ е природен број. Од квадрат $n\times n$ е отстрането едно поле и остатокот на квадратот е покриен со квадрати 2×2 и 3×3. Определи ги можните вредности на n.

Решение. Редовите и колоните да ги нумерираме од 1 до n и во сино да ги обоиме парните редови, а во жолто непарните редови. Разликата меѓу сините и жолтите полиња во квадратите 2×2 и 3×3 е 0 или ± 3. Ако n е парен број, тогаш по отстранувањето на едно поле разликата меѓу сините и жолтите полиња ќе биде ± 1 и овој број не е делив со 3, што е противречност. Значи, n не е парен број. Ако n е делив со 3, т.е. $n=3k$, тогаш жолтите полиња во квадратот $n\times n$ се за $n=3k$ повеќе, па по отстранување на едно поле разликата на сините и жолтите полиња не е делива со 3, што повторно е противречност.

Ако $n=6k+1$, тогаш жолтите полиња во $n\times n$ се за $6k+1$ повеќе. Ако отстранетото поле е сино, тогаш жолтите полиња ќе бидат за $6k+2$ повеќе, а овој број не е делив со 3. Значи, отстранетото поле треба да е жолто (жолтите полиња ќе бидат $6k$ повеќе и овој број е делив со 3).

Да ги обоиме редовите во бело, зелено, црвено, бело, зелено, црвено, ..., бело. Имаме парен број црвени и зелени полиња и непарен број бели полиња. Квадрат 2×2 покрива по парен број полиња од секој вид, а квадрат 3×3 покрива еднаков број полиња од секој вид, па затоа не е можно отстранетото поле да е црвено или зелено. Значи, тоа поле е бело. Ако ги споредиме двете боења, добиваме дека отстранетото поле е од ред (аналогно од колона) со реден број од видот $6m+1$. Непосредно се проверува, дека ако тоа е на границата на квадратот тогаш не е можно да биде заградено со квадрати 2×2 и 3×3. Ако полето е внатрешно, што е можно при $k\geq 2$, т.е. $n\geq 13$, тоа може да се загради со четири



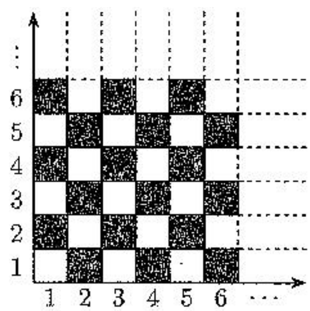
правоаголници 7×6, кои формираа квадрат 13×13 (цртеж десно). Притоа можеме да составиме правоаголник 7×6 од два реда, еден до друг, од по три квадрати 2×2 и еден ред со два квадрати 3×3. Лесно се гледа дека остатокот од квадратот $n\times n$ се покрива со правоаголници 7×6 и 6×6.

Ако $n=6k+5$, тогаш жолтите полиња во квадратот $n\times n$ се за $6k+5$ повеќе. Ако отстранетото поле е жолто, тогаш жолтите полиња ќе бидат за $6k+4$ повеќе, а овој број не е делив со 3. Значи, отстранетото поле треба да е сино, по што имаме $6k+6$ жолти полиња повеќе и овој број е делив со 3.

Да ги обоиме редовите во бело, зелено, црвено, бело, зелен, црвено, ..., бело. Белите и зелените полиња се парен број, а црвените полиња се непарен број. Квадрат 2×2 покрива по парен број полиња од секој вид, а квадрат 3×3 покрива еднаков број полиња од секој вид, па затоа не е можно отстранетото поле да е бело или зелено. Значи, отстранетото поле е црвено. Ако ги споредиме двете боења, добиваме дека отстранетото поле е од ред (аналогно од колона) со број делив со 6. Ова автоматски го исклучува случајот $n=5$. Во преостанатите случаи може да се заобиколи отстранетото поле со четири правоаголници 5×6, кои формираат квадрат 11×11 (слично како горниот цртеж). Сега, правоаголник 5×6 можеме да составиме од три квадрати 2×2 еден до друг и два квадрати 3×3 еден до друг. Лесно се гледа дека остатоткот од квадратот $n\times n$ се покрива со правоаголници 5×6 и 6×6.

Конечно, можните вредности на n се непарните броеви, кои не се делив со 3 и се поголеми од 10.

25. Дадена е бесконечна шаховска табла, поставена во првиот квадрант, чии полиња се обоени со бела и црна боја, а редовите и колоните се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ... (цртеж десно). На почетокот на полето $(1,1)$ е поставен жетон. На секој чекор се избира еден од веќе поставените жетони и се заменува со два нови жетони според следново правило: ако на таблата има k жетони и избраниот жетон е на полето (i,j), тогаш двата нови жетона се поставуваат на полињата $(i,k+1)$ и $(k+1,j)$.



Определи го бројот на достижните конфигурации, кои се состојат од n жетони распоредени само на црните полиња.

Решение. Нека на таблата се поставени n жетони. Очигледно не постојат два жетони кои се во линија (Зошто?). На секоја конфигурација можеме еднозначно да и придружиме пермутација на броевите $1,2,3,\dots,n$ на следниот начин: ако жетоните имаат позиции

$$(1,a_1),(2,a_2),...,(n,a_n)$$

$\{a_1,a_2,...,a_n\}=\{1,2,...,n\}$, тогаш придружената пермутација на оваа конфигурација е

$$® = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \end{pmatrix}.$$

Со индукција по n се покажува дека оваа пермутација е циклус

$$i_1 \to i_2 \to i_3 \to ... \to i_n \to i_1,$$

$\{i_1,i_2,...,i_n\}=\{1,2,...,n\}$. Понатаму, полето (i,j) е црно ако и само ако $i+j$ е непарен број. Според тоа, за горниот циклус важи

$$i_1+i_2 \equiv i_2+i_3 \equiv ... \equiv i_{n-1}+i_n \equiv i_n+i_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Останува да забележиме, дека кога n е непарен број не постои циклус со даденото својство, а кога n е парен број, тогаш бараниот број на конфигуирации е $(\frac{n}{2})!(\frac{n-2}{2})!$.

26. Секое поле во табла 2014×2014 е обоено црно или бело. Познато е дека секој квадрат 2×2 содржи парен број црни полиња, а секој крст (квадрат 3×3 без четирите аголни полиња) содржи непарен број црни полиња. Докажи дека четирите аголни полиња од таблата се еднобојни.

Решение. Да запишеме 1 во секое црно поле и 0 во секое бело поле. Да разгледаме квадрат 3×3 без аголните полиња на втората дијагонала (цртеж десно). Од условот на задачата следува дека збировите $a+b+c+d$ и $d+e+f+g$ се парни броеви, а збирот $b+c+d+e+f$ е непарен број. Значи, збирот

a	c	
b	d	f
	e	g

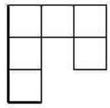
$$(a+b+c+d)+(d+e+f+g)-(b+c+d+e+f)=a+d+g$$

е непарен број. Според тоа, збирот на броевите запишани во трите полиња на главната дијагонала на 3×3 квадрат е непарен број. Ова својство важи и за трите дијагонални полиња на втората дијагонала.

Да разгледаме произволен 4×4 квадрат (цртеж десно). Бидејќи $a+e+h$ и $e+h+d$ се непарни броеви заклучуваме дека броевите a и d се со иста парност, па како тие се еднакви на 0 или 1, заклучуваме дека $a=d$. Аналогно се заклучува дека $b=c$. Понатаму, збирот $e+f+g+h$ е парен број, па затоа $e+h$ и $f+g$ се со иста парност и како $a+e+h$ и $b+f+g$ непарни броеви, како погоре заклучуваме дека $a=b$. Според тоа, $a=b=c=d$, што значи дека во секој 4×4 квадрат четирите аголни полиња се еднобојни. Конечно, од $2014\equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$ следува дека четирите аголни полиња на таблата се еднобојни.

a			b
	e	f	
	g	h	
c			d

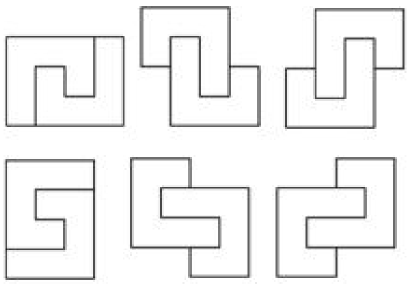
27. *Кука* ќе ја наречеме фигурата прикажана на цртежот десно, која составена од шест единечни квадрати, или било која друга фигура која е добиена од оваа фигура со примена на ротации и осни симетрии. Определи ги сите $m \times n$ правоаголници кои можат да се покријат со куки така што



1) правоаголникот е покриен без празнини и преклопувања,
2) ниту еден дел од некоја кука не е надвор од правоаголникот.

Решение. *Одговор*. Сите правоаголници $m \times n$ за кои $12 \mid mn$, барем еден од броевите m, n е делив со 4 и $m, n \notin \{1, 2, 5\}$.

Нека претпоставиме дека правоаголникот $m \times n$ може да се покрие со куки. За секоја кука H нејзиниот „внатрешен“ квадрат е покриен точно со една кука K. Од друга страна, H го покрива внатрешниот квадрат на K, па затоа сите куки можат да се поделат на парови $\{H, K\}$ кои формираат една од следниве фигури со плоштина 12.

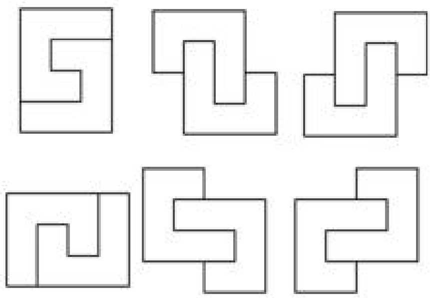


Значи, нашиот правоаголник е покриен со вакви фигури. Тоа значи дека $12 \mid mn$. Следниве случаи ги исцрпуваат сите можности.

1) $m = 4a$ и $n = 3b$. Тогаш правоаголникот очигледно се покрива со правоаголници 4×3, што значи дека се покрива со куки.
2) $m = 12a$. Јасно, ако $n = 1, 2$ тогаш правоаголникот не може да се покрие. Ако $n = 5$, тогаш разгледување покривање на аголното поле, и лесно следува дека покривањето не е можно. Затоа секој $n \notin \{1, 2, 5\}$ постојат природни броеви $k, l \in \mathbb{N}_0$ такви што $n = 3k + 4l$ (за $n = 3, 4, 6, 7, 8$ последното е точно, а ако е точно за некој n, тогаш е точно и за $n + 3$). Затоа правоаголникот $m \times n$ може да се подели на правоаголници 12×3 и 12×4, и оттука на правоаголници 4×3 и 3×4.
3) *Прв начин*. $m = 2a, n = 2b$, каде a и b се непарни броеви. Ќе докажеме дека таков правоаголник не може да се покрие со куки. Да воведеме координатен систем со кординатен почеток во долното лево поле и m е на $x-$оската. Да ги обоиме полињата со координати (k, l), за $l = 1, 3, ..., m-1$ и $l = 1, 3, ..., n-1$ кога $k = 4t + 1$ и за $k = 1, 3, ..., m-1$ и $l = 2, 4, ..., n$ кога $k = 4t + 3$. Да забележиме дека вкупниот број обоени полиња е ab и тоа е непарен број. Непосредно се проверува дека секоја од трите фигури во горниот ред на цртежот (тип *A*) покрива по 3 обоени полиња, а секоја до трите фигури во долниот ред на цртежот (тип *B*) покрива 2 или 4 обоени

полиња. Според тоа, имаме непарен рбој фигури од типот *A*. Со аналогно боење на непарните редови добиваме дека имаме непарен број фигури од типот *B*. Според тоа, вкупниот број на фигури од двата типа е парен, што значи дека mn е делив со 24, што е противречност.

Втор начин. $m=2a, n=2b$, каде a и b се непарни броеви. Јасно, притоа вкупниот број фигури составени од две куки е непарен. Имено, ако тој е парен, тоа значи дека mn е делив со 24, што е противречност.



Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека вкупниот број фигури прикажани во долниот ред на цртежот десно е непарен. Да ја обоиме секоја секоја четврта колона на таблата mn во црно. Тогаш секоја фигура од долниот ред на цртежот покрива по 3 црни полиња, а секоја фигура од горниот ред на цртежот покрива по 2 или 4 црни полиња. Значи, бројот на покриените црни полиња е непарен, што не е можно бидејќи има парен број црни полиња.

28. Дадена е шаховска табла со димензии $m\times n$, $m,n\geq 2$. За боењето на единечните полиња на таблата во боите бела, зелена, црвена и сина (секое поле е обоено со една боја) ќе велиме дека е *шарено*, ако четирите полиња во секој 2×2 квадрат се обоени во различни бои. Определи го бројот на шарените боења на таблата.

Решение. Да ги нумерираме колоните на таблата S со $1,2,...,m$, а редовите со $1,2,...,n$. Нека (i,j) е полето во $i-$тата колона и $j-$тиот ред.

Да разгледаме едно произволно шарено боење на S. Ќе докажеме дека секој ред на S содржи само две различни бои или секоја колона на S содржи само две различни бои.

Нека претпоставиме дека S не содржи правоаголник со хоризонтална подолга страна, кој содржи три различн бои. Тогаш во секој ред на S се менуваат две различни бои, што и се бараше.

Нека сега полињата $(u,v),(u+1,v)$ и $(u+2,v)$ се обоени во три различни бои a,b и c, соодветно. Последователно добиваме дека $(u+1,v+1)$ е обоено во четвртата боја d, $(u,v+1)$ во c, $(u+2,v+1)$ во a, $(u+1,v+2)$ во b, $(u+2,v+1)$ во c итн. Аналогно добиваме дека $(u+1,v-1)$ е обоено во d, $(u,v-1)$ во c, $(u+2,v-1)$ во a итн. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека колоната u ги содржи само боите a и c, колоната $u+1$ само боите b и d, и колоната $u+2$ само боите a и c. Сега, лесно се гледа дека секоја колона чиј број има иста парност како u ги содржи само боите a и c, и секоја колона чиј број има спротивна парност од бројот u ги содржи само боите b и d, што и требаше да се докаже.

Од претходно изнесеното следува дека во секое шарено боење или во секој ред или во секоја колона се менуваат две различни бои.

Бројот на шарените боења во кои во секоја колона со парен непарен број се менуваат две бои, а во секоја колона со парен број – другите две бои, е еднаков на $\binom{4}{2}\cdot 2^m$. Бројот на шарените боења во кои во секој ред со непарен број се менуваат две бои, а во секој ред со парен број – другите две бои е еднаков на $\binom{4}{2}\cdot 2^n$. Боењата во кои имаме менување на две бои како во секој ред, така и во секоја колона се броени двапати (со други зборови, тоа се боењата во кои бојата на полето (i, j) зависи само од парностит на i и j). Вакви боења имаме $4! = 24$ (зошто?).

Конечно, вкупниот број на шарени боења е еднаков на

$$\binom{4}{2}\cdot 2^m + \binom{4}{2}\cdot 2^n - 4! = 6(2^m + 2^n - 4).$$

29. Коцка со димензии $3\times 3\times 3$ е поделена на 27 складни единечни коцки (клетки). Една од добиените единечни клетки е празна, а во секоја од преостанатите се наоѓа единечна коцка означена со еден од броевите 1, 2, ..., 26 (секој од овие броеви е доделен на точно една коцка). Дозволено е единечна коцка да се премести во соседна празна клетка (две клетки се соседни ако имаат заеднички ѕид). Дали може со помош на конечно многу дозволени потези единичните коцки да се распоредат така што коцките означени со броевите k и $27-k$ ги заменат местата, за секој $k \in \{1, 2, ..., 13\}$?

Решение. Да ја означиме секоја непразна клетка со бројот на коцката која се наоѓа во неа, а празната клетка со 0. Така позицијата во секој чекор можеме да ја опишеме со некоја пермутација σ на множеството $\{0,1,2,...,26\}$, при што почетната позиција соодветствува на идентичната пермутација

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 25 & 26 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 25 & 26 \end{pmatrix}.$$

Во секој потез реализираме транспозиција $(0, x)$ за некој $x \neq 0$, т.е. елементите 0 и x ги менуваат местата. Секоја транспозиција ја менува парноста на пермутацијата (т.е. парноста на бројот парови (i, j) такви што $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$). Бидејќи конечната пермутација $\sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 25 & 26 \\ 0 & 26 & 25 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ е непарна (како производ на 13 транспозиции $(i, 26-i)$), потребен е непарен број потези.

Од друга страна, ако клетките ги обоиме наизменично црно и бело, како кај шаховската табла, добиваме дека бојата на празната клетка се менува во секој потез. Така, таа по непарен број потези не може да биде во иста боја. Тоа значи, дека празната клетка не може да остане на истото место како во почетната позиција, со што добивме противречност.

30. Полињата на бесконечна шаховска табла се стандардно обоени во црна и бела боја. Потоа сите бели полиња се преобоени во црвена и сина боја така што полињата кои имаат соседен агол се разнобојни. Нека l е произволна права, која не е паралелна со страните на полињата. За секоја отсечка I која е паралелна на l ја пресметуваме разликата од збировите на црвените и сините делови на I. Докажи, дека постои број C, кој зависи само од правата l, таков што сите добиени се помали или еднакви на C.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека на бесконечна табла сместена во правоаголен кординатен систем непарните колони се обоени со зелена, а парните со жолта боја. За секоја отсечка паралелна на правата l разликата меѓу збировите на нејзините жолти и зелени делови е помала или еднаква на некој број D, кој зависи само од l.

Доказ. Со вертикалните прави правата l е поделена на отсечкии со еднаква должина F. За секоја отсечка со должина $2F$ збирот на зелените (соодветно жолтите) делови е еднаков на F. Бидејќи секоја отсечка паралелна на l може да се подели на неколку отсечки со должина $2F$, при што останува отсечка со должина помала од $2F$, добиваме дека разликата на збировите на нејзините жолти и зелени делови е помала или еднаква на $D=2F$. ■

На почетната табла да ги пребоиме црните полиња во розова и кафеава боја така што розовите полиња да се во колоните со црвена, а кафеавите во колоните со сини полиња (цртеж десно). Да разгледаме отсечка паралелна на правата l и со r,b,r',b да ги означиме збировите на

Ц	К	Ц	К
Р	С	Р	С
Ц	К	Ц	К
Р	С	Р	С

нејзините црвени, сини, розови и кафеави делови, соодветно. Според лемата постојат броеви D_1 и D_2, кои зависат само од l, за кои

$$|(r+r')-(b+b')|\leq D_1, |(r+b')-(r'+b)|\leq D_2 .$$

Затоа

$$\begin{aligned} 2|r-b| &= |(r+r')-(b+b')+(r+b')-(r'+b)| \\ &= |(r+r')-(b+b')|+|(r+b')-(r'+b)| \\ &\leq D_1+D_2, \end{aligned}$$

т.е. $|r-b|\leq \frac{D_1+D_2}{2}$, што и требаше да се докаже.

31. Точките во рамнината со целобројни координати се темиња на единечни квадрати. Квадратите се наизменично обоени со бела и црна боја (како шаховска табла). За произволен пар позитивни цели броеви *m* и *n* разгледуваме правоаголен триаголник чии темиња имаат целобројни координати, а неговите катети, со должини *m* и *n*, лежат на страните на единечните квадрати.

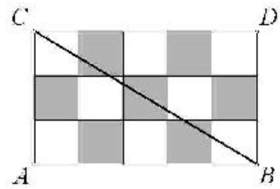
Нека S_1 е вкупната плоштина на црниот дел од триаголникот и S_2 е вкупната плоштина на белиот дел од триаголникот. Нека

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

а) Пресметај го $f(m,n)$ за кои било позитивни цели броеви *m* и *n* со иста парност.

б) Докажи, дека $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ за секои природни броеви *m* и *n*.

в) Докажи, дека не постои константа *C* таква што $f(m,n) < C$ за секои природни броеви *m* и *n*.



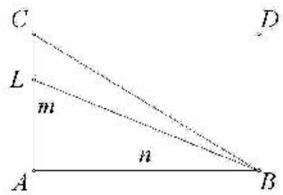
Решение. а) Нека *ABC* е правоаголен триаголник чии темиња се темиња на квадрат, чии катети лежат на страните на квадратот, при што $\measuredangle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = n$ и $\overline{AC} = m$. Разгледуваме $n \times m$ правоаголник *ABCD* како што е покажано на цртежот десно. За било кој полигон *P* со $S_1(P)$ ќе ја означиме вкупната плоштина на црниот дел од *P*, а со $S_2(P)$ вкупната плоштина на белиот дел.

Кога *m* и *n* се со иста парност, боењето на правоаголникот *ABCD* е централно симетрично во однос на средината на хипотенузата *BC*. Затоа

$$S_1(ABC) = S_1(BCD), \quad S_2(ABC) = S_2(BCD) \text{ и}$$

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \tfrac{1}{2}|S_1(ABCD) - S_2(ABCD)|.$$

Затоа $f(m,n) = 0$, ако *m* и *n* се парни, а $f(m,n) = \frac{1}{2}$ ако *m* и *n* се непарни.



б) Ако *m* и *n* се со иста парност, тврдењето следува од а). Да претпоставиме дека *m* е непарен, а *n* е парен. Нека *L* е точка на страната *AC*, така што $\overline{AL} = m-1$, како што е покажано на цртежот десно.

Бидејќи $m-1$ е парен број, тогаш

$$f(m-1,n) = 0, \text{ т.е. } S_1(ABL) = S_2(ABL).$$

Оттука следува:

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|$$
$$\le P(LBC) = \tfrac{n}{2} \le \tfrac{1}{2}\max\{m,n\}.$$

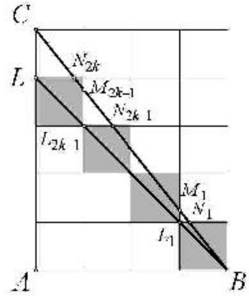
в) Да го најдеме $f(2k+1,2k)$. Нека *L* е точка на страната *AC* таква што $\overline{AL} = 2k$. Бидејќи

$$f(2k,2k) = 0 \text{ и } S_1(ABL) = S_2(ABL),$$

следува

$$f(2k+1,2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|.$$

Плоштината на триаголникот LBC е еднаква на k. Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека дијагоналата BL е црна (цртеж десно). Тогаш белиот дел од триаголникот LBC се состои од неколку триаголници: $CLN_{2k}, M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}, \dots,$ $M_1L_1N_1$, од кои секој е сличен со триаголникот CAB. Нивната вкупна плоштина е еднаква на:



$$S_2(LBC) = \frac{1}{2}\frac{2k}{2k+1}\left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{4k(2k+1)}(1^2 + 2^2 + \dots + (2k)^2) = \frac{4k+1}{12}.$$

Значи,

$$S_1(LBC) = k - \frac{1}{12}(4k+1) = \frac{1}{12}(8k-1), \quad f(2k+1, 2k) = \frac{2k-1}{6}.$$

32. За полином $f(x)$ со реални коефициенти, $\deg f = 2012$ и позитивен водечки коефициент ја разгледуваме фигурата составена од сите точки со координати (x, y) такви што $y \geq f(x)$. Дали може рамнината да се покрие со конечен број такви фигури?

Решение. На почетокот фигурите да ги разгледаме како дел од рамнината определен со неравенството $y \geq f(x)$. Секоја таква фигура може да се покрие со агол со однапред зададена големина и теме на y – оската. Навистина, бидејќи водечкиот коефициент на $f(x)$ е позитивен и неговиот степен е парен број, неравенството $f(x) \geq ax$ е исполнето за секој доволно голем и секој доволно мал број x, а за останатиот конечен интервал покривањето можеме да го реализираме со транслација на аголот во негативната насока на y – оската.

Нека претпоставиме дека бараното покривање на рамнината е можно. Тогаш е можно рамнината да се покрие со конечен број агли со однапред зададени големини. Нека аглите се зададени така што нивниот збир е помал од 360°. Аглите да ги транслатираме така што тие да имаат заедничко теме. Тогаш постои полуправа со почетна точка во ова теме, која нема други заеднички точки (освен темето) со ниту еден од аглите. Последното е противречност, бидејќи оваа полуправа не може да биде покриена пред транслацијата, бидејќи секој агол од полуправата најмногу покрива отсечка со конечна должина.

33. Од квадратна табла со димензии 100×100 се исечени 1950 домина (правоаголници 1×2 или 2×1). Докажи дека од преостанатите делови може да се исече тетрамино (евентуално ротирано). Ако тетраминото веќе се добило се смета дека е исечено.

Решение. Да го разгледаме сечењето домина едно по едно. Во секој момент од процесот на сечење да го наречеме потенцијал на секое уште неисечено поле бројот на неговите неисечени соседи (по страни) намален за 2. Тогаш почетниот потенцијал на секое поле е $2-t$, каде t е бројот на единичните отсечки од контурата на квадратот, кои се гранични за тоа поле. Според тоа, вкупниот заеднички почетен потенцијал на сите полиња на таблата е еднаков на $2\cdot 100^2-400=19600$.

Да видиме како се менува вкупниот потенцијал S на сите неисечени полиња по исекување на домино. Исекувањето намалува две полиња со потенцијал најмногу $2+2=4$ и за 1 го намалува потенцијалот на полињата кои се гранични со исеченото домино (вакви полиња се најмногу 6). Според тоа, вкупниот потенцијал S се намалува најмногу за 10.

По исекување на 1950 домина вкупниот потенцијал ќе биде најмалку $19600-19500=100$. Според тоа, ќе имаме неисечено поле k кое има позитивен потенцијал. Последното значи дека k има најмалку три неисечени соседни полиња, кои заедно со k формираат тетрамино.

34. Правоаголник со димензии 9×12 е поделен на единични квадрати. Со црвена боја се обоени центрите на сите единични квадрати, освен на четирите аголни и осумте квадрати кои имаат заедничка страна со некој од аголните квадрати. Дали е можно црвените центри да се означат со $C_1, C_2, ..., C_{96}$, но така да се исполнети следниве услови:

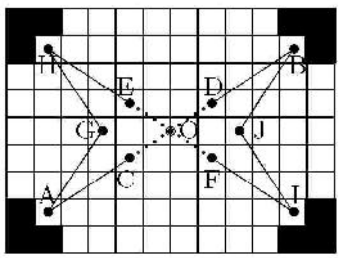
1) $\overline{C_1C_2}=\overline{C_2C_3}=...=\overline{C_{95}C_{96}}=\overline{C_{96}C_1}=\sqrt{13}$, и

2) затворената искршена линија $C_1C_2...C_{96}C_1$ е централно симетрична.

Решение. Правоаголникот да го поставиме во координатна рамнина така што центарот на полето во $i-$тата колона и $j-$тата редица има координати (i,j). Точките (i,j) и (i',j') се соседни на патеката

$$\mathbf{C}=C_1C_2...C_{96}C_1$$

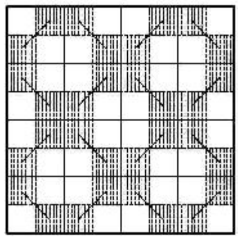
ако и само ако $\{|i-i'|,|j-j'|\}=\{2,3\}$.



Центарот на симетрија на патеката $\mathbf{C}$ е точката $O(6\frac{1}{2},5)$. Точките $A(2,2)$ и $B(11,8)$ се симетрични во однос на O и ја делат $\mathbf{C}$ на два дела $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$. Единичните квадрати ќе ги обоиме стандардно како шаховска табла. Тогаш точките A и B се различно обоени, па како секои две соседни точки се различно обоени, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се состои од непарен број отсечки. Затоа овие делови се со различни должини, па затоа не се симетрични еден на друг. Според тоа, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ мора да биде централно симетричен.

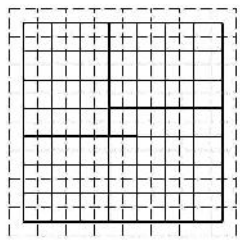
Деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се со непарна должина, па затоа секој од нив треба да содржи отсечка која е централно симетрична во однос на O. Единствени такви отсечки се отсечките кои ги поврзуваат точките $C(5,4)$ и $D(8,6)$, односно $E(5,6)$ и $F(8,4)$, што значи дека отсечките CD и EF се содржани во $\mathbf{C}$. Понатаму, точката A може да се поврзи само со точките C и $G(4,5)$, па затоа отсечките CA и AG се содржани во $\mathbf{C}$. Аналогно, разгледувајќи ги точките B, $H(2,8)$, $I(11,2)$ и $J(9,5)$, добиваме дека патеката $AGHEFIJBDCA$ целосно се содржи во $\mathbf{C}$, што е противречност.

35. Дадена е квадратна табла 8×8 чии полиња се бели. Во еден чекор можеме да одбереме 2×2 квадрат со сите бели полиња и во него да обоиме црно две дијагонално соседни полиња. Колку чекори може најмногу да се направат?



Решение. Ако направиме 16 чекори кои се прикажани на цртежот десно, тогаш ни остануваат 5 празни 2×2 квадрати. Според тоа, може да се направат најмногу 21 чекор. Ќе докажеме дека не може да се направат повеќе од 21 чекор.
Центрите на сите полиња на таблата формираат квадратна табла T со димензии 7×7. Секој чекор на квадратот 2×2 може да се разгледува како чекор на едно поле на таблата T, и тоа во еден од двата можни правци: нагоре-лево или нагоре десно. Имаме:

1) Не може да се реализираат чекори во две соседни полиња на таблата T. Навистина, првиот од тие два чекора ќе обои едно од единечните квадратчиња кои соодветствуваат на соседното поле на таблата.
2) Не е можно да се реализираат чекори во четири полиња соседни на исто поле A на таблата T, Навистина, ако без ограничување на општоста првиот чекор е на долното соседно поле на A во правец нагоре-десно, тогаш не може да се направи чекор на долното десно соседно поле на A.



Да ја поделиме таблата на четири правоаголници со димензии 3×4 и еден единичен квадрат (цртеж десно). Од (1) и (2) следува дека во ниту еден правоаголник 3×4 не може да се направат повеќе од пет чекори. Тоа значи дека може да се направата најмногу $4\cdot 5+1=21$ чекори.

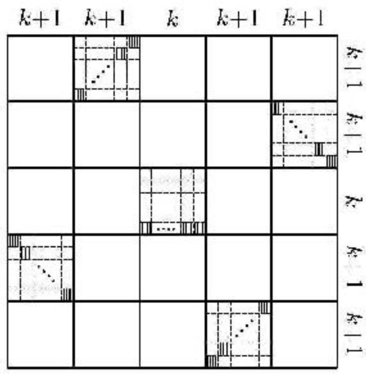
36. Нека n е природен број. Определи го (во зависност од n) најмалиот природен број m за кој може да се обојат точно n полиња на бесконечна квадратна табла така што е исполнет условот:

Секој правоаголник со страни долж линиите на таблата на кој му се обоени две спротивни аголни полиња содржи најмногу m обоени полиња.

Решение. Одговор: $m=1$ за $n=1$ и $m=[\frac{n}{5}]+2$ за $n\geq 2$.

Го разгледуваме најмалиот правоаголник Ᵽ со страни долж линиите кој ги содржи сите обоени полиња. Тој долж секоја своја страна има барем по едно обоено поле. Да ги избереме редоследно обоените полиња A, B, C и D долж долната, десната, горната и левата страна на правоаголникот Ᵽ. За $n\geq 2$ можеме даземеме $A\neq C$ и $B\neq D$ (но може да биде, на пример, $A=B$). Со Ᵽ$_{XY}$ го означуваме правоаголникот чии две спротивни аголни полиња се X и Y. Тогаш унијата на правоаголниците Ᵽ$_{AB}$. Ᵽ$_{BC}$, Ᵽ$_{CD}$, Ᵽ$_{DA}$ и Ᵽ$_{AC}$ ги содржи сите n обоени полиња. Притоа полињата A и C се наоѓаат во по три од овие правоаголници, а полиња-та B и D во по два. Според тоа, $5m-6\geq n$, т.е. $m\geq[\frac{n}{5}]+2$.

За да покажеме дека оваа оценка се достигнува, доволно е да конструираме пример за $n=5k+4$ и $m=k+2$, каде $k\geq 0$. Една можност е прикажана на цртежот десно. Навистина, секој правоаголник кој содржи некои обоени полиња на централниот $k\times k$ квадрат (кои ги има точно k) може да содржо уште најмногу две обоени полиња, додека секој друг правоаголник содржи најмногу $k+1$ обоено поле од еден квадрат со страна $k+1$ и уште едно поле од руг таков квадрат.



37. Сите квадратчиња на табла 1000×1000 се обоени црно или бело. Познато е дека постојат квадрат 10×10 во кој сите квадратчиња се црни и квадрат 10×10 во кој сите квадратчиња се бели. За секој квадрат K со димензии 10×10 дефинираме негова моќ $m(K)$ како апсолутна вредност на разликата на бројот на црните и белите полиња во квадратот K. Нека T е 10×10 квадрат кој има најмала моќ меѓу сите квадрати на дадената табла со димензија 10×10. Определи ја најголемата можна вредност за $m(T)$.

Решение. За секој квадрат X со димензии 10×10 нека $b(X)$ е бројот на белите квадратчиња во него, а $c(X)$ е бројот на црните квадратчиња и нека $r(X)=b(X)-c(X)$. Нека Y е 10×10 квадратот кој целиот е бел, а Z е 10×10 квадратот кој целиот е црн. Тогаш $r(Y)=100$ и $r(Z)=-100$. Нека W

е променлив 10×10 квадрат кој на почетокот ќе го поставиме во Y. Го поместуваме квадратот W се додека не се преклопи со Z, при што под еден чекор поместување го подразбираме поместувањето на квадратот W за едно место паралелно со страните на квадратот. Забележуваме дека $r(W)$ во еден чекор може да се промени најмногу за 20. Бидејќи на почетокот $r(W)=100$, а на крајот $r(W)=-100$, тогаш во некој чекор важи $-10\le r(W)\le 10$. Тоа значи дека $m(T)\le 10$.

Од друга страна, ќе докажеме дека $m(T)\ge 10$, од каде ќе следува дека бараната најголема можна вредност на $m(T)$ е 10.

Да ги обоиме сите квадратчиња на 1000×1000 под главната дијагонала црно, а преостанатите бело. На оваа табла да земеме произволен 10×10 квадрат. Ако неговата главна дијагонала е црна, тогаш под неа сите квадратчиња се црни, па затоа бројот на црните квадратчиња е најмалку за 10 поголем од бројот на белите. Слично, ако главната дијагонала е бела, тогаш бројот на белите квадратчиња е најмалку за 10 поголем од бројот на црните. Според тоа, не постои ниту еден 10×10 чија моќ е помала од 10, со што доказот е завршен.

38. Во едно од полињата на квадратна 41×41 табла е маскиран тенк. Стрелец со еден истрел погодува едно поле. Ако го погоди полето во кое е тенкот, тогаш тенкот се преместува во соседно поле, а во спротивно останува во полето во кое се наоѓа. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна. По истрелот стрелецот не знае дали го погодил или не го погодил тенкот. За да се уништи тенкот треба да е погоден двапати. Кој е најмалиот број истрели со кој стрелецот сигурно ќе го уништи тенкот?

Решение. Таблата да ја обоиме шаховски така што четирите аголни полиња се црни. Нека стрелецот на почетокот стрела во сите бели полиња, потоа во сите црни полиња и на крајот повторно во сите бели полиња. Ако тенкот е во бело поле, тој ќе биде погоден и во првата и во втората серија. Ако тенкот е на црно поле, тој ќе биде погоден во втората и третата серија. При ваквиот начин на стрелање стрелецо стрела $41^2+\frac{41^2-1}{2}=\frac{3\cdot41^2-1}{2}$ пати.

Сега да разгледаме низа од истрели по која тенкот е погоден двапати. Јасно, во секое поле треба да се стрела барем еднаш. Да претпоставиме дека има две соседни полиња A и B, во кои стрелецот стрелал точно по еднаш, но прво стрелал во A, а потоа во B. Ако тенкот бил во B и по истрелот преминал во A, тој нема да биде униптен и нема второ негово погодување во A. Според тоа, такви две соседни полиња не постојат. Таблата ја покриваме со $\frac{41^2-1}{2}$ домина 1×2 и со едно поле 1×1. Во секое домино стрелецот треба да стрела барем три пати, а во полето 1×1 треба да стрела еднаш. Затоа се потребни најмалку $3\cdot\frac{41^2-1}{2}+1=\frac{3\cdot 41^2-1}{2}$ истрели.

39. Во квадрат 17×17 во црна боја се обоени n полиња. Секој ред, секоја колона и секоја голема дијагонала на квадратот ќе ја наречеме линија. Во еден чекор е дозволено ако најмалку 6 полиња на таа линија се обоени во црно, сите полиња на таа линија да се обојат во црно. Определи ја најмалата можна вредност на n, за која постои почетна конфигурација на n црни полиња, од која може по конечен број чекори да се добие црна табла.

Решение. *Одговор*: 27.

Како што е вообичаено, полето во $i-$тиот ред и $j-$тата колона ќе го означуваме со (i,j). Не е тешко да се види дека ако на почетокот се црни следниве 27 полиња:

$$(7,1),\ (8,1),\ (9,1),\ (10,1),\ (7,2),\ (8,2),\ (9,2),\ (10,2),$$
$$(7,16),(8,16),(9,16),(10,16),(7,17),\ (8,17),(9,17),(10,17),$$
$$(7,7),\ (8,8),\ (9,9),\ (10,10),\ (11,11),(12,12),$$
$$(11,7),(7,11),(10,8),(8,10),\ (6,12),$$

тогаш по неколку чекори може да се добие црна табла (прво дијагоналите, па колоните 1, 2, 16, 17 итн.).

Затоа доволно е да докажеме дека секоја конфигурација од која може да се добие црна табла има најмалку 27 црни полиња. Бидејќи во секој чекор се појавуваат најмногу $17-6=11$ нови црни полиња, за да се постигне целта се потребни најмалку $[\frac{17^2-16}{11}]+1=24$ чекори.

Нека B е множеството од почетните црни полиња, A_i е линијата (ред, колона или голема дијагонала), која се користи во $i-$тиот чекор. Тогаш

$$B_i=A_i\cap B\setminus(\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j)$$

е множеството полиња од B кое во $i-$тиот чекор за првпат се користи и нека $|B_i|=b_i$. Да забележиме дека $|A_i\cap A_s|\le 1$ за $i\ne s$, и $A_i\cap A_s=\varnothing$ ако A_i и A_s се или истовремено редови или колони. Од условот на задачата следува дека $b_i+\sum_{j<i}|A_i\cap A_j|\ge 6$, т.е.

$$b_i\ge\begin{cases}6-|\{j: j<i,\ A_j \text{ е ред}\}|=f_{i,c}, & \text{ако } A_i \text{ е колона или дијагонала,}\\ 6-|\{j: j<i,\ A_j \text{ е колона}\}|=f_{i,r}, & \text{ако } A_i \text{ е ред или дијагонала,}\\ 6-i+1=f_{i,d}, & \text{ако } A_i \text{ е дијагонала.}\end{cases}$$

Нека k е најмалиот природен број за кој имаме 6 реда или дијагонала, или 6 колони или дијагонала меѓу $A_1,A_2,...,A_k$. Така , бидејќи се направени најмалку 24 чекори, овој избор е можен. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека имаме c колони, r редови и d дијагонали, така што $r+d=6$, $d\le 2$ и $r+d+c=k$. Тогаш последователно добиваме:

$$|B|\ge \sum_{i=1}^{k} b_i \ge \sum_{i:A_i \text{ е ред},\, i\le k} f_{i,c} + \sum_{i:A_i \text{ е колона},\, i\le k} f_{i,r} + \sum_{i:A_i \text{ е дијагонала},\, i\le k} f_{i,d}$$

$$=6k-\Big(\sum_{i:A_i \text{ е ред},\, i\le k} |\{j: j<i,\, A_j \text{ е ред}\}|$$

$$+\sum_{i:A_i \text{ е колона},\, i\le k} |\{j: j<i,\, A_j \text{ е колона}\}|$$

$$+\sum_{i:A_i \text{ е дијагонала},\, i\le k} (i-1)\Big).$$

Во последното равенство првиот збир ги брои паровите (j,i) за кои $1\le j< i\le k$ и парот (A_j, A_i) е (ред, колона) или (дијагонала, колона). Аналогно вториот збир ги брои паровите (j,i) за кои $1\le j<i\le k$ и парот (A_j, A_i) е (колона, ред) или (дијагонала, ред), а третиот збир ги брои паровите (j,i) за кои $1\le j<i\le k$ и A_i е дијагонала. Затоа збирот на трите збира е еднаков на $rc+(r+c)d+\binom{d}{2}$. Според тоа, имаме

$$|B|\ge 6k-r(k-r-d)-d(k-d)-\binom{d}{2}=r^2+rd+d^2-\binom{d}{2}$$

И притоа важи $r+d=6$ и $d=0,1$ или 2. Лесно се проверува дека минимумот на десната страна на последното неравенство се достигнува за $r=4$ и $d=2$. Конечно, $|B|\ge 27$, што и требаше да се докаже.

40. Квадрат, поделен на единечни квадратчиња, може да се расече на n складни фигури со по k квадратчиња во секоја фигура. Докажи дека истиот квадрат може да се расече и на k складни фигури со по n квадратчиња во секоја фигура.

Решение. Нека m е должината на страната на квадратот. Тогаш $m^2=nk$. Ако $d=(n,k)$, тогаш $m=dm_1$ и $n=dn_1$, каде $(m_1,n_1)=1$. Затоа $mm_1=kn_1$, од каде следува дека $n_1\,|\,m$. Последното значи дека квадратот може да се подели со хоризонтални паралелни прави на растојание n_1 и вертикални паралелни прави на растојание d. При оваа поделба квадратот е поделен на k складни правоаголници со по $dn_1=n$ единечни квадратчиња.

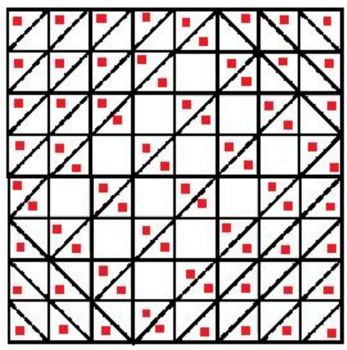
41. На квадрат 100×100 се поставени неколку рамнокраки правоаголни триаголници со катети 1 кои не се сечат, при што секој триаголник покрива точно половина поле. Се покажало дека секоја страна на поле (вклучувајќи ги и граничните) е покриена од точно една катета на триаголник. Определи го најголемиот можен број полиња кои не содржат ниту еден триаголник.

Решение. *Одговор*: $49 \cdot 50 = 2450$.

Да ставиме $n = 50$. Ќе велиме дека еден триаголник е добар ако се наоѓа над правата определена со неговата хоризонтална катета, а е лош во спротивен случај. Хоризонталните линии на мрежата да ги нумерираме со броевите од 0 до $2n$.

Со u_k (соодветно d_k) да го означиме бројот на отсечките од k – тата линија кои учествуваат во добри (соодветно лоши) триаголници. Тогаш точни се равенствата $u_k + d_k = 2n$ и $u_0 = 2n$. Освен тоа, вертикалните отсечки од мрежата, кои се наоѓаат меѓу k – тата и $(k+1)$ – вата линија, улчествуваат во точно $u_k + d_{k+1}$ триаголник, па затоа $u_k + d_{k+1} = 2n+1$. Оттука лесно се добива дека $d_k = k$ и $u_k = 2n-k$ за секој k .

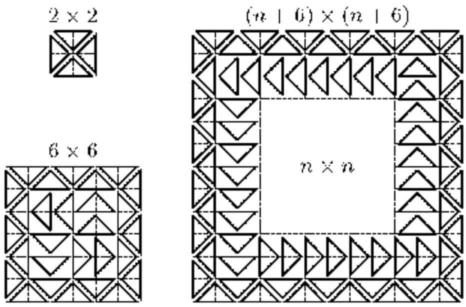
Сега да ги разгледаме полињата кои се наоѓаат меѓу k – тата и $(k+1)$ – вата линија на мрежата. Најмалку $u_k = 2n-k$ од овие полиња содржат добар триаголник и најмалку $d_{k+1} = k+1$ од овие полиња соржат лош триаголник. Според тоа, слободните полиња од овој ред се најмногу $2n - \max\{u_k, d_{k+1}\}$, што значи најмногу k кога $k < n$ и најмногу $(2n-1)-k$ кога $k > n$. Затоа вкуниот број слободни полиња не е поголем од $2(0+1+...+(n-1)) = n(n-1)$.



Останува да дадеме пример при кој се достигнува добиената оценка. На цртежот десно е даден пример за $n = 4$. Пример за $n = 50$ се конструиран наполно аналогно. Се одделува „правоаголник“ од полиња со страни од по n и $n+1$ поле паралелни со дијагоналите на мрежата, неговите полиња се бојат шаховски (дијагоналите со по $n+1$ полиња се црни), и во секое црно поле се поставуваат по два триаголника (притоа $n(n-1)$ бело поле се слободни); во секое поле од преостанатите четири „агли“ на квадратот триаголниците се поставуваат така што нивните прави агли се во иста насока како и големиот агол во кој лежи полето.

42. Квадрат со димензии $n \times n$ е поделен на единечни квадрати. Во големиот квадрат треба да се постават определен број рамнокраки правоаголни триаголници со должина на хипотенуза 2 и со темиња во темињата на единечните квадрати, но така што секоја страна на секој единечен квадрат припаѓа тачно на еден триаголник (лежи во внатрешноста или на работ). Определи ги сите вредности на n за кои ова е можно.

Решение. Големиот квадрат има $2n(n+1)$ единечни отсечки, а секој триаголник покрива три отсечки, па затоа $3|2n(n+1)$, т.е. $n \equiv 0$ или $n \equiv 2(\text{mod}\,3)$. Исто така, отсечките на страните на големиот квадрат може да бидат покриени само со хипотенузи, па затоа мора $2|n$. Според тоа,



$$n \equiv 0 \text{ или } n \equiv 2(\text{mod}\,6).$$

На цртежот десно се прикажани соодветните поставувања за $n=2$ и $n=6$, како како од поставувањето за квадрат со димензии $n \times n$ се добива покривањето за квадрат со димензии $(n+6)\times(n+6)$.

Сега со индукција следува дека бараните броеви се од видот $n=6k$ или $n=6k-4$, каде $k \in \mathbb{N}$.

43. Нека f е бројот на начините на покривање на табла со димензии $2\times n$ со 2×1 домина, b е бројот на низи од единици и двојки чиј збир е еднаков на n и

$$c=\begin{cases}\binom{m}{0}+\binom{m+1}{2}+...+\binom{2m}{2m}, & n=2m\\ \binom{m+1}{1}+\binom{m+2}{3}+...+\binom{2m+1}{2m+1}, & n=2m+1.\end{cases} \qquad (1)$$

Докажи, дека $f=b=c$.

Решение. Очигледно $f=b$. Навистина, покривањето на табла со димензии $2\times n$ можеме да го направиме со поставување на 2×1 домината на два начина, или едно домино вертикално или две домина хоризонтално (види цртеж). Притоа се потребни n домина. Сега на секое вертикално домино го придружуваме бројот 1, а на секои две хоризонтални домина го придружваме бројот 2. Притоа добиваме низа од единици и двојки чиј збир е еднаков на n. Јасно, на секоја низа од единици и двојки чиј збир е еднаков на n соодветствува покривање од дадениот вид (за единицата поставуваме вертикално домино, а за двојката две хоризонтални домина).

Ќе докажеме дека $b=c$. Нека r е бројот на низите од единици и двојки чиј збир е еднаков на n. Нека k е бројот на двојките во дадена низа. Тогаш $k \le [\frac{n}{2}]$ и имаме $r-k$ единици. Притоа $n=2k+(r-k)=k+r$. Низата е определена ако во неа е познат распоредот, на пример, на двојките. Бројот на различните низи со должина r е еднаков на $\binom{r}{k} = \binom{n-k}{k}$. Според тоа, бројот на сите низи ќе биде еднаков на $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k}$. Притоа, за $n = 2m$ имаме

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m-k}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m-k}{2m-2k},$$

а за $n = 2m+1$ добиваме

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{2m+1-2k}.$$

Забелешка. Во задача 12.3 докажавме дека $f = f_{n+1}$ е $(n+1)-$виот Фибоначиев број, а во задача 12.35 докажавме дека $c = f_{n+1}$, па сега од $f = b$ следуваат равенствата $b = f = f_{n+1} = c$.

44. Нека P е полимино со следниве својства:
1) барем еден правоаголник може да биде покриен со копии на P,
2) за секој правоаголник, кој може да биде покриен со копии на P, тоа покривање е единствено со точност до симетриите кои го запазуваат правоаголникот.

Докажи, дека P е квадрат.

Решение. Прво, да забележиме дека ако со копии на P може да се покрие правоаголник $a \times b$, тогаш може да се покрие и квадрат $ab \times ab$. Нека S е најмалиот можен квадрат кој може да се покрие со копии од P и нека $(1,1)$ и (s,s) се долното лево и горното десно поле на тој квадрат.

Нека претпоставиме дека не постои копија на P која ја сече правата $2x = s+1$. Тогаш s е парен број и симетријата во однос на правата $x = y$ покажува, дека не постои копија на P која ја сече правата $2y = s+1$. Последното значи дека со копии на P сме го покриле квадратот $\frac{s}{2} \times \frac{s}{2}$, што противречи на изборот на S.

Нека Q е копија на P која е пресечена од правата $2x = s+1$. Бидејќи симетријата во однос на оваа права го запазува покривањето, заклучуваме дека Q, т.е. P има вертикална оска на симетрија. Аналогно се добива дека P има и хоризонтална оска на симетрија.

Нека R е копија на P која го покрива полето $(1,1)$. Бидејќи симетријата во однос на правата $x = y$ го запазува покривањето, таа го пресликува R во R. Значи, R е симетричен истовремено во однос на правите $2x = m+1$ и $2y = m+1$, за некој природен број m. Тогаш R ги содржи полињата $(1,1)$,

$(m,1),(m,m)$ и $(1,m)$. Бидејќи целиот квадрат S лежи горе и десно во однос на полето $(1,1)$, добиваме дека R исто така лежи горе и десно во однос на полето $(1,1)$, долу и десно од полето $(1,m)$, долу и лево од полето (m,m) и горе и лево од полето $(1,m)$. Според тоа, R целосно се содржи во квадратот S', определен со аголните полиња $(1,1),(m,1),(m,m),(1,m)$.

Нека претпоставиме дека некое поле $(i,1)$, каде $1<i<m$, не припаѓа на R. Тогаш тоа е покриена од некоја друга копија T на P. Бидејќи T и P се складни, најдолниот ред кој содржи полиња на T треба да содржи две такви полиња на растојание $m-1$ едно од друго, што не е можно. Според тоа, R ги содржи сите полиња меѓу $(1,1)$ и $(m,1)$ и тогаш заради симетријата, следува дека ја содржи и целта внатрешност на S'. Но, тоа значи дека $R\equiv S'$, односно дека R, па значи и P е квадрат.

45. Во полињата на $n\times n$ табла се распоредени $2n-1$ жетони. Докажи дека некои од овие жетони може да се обојат во зелено така што:
1) во секој ред и во секоја колона има парен број зелени жетони, или
2) во секој ред и во секоја колона има непарен број зелени жетони.

Решение. За $k=1,2,...,2n-1$ нека $a_i^k=b_j^k=1$ ако $k-$тиот жетон се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона и $a_{i'}^k=b_{j'}^k=0$ за $i'\neq i$ и $j'\neq j$. Ги разгледуваме векторите $v_k=(a_1^k,a_2^k,...,a_n^k,b_1^k,...,b_{n-1}^k)$ во векторскиот простор $\mathbb{Z}_2^{2n-1}$. Ако постојат $1\leq k_1<k_2<...<k_r\leq 2n-1$ такви што $v_{k_1}+...+v_{k_r}$ е еднаков на векторот $\vec{0}=(0,0,...,0)$ (односно на векторот $\vec{1}=(1,1,...,1)$), тогаш со боење на жетоните $k_1,k_2,...,k_r$ во зелено постигнуваме во n редови и $n-1$ колони, а со самото тоа и во преостаната колона, да има парен (односно непарен) број зелени жетони.

Ако векторите $v_1,...,v_{2n-1}$ се линеарно зависни, тоа значи дека постојат $\varepsilon_1,...,\varepsilon_{2n-1}\in\{0,1\}$ такви што $\sum_{i=1}^{2n-1}\varepsilon_i v_i=(0,0,...,0)=\vec{0}$. Во спротивно секој вектор од $\mathbb{Z}_2^{2n-1}$ може да се запише како нивна линеарна комбинација. Значи, $\sum_{i=1}^{2n-1}\varepsilon_i v_i=(1,1,...,1)=\vec{1}$ за некои $\varepsilon_1,...,\varepsilon_{2n-1}\in\{0,1\}$, со што доказот е завршен.

20. ЛАТИНСКИ КВАДРАТИ

1. Нека Q е множество од n елементи. Матрицата елементи од Q ја нарекуваме *латински* $r \times n$ *– правоаголник* ако во секој нејзин ред и во секоја нејзина колона сите елементи се различни меѓу себе.
Латинскиот $n \times n$ правоаголник го нарекуваме *латински квадрат* од $n -$ ти ред.
Докажи, дека за секој природен број постои латински квадрат од $n -$ ти ред.
Решение. Да ја разгледаме матрицата $M = [a_{ij}]$ за која $a_{ij} \equiv i + j (\bmod n)$, $0 \le a_{ij} \le n-1$. Ако $a_{ij} = a_{ik}$, тогаш $i + j \equiv i + k (\bmod n)$, од каде по скратувањето добиваме дека $j \equiv k (\bmod n)$, што значи $j = k$, бидејќи j и k се ненегативни броеви помали од n. Слично, од $a_{ij} = a_{kj}$ следува $i = k$. Според тоа, елементите на секој ред (колона) се различни, па M е латински квадрат.
Забелешка. а) Како што видовме, за секој природен број n постои латински квадрат од $n -$ ти ред. Логично се поставува прашањето за бројот на латинските квадрати од $n -$ ти ред. Бројот на латинските квадрати од $n -$ ти ред, во општ случај, не е познат. Имено, позната е само долната граница, односно е докажано само тврдењето:
Бројот на латнските квадрати од $n -$ *ти ред е поголем или еднаков на* $n!(n-1)!(n-2)!...1!$.
Во следната табела се дадени податоците за $n \le 11$ за бројот на латинските квадрати од $n -$ ти ред, објавени во 2007 година во списанието *Journal of Combinatorial Designs*.

n	Број на латински квадрати од $n -$ ти ред
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000

За $n > 11$ не се знае точната вредност. Дури и разликата меѓу познатите долна и горна граница е голема.

б) Во решението на задачата всушност е даден алгоритам за конструкција на латински квадрат од произволен ред n. Така за $n = 8$ се добива латинскиот квадрат

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Овде, да забележиме дека во општ случај ако пермутацијата $(2,3,...,n-1,0,1)$ на броевите $0,1,2,...,n-1$ ја запишеме во првиот ред, а потоа во секој следен ред циклично ги поместуваме броевите го добиваме латинскиот квадрат кој се добива со горниот алгоритам. Ова всушност важи и за секоја пермутација на броевите $0,1,2,...,n-1$.

Меѓутоа, постојат и други начини за конструкција на латински квадрати Така латински квадрат од ред 2^n може да се конструира индуктивно. Да долниот цртеж е прикажано како од латински квадрат од ред 2^n се добива латински квадрат од ред 2^{n+1}.

$$A_{2^{n+1}} = \begin{bmatrix} A_{2^n} + 2^{2n} & A_{2^n} \\ A_{2^n} & A_{2^n} + 2^{2n} \end{bmatrix}.$$

Користејќи го овој алгоритам конструирај латински квадрат од ред 8, а потоа спореди го со латинскиот квадрат (1).

2. Првиот квадрант на координатната рамнина е поделен на единечни квадрати. Дали е можно во секој од овие квадрати да се запише по еден природен број, така што во секој ред и секоја колона секој природен број биде запишан точно еднаш?

Решение. Да! Распоред на броевите кој го има наведеното својство се добива ако во полето на добиената бесконечна табла чие теме е координатниот почеток го запишеме бројот 1, а потоа конструираме латински квадрати од ред 2, 4, 8, 16, ... со алгоритмот кој е даден во забелешката под б) на претходната задача. На читателот за вежба му препуштаме ова да го направи за првите неколку редови и колони.

3. Даден е латински квадрат од $(2n+1)-$ви ред пополнет со броевите $1, 2, \ldots,$ $2n+1$. Ако броевите се симетрично распоредени во однос на една од дијагоналите, докажи дека на таа дијагонала се наоѓаат сите броеви од 1 до $2n+1$.

   Решение. Во латински квадрат од $(2n+1)-$ви ред секој од броевите од 1 до $2n+1$ се појавува $2n+1$ пати, односно непарен број пати. Бидејќи распоредот на броевите во однос на разгледуваната дијагонала е симетричен, заклучуваме дека надвор од дијагоналата секој број се наоѓа парен број пати, од каде следува дека секој број се јавува на дијагоналата.

4. Докажи, дека за произволни природни броеви n и r, $r < n$ постои латински $r \times n-$ правоаголник.

   Решение. Непосредно следува од задача 1 и фактот дека со отстранувањето на произволен број редици од латинскиот квадрат се добива латински правоаголник.

   Забелешка. Со остранување на произволен ред од латинскиот $r \times n-$ правоаголник, $1 < r \leq n$, се добива латински $(r-1) \times n-$ правоаголник. Се поставува обратното прашање, дали може секој латински $r \times n-$ правоаголник, $r < n$ со додавање на еден ред да се прошири до латински $(r+1) \times n-$ правоаголник. Одговорот на ова прашање е потврден, т.е. важи следново тврдење кое овде нема да го докажуваме.

   Ако $r < n$, тогаш секој латински $r \times n-$ правоаголник може да се прошири до латински $(r+1) \times n-$ правоаголник.

   Непосредна последица од претходното тврдење е дека:

   Секој латински правоаголник може да се прошири до латински квадрат.

5. Латинскиот $3 \times 6-$ правоаголник

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   прошири го до латински $4 \times 6-$ правоаголник.

   Решение. Со S_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ да го означиме подмножеството елементи $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ кои не се појавуваат во $j-$та колона. Имаме

$$S_1 = \{0, 3, 4\},\ S_2 = \{0, 1, 5\},\ S_3 = \{1, 2, 4\},$$
$$S_4 = \{0, 3, 5\},\ S_5 = \{1, 2, 4\},\ S_6 = \{2, 3, 5\}.$$

   Од овие множества избираме по еден преставник, но така да сите се различни меѓу себе, т.е

$$0 \in S_1,\ 1 \in S_2,\ 2 \in S_3,\ 3 \in S_4,\ 4 \in S_5 \text{ и } 5 \in S_6.$$

На дадениот латински $3\times 6-$правоаголник му допишуваме редица, така што последователно ги запишуваме најдените преставници и го добиваме латинскиот $4\times 6-$правоаголник:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

6. Определи го бројот на латинските $2\times n$ правоаголници.

Решение. Во првиот ред на латинскиот $2\times n$ правоаголник можеме да ја запишеме било која пермутација на броевите $1,2,3,...,n$, што значи дека имаме $n!$ можности. Сега во вториот ред треба да е било кој деаранжман на пермутацијата запишана во првиот ред, па имаме $n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+(-1)^n\frac{1}{n!})$ можности. Конечно, од принципот на производ следува дека бројот на латинските $2\times n$ правоаголници е еднаков на $(n!)^2(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+(-1)^n\frac{1}{n!})$.

7. За латинските квадрати кои еден од друг можат да се добијат со пермутирање на редиците, колоните или преименување на елементите ќе велиме дека се *изотопни*.

Нека множеството Q елементи на латинскиот квадрат е подредено множество. За латинскиот квадрат ќе велиме дека е *стандарден* ако елементите на првиот ред се во основен поредок (основна пермутација). За латинскиот квадрат ќе велиме дека е *двојно стандарден* ако и елементите на првиот ред и елементите на првата колона се во основен поредок.

За два латински квадрати $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ од $n-$ти ред ($i,j=1,...,n$) ќе велиме дека се *заемно ортогонални*, ако за сите вредности на индексите i,j,k,l важи $(a_{ij},b_{ij})\neq(a_{kl},b_{kl})$ кога $(i,j)\neq(k,l)$, т.е. ако сите n^2 подредени парови (a_{ij},b_{ij}) се различни меѓу себе.

Дадени се латинските квадрати:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Докажи дека тие се ортогонални.

Решение. Ќе ја формираме матрицата од подредените парови кои се наоѓаат на соодветните места во двата латински квадрати:

$$C=\begin{bmatrix}(1,1) & (2,2) & (3,3) & (4,4)\\ (2,3) & (1,4) & (4,1) & (3,2)\\ (3,4) & (4,3) & (1,2) & (2,1)\\ (4,2) & (3,1) & (2,4) & (1,3)\end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Забележуваме дека матрицата C е составена од $4^2=16$ различни подредени парови, што значи дека двата латински квадрати се заемно ортогонални.

Забелешка. Матрицата $C=[a_{ij},b_{ij}],\ i,\ j=1,2,...,n$ е таканаречениот *грчко-латински* квадрат добиен од заемно ортогоналните латински квадрати $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}],\ i,\ j=1,2,...,n$. Ако ги замениме елементите на првиот квадрат со латинични букви, а елементите на вториот квадрат со грчки букви, тогаш условот за ортогоналност вели дека секој пар кој се состои од грчка и латинична буква се појавува точно еднаш во матрицата чии елементи се подредените парови на елементите на почетните латински квадрати.

Грчките и латиничните букви на овој начин кај латинските квадрати прв ги користел Ојлер, па затоа грчко-латинските квадрати понекогаш ги нарекуваат и *Ојлерови квадрати*. За матрицата (1) записот со помош на буквите од грчката и латинската азбука е:

$$C=\begin{bmatrix}(A,\sim) & (B,\ \ ) & (C,\text{¥}) & (D,\text{¢})\\ (B,\text{¥}) & (A,\text{¢}) & (D,\sim) & (C,\ \ )\\ (C,\text{¢}) & (D,\text{¥}) & (A,\ \ ) & (B,\sim)\\ (D,\ \ ) & (C,\sim) & (B,\text{¢}) & (A,\text{¥})\end{bmatrix}.$$

8. Конструирај пар ортогонални латински квадрати од ред $n=2k+1,\ k\geq 1$.

Решение. Избираме произволна пермутација $(i_1,i_2,...,i_n)$ на броевите $0,1,...,$ $n-1$ во која $i_n=k$. Оваа пермутација ја запишуваме во последниот ред од квадратот. Потоа преостанатите редови ги пополнуваме оддолу-нагоре при што секоја следна пермутација се добива од претходната со преместување на првиот член на крајот. За вториот квадрат избираме произволна пермутација $(j_1,j_2,...,j_n)$ на броевите $0,1,...,n-1$ во која $j_n=k$. Оваа пермутација ја запишуваме во првиот ред на квадратот. Потоа преостанатите редови ги пополнуваме одгоре-надолу така што секоја следна пермутација се добива од претходната со преместување на првиот член на крајот. Јасно, на овој начин добивме пар латински квадрати. Останува да докажеме дека овие латински квадрати се ортогонални, т.е. дека за сите вредности на индексите i,j,k,l важи $(a_{ij},b_{ij})\neq(a_{kl},b_{kl})$ кога $(i,j)\neq(k,l)$. Последното следува од начинот на конструкцијата на двата латински квадрати. Имено, според конструкцијата кај првиот латински квадрат на комплементарните дијагонали, т.е. дијагоналите кои содржат n броеви и кои одат од левиот горен агол кон десниот долен агол е запишан еден ист број (на различни дијагонали различен број), а на истите дијагонали кај вториот квадрат е запишана пермутација на броевите $0,1,...,n-1$.

За $n=9$, од пермутацијата $(7,8,3,1,5,0,2,6,4)$ е добиен левиот, а од пермутацијата $(7,8,1,3,0,2,6,5,4)$ е добиен десниот латински квадрат.

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 3 & 1 & 5 & 0 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 8 & 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 7 & 8 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 7 & 8 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 6 & 4 & 7 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 6 & 4 & 7 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 & 6 & 4 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 1 & 5 & 0 & 2 & 6 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 3 & 1 & 5 & 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 8 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

за кои грчко-латинскиот квадрат е:

$$\begin{bmatrix} (4,7) & (7,8) & (8,1) & (3,3) & (1,0) & (5,2) & (0,6) & (2,5) & (6,4) \\ (6,8) & (4,1) & (7,3) & (8,0) & (3,2) & (1,6) & (5,5) & (0,4) & (2,7) \\ (2,1) & (6,3) & (4,0) & (7,2) & (8,6) & (3,5) & (1,4) & (5,7) & (0,8) \\ (0,3) & (2,0) & (6,2) & (4,6) & (7,5) & (8,4) & (3,7) & (1,8) & (5,1) \\ (5,0) & (0,2) & (2,6) & (6,5) & (4,4) & (7,7) & (8,8) & (3,1) & (1,3) \\ (1,2) & (5,6) & (0,5) & (2,4) & (6,7) & (4,8) & (7,1) & (8,3) & (3,0) \\ (3,6) & (1,5) & (5,4) & (0,7) & (2,8) & (6,1) & (4,3) & (7,0) & (8,2) \\ (8,5) & (3,4) & (1,7) & (5,8) & (0,1) & (2,3) & (6,0) & (4,2) & (7,6) \\ (7,4) & (8,7) & (3,8) & (1,1) & (5,3) & (0,0) & (2,2) & (6,6) & (4,5) \end{bmatrix}.$$

9. Нека $L_1,L_2,...,L_k$ се по парови заемно ортогонални латински квадрати. Докажи дека постојат латински квадрати $L_1^{'},L_2^{'},...,L_k^{'}$ кои се изотопни на дадените, стандардни и по парови заемно ортогонални.

Решение. Без ограничување на општоста, можеме да претпоставиме дека елементите на сите квадрати се од множеството $Q=\{0,1,2,...,n-1\}$. За секој квадрат $L_i, i\in\{1,2,...,k\}$ треба елементите на Q да ги преименуваме така да од L_i се добие стандарден квадрат $L_i^{'}$. Сега тврдењето следува од фактот дека со преименување на елементите на множеството Q во еден од квадратите на ортогоналниот пар (но така да сите елементи се различно означени, нивно пермутирање) ортогоналноста се запазува. Последното е точно и кога имаме повеќе латински квадрати кои по парови се заемно ортогонални. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Забелешка. Може да се докаже дека ортогонални латински квадрати од n – ти ред не постојат за $n=2$ и $n=6$, но дека постојат за секој природен број n од множеството $\{3,4,5,7,8,9,10,...\}$.

10. Докажи дека за секој природен број $n>1$ постојат најмногу $n-1$ неизотопни по парови заемно ортогонални латински квадрати.

Решение. Согласно задача 5, можеме да се ограничиме на разгледување само на стандардните латински квадрати со елементи од $Q=\{0,1,2,..., \ n-1\}$. Да го разгледаме полето во пресекот на втората редица и првата колона на секој квадрат. Во ова поле не може да се наоѓа елементот 0. Од друга страна, секои два стандардни заемно ортогонални квадрати мораат во тоа поле да имаат два различни елементи. Значи, во множеството по парови ортогонални латински квадрати од ред n не може да има повеќе од $n-1$ квадрат.

11. За множеството од $n-1$ по парови ортогонални латински квадрати од ред n велиме дека е *потполн систем ортогонални латински квадрати* од ред n (скратено ПСОЛК(n)).

Докажи, дека за секој прост број $p>2$ постои ПСОЛК(p).

Решение. Да ги разгледаме $p-1$ матриците од ред $p\times p$ со елементите од множеството $Q=\{0,1,2,..., p-1\}$:

$$L_k=[a_{ij}^k], k=1,2,..., p-1$$

каде

$$a_{ij}^k \equiv i+kj (\text{mod } p).$$

Прво ќе докажеме дека за $k=1,2,...p-1$ матрицата е латински квадрат. Навистина, ако за L_k важи $a_{ij_1}^k=a_{ij_2}^k$, тогаш во полето на остатоци по модул p важи

$$i+kj_1=i+kj_2.$$

Бидејќи во полето важи законот за кратење на двете операции добиваме: $kj_1=kj_2$, т.е. $j_1=j_2$. Значи, на две различни места во иста редица не може да има исти броеви. Слично се докажува дека на две различни места во една колона не може да има исти броеви, па значи L_k е латински квадрат. Нека сега L_t и L_s, $t\neq s$ се два латински квадрати добиени на опишаниот начин и нека $x=a_{ij}^t, y=a_{ij}^s$ т.е. во полето остатоци по модул p важи $x=i+tj, y=i+sj$. Тогаш $(t-s)j=x-y$, па затоа $j=(t-s)^{-1}(x-y)$. Според тоа, i и j се еднозначно определени за дадени x, y, t и s. Затоа секој пар (x, y) само еднаш се појавува како пар на соодветните елементи (a_{ij}^t, a_{ij}^s) во латинските квадрати L_t и L_s, $t \neq s$.

12. Конструирај ги ортогоналните латински квадрати од 5-ти ред.
Решение. Со примена на постапката од решението на задача 11 ги добиваме следните четири латински квадрати од 5-ти ред:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

кои формираат ПСОЛК(5).

21. МАГИЧНИ КВАДРАТИ

1. *Магичен квадрат* од $n-$ти ред е квадратна $n \times n$ шема (или матрица) од n^2 природни броеви, такви што збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на еден ист број K_n. Бројот K_n го нарекуваме *магична константа*.

   Ако во магичниот квадрат од $n-$ти ред се запишани првите n^2 природни броеви, тогаш нивниот збир е:

$$1+2+...+n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

   па затоа магичната константа е $K_n = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Магичните квадрати кои се составени од броевите од 1 до n^2 ги нарекуваме *стандардни магични квадрати*.

   Конструирај магичен квадрат од ред $n = 2k+1$.

   Решение. *Прв начин* (*метод на Ојлер*). Конструираме пар ортогонални латински квадрати $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ од ред $n = 2k+1$ (види задача 20.8). Понатаму, со помош на формулите $c'_{ij} = na_{ij} + b_{ij} + 1$ и $c''_{ij} = nb_{ij} + a_{ij} + 1$, добиваме два магични квадрати $C' = [c'_{ij}]$ и $C'' = [c''_{ij}]$.

   На пример, од двата латински квадрати од деветти ред дадени во задача 20.8 се добива магичниот квадрат:

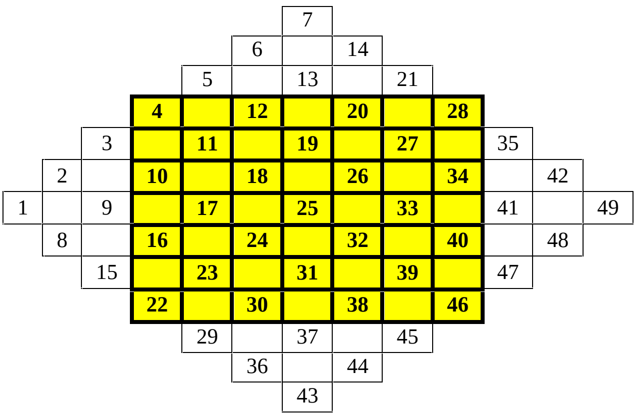
44	**72**	**74**	**31**	**10**	**48**	**7**	**24**	**59**
63	**38**	**67**	**73**	**30**	**16**	**51**	**5**	**26**
20	**58**	**37**	**66**	**79**	**33**	**14**	**53**	**9**
4	**19**	**57**	**43**	**69**	**77**	**35**	**18**	**47**
46	**3**	**25**	**60**	**41**	**71**	**81**	**29**	**13**
12	**52**	**6**	**23**	**62**	**45**	**65**	**76**	**28**
34	**15**	**50**	**8**	**27**	**56**	**40**	**64**	**75**
78	**32**	**17**	**54**	**2**	**22**	**55**	**39**	**70**
68	**80**	**36**	**11**	**49**	**1**	**21**	**61**	**42**

   На читателот му препуштаме да го конструира и другиот магичен квадрат определен од двата ортогонални латински квадрат.

   Втор начин (*Сијамски метод*). Правилата на овој метод се: прво се запишува бројот 1 во средното поле на најгорниот ред. Потоа се запишуваат последователно следните природни броеви одејќи по комплементарните дијагонали на квадратот (две паралелни дијагонали на кои се наоѓаат n полиња). Кога ќе се добие број од видот mn ($m \geq 1$) следниот број се запишува под него и пополнувањето продолжува на истиот начин. Долу е прикажан магичен квадрат од деветти ред добиен со Сијамскиот метод.

47	**58**	**69**	**80**	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**
57	**68**	**79**	**9**	**11**	**22**	**33**	**44**	**46**
67	**78**	**8**	**10**	**21**	**32**	**43**	**54**	**56**
77	**7**	**18**	**20**	**31**	**42**	**52**	**55**	**66**
6	**17**	**19**	**30**	**41**	**53**	**63**	**65**	**76**
16	**27**	**29**	**40**	**51**	**62**	**64**	**75**	**5**
26	**28**	**39**	**50**	**61**	**72**	**74**	**4**	**15**
36	**38**	**49**	**60**	**71**	**73**	**3**	**14**	**25**
37	**48**	**59**	**70**	**81**	**2**	**13**	**24**	**36**

Трет начин (*метод на тераси или метод на Башѐ*). Над секоја од страните на квадратот последователно конструираме редови и колони со $n-2, n-4, ..., 3, 1$ квадратчиња. Во така добиената фигура последователно дијагонално ги внесуваме броевите од 1 до n^2. Подолу е даден пример за $n = 7$, при што полињата на основниот квадрат се обоени.



Сега, броевите кои не се во квадратот ги запишуваме во истите редови и колони, и тоа во полето кое е $n-$то по ред броено од полето во кое е бројот кон внатрешноста на добиената фигура, во нашиот случај $n = 7$, со што го добиваме магичниот квадрат прикажан на долниот квадрат.

4	**29**	**12**	**37**	**20**	**45**	**28**
35	**11**	**36**	**19**	**44**	**27**	**3**
10	**42**	**18**	**43**	**26**	**2**	**34**
41	**17**	**49**	**25**	**1**	**33**	**9**
16	**48**	**24**	**7**	**32**	**8**	**40**
47	**23**	**6**	**31**	**14**	**39**	**15**
22	**5**	**30**	**13**	**38**	**21**	**46**

На потполно ист начин е добиен магичниот квадрат за $n=9$, кој е подолу прикажан. На читателот му оставаме самостојно да ја реализира постапката.

5	**46**	**15**	**56**	**25**	**66**	**35**	**76**	**45**
54	**14**	**55**	**24**	**65**	**34**	**75**	**44**	**4**
13	**63**	**23**	**64**	**33**	**74**	**43**	**3**	**53**
62	**22**	**72**	**32**	**73**	**42**	**2**	**52**	**12**
21	**71**	**31**	**81**	**41**	**1**	**51**	**11**	**61**
70	**30**	**80**	**40**	**9**	**50**	**10**	**60**	**20**
29	**79**	**39**	**8**	**49**	**18**	**59**	**19**	**69**
78	**38**	**7**	**48**	**17**	**58**	**27**	**68**	**28**
37	**6**	**47**	**16**	**57**	**26**	**67**	**36**	**77**

Четврт начин (*метод на скок на коњ на шаховска табла*). На квадратот $n \times n$ горе му додаваме два реда, а десно една колона. Потоа бројот 1 го запишуваме во произволно поле. Понатаму, броевите ги запишуваме според правилото на скокање на коњот во шахот, при што секогаш скокаме нагоре и надесно. Ако некој број е запишан во додаден ред, тогаш него го префрламе во поле кое се наоѓа во истата колона но n места подолу, а ако е запишан во додадената колона, тогаш го префрламе во истиот ред, но во поле кое е десно за n места. Кога во некое поле е запишан број од видот mn ($m \geq 1$) следниот број се запишува под него и пополнувањето продолжува на истиот начин. Во долната табела е прикажана постапката за добивање на магичен квадрат од единаесетти ред. Притоа полињата во кои се префрлани броеви се обоени сино, а полињата во кои се запишува број по број од видот mn ($m \geq 1$) се обоени портокалово.

	108		26	51	76	90	115	19	44	58	83
	120	13	38	63	88	102	6	31		70	95
107	**11**	**25**	**50**	**75**	**89**	**114**	**18**	**43**	**57**	**82**	107
119	**12**	**37**	**62**	**87**	**101**	**5**	**30**	**55**	**69**	**94**	119
10	**24**	**49**	**74**	**99**	**113**	**17**	**42**	**56**	**81**	**106**	10
22	**36**	**61**	**86**	**100**	**4**	**29**	**54**	**68**	**93**	**118**	22
23	**48**	**73**	**98**	**112**	**16**	**41**	**66**	**80**	**104**	**9**	
35	**60**	**85**	**110**	**3**	**28**	**53**	**67**	**92**	**117**	**21**	35
47	**72**	**97**	**111**	**15**	**40**	**65**	**79**	**104**	**8**	**33**	47
59	**84**	**109**	**2**	**27**	**52**	**77**	**91**	**116**	**20**	**34**	59
71	**96**	**121**	**14**	**39**	**64**	**78**	**103**	**7**	**32**	**46**	71
83	**108**	**1**	**26**	**51**	**76**	**90**	**115**	**19**	**44**	**58**	83
95	**120**	**13**	**38**	**63**	**88**	**102**	**6**	**31**	**45**	**70**	95
					89						

2. Конструирај магичен квадрат од ред $n = 4k$, $k \geq 1$.

Решение (*метод на Роуз-Бол*). Во квадратот $n \times n$ прво ги запишуваме броевите од 1 до n^2 во природен редослед, т.е. од лево кон десно во првиот ред ги запишавме броевите од 1 до n, во вториот ред од $n+1$ до $2n$ итн. во последниот ред од $n(n-1)+1$ до n^2. Потоа квадратот го делиме на k^2 квадрати со должина на страна 4 и во секој од овие квадрати ги повлекуваме главните дијагонали. Сега паровите броеви кои лежат на дијагоналите и се симетрични во однос на центарот на квадратот ги заменуваат местата, а преостанатите броеви остануваат на своите места. На овој начин е добиен бараниот магичен квадрат. Во долните два квадрати се прикажани двете етапи при конструкција на магичен квадрат од осми ред. Полињата во кои се запишани броевите на дијагоналите се обоени портокалово.

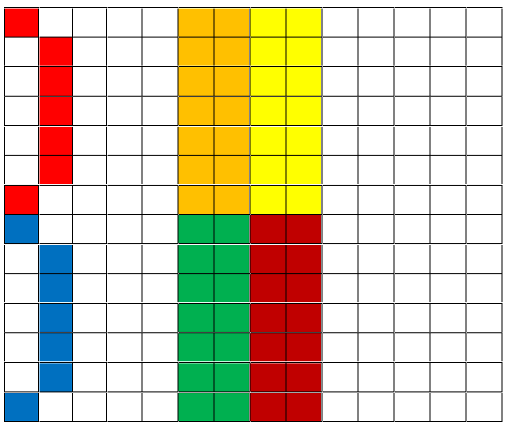
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Забелешка. Друга варијанта на методот на Роуз-Бол е замената на местата на местата на броевите кои се наоѓаат во полиња симетрични во однос на центарот на квадратот и кои не лежат во полиња на дијагоналите на квадратот.

3. Конструирај магичен квадрат од ред $n=4k+2$, $k\geq 1$.

Решение (*метод на четири квадрати*). Имаме $n=2(2k+1), k\geq 1$. Квадратот го делиме на четири квадрати $(2k+1)\times(2k+1)$. Во горниот лев квадрат според некој од познатите методи, конструираме стандарден магичен квадрат со ред $2k+1$. Квадратите во долниот десен, горниот десен и долниот лев агол ги пополнуваме со магични квадрати кои се добиваат од конструираниот магичен квадрат со ред $2k+1$ на кој му ги додаваме броевите $(2k+1)^2$, $2(2k+1)^2$ и $3(2k+1)^2$, соодветно. Потоа броевите кои се наоѓаат во обоените полиња на горните два квадрати, како што е прикажано на десниот квадрат, ги заменуваат местата со броевите кои се на истите места во долните два квадрати, кои се точно под нив. Во средишниот дел на квадратот се обоени $2k-2$



колони и истите симетрични во однос на неговата вертикална оска на симетрија. Примерот е за $n = 4 \cdot 3 + 2$, па затоа се обоени $2 \cdot 3 - 2 = 4$ колони. Значи, замените се меѓу црвените и сините полиња, портокаловите и зелените полиња, жолтите и пиперовите полиња.

Во третиот начин на задача 1 конструиравме магичен квадрат од седми ред. Сега, ако истиот го искористиме, тогаш за $n = 2 \cdot 7$ го добиваме следниот помошен квадрат:

4	29	12	37	20	45	28	102	127	110	135	118	143	126
35	11	36	19	44	27	3	133	109	134	117	142	125	101
10	42	18	43	26	2	34	108	140	116	141	124	100	132
41	17	49	25	1	33	9	139	115	147	123	99	131	107
16	48	24	7	32	8	40	114	146	122	105	130	106	138
47	23	6	31	14	39	15	145	121	104	129	112	137	113
22	5	30	13	38	21	46	120	103	128	111	136	119	144
151	176	159	184	167	192	175	53	78	61	86	69	94	77
182	158	183	166	191	174	150	84	60	85	68	93	76	52
157	189	165	190	173	149	181	59	91	67	92	75	51	83
188	164	196	172	148	180	156	90	66	98	74	50	82	58
163	195	171	154	179	155	187	65	97	73	56	81	57	89
194	170	153	178	161	186	162	96	72	55	80	63	88	64
169	152	177	160	185	168	193	71	54	79	62	87	70	95

од кој по соодветната замена на броевите го добиваме магичниот квадрат од четиринаесетти ред:

151	29	12	37	20	192	175	53	78	110	135	118	143	126
35	158	36	19	44	174	150	84	60	134	117	142	125	101
10	189	18	43	26	149	181	59	91	116	141	124	100	132
41	164	49	25	1	180	156	90	66	147	123	99	131	107
16	195	24	7	32	155	187	65	97	122	105	130	106	138
47	170	6	31	14	186	162	96	72	104	129	112	137	113
169	5	30	13	38	168	193	71	54	128	111	136	119	144
4	176	159	184	167	45	28	102	127	61	86	69	94	77
182	11	183	166	191	27	3	133	109	85	68	93	76	52
157	42	165	190	173	2	34	108	140	67	92	75	51	83
188	17	196	172	148	33	9	139	115	98	74	50	82	58
163	48	171	154	179	8	40	114	146	73	56	81	57	89
194	23	153	178	161	39	15	145	121	55	80	63	88	64
22	152	177	160	185	21	46	120	103	79	62	87	70	95

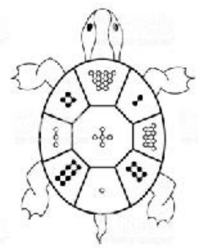
4. Нека $a, d, n \in \mathbb{N}$. Докажи дека од членовите на конечната аритметичка прогресија $a_k = a + (k-1)d$, $k = 1, 2, ..., n^2$ може да се состави магичен квадрат.

Решение. Со броевите од 1 до n^2 составуваме стандарден магичен квадрат C, чија магична константа е $K_n = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Понатаму, во така добиениот магичен квадрат од секој од запишаните броеви го одземаме бројот 1 и добиваме нов магичен квадрат C' во кој се распоредени броевите од 0 до n^2-1 и чија магична константа е $K_n' = K_n - n = \frac{n(n^2-1)}{2}$. Броевите во магичниот квадрат C' ги множиме со бројот d и добиваме нов магичен квадрат C'' во кој се распоредени броевите $0, d, 2d, ..., (n^2-1)d$ и чија магична константа е $K_n'' = dK_n' = \frac{nd(n^2-1)}{2}$. Броевите во магичниот квадрат C'' ги зголемуваме за a и така добиваме нов магичен квадрат C''' во кој се распоредени броевите $a, a+d, a+2d, ..., a+(n^2-1)d$ и чија магична константа е $K_n''' = \frac{n(2a+d(n^2-1))}{2}$, со што задачата е решена.

*

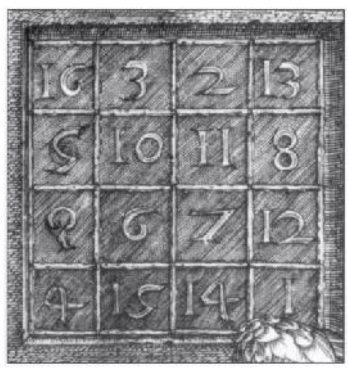
* *

Коментари. а) Според една кинеска легенда, магичните квадрати се откриени во 2200 год. п.н.е., кога импаторот Ју (2025-2197 год. п.н.е.) шетајќи покрај брегот на Жолтата река здогледал како на површината испливала една необична желка, на чиј грб имало девет полиња во кои биле распоредени точки (цртеж десно). Во секое поле имало распоредено различен број точки од една до девет и збирот по секој правец бил 15. Јасно, ова е магичниот квадрат од трет ред.



б) Најстарите пишани текстови за магичните квадрати кои денес може да се најдат се од арапско потекло од VIII век, од авторот Аполонио од Тиана, припадник на александриската школа. Се претпоставува дека во Европа ги донел византискиот математичар Емануел Москопулос.

Најпознатиот европски магичен квадрат се наоѓа на ренесансното дело *Меланхолија*, на германскиот сликар Албрехт Дирер (1471-1528), кој е прикажан на цртежот десно. Овој квадрат има 16 полиња, во кои се запишани броевите од 1 до 16. Интересно е да се забележи дека во средните две полиња на долниот ред еден до друг се наоѓаат броевите 15 и 14, па така тие го формираат бројот 1514, а тоа е годината на создавањето на ова несекојдневно дело.



в) *Совршени квадрати*. За магичниот квадрат ќе велиме дека е *совршен* (*ѓаволски*) ако збирот на броевите во секој ред, во секоја колона, на секоја дијагонала и на секои две комплементарни дијагонали е еднаков. Единствениот магичен квадрат од трет ред не е совршен. Понатаму, може да се докаже дека не постојат совршени квадрати од $(4k+2)-$ри ред. Подолу се дадени совршени квадрати од $4-$ти, $5-$ти и $7-$ми ред и на секој е обоен по еден пар комплементарни доијагонали.

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

1	25	19	13	7
14	8	2	21	20
22	16	15	9	3
10	4	23	17	11
18	12	6	5	24

1	32	14	38	20	44	26
45	27	2	33	8	39	21
40	15	46	28	3	34	9
35	10	41	16	47	22	4
23	5	29	11	42	17	48
18	49	24	6	30	12	36
13	37	19	43	25	7	31

г) *Вкупен број на магични квадрати*. Како и кај латинските квадрати и овде се поставува прашањето за бројот на магичните квадрати од даден ред. Различни магични квадрати од $4-$ти ред има 7070. Ако два квадрати кои може да се добијат еден од друг со пресликување на некоја оска на симетрија или со ротација ги сметаме за еквивалентни, тогаш бројот на нееквивалентните магични квадрати од $4-$ти ред е еднаков на 880. Од овие 880 нееквивалентни магични квадрати од $4-$ти ред точно 48 се совршени. Нееквивалентни магични квадрати од $5-$ти ред има 275305224.

д) Од нестандардните магични квадрати, посебно се интересни магичните квадрати кои се составени само од прости броеви. Јасно, бројот 2 не може да учествува во таков квадрат, бидејќи во спротивно редот и колоната во тој се наоѓа ќе имаат различна парност од другите редови и колони. Затоа, најчесто бројот 2 се заменува со бројот 1. При овој услов на почетокот на XIX век Хенри Дадни за прв пат конструира магичен квадрат кој се состои од прости броеви и чија магична константа е еднаква на 111 (квадратот десно). Подолу се дадени уште четири магични квадрати составени од прости броеви, во кои не учествува бројот 1.

67	1	43
13	37	61
31	73	7

17	89	71
113	59	5
47	29	101

29	131	107
167	89	11
71	47	149

37	79	103
139	73	7
43	67	109

59	53	101
113	71	29
41	89	83

На почетокот на XIX век Ален Џонсон составува магичен квадрат од четврт ред (долу лево), кој е составен од бројот 1 и прости броеви. Магичната константа на квадратот на Џонсон е 120. Понатаму, подолу се дадени уште два магични квадрати од четврт ред. Кај едниот од овие квадрати цифрата на единиците на сите броеви е еднаква на 7.

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

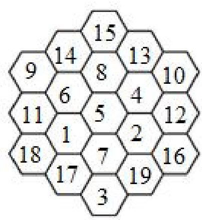
7	367	587	197
617	167	97	277
227	557	337	37
307	67	137	647

19	23	103	107
113	97	29	13
83	79	47	43
37	53	73	89

Забележуваме, дека горните магични квадрати не се составени од последователни прости броеви, па затоа било предизвик да се состави таков магичен квадрат. Така, во 1913 година Џ. Менси го составил магичниот квадрат кој ги содржи бројот 1 и првите 143 непарни прости броеви. Покрај тоа, Менси докажал дека тоа е најмалиот магчен квадрат од ваков вид. Магичната константа на квадратот на Менси е 4514.

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	17	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

ѓ) Со правилните шестаголници, исто како и со квадратите, може да се поплочи целата рамнина. Затоа, логично е да се постави прашањето дали е можно дел од рамнината да се покрие со правилни шестаголници и во шестаголниците да се запишат природните броеви од 1 до k (по еден број во секој шестаголник), така што збирот на броевите во сите правци на соседни шестаголници е еднаков. Одговорот на поставеното прашање го дал К. У. Адамс кој во 1963 година магичниот шестаголник прикажан на цртежот десно му го пратил на познатиот популаризатор на математичките досетки Мартин Гарднер. Гарднер не верувал дека добил некој нов резултат и затоа се консултирал со специјалистот за оваа област Чарлз Триг. Триг не знаел ништо за прашањето, но докажал дека постојат само магични шестаголници од прв и трет ред. Така, се покажало дека Адамс го нашол единствениот нетривијален магичен шестаголник, чија магична константа е 38.



22. НЕКОНКУРЕНТСКИ ИГРИ

Математичките игри, кои овде се предмет на нашите разгледувања, се една од најнестандардните и најразновидни области. Ние нема да се задржиме на теориските разгледувања и на класичните алгоритми за решавање на определени видови игри, туку ќе разгледаме неколку задачи кои припаѓаат на оваа интересна математичка дисциплина и кои се задавани на матемаички натпревари.

Во овј параграф ќе разгледаме задачи во кои при определени услови треба да се постигне дадена цел, но притоа нема играч кој оневозможува да се постигне целта. Ваквите видови игри се нарекуваат *неконкурентски игри*.

1. Во едно кралство има 100 мудреци. Кралот сака да ги тестира мудреците на следниов начин: ги реди во колона и на еској на главата му става бела или црна капа така што секој мудрец ги геда капите на сите пред него, но не ја гледа својата капа и капите на тие зад него. Потоа мудреците еден по еден пробуваат да ја погодат бојата на својата капа. Мудрецот кој ќе погоди добива награда еден златник, а мудрецот кој нема да погоди плаќа казна од еден златник. Кој е најмалиот број златници кои мудреците заедно може да ги заработат?

   Решение. Мудреците може да заработат најмалку 98 златници. Навистина, тоа може да го направата со следнава стратегија. Прв одговара последниот мудрец во колоната така што ќе каже „бела“ ако бројот на црните капи пред него е парен, а „црна“ ако е непарен. Сега првиот мудрец пред него, гледајќи ги капите пред себе, ја знае бојата на својата капа, потоа тој пред него, гледајќи ги капите пред себе и случајќи ги претходните одговори, ја знае бојата на својата капа. Според, тоа, ако сите освен последниот мудрец во колоната ќе дадат точен одговор, што значи дека ќе добијат 99 златници. Сега, ако последниот мудрец во колоната ја погоди бојата на својата капа, тогаш мудреците ќе добијат $99+1=100$ златници, а ако не ја погоди бојата на својата капа мудреците ќе добијат $99-1=98$ златници.

2. На случаен начин 2008 момчиња и 2008 девојчиња се распоредени на круг. Секое девојче има топка, а секое момче има кукла. Во еден чекор секој на својот десен сосед му го предава предметот кој го има во моментот. Потоа сите момчиња кои добиле топка и сите девојчиња кои добиле кукла го напуштаат кругот, а преостанатите продолжуваат на истиот начин. Определи го максималниот можен број чекори во оваа игра.

Решение. Ако сите момчиња се наредени едно до друго, тогаш и сите девојчиња се наредени едно до друго. При ваков распоред во секој чекор само двајца го напуштаат кругот, едно момче и едно девојче. Според тоа, за овој распоред се потребни 2008 чекори.

Ќе докажеме дека за произволен распоред по најмногу 2008 чекори играта ќе заврши. За таа цел доволно е да докажеме дека во секој момент во кругот има како момчиња, така и девојчиња. Тоа значи дека во секој момент ќе има најмалку две соседства девојче-момче и во следниот чекор најмалку двајца ќе го напуштат кругот.

Нека претпоставиме дека во даден момент во кругот останале само момчиња. Тогаш тие имаат кукли, а од кругот излегле 2008 девојчиња, кои исто така имале кукли. Според тоа, кукли има повеќе од 2008, што противречи на условот на задачата. Аналогно се докажува дека не е можно во кругот да останале само девојчиња.

3. Група разбојници го крие своето богатство во 2011 пештери кои се означени со броевите 1, 2, 3, ..., 2011. Преку ден богатството се наоѓа во една од пештерите, а во текот на ноќта разбојниците богатството го преместуваат во една од соседните пештери. Алибаба ја имал оваа информација и секој ден на пладне пребарува една од пештерите. Дали постои стратегија со која Алибаба ќе го најде богатството по конечен број денови?

Решение. Да претпоставиме дека првиот ден богатството е во пештера нумерирана со парен број (парна пештера). Алибаба прво ја проверува пештерата 2010. Ако не го најде богатството, тогаш тоа е во парна пештера со број не поголем од 2008, а следниот ден тоа е во непарна пештера со број не поголем од 2009. Затоа Алибаба утредента влегува во пештерата 2009. Ако пак не го најде богатството, тогаш следниот ден влегува во пештерата 2008 итн. се додека 2009 дена не ја провери пештерата означена со бројот 2. Ако уште не го нашол богатството, тоа ќе значи дека појдовната претпоставка била грешна и дека богатството на почетокот било во непарна пештера. Значи, 2010-тиот ден богатството е во парна пештера, па Алибаба може да ја повтори својата стратегија и така сигурно ќе го најде богатството.

4. Група разбојници го крие своето богатство во n пештери кои редоследно се означени со броевите $1,2,...,n$. Преку ден богатството се наоѓа во една од пештерите, а во текот на ноќта разбојниците богатството го пренесуваат надесно во соседната пештера. Кога богатството ќе се најде во крајната десна пештера, т.е. во пештерата означена со бројот n, тоа останува во неа. Алибаба ја имал оваа информација и секој ден на пладне пребарува една од пештерите. Определи го најмалиот можен број денови кои му се потребни на Алибаба за со сигурност да го најде богатството.

Решение. Доволни се $[\frac{n}{2}]+1$ денови. Алибаба во $i-$тиот ден ја посетува

$(2i-1)$ – та пештера за $1 \le i \le [\frac{n}{2}]$, а последниот ден ја посетува n – тата пештера. На овој начин, ако богатството се наоѓа во пештерата означена со бројот x и $1 \le x \le [\frac{n}{2}]$, тогаш Алибаба го наоѓа во x – тиот ден, а ако $x > [\frac{n}{2}]$, тој го наоѓа во последниот $[\frac{n}{2}]+1$ ден.

Сега, да претпоставиме дека Алибаба може богаството да го најде за $[\frac{n}{2}]$ денови и дека во овие денови тој последователно ги посетува пештерите $p_1, p_2, ..., p_{[\frac{n}{2}]}$. За пештерата x ќе велиме дека е лоша ако богатството кое на почетокот се наоѓа во пештерата x е најдено во i – тиот ден, односно ако $x+i-1=p_i$. За секоја посета на пештерите од страна на Алибаба најмногу една од пештерите $1,2,...,[\frac{n}{2}]+1$ е лоша. Според тоа, барем една од овие пештери не е лоша, па затоа Алибаба нема да ги најде богатството ако тоа на почетокот се наоѓа токму во оваа пештера.

5. Горјан ги запишал броевите од 1 до 100 во некој редослед. Со едно прашање Андреј од Горјан може да го дознае меѓусебниот редослед на произволни 50 од запишаните броеви. Докажи дека со помош на само пет прашања Андреј може да го открие редоследот на сите 100 броеви.

   Решение. Да ги поделиме броевите во две групи A и B од по 50 броеви. Прво прашуваме за редоследот на броевите од групата A, а потоа за редоследот на броевите од групата B. Во третото прашање прашуваме за редоследот на првите 25 броја од групата A и првите 25 броја од групата B. Во четвртото прашање прашуваме за редоследот на последните 25 броја од групата A и последните 25 броја од групата B. Така, по само четири прашања ги знаеме првите 25 и последните 25 броја од бараниот редослед. Конечно, со петтото прашање го добиваме редоследот на преостанатите 50 броеви.

6. На неколку деца им се дадени 2^n монети, при што секое дете има најмалку една монета. Во еден потег, секогаш кога некое дете има најмалку половина од сите монети, а повеќе од секое од преостанатите други деца, тоа на секое друго дете му дава онолку монети колку што тоа дете веќе има. Колку најмногу потези може да се направат?

   Решение. По првиот потег секое дете има парен број монети. Со индукција лесно се докажува дека по k – тиот потег секое дете има број на монети делив со 2^k. Но, вкупниот број монети е еднаков на 2^n, па затоа по последниот чекор секое од двете деца кое добива монети не може да има повеќе од 2^{n-1} монети. Тоа значи дека на опишаниот начин може да се направат најмногу $n-1$ чекори. Бројот $n-1$ се достигнува, на пример, кога имаме три деца, при што двете имаат по 1 монета, а третото има 2^n-2 монети. Притоа, од првиот до $(n-1)-$виот потег бројот на монетите кои ќе ги имаат децата последователно ќе биде

$$2,2,2^n-2^2,$$
$$2^2,2^2,2^n-2^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2^{n-2},2^{n-2},2^{n-1},$$
$$2^{n-1},2^{n-1},0.$$

7. Во еден чекор можеме да го измениме множеството $S\subset X=\{1,2,...,n\}$ на еден од следниве начини:

i) го додаваме 1, ако $1\notin S$,

ii) го отфрламе n, ако $n\in S$,

iii) го отфрламе r и го додаваме $r+1$, ако r е таков што $r\in S$ и $r+1\notin S$.

Нека претпоставиме дека постои низа од 2^n-1 чекори во која од $\varnothing$ доаѓаме до множеството $\{n\}$, при што поминуваме низ секое подмножество на множеството X точно еднаш. Докажи дека $n+1$ е степен на бројот 2.

Решение. Во секој чекор зброт на елементите на множеството S се зголемува за 1 или се намалува за n, што значи дека се менува за 1 по модул $n+1$. Како од празното множество по 2^n чекори повторно се добива празното множество, следува дека $2^n\equiv 0(\bmod n+1)$, т.е. $n+1\,|\,2^n$, т.е. $n+1$ е степен на бројот 2.

8. Пабло замислил природен број n, $1\le n\le 2000$, а Матео пробува да го погоди. Во секој чекор Матео може да избере множество броеви A и во врска со тоа множество на Пабло да му постави едно прашање, на што Пабло одговара со *да* или со *не*. Определи го најмалиот број прашања кои што му се потребни на Матео за со сигурност да го погоди бројот n.

Решение. Нека n е најмалиот број прашања кои му се потребни на Матео за со сигурност да го погоди бројот кој што го замислил Пабло. За да Матео секогаш може да го погоди бројот сите броеви од 1 до 2000 мора да генерираат различни низи одговори *да* и *не*, а низи одговори има 2^n. Затоа мора да важи $2^n\ge 2000$. Најмалиот број n за кој е исполнето последното неравенство е 11, што значи дека на Матео му требаат најмалку 11 прашања. Единаесет прашања се доволни со следнава стратегија. Матео постојано го избира множеството $A=\{1\}$ и за $i=1,2,...,11$ неговото $i-$то прашање е:

„Дали $i-$тата бинарна цифра на бројот n во бинарниот запис на замислени-

от број, гледајќи од десно на лево, припаѓа на множеството A?“
Јасно, добиените одговори му овозможуваат да ги определи сите цифри во бинарниот запис на бројот n, а со тоа и бројот n.

9. Ивана замислила полином $P(x)$ чии коефициенти се ненегативни цели броеви. Марија сака да го определи овој полином. Во еден потез го кажува целиот број k, а Ивана и ја соопштува вредноста $P(k)$. Најди стратегија со која Марија со најмал број потези ќе го определи полиномот $P(x)$.

   Решение. Еден потез не е доволен, бидејќи врз основа на равенството $P(k)=k$ Марија не може да се определи меѓу полиномите $P(x)=x$ и $P(x)=k$. Два потези се доволни и стратегијата е следна. За $k=1$ Марија дознава $P(1)=n$, од што заклучува дека сите коефициенти на полиномот $P(x)$ не се поголеми од n. Потоа за $k=n+1$ Марија ја дознава вредноста $P(n+1)=m$. Од добиениот одговор таа еднозначно ги определува коефициентите на полиномот $P(x)$ како цифри на бројот m во броен систем со основа $n+1$.

10. Петар и Васил измислиле десет квадратни полиноми. Потоа Васил кажувал последователни природни броеви (почнувајќи од некој број), а Петар го заменувал секој од кажаните броеви во некој од квадратните полиноми (по сопствен избор) и добиените вредности ги запишувал на табла од лево на десно. Се покажало, дека броевите, запишани на таблата, формираат аритметичка прогресија (во редослед во кој се запишувани). Колку најмногу броеви може да каже Васил?

   Решение. Ќе докажеме, дека Петар го искористил секој квадратен полином $P(x)$ не повеќе од двапати. Навистина, нека $n-$тиот член на добиената аритметичка прогресија е еднаков на $an+b$, а $n-$тиот од броевите на Васил е $k+n$. Тогаш ако $k+n$ го замениме во $P(x)$, ја добиваме равенката $P(k+n)=an+b$, која е квадратна по n и истата има најмногу два корени.

   Значи, Васил може да каже најмногу 20 броеви. Петар и Васил можат да направат да се кажат 20 броеви, на следниов начин: ги избираат квадратните полиноми $P_k(x)=x+(x-2k)(x-(2k-1))$, за $k=1,2,...,10$ и Васил ги кажува броевите 1, 2, ..., 20. Бидејќи $P_k(2k-1)=2k-1$ и $P_k(2k)=2k$, Петар може да ги заменува така да последователно се добијат броевите 1, 2, ..., 20.

11. На кружница се распоредени 2009 ненегативни цели броеви кои се помали или еднакви на 100. Дозволено е да се додаде по 1 на секои два соседни броја, при што за секои два соседни броја оваа операција се извршува најмногу

k пати. Определи го најмалиот k за кој сме сигурни дека сите броеви можеме да ги направиме еднакви.

Решение. *Одговор*: $k=100400$.

Броевите да ги означиме со $a_1,...,a_{2009}$ и да означиме $a_{n+2009}=a_n=a_{n-2009}$. Нека $N=100400$.

1) Ставаме $a_2=a_4=...=a_{2008}=100$ и $a_1=a_3=...=a_{2009}=0$. Нека за некој k броевите станале еднакви. Да го разгледаме збирот

$$S=(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+...+(a_{2008}-a_{2009}).$$

Овој збир се зглемува за 1 кога додаваме 1 на парот (a_1,a_2), се намалува за 1 кога додаваме 1 на парот (a_{2009},a_1) и не се менува во останатите случаи. Бидејќи на почетокот $S=100\cdot 1004=N$, а на крајот $S=0$, последното значи дека парот (a_{2009},a_1) ќе биде зголемен најмалку N пати. Значи, $k\geq N$.

2) Останува да докаеме дека при $k=N$ сите броеви можеме да ги направиме еднакви. За таа цел да го зголемиме парот (a_i,a_{i+1}) точно

$$s_i=a_{i+2}+a_{i+4}+...+a_{i+2008}$$

пати. Тогаш бројот a_i ќе биде еднаков на

$$a_i=s_{i-1}+s_i=a_i+(a_{i+1}+a_{i+3}+...+a_{i+2007})+(a_{i+2}+a_{i+4}+...+a_{i+2008})$$
$$=a_1+a_2+...+a_{2009},$$

што значи дека сите броеви стануваат еднакви. Останува да забележиме дека $s_i\leq 1004\cdot 100$.

12. Бесмртна болва се движи по целобројните точки од реалната права, почнувајќи од 0. За секој природен број k таа во $k-$тиот скок скока лево или десно за 2^k+1 во однос на точката во која се наоѓа. Дали е точно дека за секоја точка со координата природен број постои момент во кој болвата ќе биде во таа точка, ако и е дозволено да минува низ една иста точка повеќе од еднаш?

Решение. *Одговор*: ДА.

Нека во еден момент болвата се наоѓа во точка $n\in\mathbb{N}$. Ќе покажеме како болвата ќе премине од точката n во точката $n+1$. Нека болвата стигнала во n со $k-1$ скокови. Тогаш следниот скок на болвата е со дожина 2^k+1, лево или десно од местото на кое се наоѓа. Нека тоа е десно. Имаме

$$2^{k+l}+1-(2^k+1)-(2^{k+1}+1)-...-(2^{k+l-1}+1)=$$
$$=(2^{k+l}-2^k-2^{k+1}-...-2^{k+l-1})+1-2^k$$
$$=2^k+1-2^k=1.$$

Тоа е операција која ни дозволува преместување десно за должина 1. Така, почнувајќи од 0, можеме да се преместиме во 1, па потоа во 2 итн.

13. Дадени се три карти и на секоја од нив е напишан по еден природен број. Овие броеви p,q и r го задоволуваат условот $0<p<q<r$. Тројца играчи A, B и C играат игра во која еден круг се состои во следното: картите се мешаат и се делат така што секој играч добива по една карта и потоа секој играч добива онолку топчиња колку што е бројот запишан на неговата карта, по што картите се враќаат, а топчињата остануваат кај играчите. Играта има N кругови, $N\geq 2$. На крајот на играта, играчот A имал вкупно 20 топчиња, $B-10$ топчиња, а $C-9$ топчиња.
Познато е дека во последниот круг играчот B добил r топчиња. Кој од играчите добил q топчиња во првиот круг?

Решение. Вкупниот број на поделени топчиња во играта е
$$N(p+q+r)=20+10+9=39\,.$$
Бидејќи $N\geq 2$ и $p+q+r\geq 1+2+3=6$, мора да е $N=3$ и $p+q+r=13$. Играчот B во последниот круг добил r топчиња, а вкупно добил 10 топчиња и бидејќи $p+q+r=13>10$, тој во првите два круга мора да добил по p топчиња. Тоа значи, дека C во првите два круга добил барем по q топчиња. Ако тој во еден круг добие r топчиња, тогаш вкупно би ги имал барем $r+q+p=13$, што не е можно, бидејќи вкупно добил само 9 топчиња.

Значи, распоредот на топчињата е:
$$A:r,r,q;\quad B:p,p,r;\quad C:q,q,p.$$
Броевите p,q и r може да се одредат со следниот систем линеарни равенки:
$$q+2r=20$$
$$2p+r=10$$
$$p+2q=9$$
т.е. $p=1, q=4$ и $r=8$.

14. На кружница во некој редослед се распоредени броевите $1,2,...,n$. Ако постојат два соседни броја a и b (b е десно од a) така што $b\leq a-2$, дозволено е на овие броеви да им ги замениме местата. Докажи дека по најмногу $\binom{n}{3}$ вакви замени може да се дојде во состојба по која понатаму замените не се можни.

Решение. За $k=1,2,...,n-1$, со x_k да го означиме бројот на броевите $l<k$ такви што броевите $k+1, l$ и k се појавуваат на кружницата во овој редослед. При замена на бројот n со некој од броевите $a\leq n-1$, бројот x_{n-1} се намалува за 1, а сите други броеви x_i остануваат исти. Исто така, ако b и $a\leq b-2$ ги заменат местата, тогаш x_{b-1} се намалува за 1, додека x_b расте за

1. Според тоа, по секоја замена големината $M=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)x_k$ се намалува точно за 1. Бидејќи $x_k \le k-1$, почетната вредност на M не е поголема од

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(k-1) &= n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)-\sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)\\ &= n\sum_{k=1}^{n-2}k-\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)\\ &= n\sum_{k=1}^{n-2}k-\sum_{k=1}^{n-2}k^2-\sum_{k=1}^{n-2}k\\ &= \frac{n(n-2)(n-1)}{2}-\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}-\frac{(n-2)(n-1)}{2}\\ &= \frac{(n-1)(n-2)(3n-2n+3-3)}{6}=\binom{n}{3},\end{aligned}$$

па затоа не може да се реализираат повеќе од $\binom{n}{3}$ замени.

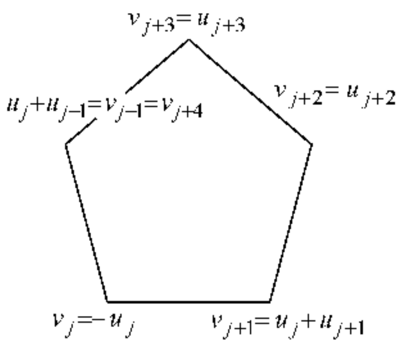
15. На темињата на правилен петаголник им се придружени цели броеви, чиј збир е природен број. Ако на три последователни темиња им соодветствуваат броевите x,y,z и $y<0$, тогаш се врши следнава операција:

броевите x,y,z се заменуваат со $x+y,-y,z+y$, соодветно.

Оваа операција се изведува се додека барем еден од петте броеви е негативен. Дали постапката ќе заврши по конечно многу чекори?

Решение. Нека $u_1,...,u_5$ се цели броеви и барем еден од нив е негативен. Еден од овие броеви да го означиме со u_j.

Нека $v_1,...,v_5$ се цели броеви добиени од $u_1,...,u_5$ со примена на операцијата од задачата, така што $x=u_{j-1}$, $y=u_j$, $z=u_{j+1}$ (применето е циклично индексирање $u_i=u_{i+5}$), т.е. $v_{j-1}=u_{j-1}+u_j$, $v_j=-u_j$, $v_{j+1}=u_{j+1}+u_j$. Значи, работиме со подредени петорки



$U=(u_1,...,u_5)$, $V=(v_1,...,v_5)$.

Ја разгледуваме функцијата F која на секоја петорка $X=(x_1,...,x_5)$ и придружува број $\sum_{i=1}^{5}(x_i-x_{i-1})^2$ (секаде се применува циклично индексирање).

$$F(V) = \sum_{i=j}^{j+4} (v_{i+1} - v_{i-1})^2$$

$$= (u_j + u_{j+1} - u_j - u_{j-1})^2 + (u_{j+2} + u_j)^2 +$$

$$+ (u_{j+3} - u_j - u_{j+1})^2 + (u_j + u_{j-1} - u_{j+2})^2 + (-u_j - u_{j+3})^2$$

$$= (u_{j+1} - u_{j-1})^2 + (u_{j+2} + u_j)^2 + (u_{j+3} - u_{j+1} - u_j)^2 +$$

$$+ (u_{j-1} - u_{j+2} + u_j)^2 + (u_j + u_{j+3})^2$$

$$= F(U) + [(u_{j+2} + u_j)^2 - (u_{j+2} - u_j)^2] +$$

$$+ [(u_{j+3} - u_{j+1} - u_j)^2 - (u_{j+3} - u_{j+1})^2] +$$

$$+ [(u_{j-1} - u_{j+2} + u_j)^2 - (u_{j-1} - u_{j+2})^2] +$$

$$+ [(u_j + u_{j+3})^2 - (u_j - u_{j+3})^2]$$

$$= F(U) + u_j(4\,u_{j+2} - 2\,u_{j+3} + 2\,u_{j+1} + u_j + 2\,u_{j-1} - 2\,u_{j+2} + u_j + 4\,u_{j+3})$$

$$= F(U) + u_j(2\,u_{j+2} + 2\,u_{j+1} + 2\,u_j + 2\,u_{j+3} + 2\,u_{j-1})$$

$$= F(U) + 2\,u_j S\ ,$$

при што $S = u_1 + ... + u_5 = v_1 + ... + v_5$ (т.е. во секој чекор се појавува исто S). Бидејќи $S > 0,\ \ F(V) < F(U),$ па според тоа вредностите на F образуваат строго опаѓачка низа ненегативни цели броеви. Секоја таква низа е конечна.

16. Даден е природен број $N \geq 2$. Во редица се наоѓаат $N(N+1)$ фудбалери со меѓусебно различни висини. Тренерот Ванчо сака да отстрани $N(N-1)$ играчи, така што ќе остане редица со $2N$ фудбалери во која се задоволени следниве N услови:

1) меѓу двајцата највисоки играчи не стои никој,
2) меѓу третиот и четвртиот играч по висина не стои никој,

....

N) меѓу двајцата најниски играчи не стои никој.

Докажи дека ова секогаш може да се постигне.

Решение. Да ја поделиме редицата на N групи со по $N+1$ последователни играчи и со A_i и B_i соодветно да ги означиме највисокиот и вториот највисок играч во $i-$тата група. Нека B_k е највисокиот од сите играчи $B_1, B_2,$ $..., B_n$. Тренерот Ванчо ги отстранува сите играчи A_i за $i \neq k$ и сите играчи од $k-$тата група освен B_k. На играчите A_k и B_k им дава дресови и веќе не се осврнува на нив: тие се повисоки од сите играчи во редицата и меѓу нив не стои ниту еден играч. Остануваат уште $N-1$ група со по N играчи. Ако претходната постапка ја повтори N пати, тогаш Ванчо ја постигнува целта.

17. Нека се n и k природни броеви такви што $k > n$ и $k-n$ е парен број. Дадени се $2n$ сијалици означени со броевите $1,2,...,2n$; секоја од кои може да биде запалена или изгасната. На почетокот сите сијалици се изгаснатаи. Разгледуваме низи од чекори: во секој чекор се менува состојбата на тачно една сијалица (запалена станува изгасната, а изгасната - запалена).
Нека N е бројот на такви низи од k чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до n се запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати.
Нека M е бројот на такви низи од k чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до n запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати и притоа ниту еднаш не е променета состојбата на сјалиците од $n+1$ до $2n$.
Пресметај $\frac{N}{M}$.

Решение. Низата чекори по која сите сијалици од 1 до n се запалени, а останатите се изгаснати ја нарекуваме *допустлива*. Ако притоа сијалиците од $n+1$ до $2n$ не ја менувале состојбата, тогаш низата ја нарекуваме *строга*. Значи, има N допустливи низи, од кои M се строги. Јасно, $M, N > 0$. Секоја допустлива низа, на секоја сијалица од 1 до n и ја менува состојбата непарен број пати, а на секоја од останатите сијалици парен број пати.
Набљудуваме строга низа чекори P. Нека со неа сијалицата i $(1 \leq i \leq n)$ ја менувала состојбата m_i пати. Притоа важи $m_1 + m_2 + ... + m_n = k$. Ако за секој i избереме парен број од овие m_i чекори и ги замениме во чекорите на сијалицата $n+i$, добиваме допустлива низа чекори. За дадено i, овие чекори може да се изберат на $2^{m_i - 1}$ начини (толку има подмножества на m_i-елементно множество со парен број елементи). Вкупно, со оваа постапка од строга низа чекори P можеме да направиме допустлива низа на точно $\prod_{i=1}^{n} 2^{m_i - 1} = 2^{k-n}$ начини.
Од друга страна, секоја допустлива низа чекори може да се добие само од една строга низа (онаа која се добива кога сите чекори на било која сијалица j за $j > n$ се заменат со чекор на сијалицата $j-n$), и тоа на само еден начин. Според тоа, вака е конструирано “$1 \leftrightarrow 2^{k-n}$” пресликување меѓу строгите и допустливите низи чекори. Затоа $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$.

18. Дадена е правоаголна табла $ABCD$ со димензии $\overline{AB} = 20$ и $\overline{BC} = 12$, која е поделена на 20×12 единечни квадрати.
Нека $r \in \mathbb{N}$. Монета може да биде придвижена од еден квадрат на друг ако и само ако растојанието меѓу центрите на двата квадрата е $\sqrt{r}$. Целта е да се најде низа од движења на монетата од квадратот чие теме е A до квадратот чие теме е B.

a) Докажи дека целта не може да се постигне ако r е делив со 2 или 3.
b) Докажи дека целта може да се постигне ако $r = 73$.
c) Дали целта може да се постигне ако $r = 97$?

Решение. Работиме на решетка

$$\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \le x \le 19,\ 0 \le y \le 11\}.$$

Ако монетата ја придвижиме од точката $P(x_1, y_1)$ до точката $Q(x_2, y_2)$, таа ќе помине растојание $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, односно $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, каде $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$. Значи, $x^2 + y^2 = r$.

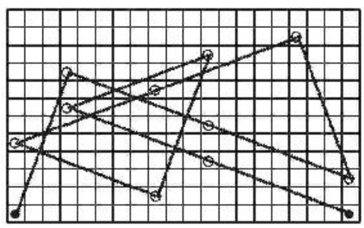
a) Ако $r = 2k$, тогаш $x^2 + y^2 = 2k$, што е можно ако и само ако x и y се со иста парност. Со A_1, B_1, C_1 и D_1 да ги означиме центрите на квадратите со темиња A, B, C, D соодветно. Нека поставиме правоаголен координатен систем таков што $A_1(0,0)$, $B_1(19,0)$, $D_1(0,12)$ и $C_1(19,12)$. Тогаш монетата може да се помести од полето (p_1, q_1) на полето (p_2, q_2) ако и само ако

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 \pmod 2, \text{ т.е. } \ p_1 - p_2 \equiv q_1 - q_2 \pmod 2.$$

Но, бидејќи $A_1(0,0)$ и $B_1(19,0)$ од $0 + 0 \not\equiv 19 + 0 \pmod 2$ заклучуваме дека целта не може да се постигне.

Нека $r = 3k$, т.е. $x^2 + y^2 = 3k$. Ако $x = 3p$, тогаш мора да е $y = 3q$. Ако $x = 3p \pm 1$, тогаш $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, па мора да е $y^2 \equiv -1 \pmod 3$, што не е можно. Значи, ако монетата се поместува од полето (p_1, q_1) на полето (p_2, q_2) тогаш $p_1 - p_2 \equiv q_1 - q_2 \pmod 3$. Но, како $19 - 0 \not\equiv 0 - 0 \pmod 3$ заклучуваме дека целта не може да се постигне.

b) Може. Бидејќи $r = 73 = 8^2 + 3^2$ секој чекор е од видот $(x_1, y_1) \to (x_1 \pm 8, y_1 \pm 3)$ или од видот $(x_1, y_1) \to (x_1 \pm 3, y_1 \pm 8)$. Едно решение е дадено на цртежот десно.



c) Не е можно. Ќе докажеме дека бројот на поместувања од видот $(x, y) \to (x \pm 4, y + 9)$ е еднаков на бројот на поместувања од видот $(x, y) \to (x \pm 4, y - 9)$.

Ако ова не е точно, тогаш без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека имаме повеќе поместувања од видот $(x, y) \to (x \pm 4, y + 9)$, „качувања“ за 9.

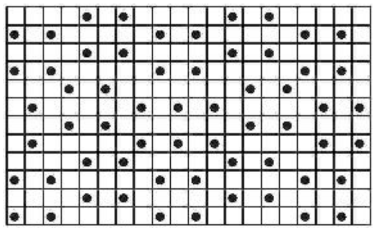
За да точката остане на $x-$оската, овој вишок на качувања може да се компензира со „симнувања“ за 4 и притоа $y-$ положбата на паричката се менува за 1 по модул 4. Затоа, за да остане на $x-$оската вишокот на движења од облик $(x \pm 4, y+9)$, во однос на движењата $(x \pm 4, y-9)$ мора да е делив со 4, и при секое од нив почетната $y-$ положба на монетата е различна по модул 4. Но, бидејќи не постои положба на таблата (x, y), каде $y \equiv 3 (\bmod 4)$ и качување за 9 е можно, добиваме дека тврдењето е точно, т.е. бројот на движењата од облик $(x,y) \to (x \pm 4, y+9)$ е еднаков на бројот на движењата од облик $(x,y) \to (x \pm 4, y-9)$. Оттука следува и дека:

колку што има движења од облик $(x,y) \to (x \pm 9, y+4)$, *толку има движења од облик* $(x,y) \to (x \pm 9, y-4)$.

Значи, секогаш имаме парен број на поместувања од двата вида, што значи по $x-$оската секогаш се движиме за парно растојание, па како растојанието од $A_1(0,0)$ до $B_1(19,0)$ е 19, заклучуваме дека целта не може да се постигне.

Забелешка 1. Во делот на задачата под *c)* всушност е докажано дека при димензии на таблата $12 \times 2n$ целта не може да се постигне, а истото го докажавме и во делот од задачата *a) i).*

Забелешка 2. На десниот цртеж се прикажани сите полиња кои може да се достигнат во делот од задачата под *c).*



19. Десет играчи почнале да играат игра, секој со иста сума пари. Еден по друг секој од нив фрлал по пет коцки. По секое фрлање, играчот кој ги фрлил коцките му исплаќа на секој од своите девет соиграчи сума еднаква на $n-$тиот дел од сумата која овој ја имал пред последното фрлање на коцките, каде n е збирот на броевите кои ги покажале коцките. Кога последниот, десеттиот играч ги фрлил коцките збирот на броевите кои го покажале бил 12, и по извршеното плаќање се покажало дека секој играч имал еднаква сума на пари како и на почетокот на играта.

Најди ги, ако тоа е можно, збировите на броевите кои ги покажале коцките во претходните девет фрлања.

Решение. Нека T е сумата со која секој играч ја почнал играта и нека n_j е вкупниот збир кој го покажале коцките во $j-$тото фрлање. Играчот со број i непосредно по $i-1$ - то фрлање има вкупна сума на пари

$$S = T(1+\frac{1}{n_1})(1+\frac{1}{n_2})...(1+\frac{1}{n_{i-2}})(1+\frac{1}{n_{i-1}}).$$

Во следното фрлање играчот i мора да плаќа. Тој мора да плати вкупно $\frac{1}{n_i}(10T-S)$, па му останува

$$S - \frac{1}{n_i}(10T-S) = T[(1+\frac{1}{n_1})(1+\frac{1}{n_2})...(1+\frac{1}{n_{i-2}})(1+\frac{1}{n_{i-1}}) - \frac{10}{n_i}].$$

По десет фрлања тој вкупно има

$$T[(1+\frac{1}{n_1})(1+\frac{1}{n_2})...(1+\frac{1}{n_{i-2}})(1+\frac{1}{n_{i-1}})-\frac{10}{n_i}(1+\frac{1}{n_{i+1}})...(1+\frac{1}{n_{10}})]$$

пари, што е еднакво на почетната сума на пари T. За $i=0,1,...$ воведуваме ознаки

$$a_i=(1+\frac{1}{n_{i+1}})...(1+\frac{1}{n_{10}}) \text{ и } a_{10}=1 .$$

Така добиваме систем од десет линеарни равенки со десет непознати:

$$a_0-\frac{10}{n_i}a_i=1,\ i=1,2,...,10 .$$

Со одземање на $i-$тата и $(i+1)-$та равенка добиваме

$$n_{i+1}+1=n_i,\ i=1,2,...,9 .$$

Од $n_{10}=12$ се добива $n_9=13$, $n_8=14$,..., $n_1=21$.

Со непосредна проверка се покажува дека играта се одвивала на опишаниот начин.

20. Во еден ред се наредени n бели и n црни жетони. Во еден потег два разнобојни жетони можат да си ги заменат местата, но само ако меѓу нив има најмногу $n-1$ други жетони. Колкав е најмалиот број на потези со кои, тргнувајќи од произволен распоред, белите жетони може да се разместат на првите n места, а црните жетони на преостанатите n места.

Решение. Нека во почетниот распоред црните жетони се наоѓаат на првите n места, а белите на последните n места. Јасно, тргнувајќи од овој распоред за да се добие саканиот распоред се потребни најмалку n потези (секој бел жетон треба да се премести).

Ќе докажеме дека тргнувајќи од произволен распоред, по најмногу n потези може да се добие саканиот распоред на жетоните.

Ако почетниот распоред е саканиот, тогаш се потребни 0 потези.

Нека постои црн жетон кој се наоѓа меѓу првите n жетонии нека најлевиот таков жетон се наоѓа на $i-$тото место ($i\geq 1$). Следните n жетони не може да бидат црни, т.е. некој од следните n жетони е бел. Но, тогаш меѓу тој бел и почетно избраниот црн жетон има најмногу $n-1$ други жетони, па можеме да ги зементиме нивните места. Значи, во еден потег добиваме распоред во кој најлевиот црн жетон е десно од $i-$тото место ($i\geq 1$). Ако е добиен саканиот распоред, тогаш постапката завршува по еден потег. Нека повторно постои црн жетон кој се наоѓа меѓу првите n жетони и нека најлевиот таков жетон е на $i-$тото место ($i\geq 2$). Повторувајќи ја претходната постапка, по вкупно два потега, добиваме распоред во кој најлевиот црн жетон е десно од $i-$тото место ($i\geq 2$). Ако вака добиениот распоред е саканиот, тогаш постапката завршува по два потези.

Повторувајќи ја опишаната постапка или саканиот распоред ќе го добиеме пред $n-$тиот потег или по $n-1$ потези меѓу првите n жетони ќе има црн жетон и тој ќе се наоѓа десно од $(n-1)-$вото место, т.е. ќе се наоѓа на $n-$тото место. Сега со уште еден потег се добива саканиот распоред.

21. Во секоја од шесте кутии $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ на почетокот се наоѓа точно по една монета. Дозволено е да се вршат следниве операции:

1° Да се избере непразна кутија B_j за некој $j \in \{1,2,3,4,5\}$, да се извади една монета од B_j и да се додадат две монети во B_{j+1}.

2° Да се избере непразна кутија B_k за некој $k \in \{1,2,3,4\}$, да се извади една монета од B_k и да се заменат содржините (може да се и празни) на кутиите B_{k+1} и B_{k+2}.

Испитај дали со конечна низа вакви операции може да се постигне кутиите B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 да се празни, а кутијата B_6 да содржи точно $2010^{2010^{2010}}$ монети. (Важи $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Решение. Си низа операции, од почетната состојба (1,1,1,1,1,1) последователно се добива:

$$(1,1,1,0,3,1)\to(1,1,1,0,0,7)\to(1,1,0,2,0,7)\to(1,0,2,2,0,7)\to(0,2,2,2,0,7)$$
$$\to(0,2,2,1,7,0)\to(0,2,2,1,0,14)\to(0,2,2,0,14,0)\to(0,2,1,14,0,0).$$

Лема 1. За $a \in \mathbb{N}$, со низа операции на три кутии од состојба $(a,0,0)$ може да се дојде до состојба $(0,2^a,0)$.

Доказ. Индукција по a. Тврдењето е точно за $a=1$. Нека претпоставиме дека тоа е точно за $a-1$. Тогаш од состојбата $(a,0,0)$, занемарувајќи една монета во првата кутија може да се дојде до состојбата $(1,2^{a-1},0)$. Ја применуваме операцијата 1° точно 2^{a-1} пати и ја добиваме состојбата $(1,0,2^a)$, од каде со примена на операцијата 2° ја добиваме состојбата $(0,2^a,0)$. ■

Лема 2. Дефинираме $T_1 = 2$ и $T_{a+1} = 2^{T_a}$. За $a \in \mathbb{N}$, со низа операции на четири кутии, од состојбата $(a,0,0,0)$ може да се дојде до состојбата $(0,T_{a+1},0,0)$.

Доказ. Индукција по a. Тврдењето е точно за $a=1$. Нека претпоставиме дека тоа е точно за $a-1$. Тогаш од состојбата $(a,0,0,0)$ може да се дојде до состојбата $(1,T_a,0,0)$, па според лема 1 до состојбата $(1,0,T_{a+1},0)$, па ако уште еднаш го примениме чекорот 2° до состојбата $(0,T_{a+1},0,0)$. ■

Користејќи ги низите чекори опишани во лемите 1 и 2 добиваме

$$(0,2,1,14,0,0)\to(0,2,1,0,2^{14},0)\to(0,2,0,2^{14},0,0)\to(0,1,2^{14},0,0,0)$$
$$\to(0,1,0,T_{2^{14}},0,0)\to(0,0,T_{2^{14}},0,0,0)\to(0,0,0,T_{T_{2^{14}}},0,0).$$

Очигледно $T_{T_{2^{14}}}$ е многу поголем од $N=2010^{2010^{2010}}$. Со примена на операцијата 2° точно $T_{T_{2^{14}}}-\frac{1}{4}N$ пати ја добиваме состојбата $(0,0,0,\frac{1}{4}N,0,0)$, од каде со примена на операцијата 1° добиваме $(0,0,0,0,\frac{1}{2}N,0)$, па добиваме $(0,0,0,0,0,N)$.

22. Во сите единечни клетки на $n\times m$ таблица е запишан по еден цел број. Дијагонала на таблицата се нарекува множеството клетки за кои разликата меѓу бројот на редот и бројот на колоната е еднаква. Во секој чекор имаме право или да додадеме 1 или да одземеме 1 од сите клетки од даден ред, дадена колона или дадена дијагонала. Докажи, дека ако со помош на овие операции можеме да ги направиме еднакви на нула броевите во секоја 3×3 подтаблица, при што останатите броеви не се менуваат, тогаш можеме да ги направиме еднакви на нула сите броеви од таблицата.

Решение. Со $a_{i,j}$ да го означиме бројот кој е запишан во клетката која се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона, а со $S(i,j)$ да го означиме 3×3 квадратот со горен десен агол со клетката со бројот $a_{i,j}$, ако таков постои.

Кога $m,n\ge 3$ (ако $m\le 2$ или $n\le 2$ нема подтаблица 3×3), за секоја подтаблица $S_{i,j}$ да го разгледаме изразот

$$M_{i,j}=a_{i+1,j}-a_{i+2,j}+a_{i+2,j-1}-a_{i+1,j-2}+a_{i,j-2}-a_{i,j-1}.$$

Ако избереме ред, колона или дијагонала на таблицата $S_{i,j}$, вредноста на тој израз не се менува. Бидејќи по услов можеме да ги направиме сите броеви на секоја 3×3 подтаблица еднакви на нула, добиваме дека $M_{i,j}=0$.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $m+n$. Ако $m+n=6$, т.е. $m=n=3$, тогаш тврдењето е точно. Ако $m+n>6$, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $m>3$. Разгледуваме таблица $n\times(m-1)$, добиена од дадената таблица без последната колона. Од индуктивната претпоставка следува, дека сите броеви на оваа $n\times(m-1)$ таблица можеме да ги направиме еднакви на нула.

Вредностите $m_{i,m}$, $1\le i\le n-1$ се инваријанти, од каде следува (имајќи предвид, дека само во последната колона на разгледуваните 3×3 подтаблици има различни од нула), дека $a_{i+1,m}=a_{i+2,m}$, за $1\le i\le n-2$. Според тоа, $a_{2,m}=a_{3,m}=...=a_{n,m}$ и ако ја извршиме дозволената операција за таа колона можеме да ги направиме сите овие броеви еднакви на нула. Останува само бројот $a_{1,m}$, кој е дијагонала и исто така можеме да го направиме еднаков на нула. Со тоа индукцијата е завршена.

За $m+n<6$ имаме $m\le 2$ или $n\le 2$ и доказот е тривијален.

23. Даден е природен број k. Определи го најмалиот природен број $n\ge k+1$ за кој во следнава игра може да се одиграат бесконечно многу потези.

Дадени се n кутии означени со $b_1, b_2, ..., b_n$, при што за секој i кутијата b_i на почетокот содржи точно i монети. Во секој потег редоследно ги реализираме следниве три чекори:

1) Се избираат $k+1$ кутии.
2) Од овие $k+1$ кутии се избира една, да кажеме b_i. Во оваа кутија се додаваат i монети, а од секоја од преостанатите k кутии се отстранува најмалку половина од монетите.
3) Ако некоја кутија се испразни, играта завршува. Во спротивно се преминува на следниот чекор.

Решение. Бараниот минимум е $n=2^k+k-1$.

Во овој случај може да се одиграат бесконечно многу потези ако во секој чекор се избираат последните $k+1$ кутии $b_{2^k-1}, b_{2^k}, ..., b_{2^k+k-1}$. Така, ако во чекорот r кутијата b_{2^k+i-1} има точно m_i монети, тогаш од неа се отстрануваат точно $\lceil m_i/2\rceil$ монети, освен во случајот $i\equiv r-1(\mathrm{mod}\, k+1)$, кога во кутијата се додаваат 2^k+i-1 монети. Така по чекорот r кутијата b_{2^k+i-1} содржи точно $\lfloor m_i/2\rfloor$ монети, освен ако $i\equiv r-1(\mathrm{mod}\, k+1)$, во кој случај таа содржи m_i+2^k+i-1 монети. Значи, играта ќе продолжи неограничено, бидејќи секогаш кога кутија се дополнува се додаваат најмалку 2^k-1 монети, па така кутијата ќе содржи најмалку 2^k монети, што е доволно да се реализираат следните k чекори.

Нека $n\le 2^k+k-2$ и да претпоставиме дека во играта може да се реализираат бесконечно многу потези. Да забележиме дека од кутија која содржи m монети може најмногу $w=\lfloor \log_2 m\rfloor$ пати да се извадат монети и бројот w ќе го наречеме *тежина* на оваа кутија. Збирот од тежините на сите кутии ќе го наречеме *вкупна тежина*. Сега ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Реализирањето на произволен чекор не ја зголемува вкупната тежина. Освен тоа, дополнувањето на било која од првите 2^k-2 кутии строго ја намалува вкупната тежина.

Доказ. Бидејќи вадењето на монети од секоја кутија ја намалува нејзината тежина за најмалку 1, доволно е да докажеме дека дополнувањето на било која кутија ја зголемува нејзината тежина за најмногу k, и ако тоа се прави со некоја од првите 2^k-2 кутии, тогаш нејзината тежина се зголемува за најмногу $k-1$. Нека кутијата која ја пополнуваме е b_i и нека во моментот таа содржи точно m_i монети. Ќе разгледаме неколку случаи.

Ако $m_i=1$, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+1)\rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k+k-1)\right\rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^{k+1}-2)\right\rfloor \le k ,$$

и ако додадеме $i\le 2^k-2$ монети, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+1)\rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k-1)\right\rfloor = k-1 .$$

Ако $m_i=2$, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+2)\rfloor - \lfloor \log_2 2\rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k+k)\right\rfloor -1 \le k-1 .$$

Ако $m_i\ge 3$, тогаш тежината се зголемува за

$$\begin{aligned}\lfloor \log_2(i+m_i)\rfloor - \lfloor \log_2 m_i\rfloor &\le \lfloor \log_2(i+m_i)-\log_2 m_i\rfloor +1\\ &\le \left\lfloor \log_2\left(1+\tfrac{2^k+k-2}{3}\right)\right\rfloor +1 \le k,\end{aligned}$$

бидејќи $1+\frac{2^k+k-2}{3}=\frac{2^k+k+1}{3}<\frac{2^k+2^{k+1}}{3}=2^k$.

Конечно, ако $i\le 2^k-2$ тогаш ги разгледуваме подслучаите $m_i=3$ и $m_i\ge 4$. Во останатите подслучаи тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+3)\rfloor - \lfloor \log_2 3\rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k+1)\right\rfloor -1 \le k-1 ,$$

а во последниот за

$$\begin{aligned}\lfloor \log_2(i+m_i)\rfloor - \lfloor \log_2 m_i\rfloor &\le \lfloor \log_2(i+m_i)-\log_2 m_i\rfloor +1\\ &\le \left\lfloor \log_2\left(1+\tfrac{2^k-2}{4}\right)\right\rfloor +1 \le k-1,\end{aligned}$$

бидејќи $1+\frac{2^k-2}{4}=\frac{2^k+2}{4}<2^{k-2}+1$. ■

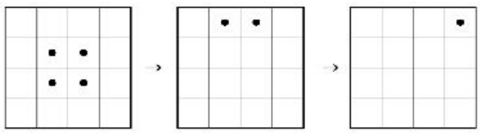
Да се вратиме на задачата. Бидејќи вкупната тежина не може да опаѓа бесконечно многу пати, $n>2^k-2$ и од некој момент ниту една од првите 2^k-2 кутии не е дополнета. Понатаму, секој чекор вклучува избор на $k+1$ кутија. Бидејќи $n\le 2^k+k-2$, од овој момент во секој чекор имаме одземање монети од најмалку една од првите 2^k-2 кутии. Ова не е можно да се направи бесконечно многу пати, што противречи на претпоставиме дека во играта може да се реализираат бесконечно многу потези

Конечно, во оваа игра може да се направат бесконечно многу чекори ако и само ако $n \geq 2^k + k - 1$.

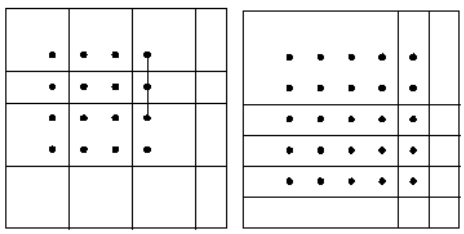
24. На бесконечна шаховска табла се игра следната игра. На почеток, n^2 жетони се поставени на полиња на $n \times n$ квадрат и тоа по еден жетон на секое поле. Во оваа игра, „потег“ е скок во хоризонтална или вертикална насока преку зафатено на слободно поле кое е непосредно до него. Жетонот преку кој се скока се отстранува.

Определи ги сите вредности n за кои играта може да се заврши само со еден жетон на таблата.

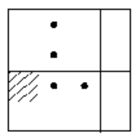
Решение. а) За $n = 1$ играта е завршенма. Ако $n = 2$, тогаш играта може да заврши со еден жетон на таблата, како што е прикажано на долниот цртеж.

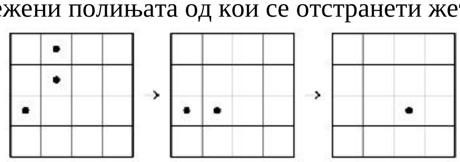


б) Ако $n = 4$ или $n = 5$, тогаш исто така играта може да заврши само со еден жетон на таблата, како што е прикажано на долните два цртежи.

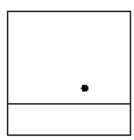


Имено, секои четири жетони распоредени како на цртежот десно, каде штрафираното поле е слободно, со последователна примена на опишаните чекори прикажани на долните цртежи можеме да ги сведеме на поедноставен облик, каде со цртата се обележени полињата од кои се отстранети жетоните.





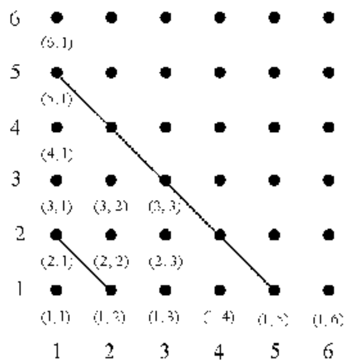
т.е.



в) Нека $n \geq 7$ и $3 \nmid n$. Сега, со примена на претходно опишаните постапки можеме да ги отстраниме сите жетони кои се наоѓаат надвор од квадратот $(n-6) \times (n-6)$ и постапката ја повторуваме онолку пати колку што тоа е потребно. На крајот проблемот се сведува на еден од случаите $n = 1, 2, 4$ или 5 и во секој случај играта може да заврши со само еден жетон на таблата.

г) Сега да го разгледаме случајот $n = 3p$.

Да ги нумерираме редовите и колоните како што е прикажано на цртежот десно. На секој жетон кој се наоѓа на полето (i, j) му го придружуваме бројот $i+j$ и сите жетени да ги поделиме на три групи S_0, S_1, S_2 така да во групата S_k за кои важи



$$i+j \equiv k(\text{mod } 3),\ k=0,1,2\ .$$

Ако еден жетон го прескокне соседниот и премине на ново поле, тогаш во две групи бројот на жетоните се намалува за еден, а во третата се зголемува за еден, што значи дека парноста на бројот на жетоните во секој чекор се менува во секоја група. Да определиме колку жетонин има на почетокот во секоја група.

$$\begin{aligned}
|S_0| &= 2+5+\ldots+(n-1)+(n-2)+(n-5)+\ldots+4+1\\
&= (1+2+\ldots+n)-3(1+2+\ldots+\tfrac{n}{3})\\
&= \tfrac{3p(3p+1)}{2}-\tfrac{3p(p+1)}{2}=3p^2\\
|S_1| &= 3+6+\ldots+(n-3)+n+(n-3)+\ldots+6+3\\
&= 3(1+2+\ldots+p)+3(1+2+\ldots+(p-1))\\
&= \tfrac{3p(p+1)}{2}+\tfrac{3p(p-1)}{2}=3p^2\\
|S_2| &= (3p)^2-|S_0|-|S_1|=3p^2
\end{aligned}$$

Броевите $|S_0|, |S_1|, |S_2|$ на почетокот се со иста парност и парноста ја задржуваат по секој чекор, па затоа не е можно на крајот два од нив да се еднакви на 0, а еден да е еднаков на 1.

25. Маѓионичар има 100 карти нумерирани со броевите од 1 до 100. Тој ги става сите карти во три кутии – црвена, бела и сина, така што секоја кутија содржи барем една карта. Гледач од публиката прво избира две кутии, а потоа избира по една карта од секоја од избраните кутии и го соопштува збирот на броевите на избраните карти. Знаејќи го тој збир маѓионичарот ја определува кутијата од која не е избрана карта.

На колку начини маѓионичарот може да ги распореди картите во кутиите така што овој трик секогаш ќе биде успешен? (Два распореди се различни ако барем една карта не е двата пати ставена во иста кутија.)

Решение. Нека a,b,c и d се карти такви што a,b,c се во различни кутии и $c+d=a+b$. Тогаш картите c и d мора да се во иста кутија, бидејќи во спротивно ако гледачот го соопшти збирот $a+b$ маѓионичарот нема да може да даде сигурен одговор.

Нека претпоставиме дека за некој i картите $i, i+1, i+2$ се во различни кутии. Бидејќи $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, заклучуваме дека картите i и $i+3$ се во иста кутија. Слично, $i-1$ е во иста кутија како $i+2$ (ако $i>1$). Со едноставна индукција се докажува дека картите 1, 4, 7, ..., 100 се во една кутија, картите 2, 5, ..., 98 во друга и картите 3, 6, ..., 99 во трета кутија. Така во овој случај имаме 6 можни распореди.

Да претпоставиме дека не постојат три последователно нумерирани карти кои не се во различни кутии. Нека картата 1 е во кутијата A и нека b и c се картите со најмали броеви кои се во кутиите B и C, соодветно, при што на пример $b<c$. Картата $b-1$ е во кутијата A, па по претпоставка $b+1$ не е во C, што значи $c>b+1$. Ако сега $c<100$, тогаш од

$$b+c=(b-1)+(c+1)$$

следува дека $c+1$ е во A, но тогаш од

$$b+(c+1)=(b+1)+c$$

следува дека $b+1$ е во C, што е противречност. Според тоа, $c=100$, и тоа е единствената карта во C. Понатаму, од

$$99+b=100+(b-1)$$

следува дека 99 е во B. Сега, кутијата A не може да содржи ниту една од картите k за $2 \leq k \leq 99$, бидејќи во спротивно од

$$99+k=100+(k-1)$$

ќе следува дека $k-1$ е во C, што не е можно. Според тоа, во A е само картата 1, а картите 2, 3, ..., 99 се во B. И во овој случај имаме 6 можни распореди, па затоа вкупнот број распореди е 12.

26. Во секое од темињата на правилен 12-аголник е запишана една од цифрите 0 или 1 (или 0 или 1). Во еден чекор се избира теме во кое е запишана цифрата 1 и се променуваат цифрите во неговите соседни темиња, ако во соседно теме на избраното теме стои 0 запишуваме 1, а ако стои 1 запишуваме 0. Определи ги сите почетни позиции од кои со примена на конечен број на чекори може да се добие позиција во која има запишано една цифра 1 и единаесет цифри 0.

Решение. Ако редоследно (во три последователни темиња) се запишани три цифри при што сите три се единици, тогаш нив можеме да ги замениме според правилото со 010. Значи во ваков случај бројот на единици се променува за парен број. Ако редоследно (во три последователни темиња) се запишани три цифри од облик 011 или 110 тогаш може да се направи чекор со кој новите распореди се 110 или 011 односно бројот на единици не се променува, односно промената е пак за парен број на единици. Ако редоследно (во три последователни темиња) се запишани три цифри од облик 010 тогаш можеме да направим чекор при што ќе дојде до промена 111. Значи, секогаш кога може да се направи чекор, бројот на единици се променува за парен број на единици. Според тоа, потребен услов за да по конечен број на чекори се дојде до една единица и единаесет нули е да има непарен број на единици.

Ќе докажеме дека ако во темињата се запишани непарен број на единици, тогаш може да се дојде до позиција во која имаме една единица и единаесет нули. Ако имаме три последователни темиња во кои се запишани единици, 111 тогаш во еден чекор нив можеме да ги замениме со 010, т.е. бројот на единици да го намалиме за 2.

Ако имаме две единици запишани во две соседни темиња а во останатите две нивни соседни темиња се запишани нули, $...0110..$, тогаш во истите полиња можеме да запишеме $...1100...$ според дозволениот чекор, односно да ги поместиме во лево. По конечен број на чекори, двете единици поместувајќи ги во лево, двете единици ќе се допрат до единица, бидејќи бројот на единици е непарен, и тогаш ќе го примениме претходниот чекор, односно бројот на единици ќе го намалиме за два.

Ако имаме две единици изолирани со нули $010...010$, тогаш со низата чекори

$$\underbrace{010...010}_{k\text{-должина}} \to \underbrace{111...010}_{k\text{-должина}} \to \underbrace{1011...010}_{k\text{-должина}} \to \underbrace{100...1110}_{k\text{-должина}} \to \underbrace{100...0100}_{k\text{-должина}},$$

двете единици може да се поместат за едно место во лево. Повторувајќи ја оваа постапка конечен број пати, и бидејќи бројот на единици е непарен ќе дојдеме до ситуација две единици да бидат една до друга. Потоа ќе го спроведеме претходниот чекор. Притоа ќе дојдеме до позиција кога бројот на единици ќе го намалиме за два.

Повторувајќи ги претходните три чекори конечен број пати, ако бројот на единици е непарен ќе дојдеме до една единица и единаесет нули.

Според тоа, почетни позиции по кои може да се дојде до една единица и единаесет нули е секоја позиција во која имаме непарен број на единици.

27. Дадени се низа A од 2014 природни броеви од интервалот $[1,6]$ и природен број $t \le 2014$. Во еден потег можеме да избереме произволни t броеви од A и за 1 да го зголемиме секој од овие броеви кој е помал од 6, а секој број кој е еднаков на 6 да го замениме со 1. Определи ги сите вредности на t, за кои од секоја низа A после конечен број потези може да се добијат само шестки.

Решение. Ќе докажеме дека бараните броеви t се оние за кои $(t,6)=1$. Нека $(t,6)=d \ne 1$ и да избереме t броеви, x од кои се еднакви на 6. По извршување на дозволената операција збирот на броевите се менува за $(t-x)-5x = t-6x$ и овој број е делив со d. Сега е јасно, дека ако еден од броевите е 5, а сите останати се еднакви на 6, тогаш не можеме да добиеме само шестки.

Нека $(t,6)=1$ и да избереме природен број k таков што $kt \equiv 1 (\text{mod}\, 6)$. Ќе покажеме како може да се зголеми даден број $a \neq 6$ за 1, а сите останати броеви да останат непроменети. Нека B е подмножество од A со $t+1$ броеви (бидејќи $t \neq 2014$ такво множество постои) и $a \in B$. Да ја реализираме k пати дозволената операција врз секое од t елементните подмножества од B. Секој број од B се менува точно kt пати. Бидејќи $kt \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6)$, заклучуваме дека претходното е еквивалентно на еднократна примена на дозволената операција врз сите броеви од B.

Ако t пати ја примениме операцијата врз $t-$елементното множество $B \setminus \{a\}$, ќе добиеме дека само a е зголемен за 1. Според тоа, по конечен број потези може да се добијат само шестки.

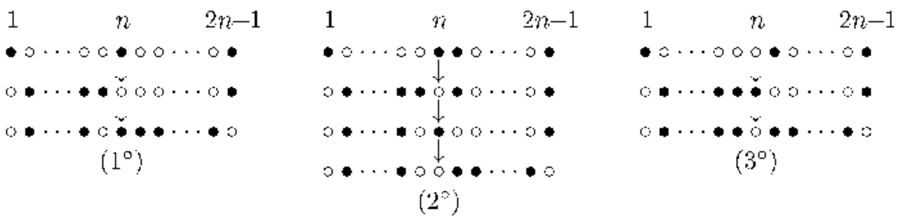
28. Во еден ред има $2n-1$ сијалици. На почетокот средната ($n-$тата) сијалица е запалена, а сите останати се изгаснати. Во еден чекор е дозволено да се изберат две несоседни изгаснати сијалици меѓу кои сите сијалици се запалени и да се промени состојбата на тие две сијалици, како и состојбата на сите сијалици меѓу нив (на пример, од конфигурацијата •◦◦◦• се добива конфигурацијата ◦•••◦). Определи го најголемиот број чекори кој може да се реализира.

Решение. Одговор: $[\frac{2^{n+1}-5}{3}]$.

На $i-$тата сијалица и го придружуваме бројот $2^{|n-i|}$ и дефинираме вредност на конфигурацијата како збир на броевите придружени на запалените сијалици. Вредноста на почетната конфигурација е 1, а во секој чекор таа се зголемува за природен број делив со 3 (провери!). Притоа, ако во некој чекор $n-$тата сијалица ја менува состојбата, тогаш вредноста на конфигурацијата се менува точно за 3 и овој чекор го нарекуваме *добар*.

Бидејќи вредноста на конфигурацијата не може да е поголема од $2^{n+1}-4$ (не може сите сијалици да се запалат), не е можно да се извршат повеќе од $[\frac{2^{n+1}-5}{3}]$ чекори. Овој број може да се достигне и доволно е да се покаже дека може да се извршат барем $\frac{2^{n+1}-7}{3}$ чекори.

Со индукција по n ќе докажеме дека почнувајќи од конфигурација со вредност помала или еднаква на 3 можеме со низа добри чекори да добиеме конфигурација со вредност поголема или еднаква на $2^{n+1}-6$.



Јасно, тврдењето важи за $n=2$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$ и нека $n \ge 3$. Од индуктивната претпоставка следува дека за $n-1$ може со помош на добри чекори да се добие конфигурација со вредност поголема или еднаква на 2^n-6. Притоа првата и последната сијалици се изгаснати (зошто?). Во ваква конфигурација освен првата и последната сијалица, може да бидат изгаснати:

(1°) само $n-$тата сијалица

(2°) само $n-$тата и на неа соседна сијалица,

(3°) само една од двете соседни сијалици на $n-$тата сијалица.

Во секој од овие три случаи, во најмногу три добри чекори се постигнува првата и последната сијалици да бидат запалени и вредноста на остатокот на конфигурацијата (без овие две сијалици) да биде најмногу 3.
Сега со повторна примена на индукивната претпоставка следува дека тврдењето важи и за бројот n, со што доказот е завршен.

29. Банката на градот Бата издава монети кои од едната страна имаат ознака H, а од другата ознака T. Хари наредил n вакви монети во низа од лево на десно. Со овие монети тој ја повторува следнава операција: ако во низата има точно $k>0$ монети кои покажуваат H, тогаш тој ја превртува $k-$тата монета од лево, а во спротивно сите монети покажуваат T и постапката завршува. На пример, ако $n=3$ и почетниот распоред е THT, Хари ја извршува низата оперции $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ и постапката завршува по овие три операции.
а) Докажи дека за секој почетен распоред на монетите Хари ја завршува опишаната постапка по конечно многу операции.
б) За почетен распоред C, нека со $L(C)$ е означен бројот на операциите кои Хари ги извршува пред постапката да заврши. На пример, $L(THT)=3$ и $L(TTT)=0$. Определи ја аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C.

Решение. *Прв начин*. Нека $l(n)$ е аритметичката средина на $L(C)$ по сите распореди на n монети. Имаме $l(0)=0$ и $l(1)=1$. Тврдењето под а) ќе го докажеме ако докажеме дека $l(n)$ е конечен број.

Со $f(c)$ да го означиме распоредот кој се добива од распоредот $c=a_1a_2...a_n$ по една операција. Исто така воведуваме ознака $\overline{c}=\overline{a_1}\,\overline{a_2}...\overline{a_n}$, каде $\overline{H}=T$ и $\overline{T}=H$.

1) За произволен распоред на n монети важи $f(cT)=f(c)T$. Според тоа, аритметичката средина на $L(cT)$ е еднаква на $l(n)$.

2) Од друга страна $f(\overline{c}H)=\overline{f(c)}H$. Навистина, ако точно k монети во распоредот покажува H, тогаш $f(c)$ се разликува од c само во $(n-1-k)-$тата позиција, па $\overline{f(c)}H$ се разликува од $\overline{c}H$ само во $(k+1)-$та позиција, т.е. се совпаѓа со $f(\overline{c}H)$.

Од распоредот $\overline{c}H$ по $L(c)$ операции се добива распоредот $HH...HH$, од кој потоа со $n+1$ операција се добива распоредот $TT..TT$. Според тоа аритметичката средина на броевите $L(cH)$ е еднаква на $l(n)+n+1$.

Значи, точна е формулата $l(n+1)=l(n)+\frac{n+1}{2}$, од каде со индукција се добива дека $l(n)=\frac{n(n+1)}{4}$.

Втор начин. За распоред на n монети $C=a_1a_2...a_n$ со $\tau(C)$ да го означиме бројот на монетите кои покажуваат H, а со $\sigma(C)$ збирот на позициите i на кои $a_i=H$. На пример, $\tau(HHTTH)=3$ и $\sigma(HHTTH)=1+2+5=8$.

Нека со операцијата од распоредот C се добива распоредот C'. Тогаш

$$\tau(C')=\tau(C)\pm 1 \text{ и } \sigma(C')=\sigma(C)\pm\tau(C),$$

во зависност од тоа дали на позицијата $\tau(C)$ е T или H. Во двата случаја важи

$$\lambda(C')=\lambda(C)-1, \text{ каде } \lambda(C)=2\sigma(C)-\tau(C)^2.$$

Бидејќи

$$\lambda(C)\geq 2(1+2+...+\tau(C))-\tau(C)^2\geq 0,$$

за секој распоред C, следува дека $L(C)=\lambda(C)$ е секогаш конечен.

Аритметичката средина на $\sigma(C)$ е еднаква на $\frac{1}{2}(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)}{4}$, бидејќи за секој i монетата на $i-$тото место покажува H точно во половината случаи. Аритметичката средина на $\tau(C)^2$ е:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2 n!}{i!(n-i)!}=\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n-1}{i-1}=\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\binom{n-1}{i-1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(n+1)\binom{n-1}{i-1}=\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}\cdot 2^{n-1}=\frac{n(n+1)}{4}.$$

Според тоа, аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C е еднаква на $2\cdot\frac{n(n+1)}{4}-\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)}{4}$.

30. Во непроѕирен сад се наоѓаат 2016 бонбони нумерирани со броевите 1, 2, ..., 2016, при што 1008 бонбони се црвени, а преостанатите 1008 се жолти. Андреј постапува на следниов начин: во еден потег тој извлекува една

бонбона од садот (бонбоната не ја гледа додека не ја извлече), ја става на купче пред себе (пред првиот потег нема бонбони во купчето пред Андреј), а потоа може, ако сака, од купчето да одбере некои две бонбони со иста боја и да ги изеде. Андреј ова го повторува вкупно 2016 пати (т.е. се додека има бонбони во садот). Секогаш кога во оваа постапка тој ќе изеде две бонбони (на опишаниот начин), да кажеме нумерирани со броевите a и b, Андреј добива $|a-b|$ поени.

1) Докажи дека Андреј може да смисли стратегија која ќе му гарантира најмалку $2\cdot 504^2$ освоени поени на крајот на играта.
2) Дали Адреј може да смисли стратегија која ќе му гарантира повеќе од $2\cdot 504^2$ поени?

Решение. 1) Нека црвените бонбони се нумерирани со броевите $c_1 < c_2 < \ldots < c_{1008}$, а жолтите со броевите $z_1 < z_2 < \ldots < z_{1008}$. Бонбоните нумерирани со броевите c_i и z_i ги нарекуваме мали за $i \le 504$ и големи за $i > 504$.

Нека Андреј во првите 1008 потези не јаде бонбони. Ќе докажеме дека потоа во секој потег тој може да избере една мала и една голема бонбона од иста боја и да ги изеде.

Нека претпоставиме дека во $k-$тиот потег $(k \ge 1009)$ по прв пат Андреј не може да изеде две соодветни бонбони. Тоа значи дека од секоја боја сите бонбони на купчето се или мали или големи. Бидејќи во претходните $k-1009$ потези тој јадел по две бонбони, во купчето има $2018-k$ бонбони. Од друга страна, неизедени бонбони има $2016-2(k-1009)=2(2017-k)$ и тоа од секоја боја еднаков број мали и големи бонбони, па затоа во тој момент на купчето може да има најмногу $2017-k$ бонбони, што противречи на тоа дека на купчето има $2018-k$ бонбони. Со оваа противречност доказот е завршен

На овој начин, бидејќи $c_{i+504}-c_i \ge 504$ и $z_{i+504}-z_i \ge 504$. Андреј може да освои

$$\sum_{i=505}^{1008}(c_i+z_i)-\sum_{i=1}^{504}(c_i+z_i)=\sum_{i=1}^{504}(c_{i+504}-c_i)+\sum_{i=1}^{504}(z_{i+504}-z_i)\ge 2\cdot 504^2 \text{ поени.}$$

2) Ако црвените бонбони се $1,2,\ldots,1008$, а жолтите се $1009,1010,\ldots 2016$, тогаш Андреј може да заработи најмногу

$$(505+\ldots+1008)-(1+\ldots+504)+(1513+\ldots+2016)-(2009+\ldots+1512)=2\cdot 504^2$$

поени.

31. На масата се поставени 2009 жетони, секој од кои има бела и црна страна. На почетокот сите жетони се во еден ред и сите, со исключок на еден, се завртени со белата страна нагоре. Во секој чекор можеме да избереме жетон, завр-

тен со црната страна нагоре, и ги превртуваме двата соседни жетони (или еден, ако сме избрале краен жетон). Определи ги сите почетни положби при кои може да се постигне положба во која сите жетони се завртени со црните страни нагоре.

Решение. Да ги нумерираме жетоните последователно со броевите од 1 до 2009 одлево-надесно. Да ја разгледаме положбата во која имаме k црни жетони на местата $t_1, t_2, ..., t_k$, $1 \le t_1 < t_2 < ... < t_k \le 2009$ и да видиме како при нашата операција се менува бројот

$$M = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} t_i = t_1 - t_2 + t_3 - ... + (-1)^{k+1} t_k .$$

Ако сме избрале $t_j, 1 \le j \le k$, и $t_j \ne 1, 2009$, $t_{j-1} \ne t_j - 1$ и $t_{j+1} \ne t_j + 1$, тогаш бројот M не се менува, бидејќи „новиот" број е

$$\sum_{i=1, i \ne j}^{k} (-1)^{i+1} t_i + (-1)^{j+1}(t_j - 1) + (-1)^{j+2} t_j + (-1)^{j+3}(t_j + 1) = M .$$

Не е тешко да се провери дека M не се менува и во случаите кога $t_{j-1} = t_j - 1$ и $t_{j+1} = t_j + 1$, кога $j = 1$ добиваме дека M се менува во $-M$, а кога $j = 2009$ добиваме дека M се менува во $M + (-1)^{k+1} 2010$. Во сите случаи остатокот при делење на M со 2010 секогаш е r или $2010 - r$, каде r зависи само од почетната кнфигурација. Ако сите жетони станале црни, тогаш

$$M = 1 - 2 + 3 - ... - 2008 + 2009 = 1005 ,$$

колку што е неговата вредност само кога на почетокот црниот жетон е на позицијата 1005.

Останува да докажеме, дека ако на почетокот црниот жетон е на позиција $s = 1005$, тогаш можеме да ги превртиме сите жетони со црната страна нагоре. Навистина, по три чекори во позициите $s, s-1, s+1$ добиваме 5 црни жетони во позициите од $s-2$ до $s+2$. Понатаму, ако сме ги превртиле жетоните

$$s-k, s-k+1, ..., s-1, s, s+1, ..., s+k-1, s+k ,$$

кога $k = 2l$ продолжуваме со чекорите во позициите

$$s-2l, s+2l, s-2(l-1), s+2(l-1), ..., s-2, s+2, s ,$$

и притоа во позициите

$$s-2l+1, s+2l-1, s-2l+3, s+2l-3, ..., s-1, s+1, s ,$$

т.е. во позициите

$$s-k-1, s-k+1, ..., s-1, s, s+1, ..., s+k-1, s+k+1$$

добиваме црни жетони. На сличен начин се разгледува и случајот кога k е непарен. Според тоа, оваа постапка ги дава сите жетони завртени со црната страна нагоре.

32. Маѓионичар зад параван ја открива плоштината на конвексен 2008-аголник. Тој посочува две точки од контурата на многуаголникот, гледачите ја повлекуваат правата низ тие два точки и на маѓионичарот му ја соопштуваат помалата од плоштините на добиените многуаголници (ако плоштините се еднакви, тие му ја кажуваат соодветната плоштина). Маѓионичарот посочува како точка теме на многуаголникот или точка, која дели од него опеределена страна во даден од него однос. Докажи дека со 2006 прашања маѓионичарот може да ја открие плоштината на многуаголникот.

Решение. Нека 2008-аголникот е $\mathcal{B} = A_1A_2...A_{2008}$ и $A = A_{2008}$. Дијагоналите повлечени од A го делат $\mathcal{B}$ на 2006 триаголници: $AA_1A_2, ..., AA_{2007}A_{2007}$. Нека $AM_1, ..., AM_{2006}$ се нивни тежишни линии. Ќе докажеме дека ако маѓионичарот ги кажува паровите $(A, M_k), k = 1, 2, ..., 2006$ тогаш тој може да ја открие плоштината на $\mathcal{B}$. Со S_k да ја означиме плоштината кажана од гледачите за правата AM_k, а со $2T_k$ плоштината на триаголникот AA_kA_{k+1}. Тогаш

$$S_k = \min\{2(T_1 + ... + T_{k-1}) + T_k, T_k + 2(T_{k+1} + ... + T_{2006})\},$$

Каде $S_1 = T_1$ и $S_{2006} = T_{2006}$. Да забележиме дека на маѓионичарот му е доволно да ги определи сите плоштини T_k.

Нека AL е правата која ја полови плоштината на $\mathcal{B}$. Ако отсечката AM е од едната страна на таа права, соодветно соопштената плоштина ќе биде таа на многуаголникот $AA_1A_2...A_kM_k$, а ако е на другата страна тоа е плоштината на преостанатиот дел. Значи, до правата AL вредностите на S_k ќе растат, а потоа ќе опаѓаат. Значи, ако $S_1 < S_2 < ... < S_n > S_{n+1} > ... > S_{2006}$ (можно е $n = 1$ или $n = 2006$), тогаш при $i = 1, 2, ..., n-1$ имаме

$$S_i = 2(T_1 + ... + T_{i-1}) + T_i,$$

од каде лесно го наоѓаме T_i. Аналогно се пресметува T_i и при $i = 2006, ..., n+1$. На крајот од

$$S_n = 2\min\{T_1 + ... + T_{n-1}, T_{n+1} + ... + T_{2006}\} + T_n$$

го пресметуваме и T_n.

Забелешка. Постои стратегија за откривање на плоштината со помалку од 2006 прашања.

33. Нека n е природен број, а t е цел број. На таблата се запишани n различни цели броеви. Бојан, кој е во соседната соба, сака да знае дали меѓу тие броеви постојат неколку броја чиј збир е еднаков на t. Ана, која се наоѓа пред таблата, ќе му помогне на Бојан да дојде до саканото сознание. На почеток, таа му го кажува само вкупниот збир запишани на таблата. Потоа, Бојан во секој чекор кажува една од следниве четири реченици:

1) Дали меѓу броевите запишани на таблата е бројот k ?
2) Ако на таблата е запишан бројот k , избриши го.
3) Ако на таблата не е запишан целиот број k , допиши го.
4) Дали броевите на таблата може да се поделат во две множества со еднаков збир на елементите?

На прашањата Ана точно одговара со да или не, а операциите кои ги кажува Бојан таа ги реализира на таблата (ако е можно), при што не му кажува дали ги реализирала. Докажи дека за помалку од $3n$ чекори Бојан може да осознае дали меѓу броевите запишани на почетокот постојат неколку броја чиј збир е еднаков на t .

Решение. Нека збирот на броевите на почетокот е еднаков на s . Бојан прво ќе праша дали меѓу броевите постои бројот $2t-s$. Ако овој број го нема, во следниот чекор Бојан ќе го додаде и тогаш вкупниот збир на запишаните броеви ќе биде $2t$. Сега Бојан го поставува прашањето 4) и ако добие потврден одговор, тоа значи дека имаме две дисјунктни подмножества на почетното множество и збирот на броевите во двете множества е t . Во едното од нив сигурно не се наоѓа бројот $2t-s$, па затоа во почетното множество имаме подмножество со збир на елементи t . Ако одговорот е негативен, очигледно во почетното множество нема подмножество со збир на елементи t . Значи, ако бројот $2t-s$ не се наоѓа во почетното множество, тогаш Бојан во два чекори може да добие одговор на своето прашање. Ако бројот $2t-s$ е во множеството, Бојан ќе и каже на Ана да го избрише, а потоа го поставува прашањето 4). Ако добие потврден одговор, бидејќи збирот на елементите на таблата е еднаков на $s-(2t-s)=2s-2t$, тоа значи дека постои множество со збир $s-t$ и кога на тоа множество му се додаде бројот $2t-s$, добиваме множество со збир t и во овој случај Бојан веќе го знае одговорот. Ако Бојан добие негативен одговор, тогаш сигурно меѓу почетните броеви не постои подмножество кое го содржи елементот $2t-s$ и чиј збир е t (бидејќи тогаш меѓу броевите без $2t-s$ ќе постои подмножество со збир $s-t$, што не е точно). Значи, ако одговорот е негативен, тогаш не постои подмножество со збир t кое го содржи елементот $2t-s$, но гледаме дека Бојан потрошил три чекори и веќе го дознал одговорот или дознал дека еден од запишаните n броеви сигурно не учествува во бараниот збир. Продолжувајќи на овој начин, по секои три прашања Бојан го дознава одговорот или отфрла еден елемент. Тоа значи дека по $3(n-1)$ чекори Бојан ќе го знае одговорот или на таблата ќе остане само еден број кој Бојан го знае, бидејќи во секој момент тој го знае збирот на броевите кои во тој момент се запишани на таблата. Последното значи дека Бојан ќе го знае одговорот, што и требаше да се докаже.

34. Комплет од 2008 црвени и 2008 бели карти е измешан и секој од 2008 играчи

извлекува по две карти. По извлекувањето играчите седнуваат во круг. Во секој чекор од играта играчите истовремено ја реализираат следнава постапка: Ако играч има барем една црвена карта, тој дава една црвена карта на играчот кој седи десно од него. Ако играчот нема црвена карта, тој дава една бела карта на играчот кој седи лево од него.
Определи го најголемиот можен број чекори кој е потребен за да се дојде до состојба во која секој играч има по една бела и по една црвена карта.

Решение. Да забележиме дека ако на почетокот еден играч има две бели карти, играчот кој е десно од него има две црвени карти, а сите останати играчи имаат по една бела и една црвена карта, тогаш состојбата во која секој играч има по една бела и една црвена карта за првпат се појавува по 2007 чекори. Ќе докажеме дека 2007 чекори се доволни при произволна почетна распределба на картите.

За фиксиран играч A да ги означиме играчите со $A_1 = A, A_2, A_3, ..., A_{2008}$ сметано во насока на движењето на стрелките на часовникот. За ненегативен цел број k и за природен број i со $F(k,i)$ да ја означиме разликата на бројот на белите и бројот на црвените карти кои вкупно ги имаат играчите $A_1, A_2, ..., A_i$ по реализирање на $k-$тиот чекор (под нулти чекор се подразбира почетната состојба). Да забележиме дека $F(k,i)$ е парен чекор и $F(k,i) = F(k,i+2008)$ за секои k и i.

Лема 1. Постои играч A за кој $F(0,i) \geq 0$ за секој природен број i.

Доказ. Да направиме произволно оначување и нека

$$F(0,m) = \min\{F(0,i), i \in \mathbb{N}\}.$$

Сега преозначуваме $A_{m+1} = A = A_1, A_{m+2} = A_2, ...$. Тогаш имаме

$$F(0,i) = F(0,m+1) - F(0,m) \geq 0,$$

(одлево се новите ознаки, а оддесно се старите ознаки) за секој природен број i. ■

Во следните разгледувања ќе сметаме дека играчот A е како во Лема 1.

Лема 2. За секој природен број i и за секој цел број $k \geq 0$ важи $F(k,i) \geq 0$.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. Базата на индукцијата е Лема 1 и изборот на A. Нека тврдењеo е точно за $k = l$.

Нека претпоставиме дека $F(l+1, j) < 0$ за некој j. Можеме да сметаме дека $j > 1$ бидејќи $F(k,i) = F(k,i+2008)$. Бидејќи разликата $F(l, j) - F(l+1, j)$ зависи само од две карти – таа која A_1 ја добива и таа која A_j ја дава во $(l+1)-$виот чекор, и е парен број, имаме единствена можност $F(l, j) = 0$ и $F(l+1, j) = -2$. Последното се случува точно кога A_1 добива црвена карта, а A_j дава бела карта. Но, тогаш A_j имал две бели карти по $l-$тиот чекор, од каде следува дека $F(l, j-1) = F(l, j) - 2 = -2$, што противречи на индуктивната претпоставка. ■

Да се вратиме на задачата. Од Лема 2 следува дека имаме $F(k, 2007) \geq 0$ за секој $k \geq 0$. Тогаш и $F(k, 2008) = 2008 - 2008 = 0$ за секој $k \geq 0$, што значува дека A_{2008} секогаш има барем една црвена карта. Според тоа, A_1 секогаш добива црвена карта. Сега со индукција по n се докажува дека секој од играчите $A_1, A_2, ..., A_n$ има барем по една црвена карта по $n-$тиот чекор. Тоа значи дека секој од играчите $A_1, A_2, ..., A_{2007}$ има барем по една црвена карта по 2007-миот чекор, па како A_{2008} секогаш има барем една црвена карта, заклучуваме дека секој од играчите $A_1, A_2, ..., A_{2008}$ има барем по една црвена карта по 2007-миот чекор. Но, имаме вкупно 2008 црвени карти, па затоа секој од играчите $A_1, A_2, ..., A_{2008}$ по 2007-миот чекор има точно по една црвена карта, а другата карта е бела.

35. Стражарот им ја предлага на затворениците следнава игра. Сите ќе излезат во дворот, каде на секој од нив на глава ќе му биде ставен шешир кој е обоен во една од 5 можни бои. Стражарот потоа затворениците ќе ги нареди во ред така што секој затвореник ги гледа сите шешири освен сопствениот и ќе го праша првиот затвореник во редот дали ја знае бојата на својот шешир. Затвореникот гласно одговара со „да“ или „не“. Ако одговори „не“, одма ќе биде заклучен во самица. Ако одговори „да“, стражарот го прашува која боја е неговиот шешир, на што затвореникот треба да одговори така што останатите затвореници да не го слушнат неговиот одговор. Ако одговор е погрешен, тој затвореник одма ќе биде заклучен во самица пред сите, а ако одговор е точен, тој затвореник ќе биде одма ослободен пред сите. Стражарот потоа му приоѓа на следниот затвореник во редот и ја повторува истата постапка, и така се до последниот затвореник. Затворениците имаат можност да осмислат стратегија пред почетокот на играта, но кога играта ќе почне, никаква комуникација меѓу затворениците не е дозволена. Ако во затворот има 2015 затвореници, докажи дека постои стратегија со која најмалку 2013 затвореници сигурно ќе бидат ослободени?

Решение. Боите да ги означиме со броевите 0, 1, 2, 3, 4 и со *B* да ја означиме бојата на шеширот на вториот затвореник, а со *S* збирот на боите на шеширите од третиот до последниот затвореник по модул 5. Ќе опишаме стратегија на првите двајца затвореници по која сите преостанати затвореници ќе го знаат *S*, што значи дека знаејќи ги боите на останатите шешири ќе може да ја определат бојата на својот шешир. Така, за најмалку 2013 затвореници ќе биде обезбедена слобода.

Првиот затвореник одговара „не“ ако $S \in \{0, B, B+1\}$ или $(B, S) = (4,1)$. Потоа вториот затвореник одговара „не“ ако $S = 0$, а во спротивно одговара со

„да“ и на стражарот му дава одговор S. На овој начин, ако слушнат два одговори „не“, преостанатите затвореници знаат дека $S = 0$. Ако вториот каже „да“ и биде ослободен, останатите знаат дека $S = B$, додека во спротивно знаат дека $S = B + 1$ ако $B \neq 4$, односно $S = 1$ ако $B = 4$.

Во преостанатите случаи првиот затвореник вели „да“ (не е важно што ќе биде со него). Потоа вториот вели „да“ ако $S \in \{2, 4\}$ и на стражарот му дава одговор $S - 2$. Ако $B = 0$, тогаш $S \notin \{0,1\}$, па останатите знаат дека $S = 2$ ако вториот биде ослободен, $S = 3$ ако каже “не”, и $S = 4$ ако каже “да” и не биде ослободен. Најпосле, ако $B \neq 0$, бидејќи при потврден одговор на првиот важи $S \equiv B + 2$ или $S \equiv B + 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, а одговорот на вториот ја определува парноста на S, тоа на останатите им овозможува да го определат S.

23. КОНКУРЕНТСКИ ИГРИ

Во параграф ќе се осврнеме на таканаречените *конкурентски игри*, т.е. на игрите во кои според определени правила играат двајца играчи, при што треба да се определи кој од играчите победува, без разлика како ќе игра противникот. Притоа основна цел е наоѓањето на таканаречената победничка стратегија.

1. На масата има 10 купчиња со 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 ореви. Двајца играчи последователно земаат по еден орев се додека не останат 3 ореви. Ако и трите ореви се од различни купчиња, тогаш играта ја добива играчот кој зема втор (втор играч), а во спротивно играта ја добива играчот кој зема прв (прв играч). Кој играч има победничка стратегија?

   Решение. *Прв начин*. Купче со еден орев ќе го наречеме единица. Победничка стратегија за првиот играч е следнава:

   1) Ако има единица, тогаш зема една од нив.
   2) Не зема од купчиња со парен број ореви.

   Бројот на оревите на почетокот е непарен, па затоа тој е непарен пред секој потег на првиот играч. Значи тој во секој чекор може да ги запазува горните правила.

   Сега, да забележиме дека по првиот чекор на првиот играч на масата нема единици. Значи, по првиот чекор на вториот играч на масата ќе има најмногу една единица, која првиот ја зема во следниот чекор. Тоа значи дека по секој чекор на вториот играч на масата ќе има најмногу една единица. Ова ќе биде и на крајот на играта, што значи дека првиот играч победува.

   Втор начин. Нека во секој свој чекор првиот играч зема од најмалото купче. Тогаш по 21-от чекор на првиот играч ќе има најмногу 4 купчиња, а по чекорот на вториот играч ќе има 13 ореви. Ако купчињата се 4, тогаш во најмалото ќе има најмногу 3 ореви. Значи, без разлика колку ореви има во секое купче, по уште три чекори на првиот и на вториот играч ќе има уште 7 ореви и најмногу 3 купчиња. Ако има три купчиња, тогаш во најмалото има најмногу 2 ореви. Значи, колкави и да се купчињата, по уште два чекори на првиот и на вториот играч ќе има три ореви и најмногу 2 купчиња, што значи дека првиот играч победува.

2. Дваесет монети се распоредени во круг. Двајца играчи последователно земаат по три монети, се додека не останат две монети. Ако преостанатите монети не се соседни, играта ја добива првиот играч, а ако се соседни, тогаш играта ја добива вториот играч. Кој од двајцата играчи има победничка стратегија?

Решение. Вториот играч има победничка стратегија и таа е следната.

Прво тој ги дели сите монети на парови од соседни монети, т.е. ако монетите се нумерираат последователно, на пример во насока на движењето на стрелките на часовникот, со броевите од 1 до 20, парови се на пример (1, 2), (3, 4), ..., (19, 20). Потоа на секој потег на првиот играч вториот одговара на следниот начин.

- Ако првиот играч земе три монети од различни парови, тогаш вториот играч ги зема останатите три монети од истите парови.
- Ако првиот играч земе две монети од еден пар и една монета од друг пар, тогаш вториот играч ја зема останата монета од вториот пар и било кои две монети од ист пар.

Така, на крајот, по третиот чекор, последните две монети ќе бидат од еден ист пар, што значи дека тие ќе бидат соседни.

Забелешка. Ваквата стратегија е добитна за вториот играч ако бројот на монетите е од облик $6n+2$, $n=1,2,3,\dots$.

3. Марко и Симон последователно поставуваат жетони во полињата табла со димензии 20×20. На почетокот таблата е празна и прв на потег е Марко. Играта ја добива играчот кој прв ќе постави жетон така што во пресечните полиња на два реда и две колони има жетони. Кој од играчите има победничка стратегија?

   Решение. Ќе докажеме дека Симон има победничка стратегија, која се состои во следново: ако Симон може да победи во некој чекор тој тоа го прави, а во спротивно поставува жетон во полето кое е симетрично (во однос на некоја од средните линии на таблата) на она поле во кое Марко тукуштo поставил жетон. Според тоа, по секој чекор на Симон распоредот на жетоните на квадратот е симетричен.

   Таблата има $20\cdot 20=400$ полиња, што значи дека по конечен број чекори играта завршува, т.е. еден од играчите победува. Да претпоставиме дека, при опишаната стратегија на Симон, победник е Марко. Тогаш пред неговиот победоносен чекор распоредот на жетоните вклучува три жетони во три од четирите пресечни полиња на два реда и две колони. Ако меѓу овие три жетони нема пар симетрични жетони, тогаш во нивните три симетрични полиња има жетони, што значи дека Симон требало да победи во претходниот чекор. Ако два од трите жетони се симетрични, тогаш и третиот треба да има симетричен и веќе да има правоаголник од жетони, што е противречност. Од добиената противречност следува дека стратегијата на Симон е победничка.

4. Даден е $n\in\mathbb{N}$. Горјан и Андреј ја играат следнава игра против Филип. Прво Филип во еден ред на масата поставува $2n$ карти означени со броевите $1,2,\dots,2n$. Откако ќе го погледне распоредот на картите, Горјан може (но не мора) да избере две карти и да им ги замени местата. Потоа сите карти се

вртат со лицето надолу, а на масата и приоѓа Андреј. Филип кажува било кој број од 1 до $2n$, а Андреј ги превртува картите за да ја најде картата со тој број. Горјан и Андреј победуваат ако Андреј ја најде картата во најмногу n обиди, а во спротивно победува Филип. Кој има победничка стратегија? (Горјан и Андреј може да се договараат само пред почетокот на играта.)

Решение. Распоредот на картите на масата можеме да го разгледуваме како пермутација ® на броевите $1, 2, ..., 2n$. Ако Филип го каже бројот k, Андреј ќе проба да ја најде картата k отварајќи ги картите на местата k,®(k),®$^2(k)$, ...,,®$^{r-1}(k)$, каде r е должината на циклусот на пермутацијата на кој му припаѓа бројот k. Така Андреј ќе победи ако сите циклуси на пермутацијата ® имаат должина не поголема од n. Пермутацијата таква ќе ја направи Горјан. Имено, во пермутацијата ® постои најмногу еден циклус со должина поголема од n (ако не постои Горјан не мора ништо да прави). Нека тоа е циклусот i,®(i),®$^2(i)$,...,®$^{s-1}(i)$, $(s > n)$. Со замена на картите i и ®$^n(i)$ Горјан го дели овој циклус на два циклуси со должина n и $s-n$, со што целта е постигната.

5. Двајца играчи во декаден брон систем формираат шестцифрен број според следните правила:

- првиот играч ја кажува првата цифра на бројот, потоа вториот играч ја кажува втората цифра, потоа првиот играч ја кажува трета цифра итн. наизменично до шестата цифра на бројот и
- ниту една цифра не смее да биде повторена.

Ако добиениот број е сложен победува првиот играч, а ако е прост број победува вториот играч. Кој играч има победничка стратегија?

Решение. Со A да го означиме првиот, а со B вториот играч. Ќе докажеме дека A има победничка стратегија,

Цигрите 1, 3, 7 и 9 да ги наречеме добри, а цифрите 0, 2, 4, 5, 6 и 8 лоши. Како прва цифра A ја избира цифрата 3. Ако B избере добра цифра, тогаш A исто така избира добра цифра. Понатаму, ако B повторно избере добра цифра, бидејќи сите добри цифри се искористени, A избира произволна лоша цифра, па B како шеста цифра мора да избере лоша цифра, со што се добива сложен број (број делив со 2 или со 5). Ако B како четврта цифра избере лоша цифра, тогаш A како петта цифра ја избира преостанатата добра цифра и повторно B како шеста цифра мора да избере лоша цифра, со што ја губи играта.

Нека B за втора цифра избере лоша цифра. Тогаш A како трета цифра ја избира цифрата 9. Ако сега B како четврта цифра избере добра цифра, тогаш A како петта цифра ја избира последната добра цифра и повторно победува. Затоа нека B за четврта цифра избере лоша цифра, по што од добрите цифри останаа цифрите 1 и 7. Во овој момет збирот на избраните цифри или е делив со 3, или при делење со 3 дава остаток 1 или при делење со 3 дава остаток 2.

Нека збирот е делив со 3. Бидејќи најмалку една од цифрите 2, 5 и 8 не е искористена играчот A како петта цифра избира една од овие цифри. Сега B како шеста цифра може да избере лоша цифра и губи или една од цифрите 1 или 7, со што повторно ја губи играта бидејќи во овој случај збирот на цифрите ќе биде делив со 3.

Нека остатокот е 1. Во овој случај A како петта цифра ја избира цифрата 1, па затоа B како шеста цифра може да избере лоша цифра и губи или цифрата 7. Јасно и во двата случаја B ја губи играта бидејќи се добива сложен број (во вториот случај збирот на цифрите е делив со 3).

Нека остатокот е 2. Бидејќи барем една од цифрите 0 и 6 не е искористена (во спротивно остатокот ќе биде 0) играчот A избира една од овие цифри. Како последна цифра B избира лоша цифра и губи или избира една од цифрите 1 или 7 со што збирот на цифрите на бројот е делив со 3, па затоа B повторно губи.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека играчот A има победничка стратегија.

6. На кружница се избрани $2n+1$, $n \geq 2$ точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Двајца играчи последователно бришат по една точка. Ако по потегот на некој од играчите сите триаголници со темиња во останатите точки се тапоаголни, играта завршува со победа на тој играч. Кој играч има победничка стратегија, првиот или вториот?

Решение. Со индукција по бројот на чекорите ќе докажеме, дека вториот играч може да игра така што пред секој потег на првиот играч, ако останале $2k+1 \geq 5$ точки, тогаш на секоја полукружница се наоѓаат најмалку k точки. На почетокот на играта овој услов е исполнет. Нека условот е исполнет и пред некој потег на првиот играч. Останатите точки последователно да ги означиме со $A_0, A_1, ..., A_{2k}$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека првиот играч ја брише точката A_0. Притоа триаголникот $A_{k+1}A_1A_{k+2}$ е остроаголен и играта не е завршена. Вториот играч треба да ја избрише точката A_k. Ако на некоја полукружница е избришана најмногу една точка, тогаш на неа остануваат најмалку $k-1$ точка. Во спротивно, од оваа полукружница се избришани точките A_0 и A_k и на неа останале или точките $A_1, ...,$ A_{k-1} или точките $A_{k+1}, ..., A_{2k}$, што значи дека повторно останале $k-1$ точка.

Ако првиот играч порано не ја изгубил играта, тогаш по $2n-4$ чекори на кружницата ќе останат 5 точки A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека првиот играч ја избришал точката A_0, по што останува остроаголниот триаголник $A_1A_2A_4$. Со последниот чекор вториот играч ја брише точката A_4 и останатиот триаголник $A_1A_2A_3$ е тапоаголен (во спротивно имаме полукружница која од петте точки A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ја содржела само точката A_2).

Конечно, од претходните разгледувања следува дека при правилна игра вториот играч има победничка стратегија.

7. Даден е природен број n. Јана запишува n различни природни броеви, а потоа Иван брише неколку од броевите (може ниту еден, но не може сите броеви) и пред секој од преостанатите броеви става еден од знаците $+$ или $-$. Иван победува ако добиениот резултат е делив со 2003, а во спротивен случај победува Јана. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Јана има победничка стратегија ако $n \le 10$. Имено, ако таа ги запише броевите $1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}$, тогаш како и да игра Иван, добиениот резултат не може да е делив со 2003, бидејќи истиот е меѓу -1023 и 1023 и не е еднаков на 0. Навистина, бидејќи има знак пред најголемиот неизбришан број имаме $2^k > 2^k - 1 = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i$.

Ако $n \ge 11$, тогаш множеството C од броевите кои ги избрала Јана има $2^n - 1 > 2003$ различни непразни подмножества. Според тоа, збировите на броевите во две од нив, на пример A и B, даваат еднакви остатоци при делење со 2003. Ако Иван стави знак $+$ пред броевите од $A \setminus B$, $-$ пред броевите од $B \setminus A$ и ги избрише останатите броеви од C, тогаш тој победува, бидејќи добиениот збир е делив со 2003.

8. Даден е природен број n. Даниел и Марија играат игра. Даниел има k листови, каде k е природен број. На горната страна на секој лист тој запишува некои од броевите од 1 до n (може да запише произволно многу броеви, вклучително ниту еден или сите броеви). На спротивната страна тој ги запишува останатите броеви. Марија може да преврти дел од листовите (може да преврти произволно многу листови, вклучително нула или сите листови). Ако Марија може да постигне сите броеви од 1 до n да се гледаат, тогаш таа победува.

Определи го најмалиот број k, за кој Марија секогаш може да победи, независно од тоа кои броеви ги запишал Даниел.

Решение. Ќе докажеме дека бараниот број k е најмалиот k за кој $2^k > n$. Да ги нумерираме листовите со $1, 2, ..., k$ и за секој $i = 1, 2, ..., n$ нека $A_i \subseteq \{1, 2, ..., k\}$ е множеството листови на кои е запишан бројот i. Бидејќи

$2^k > n$, постои множество $B \subseteq \{1,2,...,k\}$ кое е различно од A_i за секој i. Нека Марија ги преврти листовите нумерирани со броевите од B. Ако A_i не е подмножество од B, тогаш бројот i ќе се појави на некој од превртените листови. Ако A_i е подмножество од B, тогаш бројот i ќе се појави на превртените листови од $B \setminus A_i$.

Нека $2^k \le n$. За секое подмножество $\{1,2,...,k\}$ Даниел може да избере еден од броевите $1,2,...,n$, бидејќи на секое подмножество соодветствува барем еден број. Потоа тој го запишува секој од броевите $1,2,...,n$ на листовите од соодветното множество на тој број. Ако Марија ги преврти листовите од подмножество $B \subseteq \{1,2,...,k\}$, тогаш бројот (или броевите), кој (кои) соодветствува (соодветствуваат) на тоа множество нема да се гледа (гледаат). Со тоа доказот е завршен.

9. Во конвексен 100-аголник $\mathbb{M}$ е избрана точка X која не лежи на страна или дијагонала на $\mathbb{M}$. На почетокот нема означени темиња. Павел и Вангел по ред означуваат (до тогаш неозначени) темиња на $\mathbb{M}$, при што во првиот чекор Павел означува две темиња, а потоа секој од нив кога е на потег означува по едно теме. Потезите ги влечат наизменично. Играта ја губи тој по чиј потег точката X ќе падне во внатрешноста на многуаголник чии темиња се означени. Докажи дека Павел има победничка стратегија.

Решение. Да ги обоиме страните на $\mathbb{M}$ во црна и бела боја, така што секои две соседни страни се различно обоени. Да разгледаме две еднобојни страни AB и CD, кои формираат конвексен четириаголник $ABCD$. Нека дијагоналите AC и BD се сечат во точката K и да претпоставиме дека X лежи во триаголникот KBC. Тогаш Павел може да победи ако во првиот чекор ги избере темињата B и C. Навистина, по овој чекор играчите мора да избираат (ако не сакаат да загубат) само темиња кои лежат во полурамнината во однос на правата BC која не ја содржи X. Бројот на овие темиња е парен, па затоа последниот чекор е на Павел.

Останува да докажеме дека секогаш можеме да најдеме такви страни AB и CD. Нека го претпоставиме спротивното. Нека T е произволно теме и да претпоставиме дека полуправата TX пресекува црна страна PQ. Нека TR е црната страна која излегува од T. Можеме да сметаме дека четириаголникот $TRPQ$ е конвексен. Ако X припаѓа во внатрешноста на триаголникот TRQ, тогаш $RTQP$ ги имасаканите својства. Во спротивен случај полуправата RX исто така ја сече отсечката PQ.

Нека RS е следната по TR страна на $\mathbb{M}$. Ако полуправата SX сече бела страна, како погоре се докажува дека полуправата RX ја сече истата бела страна, што не е можно. Според тоа, SX сече некоја црна страна и можеме да ги повториме горните расудувања за темето S. Продолжувајќи на истиот начин, ќе заклучиме дека за секоја црна страна $T'R'$ постои црна страна $P'Q'$ која се сече и со двете полуправи $T'X$ и $R'X$. Но, тоа не е исполнето за црната страна PQ (полуправите PX и QX соодветно ги сечат деловите QT и RP од контурата на $\mathbb{M}$), што е противречност.

10. Во рамнината се обележани сите точки со целобројни координати (x, y) такви што $x^2 + y^2 \le 10^{10}$. Двајца играчи ја играат следнава игра, при што потезите ги влечат наизменично. Првиот става жетон на обележана точка и точката ја брише. Во секој следен чекор жетонот се преместува во друга обележена точка и таа се брише. Притоа должината на чекорите треба да расте, но е забрането преместување од точка во симетричната нејзина точка во однос на центарот. Играта ја губи играчот што не може да направи потег. Кој играч има победничка стратегија?

Решение. *Одговор*: Првиот играч.

Ќе докажеме поопшто тврдење: *Во игра со горните правила на конечно множество точки S кое го содржи координатниот почеток $O(0,0)$ и е инваријантно при ротација за 90° околу O, првиот играч има победничка стратегија.*

Ќе користиме индукција по бројот на точките n во S. За $n = 1$ нема што да докажуваме. Нека $n > 1$. Под отсечка ќе подразбираме отсечка со крајни точки во S, кои не се симетрични во однос на O. Нека d е максималната должина на отсечка и $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ се сите отсечки со таа должина (некои точки A_i, како и B_i може да се совпаѓаат).

Да забележиме дека O не е крајна точка на ниту една од тие отсечки. Навистина, ако допуштиме дека OA е една од тие отсечки и B (од S) е сликата на A при ротацијата за 90° околу O, тогаш $\overline{AB} = \overline{OA}\sqrt{2} > \overline{OA}$, што е противречност.

Да ги тргнеме од S сите точки A_i и B_i. Добиеното множество S' ги исполнува условите на нашето тврдење (бидејќи множеството отсечки A_iB_i е инваријантно при ротација за 90° околу O). Согласно индуктивната претпоставка првиот играч има победничка стратегија кога се игра на S'. Ќе покажеме таква стратегија и на S.

Првиот играч игра по стратегијата на S', додека вториот играч не го премести жетонот од точка X во S' во точка Y надвор од S' (последното сигурно се случува, бидејќи првиот играч има победничка стратегија на S'). Нека $Y = A_i$. Тогаш првиот играч го преместува жетонот во B_i, бидејќи

$\overline{A_iB_i} = d > \overline{XA_i}$. Сега вториот играч не може да направи потег, бидејќи нема отсечка со должина поголема од d .

11. Нека t, a и b се природни броеви. Двајца играчи ја играат следнава (t,a,b) игра: првиот играч го заменува бројот t со еден од броевите $t-a$ или $t-b$, потоа вториот играч го заменува добиениот број ако од него одземе a или b , потоа одново првиот играч одзема a или b од бројот кој е добиен од вториот играч итн. Играта ја губи оној играч кој не може бројот t да го замени со природен број. Докажи, дека постојат бесконечно многу броеви t такви што првиот играч има победничка стратегија за (t,a,b) игра за секои a и b такви што $a+b=2005$.

Решение. Прво ќе докажеме дека ако некој играч има победничка стратегија на играта (t,a,b), тогаш тој има победничка стратегија и за играта $(t+a+b,a,b)$. Да го означиме првиот играч со A , а вториот со B . Нека B има победничка стратегија за играта (t,a,b). Тогаш за играта $(t+a+b,a,b)$ по чекорот на играчот A се добива играта $(t+a,a,b)$ или играта $(t+b,a,b)$. И во двата случаи играчот B може со својот чекор да ја остави играта (t,a,b), по што тој повторно е втор на потег, што значи дека има победничка стратегија.

Нека A има победничка стратегија за играта (t,a,b). Бидејќи A може да добие $(t-a,a,b)$ или $(t-b,a,b)$ игра, по која тој е втор на потег, добиваме дека $(t-a,a,b)$ или $(t-b,a,b)$ игра е победничка за играчот кој игра втор. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е играта $(t-a,a,b)$. Понатаму, од претходните разгледувања следува дека играта $(t-a+a+b,a,b)=(t+b,a,b)$ е победничка за играчот кој игра втор. Бидејќи од игра $(t+a+b,a,b)$ играчот A може да добие игра $(t+b,a,b)$ во која тој е втор, заклучуваме дека играта $(t+a+b,a,b)$ е победничка за A .

Ќе докажеме дека за $t=2004$ и $a+b=2005$ првиот играч има победничка стратегија. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \le b$. Бидејќи $a>0$, важи $2004 \ge b$. За да ја добие играта играчот A треба од $t=2004$ да го одземе бројот b . Тогаш за играчот B останува играта $(2004-b,a,b)$ и како $2004-b<2005-b=a$ тој ја губи играта. Конечно, од претходните разгледувања дека за секој $s \in \mathbb{N}$ играчот A има победничка стратегија за играта $(2004+2005s,a,b)$ за секои a и b такви што $a+b=2005$.

12. Дадена е $(m+1)\times m$ решетка и жетон во еден од нејзините јазли. Двајца играчи последователно го поместуваат жетонот во соседни јазли, при што не смее да се минува по отсечка која веќе е искористена. Губи играчот кој не може да повлече потег. Докажи дека ако на почетокот жетонот е во еден од јазлите на долната хоризонтала, тогаш првиот играч има победничка стратегија.

Решение. Нека решетката е $\{(x,y)\,|\,x=0,1,2,...,m,\ y=0,1,2,...,m-1\}$ и почетната положба на жетонот е во точката $P=(a,0)$. Да означиме

$$Q=(0,a)\,,\ R=(m+1-a,m+1)\ \text{и}\ S=(m+1,m+1-a)\,.$$

Нека X е множеството од сите точки од решетката кои се наоѓаат на контурата и во внатрешноста на четириаголникот определен со правите PQ,QR,RS и SP.

Ако бројот a е парен, да ги обоиме точките од X во две бои на следниов начин: ја боиме (x,y) во црвено, ако $x+y-a$ е парен број, а во сино ако $x+y-a$ е непарен број. Нека во првиот чекор првиот играч го премести жетонот од $P=(a,0)$ во $(a,1)$, која е сина точка. Тогаш не е тешко да се види дека првиот играч е на потег кога жетонот е во црвена точка, а вториот е на потег кога жетонот е во сина точка. Уште повеќе, секоја црвена точка е соседна со непарен број сини точки во кои жетонот до тогаш не бил поставен. Според тоа, првиот играч секогаш има непарен број можности, во случајов барем една. Останува да видиме дека од сините точки не може да се излезе од X, бидејќи контурата на X се состои од црвени точки. Според тоа, доволно е првиот играч да игра само во X и тој победува.
Случајот кога a е непарен се разгледува аналогно.

13. Дадени се природни броеви m и n. Дадени се n купчиња од златни монети, при што i – тото купче содржи $a_i>0$ монети. Ја разгледуваме следнава игра:

1) Бојан избира множества $B_1,B_2,...,B_n$, секое од кои е подмножество на $\{1,2,...,m\}$.
2) Ана, знаејќи ги избраните множества на Бојан, избира непразно подмножество S на $\{1,2,...,m\}$.
3) Монетите од i – тото купче се даваат на Бојан ако $B_i\cap S$ има парен број елементи. Во спротивен случај монетите се даваат на Ана.

Докажи дека за секој избор на множествата $B_1,B_2,...,B_n$ кој може да го направи на Бојан, Ана може да избере множество S така, што ќе добие повеќе монети од Бојан.

Решение. Ана ќе има повеќе монети ако

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i < 0 .$$

Нека претпоставиме, дека за секое непразно множество S Бојан не добива помалку монети од Ана. Тоа значи, дека

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i \geq 0 ,$$

при што за $S=\varnothing$ имаме $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i = \sum\limits_{i=1}^{n}a_i > 0$. Ако сумираме по сите множества $S\subseteq\{1,2,...,m\}$, добиваме

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i > 0 . \qquad (1)$$

За произволно множество B да го разгледаме збирот

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}(-1)^{|B\cap S|} > 0 .$$

За $S=C\cup D$, каде $C=S\setminus B$, $D=S\cap B$ и $C\cap D=\varnothing$ имаме

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}(-1)^{|B\cap S|} = \sum_{C\subseteq\{1,2,...,m\}\setminus B}\ \sum_{D\subset B}(-1)^{|B\cap(C\cup D)|}$$

$$= \sum_{C\subseteq\{1,2,...,m\}\setminus B}\ \sum_{D\subset B}(-1)^{|D)|}.$$

Бидејќи $|B|>0$, важи

$$\sum_{D\subset B}(-1)^{|D)|} = \sum_{r=0}^{|B|}(-1)^r\binom{|B|}{r} = 0 ,$$

па затоа

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}(-1)^{|B\cap S|} = 0 ,$$

за секое непразно подмножество B од $\{1,2,...,m\}$. Добиваме

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}(-1)^{|B_i\cap S|}) = 0 ,$$

што противречи на (1). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

14. Нека $n_0\in\mathbb{N}$. Играчите A и B наизменично избираат цели броеви n_1, n_2, $n_3,...$ според следниве правила:

- играчот A го знае бројот n_{2k} и избира природен број n_{2k+1} таков што $n_{2k}\leq n_{2k+1}\leq n_{2k}^2$; и

- играчот B го знае бројот n_{2k+1} и може да избере природен број n_{2k+2} таков што $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ е степен на прост број или на бројот 1.

Играчот A победува ако го избере бројот 1990, а играчот B победува ако го избере бројот 1. За кое n_0

а) играчот A може да победи,
б) играчот B може да победи, и
в) ниту еден од играчите нема победничка стратегија?

Решение. Со W да го означиме множеството од сите природни броеви n_0 такви да играчот A може да победи започнувајќи ја играта со n_0. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m и s се природни броеви за кои важи:

1) $m \le 1990$, $s \le 1990$,
2) $\{m, m+1, ..., 1990\} \subseteq W$,
3) За секој прост делител p на s важи $\frac{s}{p^r} \ge m$, каде што r е природен број таков што $p^r \mid s$ и $p^{r+1} \nmid s$.

Тогаш сите природни броеви n_0, за кои што важи $\sqrt{s} \le n_0 < m$, се содржани во W.

Доказ. Ако $n_0 = 1990$, тогаш A го избира тој број и со тоа победува. Нека сега $\sqrt{s} \le n_0 < m$. Играчот A може да избере $n_1 = s$. Тогаш, според условот на задачата, играчот B мора да, избере број $n_2 \in W$, таков што

$$m \le \frac{s}{p^r} \le n_2 < s \le 1990.$$

Бидејќи $n_2 \in \{m, m+1, ..., 1990\} \subseteq W$ играчот A може сигурно да победи. Со тоа лемата е докажана. ■

Бидејќи $45^2 = 2025 > 1990,$ сите n_0 такви што $45 \le n_0 \le 1990$ се наоѓаат во W. Понатаму, броевите $m = 45$ и $s = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ги задоволуваат условите 1), 2) и 3) од лемата и $\sqrt{420} < 21 \le 45,$ од каде се добива дека $\{21, 22, ..., 44\} \subset W.$ Користејќи ја лемата за $m = 21$ и $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7,$ се добива дека $\{13, 14, ..., 20\} \subset W.$ За $m = 13$ и $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7,$ од лемата се добива дека $\{11, 12\} \subset W.$ Земајќи $m = 11$ и $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$ од лемата следува дека $\{8, 9, 10\} \subset W.$ Со тоа докажавме дека

$$\{8, 9, ..., 1990\} \subset W.$$

За $n_0 > 1990$ играчот A може да најде природен број $r > 7$ таков што

$$2^r \cdot 3^2 < n_0 \leq 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2$$

и тогаш избира

$$n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2.$$

Сега независно од изборот на играчот B мора $n_2 = 2^{r+1} \geq 8$ или $n_2 = 3^2 \geq 8$, т.е. $8 \leq n_2 < n_0$. По конечен број на чекори ќе биде $8 \leq n_{2k} \leq 1990$, а тогаш играчот A победува во играта.

Да го разгледаме сега случајот $n_0 \leq 5$. Бидејќи најмалиот производ на три различни прости броеви е еднаков на $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2$, играчот A мора да избере број од облик $n_1 = p^r q^s$, каде p е прост број, q е прост број или 1, $p^r > q^s$ и $r, s \geq 1$. Тогаш играчот B може да избере $n_2 = q^s = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \leq n_0$.

По конечен број на чекори, играчот B ќе добие $n_{2k} = 1$ и победува.

За $n_0 = 6$ или $n_0 = 7$, играчот A мора да избере $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ или $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, па играчот B мора да избере $n_2 = 6$. Понатаму A и B мораат да бираат 30, 6, 30, 6, ... наизменично, за да избегнат пораз и никој нема да победи.

15. Ана и Бојан ја играат следнава игра. Пред нив се наоѓаат две непразни купчиња монети. Наизменично, прва почнува Ана, секој избира купче во кое има парен број монети и половина од монетите ги преместува од тоа купче во другото купче. Играта завршува ако играчот кој е на потег не може да одигра потег, во кој случај победува другиот играч. Определи ги сите парови (a,b) природни броеви такви што ако купчињата на почетокот имаат a и b монети, тогаш Бојан има победничка стратегија.

Решение. Со $v_2(n)$ да го означиме најголемиот ненегативен цел број r таков што $2^r \mid n$. За позицијата (a,b), т.е. две купчиња со a и b монети, ќе велиме дека е k – среќна ако $v_2(a) = v_2(b) = k$ за некој цел број $k \geq 0$, и k – несреќна ако $\min\{v_2(a), v_2(b)\} = k < \max\{v_2(a), v_2(b)\}$. Ќе докажеме дека Бојан има победничка стратегија ако и само ако почетната позиција е k – среќна за некој парен број k.

- Во случај на 0-среќна позиција играчот кој е на потег одма губи.
- Ако е дадена k – среќна позиција (a,b) со $k \geq 1$, играчот кој е на потег ја менува во една од позициите $(a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b)$ и $(b + \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$, при што и двете се $(k-1)$-среќни бидејќи $v_2(a + \frac{1}{2}b) = v_2(\frac{1}{2}b) = v_2(b + \frac{1}{2}a) = v_2(\frac{1}{2}a) = k-1$.

Според тоа, ако почетната позиција е k – среќна, по k потези се доаѓа до конечна 0-среќна позиција, при што Бојан ќе победи ако и само ако k е парен број.

- Ако е дадена k – несреќна позиција (a,b) со непарен k и $v_2(a)=k<v_2(b)=l$, Ана може да ја промени во позиција $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$. Бидејќи $v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$, новата позиција е $(k-1)$ – среќна и $2\,|\,k-1$, па така Ана ќе победи.
- Ако е дадена k – несреќна позиција (a,b) со парен k и $v_2(a)=k<v_2(b)=l$, Ана не смее да одигра во позиција $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, бидејќи таа е $(k-1)$ – среќна и Бојан ќе победи. На Ана и останува потег за позицијата $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$. Добиената позиција е исто така k – несреќна, бидејќи за $l>k+1$ имаме $v_2(a+\frac{1}{2}b)=k<v_2(\frac{1}{2}b)=l-1$, а додека за $l=k+1$ имаме $v_2(a+\frac{1}{2}b)>v_2(\frac{1}{2}b)=k$.

Според тоа, ако почетната позиција е k – несреќна, тогаш Ана победува ако е k непарен, а нема победник ако е k парен број.

16. Дадено е множество од 2013 прости броеви. Иван избира пар (p,q) од различни броеви од даденото множество. Петар сака да ги определи броевите p и q, при што за едно прашање на Иван му соопштува пар природни броеви (a,b), а Иван соопштува дали бројот $ap-bq$ е позитивен, негативен или е еднаков на нула. Определи го најмалиот број прашања кои му се потребни на Петар за да со сигурност знае кои броеви ги избрал Иван?

Решение. На секој пар (p,q) од различни прости броеви од даденото множество му ја придружуваме дропката $\frac{p}{q}$. Да ги подредиме така добиените дропки во растечки редослед. Одговорот на Иван покажува кој од следните услови е исполенет $\frac{b}{a}<\frac{p}{q}$, $\frac{b}{a}=\frac{p}{q}$ или $\frac{b}{a}>\frac{p}{q}$.

Нека претпоставиме дека во даден момент можните парови на Иван се t. Да ја разгледаме следнава стратегија на Петар. Ако t е парен број, тогаш тој задава прашање (a,b), каде $\frac{b}{a}$ е поголем точно од половината од можните броеви на Иван (бидејќи множеството рационални броеви е густо, тоа е секогаш можно), а ако t непарен дропката $\frac{b}{a}$ треба да е еднаква на средната дропка. При ваква стратегија со секој одговор на Иван можните парови на Иван стануваат $\frac{t}{2}$ ако t е парен и $\frac{t-1}{2}$ ако t е непарен број.

Од друга страна, јасно е дека за секое прашање на Петар постои одговор за кој можните парови на Иван се намалуваат најмногу за $\frac{t}{2}$ ако t е парен и $\frac{t+1}{2}$ ако t е непарен број.

При опишаната стратегија на Петар, ако бројот на можните парови на Иван е t и $t=2^{\sim_1}+2^{\sim_2}+...+2^{\sim_k}$, каде $\sim_1 > \sim_2 > ... > \sim_k$ е претставувањето на t во бинарен броен систем, тогаш по секое прашање на Петар највисокиот степен на бројот 2 се намалува за 1. Според тоа, за да остане еден број потребни се точно $\sim_1$ прашања.

Бидејќи бројот на дропките е $2013\cdot 2012$ и $2^{21}<2013\cdot 2012<2^{22}$, одговорот е 21.

17. Дадени се природни броеви n и k, за кои $n\geq k\geq 2$. Андреј ја игра следнава игра со Мартин, кој располага со $2n$ карти, при што за секој $i=1,2,...,n$ бројот i е запишан точно на две карти. Мартин во произволен редослед ги реди картите со запишаните броеви надолу. Андреј прави чекор на следниов начин: избира k од картите на Мартин и тој му ги кажува броевите запишани на нив. Ако меѓу овие k карти има две со еднакви броеви запишани на нив Андреј победува. Ако нема, Мартин ги размешуваа само картите кои во овој потег ги избрал Андреј (притоа Андреј не го гледа) и Андреј повторно е на потег. Ќе велиме дека играта е добитна за Андреј, ако постои природен број m и стратегија со која Андреј може да победи во најмногу m чекори, независно од како Мартин ги размешува картите. За кои вредности на n и k играта е добитна за Андреј?

Решение. Играта е добитна ако и само ако $n\neq k$.

Нека $2\leq k<n$. Да ги нумерираме местата на кои Мартин ги поставува картите последователно со броевите од 1 до $2n$. Последователно прашуваме за картите кои се наоѓаат на местата $(1,2,...,k);(2,3,...,k+1)$ итн. на крајот на местата $(2n-k+1,2n-k+2,...,2n)$. Последователно споредувајќи два соседни одговори на Мартин, ги дознаваме вредностите на картите кои по поставувањето на последното прашање ќе се наоѓаат на местата $1,2,...,2n-k$. Бидејќи $k<n$, ги знаеме местата на повеќе од n карти, па затоа можеме да најдеме две еднакви. Сега со следниот чекор Андреј победува.

Ако $n=k$, тогаш ако Андреј не победил во првиот чекор, имаме n карти и на секоја од нив секој од броевите $1,2,...,n$ е запишан точно по еднаш. Откако Мартин ќе ги размеша картите, Андреј нема информација за редоследот на тие карти. Тврдиме дека тоа значи дека играта не е добитна за Андреј. Навистина, нека S е множеството од тие карти, а $\overline{S}$ е множеството од преостанатите n карти. Андреј не може да победи ако избира карти само од S или само од $\overline{S}$. Ако Андреј избере неколку карти од S, а останатите ги избере од $\overline{S}$, може да се случи изборот од $\overline{S}$ да е комплементарен на изборот од S. Јасно, не постои стратегија со која последната ситуација може да се избегне.

18. Нека p е прост број и нека $M = a_0 + 10a_1 + ... + 10^{p-1}a_{p-1}$. Играчите A и B играат игра, при што играчот A игра прв. Тие наизменично бираат број i од множеството $\{0,1,..., p-1\}$ кој претходно не е избран, па на местото на a_i запишуваат некоја цифра (може и нула). Целта на играчот A е по завршување на играта бројот M да биде делив со p. Докажи дека A има победничка стратегија.

Решение. Ќе велиме дека играчот прави потег (i, a_i) ако во својот потег избира индекс i, потоа број a_i од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ако $p = 2$ или $p = 5$, тогаш играчот A во првиот потег го избира потегот (0,0) и победува независно од следните потези бидејќи M на крајот на играта ќе биде делив со 10.

Сега нека p е прост број различен од 2 и 5. Играчот A во првиот потег го избира потегот $(p-1, 0)$. Од малата теорема на Ферма следува

$$(10^{\frac{p-1}{2}})^2 \equiv 1 (\bmod p), \text{ т.е. } p \mid (10^{\frac{p-1}{2}})^2 - 1 = (10^{\frac{p-1}{2}} - 1)(10^{\frac{p-1}{2}} + 1).$$

Бидејќи p е прост број поголем од 2 разликуваме два случаја.

1) $p \mid 10^{\frac{p-1}{2}} + 1$. Во овој случај, секогаш кога играчот B ќе направи потег (i, a_i), играчот A ќе направи потег $(j, a_j) = (i + \frac{p-1}{2}, a_i)$ ако $i < \frac{p-1}{2}$ или потег $(j, a_j) = (i - \frac{p-1}{2}, a_i)$ ако $i \geq \frac{p-1}{2}$. Забележуваме дека p е делител на $a_i 10^i + a_j 10^j$, па затоа по секој потег на A збирот на дотогаш избраните членови ќе биде делив со p. На овој начин $p-1$ членови се поделени во парови чиј збир е делив со p, па затоа на крајот од играта M ќе биде делив со p, т.е. A има победничка стратегија.

2) $p \mid 10^{\frac{p-1}{2}} - 1$. Во овој случај, секогаш кога играчот B ќе направи потег (i, a_i), играчот A ќе направи потег $(j, a_j) = (i + \frac{p-1}{2}, 9 - a_i)$ ако $i < \frac{p-1}{2}$ или потег $(j, a_j) = (i - \frac{p-1}{2}, 9 - a_i)$ ако $i \geq \frac{p-1}{2}$. Важи $a_i 10^i + a_j 10^j = 9 \cdot 10^i$, па затоа на крајот на играта имаме

$$M = \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} 9 \cdot 10^i = 10^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 (\bmod p),$$

што значи дека A има победничка стратегија.

19. *Погодувалка* е игра која ја играат двајца играчи A и B. Правилата на играта зависат од природните броеви k и n кои се познати и на едниот и на другиот играч.

На почетокот на играта A избира броеви x и N такви што $1 \le x \le N$. Играчот A на играчот B не му соопштува информација за бројот x, но му ја соопштува точната вредност на бројот N. Играчот B пробува да добие информации за бројот x поставувајќи му на играчот A прашања од следниот вид: во секое прашање B избира произволно подмножество S на множеството природни броеви (може да избира исто подмножество повеќе пати) и го прашува играчот A дали x припаѓа на S. Играчот B може да поставува колку сака прашања. По секое прашање играчот A одговара со *да* или со *не*, но може и да лаже. Единствено ограничување е меѓу $k+1$ последователни одговори барем еден мора да е вистинит.

Откако B ќе постави колку што сака прашања, тој треба да избере множество X кое се состои од најмногу n природни броеви. Ако x припаѓа на X тогаш B победува, а во спротивно B губи. Докажи дека:

а) Ако $n \ge 2^k$, тогаш B има победничка стратегија.

б) За секој доволно голем k постои природен број $n \ge 1,99^k$ така што A има победничка стратегија.

Решение. За одговорот o на играчот A на прашањето: „*Дали* $b \in S$" ќе велиме дека *не е согласен* со бројот b ако $o = да$ и $b \notin S$, или $o = не$ и $b \in S$.

а) Ќе докажеме дека во секое множество Y со $2^k + 1$ броеви, B со сигурност може да определи барем еден број кој не е x. Нека без ограничување на општоста претпоставиме дека $Y = \{0, 1, 2, ..., 2^k\}$. Играчот B почнува така што го повторува прашањето „*Дали* $x = 2^k$". Ако $k+1$ пати по ред добие одговор *не*, тој знае дека $x \ne 2^k$. Во спротивно, кога ќе добие одговор *да*, тој редоследно го поставува прашањето „*Дали* $i-$*тата бинарна цифра на бројот* x *е еднаква на* 1" за $i = 1, 2, ..., k$. Без разлика какви се одговорите, сите тие не се согласни со некој број b, $0 \le b \le 2^k - 1$. Ако се има предвид претходниот одговор *да* за бројот 2^k, B може да заклучи дека $x \ne b$.

б) Нека $1 < \lambda < 2$. За секој $i = 1, 2, ..., N$, нека $a_i(m)$ го означува тековниот број последователни одговори по $m-$тото прашање кои не се согласни со i. Разгледуваме $\phi(m) = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{a_i(m)}$. Јасно, A ја постигнува целта ако може да одговара така што ќе важи $\phi(m) < \lambda^{k+1}$ за секој m.

Со S_m да го означиме множеството броеви со кои одговорот *да* на m – тото прашање ќе биде несогласен. Ако A на m – тото прашање одговори *да*, тогаш важи $a_i(m) = a_i(m-1)+1$, за $i \in S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \notin S_m$, па затоа важи

$$\phi(m) = f_1 = \lambda \sum_{i\in S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i\notin S_m} 1.$$

Од друга страна, ако A одговори *не*, тогаш $a_i(m) = a_i(m-1)+1$, за $i \notin S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \in S_m$, па затоа важи

$$\phi(m) = f_2 = \lambda \sum_{i\notin S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i\in S_m} 1.$$

Бидејќи $f_1 + f_2 = \lambda\phi(m-1) + N$, на m – тото прашање A може да одговори така што ќе биде $\phi(m) = \frac{\lambda}{2}\phi(m-1) + \frac{N}{2}$.

На почетокот е $\phi(0) = N$. Врз основа на претходните разгледувања со едноставна индукција се докажува дека A може да избира одговори така што секогаш ќе важи $\phi(m) \le \frac{N}{2-\lambda}$. Специјално, ако $N < (2-\lambda)\lambda^{k+1}$, тогаш $\phi(m) \le \lambda^{k+1}$, па затоа A има победничка стратегија.

Конечно, ако $1,99 < \lambda < 2$, тогаш за доволно голем k важи

$$(2-\lambda)\lambda^{k+1} > 1,99^k + 1,$$

со што тврдењето е докажано.

20. Решетка е множеството од сите точки од видот (m,n), каде m и n се цели броеви за кои важи $|m| \le 2019, |n| \le 2019$ и $|m|+|n| < 4038$. Точките (m,n) од решетката за кои $|m| = 2019$ или $|n| = 2019$ ги нарекуваме *рабни*. Четирите прави $x = \pm 2019$ и $y = \pm 2019$ ги нарекуваме *рабови*. Две точки на решетката се соседни ако растојанието меѓу нив е еднакво на 1.

Зоран и Марко играат игра на решетката. Тие играат наизменично при што Зоран ја почнува играта со поставување на жетон на точката $(0,0)$, а Марко прв повлекува потег.

1) Во секој свој потег Марко отстранува најмногу по две рабни точки од секој раб.
2) Во секој свој потег Зоран прави точно три *чекори*. Чекорот се состои во поместување на жетонот на една од соседните точки кои не се отстранети.

Играта завршува со победа на Зоран во моментот кога тој ќе го постави жетонот на некоја гранична точка која сè уште не е отстранета. Дали Зоран има победничка стратегија?

Решение. *Прв начин*. Марко може да го оневозможи Зоран да победи. Стратегијата на Марко ќе ја опишеме на работ $y = 2019$. На останатите рабови тој игра аналогно.

Во првиот потег Марко ги отстранува точките $(-1, 2019)$ и $(0, 2019)$. Потоа:

i) Ако Зоран со својот потег ја намали x – координатата, тогаш Марко ги отстранува првите две достапни точки лево од точката $(0, 2019)$,

ii) Ако Зоран не ја промени x – координатата, тогаш Марко ја отстранува првата достапна точка лево и првата достапна точка десно од точката $(0, 2019)$.

iii) Ако Зоран ја зголеми x – координатата, тогаш Марко ги отстранува првите две достапни точки десно од точката $(0, 2019)$.

iv) Единствено отстапување е кога Зоран прв пат ја намали x – координатата за точно 1, тогаш Марко ја отстранува првата достапна точка лево и првата достапна точка десно од $(0, 2019)$.

Да претпоставиме дека Зоран ќе победи со доаѓање до некоја точка $(a, 2019)$. Можеме да сметаме дека $a > 0$. Навистина, ако Зоран се движел по симетрична патека до точката $(-a, 2019)$, тогаш Марко ќе стигнел да отстрани онолку точки лево од нулата колку што во овој случај отстранил десно од нулата.

Ја разгледуваме големината $\alpha = 2x + y - 3k$, каде (x, y) е моменталната позиција на жетонот, а k е најдесната отстранета точка. Имаме:

- Ако Зоран го помести жетонот за вектор $(-1, 2), (0, 3)$ или $(3, 0)$, по неговиот и потегот на Марко α не се менува. Сепак, заради $iv)$, кога Зоран прв пат го поместува жетонот за вектор $(-1, 2)$, по неговиот и потегот на Марко α се намалува за 1.
- Ако Зоран го помести жетонот за вектор $(2,1)$, по неговиот потег и потегот на Марко α се намалува за 1.
- Во секој друг случај α се намалува за најмалку 2.

По првиот потег на Марко важи $\alpha = 0$, па пред последниот потег на Зоран мора да биде $\alpha \le 0$. Меѓутоа во тој момент е

$$\alpha = 2x + y - 3k \ge 2(a-2) + 2018 - 3(a-1) = 2017 - a \ge -1,$$

па е $a \le 2018$ и α никогаш не се намалила за повеќе од 1. Оттука следува дека сите дотогашни потези на Зоран биле за вектор $(0, 3)$ или $(3, 0)$, освен можда еден за вектор $(2,1)$, па во тој момент

$$(x, y) \equiv (0, 0) (\text{mod}\, 3) \text{ или } (x, y) \equiv (2,1) (\text{mod}\, 3).$$

Бидејќи Зоран има победа во најмногу три чекори, единствена можност е $(x, y) = (2018, 2017)$. Но, тогаш

$$a = 2\cdot 2018 + 2017 - 3k = 6053 - 3k > 0,$$

што е противречност.

Втор начин. Ќе дадеме друга стратегија на Марко на работ $y = 2019$. Достапните точки на овој раб ќе ги наречеме *излезни*.

Во првите 672 чекори, што и да игра Зоран, Марко ги затвора сите 1345 излези од видот $(x, 2019)$ за $3 \mid x$, а во 673 потег го затвора излезот кој е најблизок до Зоран (било кој, ако ги има два). Понатаму, по секој потег на Зоран, Марко затвора два излези кои се најблиски до Зоран (било кои ако ги има повеќе).

Со индукција по $n \geq 673$ ќе докажеме дека Зоран пред својот $n-$ти потег се наоѓа на растојание најмалку 4 (по координати) од најблискиот излез.

Нека $n = 673$. Зоран е или во точката $(0, 2016)$ или под правата $y = 2016$, а излезот $(0, 2019)$ Марко веќе го затворил, па затоа тврдењето важи.

Нека $n = 674$. Моменталната позиција на Зоран да ја означиме со (x_0, y_0). Ако $y_0 < 2018$, единствени три излези на растојание помало или еднакво на 3 од Зоран се $(x_0 \pm 1, 2019)$ и $(x_0, 2019)$, од кои едниот е веќе затворен, а Марко во својот $n-$ти потег ги затвора преостанатите два. Ако $y_0 = 2018$, тогаш $x_0 = \pm 1$ и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_0 = 1$. Меѓу излезите $(a, 2019)$ за $-1 \leq a \leq 3$ три се веќе затворени, а Марко сега ги затвора преостанатите два.

Нека $n > 674$ и нека (x, y_1) е позицијата на Зоран по $n-2$ потези. Сите излези се на растојание поголемо или еднакво на 4 од Зоран. Од трите излези $(x_1 \pm 1, 2019)$ и $(x_1, 2019)$ еден е веќе затворен, а Марко во $(n-1)-$от потег ги затвора преостанатите два (ако се отворени). Го разгледуваме $(n-1)-$от потег на Зоран.

i) Да претпоставиме дека Зоран свртува десно (случајот кога свртува лево е аналоген). Најблискиот излез лево од правата $x = x_1$ има x координата која не е поголема од $x_1 - 2$ и таа му е на растојание најмалку 4. Од друга страна, десно од правата $x = x_1$ на растојание помало или еднакво на 3 има најмногу два отворени излези, а Марко во својот $n-$ти потег ги затвора.

ii) Ако Зоран не ја менува $x-$координатата, тогаш Марко во својот $n-$ти потег ги затвора излезите $(x_1 \pm 2, 2019)$ (ако се отворени), па затоа најблискиот излез на Зоран ќе му биде на растојание поголемо или еднакво на 4.

Од претходните разгледувања следува дека Марко има стратегија со која Зоран не може да победи.

21. Дадена е таблица $1\times n, (n\geq 2)$. Двајца играчи во слободните полиња наизменично ги запишуваат знаците „+“ и „-“. Првиот играч секогаш запишува „+“, а вториот играч секогаш запишува „-“. Не е дозволено два исти знака да бидат запишани во две соседни полиња. Играта ја губи играчот кој не може да одигра потег. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Вториот играч има победничка стратегија. Стратегијата се состои во тоа да во првиот потег вториот играч запише „-“ во некое од крајните полиња. Сега во натамошниот тек на играта може да игра на произволен начин, се разбира почитувајќи ги правилата за игра. Ќе докажеме дека со оваа стратегија тој стално победува. По k – от потег на првиот играч ако се исфрлат k полиња кои содржат „+“, таблицата се разбива на k поврзани делови кои содржат празни полиња или полиња со „-“. Бидејќи има $k-1$ минуси, добиваме дека останал еден дел кој содржи само празни полиња и вториот играч може да запише „-“ во некое од тие полиња. Значи, вториот играч има потег по секој потег на првиот играч, што значи дека тој победува.

22. Двајца играчи ја играат следнава игра: наизменично во темињата на $n-$ аголник ги запишуваат броевите 0 или 1. Првиот играч ја почнува играта и победува ако по некој негов потег постои триаголник чии темиња се три последователни темиња на $n-$аголникот, таков што збирот на броевите запишани во неговите темиња е делив со 3. Вториот играч победува ако тоа успее да го спречи. Определи кој играч има победничка стратегија ако:

а) $n=2019$, б) $n=2020$, в) $n=2021$.

Решение. Првиот играч победува ако $n>3$ е непарен број, додека во спротивно победува вториот играч.

Јасно ако $n=3$ победува вториот играч. Понатаму, ако $n=2k$, да ги поделиме темињата на многуаголникот $A_1A_2A_3...A_{2k-1}A_{2k}$ на последователни $\{A_1,A_2\},\{A_3,A_4\},...,\{A_{2k-1}A_{2k}\}$. Вториот играч игра така што во преостанатото теме во парот кој првиот играч само што го одбрал, го запишува спротивниот број од бројот кој го запишал првиот играч. Попрецизно, ако првиот играч во темето A_{2j-1} го запише бројот i, тогаш вториот играч во темето A_{2j} го запишува бројот $1-i$, а ако првиот играч во темето A_{2j} го запише бројот i, тогаш вториот играч во темето A_{2j-1} го запишува бројот $1-i$. Така збирот на броевите во секои три последователни темиња ќе биде 1 или 2, бидејќи секои три темиња содржат пар последователни темиња чиј збир е еднаков на 1. Значи, ако $n=3$ или $n=2k$, победува вториот играч

Во преостанатите случаи победува првиот играч. Без ограничување на општоста да претпоставиме дека првиот играч во првиот потег го запишал бројот 0 во темето A_1. Ако вториот играч не запише 1 во темето A_2 или A_n, тогаш брзо победува првиот играч. Навистина, барем до едно од темињата A_3 и A_{n-1} не е запишан број по првиот потег на вториот играч. Нека тоа е темето A_3. Првиот играч запишува 0 во темето A_2 (ако тоа веќе го направил вториот играч, тогаш победува првиот играч со запишување 0 во темето A_3). Ако вториот играч запишал 0 во темето A_n, тогаш тоа е веќе победа за првиот играч, а во спротивно темето A_n е празно, како и темето A_3. Сега, при било каков потег на вториот играч, првиот играч победува така што запишува 0 во едно од темињата A_3 или A_n, во кое до тој момент не е запишан број.

Понатаму, нека претпоставиме дека вториот играч запишал 1 во полето A_2 (симетрично се игра за A_n).

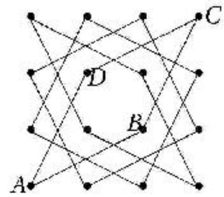
Ако $n = 4k+1 \geq 5$, тогаш првиот играч победува на следниов начин. Првиот играч во темето A_{4i-1} го запишува бројот 1, а во темето A_{4i+1} го запишува бројот 0, за секој $1 \leq i \leq k$. Гледаме дека вториот играч мора форсирано да игра така што запишува 0 во темињата A_{4i}, за $1 \leq i \leq k$ и 1 во темињата A_{4i+2}, за $1 \leq i \leq k$. Ако тоа не го направи губи, бидејќи тогаш првиот играч запишува во три последователни темиња ист број, што значи збир делив со 3. Меѓутоа, на крајот на играта, во темињата A_1, A_{4k+1} и A_{4k} е бројот 0, што значи дека првиот играч победува.

Ако $n = 4k+3 \geq 7$, тогаш првиот играч победува на следниов начин. Играта се одвива на ист начин како во преходниот случај, се до претпоследниот циклус потези. Нека претпоставиме дека до сега се запишани броеви во темињата $A_1A_2...A_{4k-1}A_{4k}$ како и во претходниот случај, бидејќи во спротивно првиот играч веќе победил. Во темињата A_1 и A_{4k} е запишан бројот 0, додека во темињата $A_{4k+1}, A_{4k+2}, A_{4k+3}$ не се запишани броеви. Сега првиот играч во темето A_{4k+2} го запи-шува бројот 0 и победува во следниот потег, запишувајќи го бројот 0 во преостанатото теме кое не го одбрал вториот играч.

23. *Позиција* е секоја точка (x, y) во рамнината таква што x и y се природни броеви не поголеми од 20.

На почетокот, сите 400 позиции се слободни. Ана и Бојан играат игра во која наизменично повлекуваат потези, при што Ана игра прва. Во секој свој потег Ана поставува нов црвен жетон на слободна позиција така што растојанието меѓу секои две позиции на кои се наоѓаат црвени жетони е различно од $\sqrt{5}$. Во секој свој потег Бојан поставува нов син жетон на некоја слободна позиција. (Позицијата на која се наоѓа син жетон може да биде на било кое

растојание од другите позиции на кои се наоѓа некој жетон.) Играта завршува кога некој од играчите не може да повлече потег.
Определи го најголемиот број K така што Ана сигурно може да постави K црвени жетони, без разлика како Бојан ги поставува сините жетони.
Решение. *Одговор*: $K = 100$.



Квадратната решетка 20×20 на која се игра играта може да се подели на 25 подрешетки 4×4, секоја од кои може да се подели на 4 циклуси $ABCDA$ во кои $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \sqrt{5}$. Бојан може да ја спречи Ана во ист циклус да постави повеќе од еден црвен жетон – доволно е на секој нејзин потег да одговори со поставување на свој жетон во спротивната точка на истиот циклус (на пример, ако Ана стави жетон во точката A, Бојан става жетон во точката C). На овој начин Ана не може да постави повеќе од 100 жетони,
Од друга страна, позиции (i, j) во кои i и j се со иста парност има 200 и никои две не се на растојание $\sqrt{5}$. Со поставување на црвени жетони само на вакви позиции Ана ќе успее да постави најмалку 100 жетони.

24. Дадена е квадратна решетка со димензии 2012×2012. Во некои темиња се наоѓаат мува и k пајаци. Еден потег се состои во следново. Мувата се поместува во некое соседно теме или останува на исто место, а потоа секој од k – те пајаци се поместува во некое соседно теме или останува на место (соседни се темињата кои се разликуваат во точно една координата и тоа за 1). Во секој момент мувата и пајаците ја знаат позицијата на останатите.
а) Определи го најмалиот k за кој пајаците може да ја фатат мувата во конечно многу потези, без разлика на почетната позиција на мувата и пајаците.
б) Одговори на истото прашање во случај на кубна решетка со димензии $2012 \times 2012 \times 2012$.
Решение. Еден пајак не може да ја фати мувата. Доволно е мувата да не мрда ако пајакот не е во соседно теме, односно да се помести во теме кое е дијагонално на темето во кое се наоѓа пајакот, ако тој се наоѓа во соседно теме.
Ќе докажеме дека во двата случаја два пајаци се доволни да ја фатат мувата. Пајаците да ги означиме со P и Q, мувата со M, а x и y координатата на точката A со A_x и A_y, соодветно.
а) Да го поставиме координатниот почеток во долниот лев агол на решетката. На почетокот, движејќи се по x – оската, пајакот P во конечен број чекори постигнува да важи $P_x = M_x$. Аналогно пајакот Q постигнува да важи $Q_y = M_y$. Потоа пајаците се движат на следниов начин: ако мувата ја про-

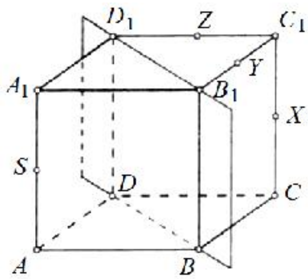
мени $x-$координатата, P го прави истото така да важи $P_x = M_x$, во спротивно и се приближува на мувата за еден чекор долж $y-$оската. Пајакот Q се движи аналогно. На овој начин бројот $|P_y - M_y| + |P_x - M_x|$ или се намалува или останува непроменет, при што непроменет може да остане најмногу во $2\cdot 2010$ потези (кога мувата се повлекува). Според тоа, по конечен број потези барем еден собирок ќе биде еднаков на нула, т.е. мувата ќе биде фатена.

б) Занемарувајќи ја $z-$оската, врз база на делот под а), еден од пајаците, да кажеме P, може да постигне да важи $P_x = M_x$ и $P_y = M_y$. Понатаму, секогаш кога мувата ќе направи чекор долж $z-$оската, пајакот P оди кон неа, а во спротивно секогаш се движи така да остане точно под (над) мувата. Јасно мувата може само конечно многу пати да направи чекор долж $z-$оската или да остане на место, а притоа пајакот P да не ја фати. Според тоа, почнувајќи од некој момент, мувата мора да се движи исклучиво во нејзина $xy-$рамнина, без притоа да стои на едно место.

Сега пајакот Q во конечно многу чекори доаѓа до $xy-$рамнината по која се движи мувата. Исто така, со стоење во место по потреба, Q постигнува бројот $f = |Q_x - M_x| + |Q_y - M_y|$ да е парен. В секој следен чекор пајакот Q се приближува на мувата долж $x-$оската ако $|Q_x - M_x| > |Q_y - M_y|$, а долж $y-$оската аво спротивно. По секој потег, бројот f не се зголемува и не ја менува парноста, при што само конечен број пати може да остане ист (кога мувата бега од пајакот кон крајот на решетката). Според тоа, во некој момент ќе биде $f = 0$ и мувата ќе биде фатена.

25. Дадена е коцка. По нејзините рабови се движат мравка и два пајаци. Нивните најголеми брзини се еднакви. На почетокот двата пајаци се наоѓаат во едно теме, а мравката се наоѓа во дијагоналното спротивно теме. Докажи дека пајаците секогаш може да ја фатат мравката. Во текот на движењето и мравката и пајаците имаат информација за моменталната положба на сите учесници во потерата.

Решение. Нека коцката е $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и нека во почетниот момент пајаците P_1 и P_2 се наоѓаат во темето A, а мравката се наоѓа во темето C_1. Добра стратегија за пајаците е следнава: Пајакот P_2 се движи кон темето C_1 по патот $A-D-D_1-C_1$, а пајакот P_1 се движи така што е во симетрична положба со



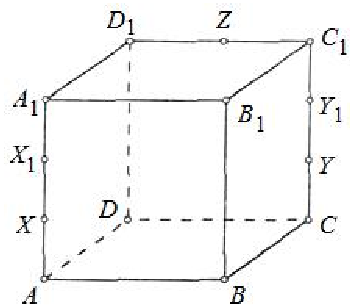
мравката во однос на центарот на коцката. Движењето на мравката може да биде такво што:

1) Мравката никогаш не доаѓа во некоја од средините X, Y, Z на отсечките C_1C, C_1B_1, C_1D_1, т.е. се движи само по отсечките C_1X, C_1Y, C_1Z, без точките X, Y, Z. Тогаш мравката ја фаќа пајакот P_2 на некоја од овие отсечки.
2) Мравката во текот на движењето стигнува во некоја од точките X, Y, Z, да кажеме во моментот t_1 е во точката X. Во тој момент пајакот P_1 е во средината S на отсечката AA_1. Од моментот t_1 па понатаму пајакот P_1 се движи така што е во симетрична положба со мравката во однос на рамнината BB_1D_1D. Ако мравката во текот на движењето по моментот t_1 дојде во некоја од точките B, B_1, D_1, D, тогаш во таа точка ја фаќа пајакот P_1. Во спротивен случај ја фаќа пајакот P_2, кој по доаѓањето во точката C_1 ја заробува мравката на отсечката C_1B_1, или по доаѓањето од C_1 во C ја заробува мравката на една од отсечките CB или CD.

26. Дадена е коцка. По нејзините рабови се движат мравка и три пајаци. Мравката е три пати побрза од секој од пајаците. Докажи дека пајаците секогаш може да ја фатат мравката. Во текот на движењето и мравката и пајаците имаат информација за моменталната положба на сите учесници во потерата.

Решение. Нека коцката е $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overline{AB} = a$ и нека X и X_1 се точки од работ AA_1, а Y и Y_1 се точки од работ CC_1 такви што важи

$$\overline{AX} = \overline{XX_1} = \overline{X_1A_1} = \frac{a}{3}, \ \overline{CY} = \overline{YY_1} = \overline{Y_1C_1} = \frac{a}{3}.$$



Добра стратегија за пајаците, да ги означиме со P_1, P_2 и P_3 е следнава. Во некој момент t_0 пајаците P_1 и P_2 стигнуваат во точките X и Y, соодветно. Во текот на натамошната потера по мравката пајакот P_1 ќе се движи само по работ AA_1, а пајакот P_2 само по работ CC_1. По моментот t_0 пајакот P_3 тргнува во потера по мравката. Мравката при бегањето пред пајакот P_3 не смее да се задржува многу долго на рабовите AA_1 и CC_1, бидејќи во спротивно пајакот P_3 ќе ја зароби со еден од пајаците P_1 и P_2 на некоја од отсечките AX, A_1X, CY, C_1Y. Очигледно, при движењето по другите рабови пајакот P_3 може да ја примора мравката да дојде во некое од темињата B, D, B_1 или D_1. Навистина, ако мравката во моментот t_0 се нашла на работ BB_1, тогаш пајакот P_3 и се приближува и ја принудува мравката да дојде во темето B или во темето B_1. Ако мравката во моментот t_0 се наоѓа на некоја од страните на квадратот $ABCD$, тогаш пајакот P_3 ја принудува да дојде во некое од темињата B или D, бидејќи мравката не смее од точките A и C да оди по рабовите AA_1 и CC_1, на кои ја чекаат пајаците P_1 и P_2. Аналогно се разгледуваат останатите можни положби на мравката во моментот t_0. Сега, ќе разгледаме два случаја.

1) Мравката во некој момент $t_1 > t_0$ дошла во некое од темињата B или D, да кажеме во B. По моментот t_1, пајакот P_1 се движи на следниот начин: ако мравката се движи по рабовите на ѕидот ABB_1A_1 во насока $A-B-B_1-A_1$, пајакот P_1 се движи по работ AA_1 кон темето A_1. Ако мравката се движи по рабовите на ѕидот $ABCD$ во спротивна насока, тогаш пајакот P_1 тргнува кон темето A. Мравката не може да стигне во темето A пред пајакот P_1, бидејќи $\overline{AX} = \frac{a}{3}$ и $\overline{BA} = a$. Исто така, мравката не може да стигне во темето A_1 пред пајакот P_1, бидејќи $\overline{XA_1} = \frac{2a}{3}$, $\overline{BB_1} + \overline{B_1A_1} = 2a$. Ако мравката го напушти ѕидот ABB_1A_1, тргнувајќи од точката B по работ BC или тргнувајќи од точката B_1 по работ B_1C_1, тогаш додека мравката се движи по рабовите на квадратот $ABCD$ пајакот P_1 мирува (во точката X, ако мравката тргнала по работ BC, односно во точката X_1, ако мравката тргнала по работ B_1C_1). Според тоа, пајакот P_1 може да ја спречи мравката да побегне преку темињата A и A_1. Аналогно се докажува дека пајакот P_2 може да ја спречи мравката да побегне преку темињата C и C_1. Бидејќи пајакот P_3 оди по мравката, мравката ќе биде фатена на некој од рабовите BA, BC, BB_1, B_1A_1 или B_1A_1.

2) Мравката во некој момент $t_2 > t_0$ дошла во некое од темињата B_1 или D_1, да кажеме во темето B_1. Бегајќи пред пајакот P_3 по моментот t_2, мравката мора од темето B_1 да дојде во некое од темињата B, C_1 или A_1. За тоа време пајаците P_1 и P_2 може да се движат така што ќе ја постигнат следнава цел:

   а) Во моментот на доаѓање на мравката во темето B пајаците P_1 и P_2 ќе се наоѓаат во точките X и Y, со што задачата се сведува на случајот 1).

   б) Во моментот на доаѓање на мравката во темето A_1 или темето C_1, да кажеме во моментот t_3, пајаците P_1 и P_2 се наоѓаат во точките X_1 и Y_1.

По моментот t_3, пајаците P_1 и P_2 чекаат во точките X_1 и Y_1, додека мравката бегајќи пред пајакот P_3 не дојде во некое од темињата B_1 или D_1. Позицијата кога пајаците P_1 и P_2 се наоѓаат во точките X_1 и Y_1, а мравката во некое од темињата B_1 или D_1 е аналогна на позицијата во случајот 1). Со тоа докажавме дека пајаците може да ја фатат мравката.

27. Дадени се n кутии нумерирани со броеви од 1 до n. На почетокот во секоја кутија има карта со бројот на кутијата. Велко произволно ги разместил картите во кутиите и потоа во $i-$тата кутија се наоѓала картата со број a_i, $i=1,2,...,n$. Павле има право да избере две карти со броеви x и y и да им ги замени местата, при што за размената на картите плаќа $2|x-y|$ денари. Докажи дека, Павле може да ги врати сите карти на почетните места но така да плати најмногу $\sum_{i=1}^{n}|a_i-i|$ денари.

Решение. Нека $(b_1,b_2,...,b_n)$ е произволна распределба на картите во даден момент (b_i е бројот запишан на картата која се наоѓа во $i-$тата кутија). Бројот $\sum_{i=1}^{n}|b_i-i|$ ќе го наречеме *цена* на таа распределба.

Лема. За секоја распределба $(b_1,b_2,...,b_n)$, различна од почетната, може да се разместат некои две карти b_i и b_j така, што цената на новата распределба во однос на цената на распределбата $(b_1,b_2,...,b_n)$ да се намали точно за $2|b_i-b_j|$ денари.

Доказ. Да забележиме, дека при размена на местата на картите b_i и b_j цената на распределбата $(b_1,b_2,...,b_n)$ се намалува за

$$|b_i-i|+|b_j-j|-|b_i-j|-|b_j-i|=(|b_i-i|-|b_j-i|)+(|b_j-j|-|b_i-j|)$$

Лесно се гледа дека последниот израз е еднаков на $2|b_i-b_j|$ точно кога се исполнети неравенствата $i\le b_j<b_i\le j$ и тогаш секој од двата собирци на десната страна на последното равенство ќе биде еднаков на $|b_i-b_j|$. Останува да определиме такви индекси i и j.

Нека j е најголемиот број, запишан на карта која не е во својата кутија, т.е. не е во кутијата со број j. Картата со број b_j исто така не е во својата кутија (се наоѓа во кутијата j), па затоа $b_j<j$. Да ги означиме првите b_j кутии. Имаме точно b_j карти со броеви помали или еднакви на b_j и една од нив,

т.е. картата со број b_j се наоѓа во неозначената $j-$та кутија кутија, бидејќи $b_j < j$. Според тоа, меѓу означените кутии постои кутија i, таква што $b_i > b_j$. Јасно, заради изборот на j важи $b_i \le j$, од каде следува низата неравенства $i \le b_j < b_i \le j$. ■

Тврдењето на задачата сега лесно следува од лемата – за секоја распределба, различна од почетната, можеме да ја намалиме цената за некоја сума a, така што плаќаме точно a денари. Продолжувајќи на овој начин, ќе добиеме распределба со цена нула, при што при трансформациите сме ја платиле точно цената на распределбата $(b_1, b_2, ..., b_n)$.

28. Ловец и невидлив зајак играат игра во рамнината. Почетните точки во рамнината на зајакот и ловецот, соодветно означени со A_0 и B_0, се исти. По $n-1$ кругови играње, зајакот е во точката A_{n-1}, а ловецот е во точката B_{n-1}. Во $n-$тиот круг редоследно се случуваат следниве настани:

i) Зајакот незабележливо се поместува во точка A_n која е на растојание 1 од точката A_{n-1},

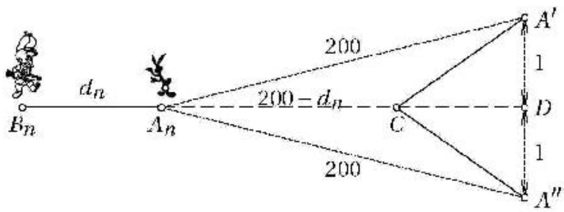
ii) Ловецот на радар отчитува точка P_n. Единствено што гарантира радарот е дека растојанието меѓу точките P_n и A_n е најмногу 1.

iii) Ловецот се поместува во точка B_n на растојание точно 1 од точката B_{n-1}, што зајакот го гледа.

Дали ловецот секогаш, без разлика како ќе се движи зајакот и какви се извештаите на радарот, може да се движи така што ќе обезбеди по 10^9 кругови растојанието меѓу него и зајакот да биде најмногу 100?

Решение. *Одговор*: НЕ, сигналите на радарот може да бидат такви што ловецот не може да ја има саканата стратегија.

Со $d_n = \overline{A_n B_n}$ да го означиме растојанието меѓу зајакот и ловецот по n чекори. Ако $d_n \le 100$ ќе докажеме дека со помош на радарот и малку среќа зајакот во 200 чекори може да го зголеми квадратот на растојанието од ловецот за $\frac{1}{2}$.



Да ги разгледаме точката C на полуправата $B_n A_n$ таква што $\overline{B_n C} = 200$ и точките A' и A'' на растојание 1 од правата $B_n A_n$ и растојание 200 од точката A_n (каде $\measuredangle B_n A_n A' = \measuredangle B_n A_n A'' > 90^\circ$). Зајакот може да ја избере една од точките A' и A'' и да направи 200 скокови кон неа. Меѓутоа, бидејќи за тоа време неговото растојание од правата B_nA_n нема да е поголемо од 1, можно е сите сигнали $P_n, P_{n+1}, ..., P_{n+200}$ да се на правата B_nA_n. Така, ловецот по 200 чекори стигнува во точката $B = B_{n+200}$ за која важи $\overline{B_nB} \leq 200$, при што нема начин да знае дали зајакот стигнал до точката A' или A''. Бидејќи

$$\max\{\overline{BA'}, \overline{BA''}\} \geq \overline{CA'}$$

ниту една стратегија не му гарантира на ловецот растојание помало од $\overline{CA'}$. Со други зборови оптималната стратегија на ловецот е да оди право кон точката C. Меѓутоа, ако D е подножјето на нормалата од A' на правата A_nB_n, тогаш лесно се добива

$$\overline{CA'}^2 = \overline{CD}^2 + 1 = (d_n - x)^2 + 1 = x^2 + 1 + d_n^2 - 2d_nx,$$

каде $x = 200 - \sqrt{200^2 - 1}$. Од $x > \frac{1}{400}$ и $x^2 + 1 = 400x$ следува

$$\overline{CA'}^2 = d_n^2 + (400 - 2d_n)x > d_n^2 + \frac{1}{2}.$$

Според тоа, со малку среќа зајакот постигнува да важи $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$. На овој начин по $400 \cdot 100^2 = 4 \cdot 10^6$ чекори зајакот може да му побегне на ловецот на растојание поголемо од 100, без разлика каква стратегија ќе користи ловецот.

24. ТАБЕЛИ И РАСПОРЕДИ

1. Мравка се движи по линиите на квадратна шема од теме до теме на следниот начин: поаѓа од едно теме на шемата и во секое следно теме го менува правецот на движење за 90°. По посетата на одреден број на темиња, мравката се вратила во темето од кое го почнала движењето.
Докажи дека бројот на темиња кои мравката ги посетила е делив со 4. (Секое теме се брои онолку пати колку што е посетено.)
Решение. Движењата на мравката можеме да ги разделиме на четири вида: движење нагоре, движење надолу, движење во лево и движење во десно. Движењата нагоре и надолу ќе ги нарекуваме вертикални, а движењата во лево и во десно ќе ги нарекуваме хоризонтални.
Нека мравката тргнала од некое теме и по посета на одреден број на темиња таа се вратила во почетното теме.
Бројот на темиња y кои ги посетила мравката движејќи се налево е еднаков на бројот на темиња кои ги посетила движејќи се на десно. Според тоа, таа движејќи се хоризонтално посетила $2y$ темиња. Бројот на темиња x кои мравката ги посетила движејќи се нагоре е еднаков на бројот на темиња кои мравката ги посетила движејќи се надолу. По посетата на теме движејќи се хоризонтално, таа продолжува да се движи вертикално и посетува теме кое се наоѓа вертикално. Според тоа $2x=2y$, т.е. $x=y$. Значи, бројот на темиња кои таа ќе ги посети е $2x+2y=2x+2x=4x=4y$, т.е. тој е делив со 4, што требаше да се докаже.

2. Чета од $n(n+2)$ војници е построена во n колони и $n+2$ реда на еднакви растојанија од еден метар. По команда при која секој војник се придвижува за еден метар во еден од четирите правци или останува на место, четата е построена во $n+2$ колони и n редови на еднакви растојанија. Докажи, дека n е парен број.
Решение. Нека четирите правци се горе, долу, лево и десно. По командата најгорниот ред се придвижува надолу, најдолниот ред – нагоре, најлевата колона (без двајцата крајни војници) – налево, а најдесната колона (исто без двајцата крајни војници) – надесно. Останатите војници, кои на почетокот се построени во $n-2$ колони и n редови, се придвижуваат така што се постројуваат во n колони и $n-2$ редици. Така од n преминавме на $n-2$. Ако постапката ја продолжиме доаѓаме до $n=1$ или $n=2$. Бидејќи за $n=1$ условот не може да биде исполнет добиваме дека n е парен број.

3. Дадена е табела со димензиии $n \times n$ во која со ѕвездички се обележани $n-1$ квадратче. Докажи, дека со меѓусебно разместување на редовите и меѓусебно разместување на колоните може ѕвездичките да се поставаат само во квадратчињата кои се наоѓаат под дијагоналата која ги поврзува горниот лев и долниот десен агол.

Решение. Бидејќи се обележани $n-1$ квадратче, во некоја од $n-$те колони нема обележано квадратче и таа ја заменуваме со крајната десна колона. Сега ги разгледуваме редовите. Сите нивни десни квадратчиња се необележани и постои ред во кој е обележано најмалку едно квадратче. Овој ред ќе го замениме со најдолниот ред. Тогаш во најдолниот ред има најмалку едно обележано квадратче и сите квадратчиња од овој ред се наоѓаат под дијагоналата. Сега постапката ќе ја повториме прво за квадратот со димензии $(n-1)\times(n-1)$ кој не ја содржи крајната десна колона и најдолниот ред од табелата, потоа за квадратот со димензии $(n-2)\times(n-2)$ кој не ги содржи двете крајни десни колони и најдолните два реда итн. Јасно, во секој следен чекор обележаните квадратчиња во исфрлените редови ќе се наоѓаат под дијагоналата на квадратот со димензии $n \times n$, а постапката ќе заврши после конечен број чекори, со што тврдењето е докажано.

4. Во полињата на квадратна табела со димензии $n \times n$ во произволен редослед се запишани броевите $1, 2, ..., n^2$. Докажи, дека постојат две соседни полиња, за кои разликата меѓу броевите, запишани во нив, е поголема или еднаква на n.

Решение. Со M_k да го означиме множеството од оние полиња во кои се запишани броевите $1, 2, ..., k$. Нека k_0 е најмалиот k, за кој M_k содржи линија. Јасно, $k_0 < n^2 - n + 2$. Нека, на пример, M_{k_0} го содржи првиот ред. Тогаш M_{k_0-1} го содржи првиот ред без едно поле. Нека тоа поле е во $s-$тата колона. Да ги разгледаме преостанатите $n-1$ колони. Барем една од нив нема да го содржи ниту еден од броевите $k_0+1, k_0+2, ..., k_0+n-2$. Нека тоа е колоната со реден број r. Во неа има броеви поголеми од k_0, што значи броеви поголеми од k_0+n-2. Од овие броеви да го разгледаме бројот кој е најблиску до првиот ред. Јасно, овој број во $r-$тата колона има сосед кој е помал од k_0. Според тоа, нивната разлика е поголема или еднаква на $(k_0+n-1)-(k_0-1)=n$.

5. Разгледуваме квадратна табела

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

која содржи ненегативни цели броеви и го има следното својство: ако $a_{ij} = 0$, тогаш збирот на елементите на $i-$тата редица и $j-$тата колона е

$$a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj} \geq n .$$

Докажи, дека $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq \frac{1}{2} n^2$.

Решение. Ги разгледуваме сите можни збирови по редици и колони. Нека p е најмалиот од сите тие збирови. Ако $p \geq n$, тогаш нема што да се докажува. Затоа нека $p < n$. Со замена на редиците и колоните збировите не се менуваат. Затоа можеме да претпоставиме дека збирот на елементите од првата колона е еднаков на p и првите собирци се еднакви на нула, а останатите собирци се ненулти. Бидејќи $p < n$, во првата редица има најмалку $n-p$ нули. Збирот на елементите во секоја од првите $n-p$ колони е најмалку $n-p$, па затоа збирот на елементите во сите тие колони е поголем или еднаков на $(n-p)^2$. Во последните p колони збирот на елементите е најмалку p^2. Затоа збирот на сите елементи S_n го исполнуваат условот:

$$S_n \geq (n-p)^2 + p^2 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2}(n-2p)^2 \geq \frac{1}{2} n^2 ,$$

што требаше да се докаже.

6. Во секое поле на табела со димензии $n \times n$ е запишан еден од броевите $-1, 0$ или 1. Дали може збировите на запишаните броеви по редици и колони да бидат различни $2n$ броеви, ако

а) $n = 4$, б) $n = 5$.

Решение. а) Да, на пример, тоа може да се постигне со следнава табела

1	0	1	1
1	–1	–1	–1
1	–1	1	0
1	–1	1	–1

б) Не. Имаме 11 можности за $10-$те збирови: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$. Со a_i да го означиме збирот на броевите во $i-$от ред, а со b_j збирот на броевите во $j-$тата колона. Очигледно

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5,$$

што значи дека бројот на непарните броеви a_i и бројот на непарните броеви b_j имаат иста парност. Според тоа, сите непарни збирови мора да се реализираат.

Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $b_1 = 5$. Тогаш ниту еден a_i не може да биде еднаков на -5, па затоа можеме да земеме дека $b_2 = -5$. Од можните збирови 4 и -4 треба да се реализира барем еден и нека тоа е 4 (во спротивно доволно е да ги замениме знаците на запишаните броеви во табелата). Тој се реализира само ако во една колона има 4 единици и 1 нула. Нека $b_3 = 4$ и нулата е во последната редица. Според тоа, $a_i \neq -3$ за секој i и можеме да сметаме дека $b_4 = -3$. Тогаш во третата колона има најмалку три броја -1.

Ако тие се во првите четири редици, можеме да сметаме дека се во првите три редици и добиваме дека a_1, a_2 и a_3 е пермутација на броевите $-1, 0$ и 1. Според тоа, $b_5 \neq 3$ и бидејќи $a_5 \neq 3$, добиваме дека $a_4 = 3$, т.е. во двете последни полиња на четвртата редица се запишани единици. Бидејќи $b_4 = -3$ заклучуваме дека бројот во последното поле на четвртата колона е -1. Сега за секоја вредност на бројот во петтата редица и петтата колона добиваме противречност.

Останува да го разгледаме случајот кога во првите четири редици на четвртата колона има најмногу два броја -1. Можеме да сметаме дека броевите во четвртата колона се последователно $-1, -1, 0, 0, -1$. Бидејќи збировите на првите четири броеви по редици се $0, 0, 1, 1$ и -1, заклучуваме дека ниту еден од збировите не може да биде еднаков на 3, па затоа $b_5 = 3$. Последното е можно само кога во петтата колона се запишани броевите $1, 0, 1, 0, 1$ и тогаш $a_1 = a_4 = 1$, што е противречност.

7. Во секое поле на квадратна $n \times n$ табела, $n \geq 2$, е запишан еден од броевите $+1$ или -1. Полето кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона го означуваме со (i, j), $i, j = 0, 1, ..., n-1$. Соседни полиња на полето (i, j) се полињата $(i, j-1), (i, j+1), (i-1, j), (i+1, j)$ каде собирањето и одземањето е по модул n. Во еден чекор го заменуваме бројот запишан во секое поле со производот на броевите во четирите соседни полиња. На пример, за табела 3×3 имаме

+1	−1	+1
+1	−1	−1
−1	+1	−1

$\longrightarrow$

+1	−1	−1
−1	+1	+1
−1	+1	+1

Определи ги сите вредности на n, за кои од произволна табела после конечен број чекори може да се добие табела составена само од $+1$.

Решение. Прво ќе докажеме дека, за секој непарен број $n \geq 3$, постојат почетни положби од кои не можеме да добиеме табела составена само од $+1$. Да разгледаме произволна $n \times n$ табела составена само од $+1$ и со $P_i, i = 1, 2, ..., n$ да го означиме производот на броевите во $i-$тиот ред во претпоследниот чекор. Тогаш $P_1 P_2 = P_2 P_4 = ... = P_{n-1} P_1 = P_n P_1 = 1$ и бидејќи n е непарен број, лесно се добива дека $P_1 = P_2 = ... = P_n$. Аналогно заклучуваме дека во почетната табела сите производи по редови се еднакви. Според тоа, од почетна табела во која не се сите производи по редови не може да се добие табела составена само од $+1$.

Сега да разгледаме рабела од ред $n = 2^k m$, каде m е непарен број и $k \geq 1$. После два чекори бројот во полето (i, j) ќе биде еднаков на производот на бровите во полињата $(i-2, j), (i, j-2), (i, j+2), (i+2, j)$. Според тоа, резултатот во табелата добиен во секој парен чекор може да се добие со примена на операциите на следните четири табели од ред $2^{k-1} m$:

- табела составена од сите полиња (i, j) такви што
$$i \equiv j \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2),$$
- табела составена од сите полиња (i, j) такви што
$$i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2),\ j \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2),$$
- табела составена од сите полиња (i, j) такви што
$$i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2),\ j \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2),$$
- табела составена од сите полиња (i, j) такви што
$$i \equiv j \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Сега по индукција добиваме дека табела од ред $n = 2^k m$, составена само од $+1$, може да се добие од секоја произволна положба ако и само ако тврдењето важи и за табела од ред $2^{k-1} m$. Оттука и од претходно изнесеното следува дека $m = 1$. Понатаму, лесно се гледа дека тврдењеo важи за табела од 2. Конечно, бараните броеви се од видот $n = 2^k, k \geq 1$.

8. Табела $n \times 2^n$ е пополнета со нули и единици така што нема две еднакви колони. Со a_{ij} да го означиме бројот запишан во $i-$тиот ред и $j-$тата колона. Ако збировите $\sum_{j=1}^{2^n} j a_{ij}$, за секој $i = 1, 2, ..., n$ се еднакви, определи ја нивната најмала можна вредност, кога:

а) $n = 3$, б) $n = 4$.

Решение. Јасно, ако колоните на $n\times 2^n$ табелата се различни, тогаш тие се сите подредени $n-$торки од броевите 0 и 1. Според условот имаме $t=\sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij}$, за секој $i=1,2,...,n$. Ако со v_j го означиме бројот на единиците во $j-$тата колона, тогаш

$$nt=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij}=\sum_{j=1}^{2^n} kv_k \ .$$

Од неравенството за преуредување следува дека најмалата можна вредност се достигнува кога $v_1\ge v_2\ge ...\ge v_{2^n}$.

а) За $n=3$ и $v_1\ge v_2\ge ...\ge v_8$ имаме

1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0

$$\sum_{j=1}^{2^n} kv_k=1\cdot 3+(2+3+4)\cdot 2+(5+6+7)\cdot 1+8\cdot 0=39\ ,$$

па затоа $3t\ge 39$, т.е. $t\ge 13$. Во горната табела е даден пример кога вредноста $t=13$ се достигнува.

б) Аналогно на а) наоѓаме

$$t\ge \tfrac{1\cdot 4+14\cdot 3+51\cdot 2+54\cdot 1+16\cdot 0}{4}=\tfrac{202}{4}\text{, т.е. } t\ge 51.$$

Во долната табела е даден пример за 4×16 табела со $t=51$.

1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0

9. Дадена е табела со димензии $n\times n$ чии колони се нумерирани од 1 до n. Во секое поле од табелата е запишан природен број од 1 до n така што во секој ред и во секоја колона броевите се различни. Едно поле се нарекува добро ако бројот запишан во него е поголем од бројот на колоната во која тоа се наоѓа. Определи ги сите природни броеви n за кои сите редови содржат еднаков број добри полиња.

Решение. Јасно, во колоната со број i има $n-i$ добри полиња, па затоа вкупниот број добри полиња е еднаков на

$$(n-1)+(n-2)+...+1=\tfrac{n(n-1)}{2}\ .$$

Според тоа, во секој ред има по $\frac{n-1}{2}$ добри полиња, од каде следува дека n е непарен број.

$2k+1$	$2k$	$2k-1$	...	1
1	$2k+1$	$2k$	...	2
2	1	$2k+1$	...	3
...	...	...	...	...
$2k$	$2k-1$	$2k-2$	...	$2k+1$

Во горната табела е даден пример за произволен непарен број $n=2k+1$. Во секој ред имаме циклична пермутација на $2k+1, 2k, 2k-1, ..., 2, 1$. Лесно се гледа, дека во $2i-$ тиот ред добри се првите $i-1$ поле и полињата од $2i$ до $k+i$, а во $(2i-1)-$ од ред добри се првите $i-1$ поле и полињата од $2i-1$ до $k+i-1$. Според тоа, во секој ред имаме k добри полиња.

10. Во единечните клетки на $n\times m$ табела е запишан по еден цел број. Дијагонала на табелата се нарекува множеството клетки за кои разликата меѓу бројот на редот и бројот на колоната е еднаква. Во секој чекор имаме право или да додадеме 1 или да одземеме 1 од сите клетки од даден ред, дадена колона или дадена дијагонала. Докажи, дека ако со помош на овие операции можеме да ги направиме еднакви на нула броевите во секоја 3×3 подтабела, при што останатите броеви не се менуваат, тогаш можеме да ги направиме еднакви на нула сите броеви од табелата.

Решение. Со $a_{i,j}$ да го означиме бројот кој е запишан во клетката која се наоѓа во $i-$ тиот ред и $j-$ тата колона, а со $S(i,j)$ да го означиме 3×3 квадратот со горен десен агол со клетката со бројот $a_{i,j}$, ако таков постои.

Кога $m,n\geq 3$ (ако $m\leq 2$ или $n\leq 2$ нема подтабела 3×3), за секоја подтабела $S(i,j)$ да го разгледаме изразот

$$M_{i,j} = a_{i+1,j} - a_{i+2,j} + a_{i+2,j-1} - a_{i+1,j-2} + a_{i,j-2} - a_{i,j-1}.$$

Ако избереме ред, колона или дијагонала на табелата $S(i,j)$, вредноста на тој израз не се менува. Бидејќи по услов можеме да ги направиме сите броеви на секоја 3×3 подтаблица еднакви на нула, добиваме дека $M_{i,j}=0$.

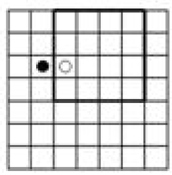
Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $m+n$. Ако $m+n=6$, т.е. $m=n=3$, тогаш тврдењето е точно. Ако $m+n>6$, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $m>3$. Разгледуваме табела $n\times(m-1)$, добиена од дадената табела без последната колона. Од индуктивната претпоставка следува, дека сите броеви на оваа $n\times(m-1)$ табела можеме да ги направиме еднакви на нула.

Вредностите $M_{i,m}, 1\le i\le n-1$ се инваријанти, од каде следува (имајќи предвид, дека само во последната колона на разгледуваните 3×3 подтабели има различни од нула), дека $a_{i+1,m}=a_{i+2,m}$, за $1\le i\le n-2$. Според тоа, важи $a_{2,m}=a_{3,m}=...=a_{n,m}$ и ако ја извршиме дозволената операција за таа колона можеме да ги направиме сите овие броеви еднакви на нула. Останува само бројот $a_{1,m}$, кој е на дијагонала и исто така можеме да го направиме еднаков на нула. Со тоа индукцијата е завршена.

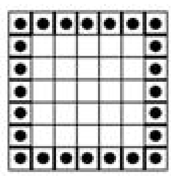
За $m+n<6$ имаме $m\le2$ или $n\le2$ и доказот е тривијален.

11. Во квадратна табела со димензии 7×7 Марко ги запишал сите природни броеви од 1 до 49. Горјан треба да го открие распоредот на броевите во табелата. Тој може да избере квадрат кој покрива некои полиња на табелата и на Марко да му постави прашање кои броеви се наоѓаат во внатрешноста на тој квадрат. Определи го најмалиот број прашања кои Горјан треба да ги постави за да врз основа на одговорите на Марко го открие распоредот на сите броеви во табелата?

Решение. Секој квадрат кој Горјан ќе го воочи определува некое подмножество од полиња на дадената табела. Исто така, за фамилија множества која Горјан ќе ја воочи, секој елемент на табелата определува фамилија подмножества од воочената фамилија. За да може Горјан да го определи распоредот на елементите, потребно е на различните елементи да соодветствуваат различни подфамилии, односно за секои два елементи да постои подмножество во воочената фамилија која го содржи едниот од елементите, но не го содржи другиот.



Фамилијата подмножества која е определена со 12 квадрати со димензии 4×4 кои се наоѓаат барем со една своја страна на страната на почетниот квадрат е доволна (на пример централното квадрат припаѓа на сите подмножества, аголните само на по еден квадрат итн.). Имено, од претходно изнесеното и заради симетрија доволно е да се докаже дека произволни две полиња од горниот лев 4×4 квадрат се разделуваат. Тие два елементи не припаѓаат или на ист ред, или на иста колона, па е јасно дека ова може да се направи (на цртежот е покажано како се разделуваат полињата на кои се наоѓаат црн и бел жетон – тие припаѓаат на различни колони, па е воочен 4×4 квадрат кој со страната ги разделува тие колони).



Од друга страна воочената фамилија мора да ги разделува рабните полиња на табелата (т.е. полињата на цртежот десно на кои се наоѓаат црните жетони). Очигледно дека за полињата на секоја страна на квадратот се потребни сите четири квадрати, па како квадратите кои ги содржат аголните полиња се повторуваат, за разделување на сите полиња на дадениот квадрат се потребни сите воочени 12 квадрати. Значи, на Горјан му се потребни 12 прашања за да го открие распоредот на броевите кои Марко ги запишал и доволно е ако, на пример, ги избере наведените прашања.

12. Броевите од 51 до 150 се запишани во полињата на табела со димензии 10×10. Дали е можно за секои два броја a и b кои се наоѓаат во соседни полиња барем една од равенките $x^2-ax+b=0$ и $x^2-bx+a=0$ да има два целобројни корени? (Соседни се полиња кои имаат заедничка страна.)

Решение. Нека претпоставиме дека одговорот на прашањето е потврден. Нека a е прост број од интервалот $[79,143]$, а b е број запишан во соседно поле. Ако равенката $x^2-bx+a=0$ има два целобројни корени, тогаш нивниот производ е еднаков на a, а нивниот збир е еднаков на b. Значи, овие корени се a и 1, при што важи $b=a+1$. Ако равенката $x^2-ax+b=0$ има два целобројни корени x_1 и x_2, тогаш $x_1+x_2=a$ и $x_1x_2=b$. Ако $x_1,x_2\geq 2$, тогаш бидејќи функцијата $y=t(a-t)$ монотоно расте за $t\leq\frac{a}{2}$ добиваме дека $b=x_1(a-x_1)\geq 2(a-2)>2(78-2)>150$, што е противречност. Значи, $x_1=1$ или $x_2=1$, па затоа $b=1\cdot(a-1)=a-1$.

Од досега изнесеното следува дека за секој прост број a од интервалот $[79,143]$ имаме две можности $b=a-1$ и $b=a+1$. Според тоа, полето во кое е запишан бројот a треба да има најмногу две соседни полиња, а тоа е можно само ако полето е аголно. Меѓутоа, табелата има четири аголни полиња, а прости броеви од интервалот $[79,143]$ се повеќе од четири (79, 83, 89, 97, 101, 103, ..., 143), што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека одговорот на поставеното прашање е *не*.

13. Дадена е квадратна табла со думензии $n\times n$, $n\geq 3$ е природен број. На секое поле од главната дијагонала (сите полиња од горниот лев до долниот десен агол на таблата), без првото и последното, е поставен по еден жетон. Дозволена е следнава операција: ако на дадено поле има жетон, а во двете полиња оддесно и одгоре на даденото поле нема жетони, можеме да го отстраниме тој жетон и да поставиме по еден жетон во тие две празни полиња. Дадена операција е применета конечен број пати, после што се покажало дека во полињата на главната дијагонала нема жетони. Определи ги сите можни вредности на бројот на жетоните на таблата во тој момент.

Решение. Во секое поле во кое на почетокот има жетон да го запишеме бројот 1. Понатаму, во секое поле над главната дијагонала да запишеме $\frac{1}{2}$, во секое поле над полето со $\frac{1}{2}$ да запишеме $\frac{1}{4}$ итн. при што во последните две полиња кои се соседни со горното десно поле запишуваме $\frac{1}{2^{n-2}}$. Да забележиме дека при примена на дозволената операција збирот на броевите соодветни на полињата во кои има жетони не се менува. На почетокот овој збир е еднаков на $n-2$.

Од друга страна, од равенството

$$n-2=\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2^2}+\frac{n-3}{2^3}+...+\frac{2}{2^{n-2}}$$

(кое лесно се докажува со индукција) следува дека збирот на броевите во сите полиња над главната дијагонала без најгорното десно поле е еднаков на $n-2$. Бидејќи во најгорното десно поле не може да има жетон, добиваме дека ако во даден момент на главната дијагонала нема жетони, тогаш сите полиња над главната дијагонала, без најгорното десно поле, треба да имаат жетони. Нивниот број е еднаков на $\frac{n(n-1)}{2}-1$.

14. Даден е природен број k. Во секое поле на квадратна $n\times n$ табела е запишан ненегативен цел број помал или еднаков на k. Во еден чекор додаваме 1 на броевите од даден ред или дадена колона (броевите еднакви на $k+1$ ги заменуваме со 0). Познато е дека дадената табела е добиена од нултата табела со конечно многу чекори. Докажи дека од секој број од дадената табела може да се добие 0 по најмногу kn чекори.

Решение. За секој цел број r со $r_{(k+1)}$ ќе го означиме остатокот на r кој се добива при делењето со $k+1$.

Нека некоја табела е добиена од нултата табела по $c_1,c_2,...,c_n$ чекори реализирани соодветно со првиот, вториот, ..., $n-$тиот ред и по $d_1,d_2,...,d_n$ чекори реализирани соодветно со првата, втората, ..., $n-$тата колона. Тогаш бројот во полето (s,t) е еднаков на $(c_s+d_t)_{(k+1)}$. Според тоа, ако во таква табела една колона или еден ред се нулти, тогаш таа е нулта табела.

Нека за дадена табела x е бројот во полетото $(1,1)$, а a_i (b_i) е бројот на броевите во првиот ред (колона), еднакви на $i,(0\le i\le k)$. Нека $0\le t\le k$. Тогаш по $\sum_{i=0}^{k}(t-i)_{(k+1)}a_i$ чекори на колоните можеме да добиеме сите броеви во првиот ред да се еднакви на j. Бидејќи бројот a е менува во t, ние имаме $(t-a)_{(k+1)}$ чекори во првата колона. Тогаш бројот i во поле од првиот ред се менува во $(t-x+i)_{(k+1)}$. Сега по $\sum_{i=0}^{k}(x-t-i)_{(k+1)}b_i$ чекори по редовите можеме да добиеме нулта прва колона. Бидејќи броевите во првиот ред остануваат еднакви по секој таков чекор, на крајот добиваме нулти прв ред. Согласно досегашните разгледувања по вкупно

$$S_t=\sum_{i=0}^{k}(t-i)_{(k+1)}a_i+\sum_{i=0}^{k}(x-t-i)_{(k+1)}b_i$$

чекори ќе добиеме нулта табела. Понатаму,

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{k}S_t&=\sum_{t=0}^{k}(\sum_{i=0}^{k}(t-i)_{(k+1)}a_i+\sum_{i=0}^{k}(x-t-i)_{(k+1)}b_i)\\&=\sum_{i=0}^{k}(a_i\sum_{t=0}^{k}(t-i)_{(k+1)}+b_i\sum_{t=0}^{k}(x-t-i)_{(k+1)}).\end{aligned}$$

Бидејќи двата внатрешни збира се еднакви на

$$\sum_{t=0}^{k}t=\frac{k(k+1)}{2}\ \text{ и }\ \sum_{i=0}^{n}a_i=\sum_{i=0}^{n}b_i=n,$$

следува дека $\sum_{t=0}^{k}S_t=k(k+1)n$. Значи, еден од броевите S_t не е поголем од kn, од што следува точноста на тврдењето на задачата.

15. Множеството полиња на табела со димензии $n\times n,\ n\geq 5$ го нарекуваме *убаво*, ако секој ред и секоја колона на табелата содржи барем по две полиња од тоа множество. Определи го најголемиот број m со следното својство: постои убаво множество со m полиња, кое престанува да биде убаво ако од него отстраниме произволно поле.

Решение. Множеството од сите полиња во првите два реда без последните по две во ред и сите полиња во последните две колони без првите по две во колона го има саканото својство и има $4(n-2)=4n-8$ клетки.

Нека M е убаво множество кое престанува да биде убаво ако од него отстраниме произволно поле. Една линија (ред или колона на табелата) ја нарекуваме *базна* за M, ако содржи точно две полиња од M. Значи, секое поле од M се содржи во барем една базна линија (во спротивно ќе го отстраниме тоа поле и новото множество исто така ќе биде убаво).

Нека t_r и t_k се соодветно бројот на базните редици и бројот на базните колони. Од претходно изнесеното следува $|M|\leq 2(t_r+t_k)$.

Ако $\max\{t_r,t_k\}\leq n-2$, тогаш

$$|M|\leq 2(t_r+t_k)\leq 4(n-2),$$

а ако $\max\{t_r,t_k\}=n$, имаме

$$|M|=2n\leq 4(n-2)\text{, кога }n\geq 5.$$

Нека $\max\{t_r,t_k\}=n-1$, при што, на пример, $t_k=n-1$. Ако сите полиња од единствената колона на таблицата, која не е базна, не се во M, тогаш

$$|M|\leq 2(n-1)+n-1=3n-3\leq 4(n-2)\text{, кога }n\geq 5.$$

Ако пак сите полиња од таа колона се во M, тогаш во некој ред на табелата не може да има повеќе од едно поле надвор од таа колона, т.е.

$$|M|\leq n+n-1<4(n-2)\text{, кога }n\geq 4.$$

Според тоа, $m\leq 4(n-2)$ и бидејќи имаме пример на убаво множество со $4(n-2)$ полиња, заклучуваме дека $m=4(n-2)$.

16. Нека A е множеството од сите низи од 0 и 1 со должина 4. За две такви низи ќе велиме дека се соседни ако се совпаѓаат или ако се разликуваат во точно еден член. Нека M е подмножество од A со својството: За секои два елементи a и b на A постои елемент на M, кој е соседен со a, но не е соседен со b или е соседен со b, но не е соседен со a. Определи го најмалиот можен број елементи на M ?

Решение. Да разгледаме табела, чии редови соодветствуваат на елементите на A, а колоните соодветствуваат на елементите на M. Во едно поле ставаме $\times$, ако елементот на A во соодветниот ред е соседен на елемента на M во соответната колона. Нека $|M|=k$. Од условот следува, дека нема два еднакви реда, што значи дека M има барем 16 различни подмножества. Бидејќи множество со n елементи има 2^n подмножества, важи $k\geq 4$.

Бидејќи секој ред има пет соседни (тоа е самиот ред и оние кои се разликуваат од него во првиот, вториот, третиот или четвртиот член), добиваме дека во секоја колона има точно пет знаци $\times$, т.е. вкупниот број им е $5k$. Минимален број знаци $\times$ по редови се добива кога имаме еден ред со нула знаци $\times$, k редови со по еден знак $\times$, $\binom{k}{2}$ елементи со два знака $\times$ итн.

1) За $k=4$ сите подмножества на M се 16 и затоа секое подмножество на M треба да се среќава точно по еднаш како множество од соседни на некој елемент на A. Тогаш по редови имаме еден ред без $\times$, 4 реда со по еден знак $\times$, 6 реда со по два знака $\times$, 4 реда со по 3 знака $\times$ и еден ред со четири знака $\times$. Вкупниот број на знаците $\times$ ќе биде $32>20=4\cdot 4$, што е противречност.
2) За $k=5$ имаме 25 знаци $\times$. По редови минималниот број се достигнува кога е еден ред со нула знаци $\times$, 5 реда со по еден знак $\times$ и 10 реда со по два знака $\times$. Бидејќи $5\cdot 1+10\cdot 2=25$ распределбата треба да биде точно опишаната. Тоа значи, дека секои два елементи на M треба да бидат едновремено соседни на некој елемент на A. Лесно се гледа, дека ако два елементи на M се разликуваат во повеќе од две места (позиции), тогаш не

постои елемент, на кој и двата се соседни. Според тоа секои два елементи на *M* се разликуваат во една или две позиции. Ако допуштиме дека има два елементи, кои се разликуваат во точно една позиција, тогаш без ограничување на општоста нека тоа се 0000 и 1000. Тогаш соседните на $a=0000$ и $b=1000$ во *M* се 0000 и 1000 и редовите на $a=0000$ и $b=1000$ се совпаѓаат, што е противречност. Тоа покажува, дека секои два елементи на *M* се разликуваат во точно две позиции. Без ограничување на општоста нека $0000\in M$. Тогаш останатите 4 елементи се меѓу 0011, 1100, 0101, 1010, 1001 и 0110. Но од секој од паровите (0011,1100), (0101,1010) и (1001,0110) може да се избере најмногу еден елемент, противречност.

3) За $k=6$ множеството $M=\{0000,1111,0111,0100,1001,0101\}$ ги разделува секои два елементи на *A*.

Значи, бараниот најмал број е 6.

17. На состанок на комисијата за ЕГМО, 40 членови на комисијата од 30 предложени задачи ја избира првата задача за ЕГМО. Се договориле да биде избрана задача која може да ја решат најмалку половина од членовите на комисијата, но не сите членови. Се покажало дека секој член на комисијата решил точно 26 задачи, при што никои два члена не решиле исто множество задачи. Докажи дека комисијата може да најде соодветна задача.

Решение. Да претпоставиме дека секоја задача или ја решиле сите 40 членови на комисијата, или најмногу 19. Во полето на $i-$тиот ред и $j-$ тата колона на табела запишуваме 1 ако $i-$тиот член на комисијата ја решил $j-$тата задача. Во табелата има $40\cdot 26=1040$ единици. Од друга страна, ако има k задачи кои ги решиле сите членови на комисијата, тогаш секоја од преостанатите $30-k$ задачи ја решиле најмногу 19 членови на комисијата, па затоа може да има најмногу $40k+19(30-k)=21k+570$ единици, од каде добиваме $k\geq 23$, т.е. најмалку 23 задачи ги решиле сите членови на комисијата. Од преостанатите 7 задачи секој член на комисијата решил по $26-23=3$ задачи. Бидејќи никои два члена не решиле исто множество задачи, ги определуваме тричлените множества кои соодветствуваат на решените задачи на членовите на комисијата. Вакви множества има $\binom{7}{3}=35<40$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека постои задача која е решена од најмалку половината членови на комисијата, но не од сите нејзини членови и тоа е задачата која може да биде избрана.

18. Определи ги сите природни броеви *n* за кои е можно во секое поле на $n\times n$ табела да се запише една од буквите *I*, *M* и *O* така што се исполнети следниве услови:

- во секој ред и секоја колона, една третина од запишаните букви се *I*, третина се *M* и третина се *O*;
- на секоја дијагонала на која бројот на запишаните букви е делив со три, една третина ја сочинуваат буквите *I*, третина буквите *M* и третина буквите *O*.

Напомена. Редовите и колоните на $n\times n$ табелата се означни со броевите од 1 до n на вообичаениот начин. На секое поле соодветствува пар природни броеви (i, j), $1\le i, j\le n$ За $n>1$, табелата има $4n-2$ дијагонали од два вида. Дијагонала од првиот вид се состои од сите полиња (i, j) за кои збирот $i+j$ е константен, додека дијагонала од вториот вид се састои од сите полиња (i, j) за кои разликата $i-j$ е константна.

Решение. Пример за $n=9$ е прикажан на цртежот десно. Со сложување на така пополнети квадрати во квадрат со страна $9k$ може да се добие пример за било кој *n* делив со 9.

I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M

Да претпоставиме дека табела $n\times n$ е пополнета на саканиот начин. Јасно, $3\,|\,n$, т.е. $n=3k$ за $k\in\mathbb{N}$. *Среќни полиња* ги нарекуваме сите полиња (i, j) за кои $i\equiv j\equiv 2(mod\ 3)$, а *среќни линии* сите редови, колони и дијагонали кои садржат барем едно среќно поле. Секоја среќна дијагонала има број полиња делив со 3. На два начина ќе го преброиме бројот N на парови (ℓ, c), каде ℓ е среќна линија, а *c* е поле на неа кое ја содржи буквата *M*.

Секој од $2k$ среќни редови и колони содржи по *k* букви *M*. Исто така, на среќните дијагонали од секој тип вкупно има по

$$\tfrac{1}{3}(3+6+....+n+...+6+3)=k^2$$

букви M. Според тоа, $N=4k^2$. Од друга страна, секоја од $3k^2$ букви M лежи на точно една или четири среќни линии, па затоа $N\equiv 3k^2(\mathrm{mod}\,3)$. Според тоа, $3\,|\,4k^2$, па затоа $3\,|\,k$, т.е. $9\,|\,n$.

Втор начин. Да претпоставиме дека за некој $n=3k$ бараното пополнување е можно. За $i, j\in\{1,2,3\}$ со a_{ij} да го означиме вкупниот број букви *M* во полињата (x, y) со $x\equiv i$ и $y\equiv j(\mathrm{mod}\ 3)$. Според условот на задачата важи:

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{21}+a_{22}+a_{23}=a_{31}+a_{22}+a_{13}=k^2, \tag{1}$$

$$a_{11}+a_{21}+a_{31}=a_{13}+a_{23}+a_{33}=k^2. \tag{2}$$

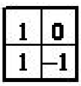
Со собирање на равенствата (1) и одземање на равенствата (2) добиваме $3a_{22}=k^2$, па затоа $3\,|\,k$, т.е. $9\,|\,n$. Пример за $9\,|\,n$ се прави како во првиот начин на решавање.

19. Определи ги сите природни броеви n, за кои во секое од единечниге квадратчиња на квадратна табла со димензии $n\times n$ може да се запише по еден од броевите $-1,0$ или 1, но така што сите $2n$ збирови на броевите запишани во колоните и редиците се различни.

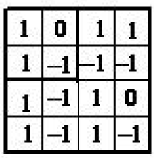
Решение. Одговор: за секој парен број таков распоред е можен.

Нека е дадена квадратна шема со димензии $n\times n$ така што во секое нејзино поле е запишан еден од броевите $-1,0$ или 1, т.е. нека $[a_{ij}]_{n\times n}$ е квадратната шема при што $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$, која го исполнува условот од задачата. Најголем збир кој може да се појави во некоја колона или редица е n а најмал која може да се појави е $-n$. Според тоа можни збирови се сите броеви од множеството

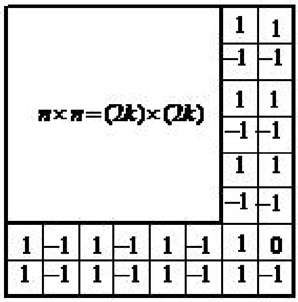
$$\{-n,-(n-1),-(n-2),...,-2,-1,0,1,2,...,n-2,n-1,n\}.$$



Цртеж 1



Цртеж 2



Цртеж 3

Според принципот на Дирихле некој од овие броеви не е збир, бидејќи сите $2n$ збирови се меѓу себе различни. Нека $r_1,r_2,...,r_n$ се збирови по редици а $c_1,c_2,...,c_n$ се збирови по колони. Нека бројот на ненегативни збирови во редиците е k. Тогаш според условот на задачата бројот на ненегативни збирови по колони е еднаков на $n-k$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $r_1,r_2,...,r_k$ се ненегативни,т.е. во првите k редици збировите се ненегативни, и дека $c_1,c_2,...,c_{n-k}$ се исто така позитивни, т.е. во првите $n-k$ колони збировите се ненегативни. Ако тоа не е така ќе извршиме преместување на редиците и потоа преместување на колоните за да биде исполнет тој услов. При тоа, со таквото преместување збировите ни по редици ни по колони нема да се промени.

За таквиот распоред имаме

$$\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|c_j|\geq\sum_{r=-n}^{n}|r|-n=-n+2\tfrac{n(n+1)}{2}=n^2. \qquad (1)$$

Од друга страна

$$\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|c_j|=\sum_{i=1}^{k}r_i-\sum_{i=k+1}^{n}r_i+\sum_{j=1}^{n-k}c_j-\sum_{j=n-k+1}^{n}c_j$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=n-k+1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=n-k+1}^{n}a_{ij}+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}$$
$$+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij} \qquad (2)$$
$$=2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}-2\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij}$$
$$\leq 2k(n-k)+2k(n-k)$$
$$=4k(n-k)$$

Од (1) и (2) добиваме $n^2 \leq 4nk-4k^2$, кое е еквивалентно со $(n-2k)^2 \leq 0$. При тоа, последното равенство е можно ако и само ако $n=2k$.
Со помош на математичка индукција може да се докаже дека за секој парен природен број $n=2k$ таков распоред е можен. На цртеж 1 и цртеж 2 дадени се такви распореди. За индуктивниот чекор на цртеж 3 е даден начинот на кој треба да се дополни квадратната шема со со димензии $2k\times 2k$ со две нови редици и две нови колони за да се добие бараниот резултат. При тоа распоредот на броеви во квадратната шема со димензии $(2k)\times(2k)$ е даден со

$$c_1=n, c_2=-n+1, c_3=n-2, c_4=-n+3, \ldots. c_{n-2}=-3, c_{n-1}=2, c_n=-1$$
$$r_1=n-1, r_2=-n+2, r_3=n-3, r_4=-n+4, \ldots., r_{n-2}=-2, r_{n-1}=1, r_n=0.$$

20. Дадени се природни броеви m и n. Определи го бројот на начините на кој може да се пополнат полињата на табела $m\times n$ со броеви од множеството $\{-2,-1,1,2\}$ така што производот на броевите во секој ред и во секоја колона е еднаков на -2.

Решение. Со a_{ij} да го означиме бројот кој е запишан во $i-$тиот ред и $j-$тата колона, за $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ и $j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

За $m\neq n$ пополнувањето со саканите својства не постои. Навистина, во секој ред треба да има точно по еден број по апсолутна вредност еднаков на 2 (значи вкупно m такви броја) и аналогно важи за колоните (значи вкушно n такви броја), што не е можно.
Нека $m=n$. Прво имаме $n!$ начини да ги избереме полињата со апсолутна вредност 2 (не е можно да има барем два броја со апсолутна вредност 2 во еден ист ред или една иста колона). Останатите броеви се со апсолутна вредност 1.

Знакот на a_{ij} можеме да го избереме слободно за $i,j\in\{1,2,...,n-1\}$ и тоа може да се направи на $2^{(n-1)^2}$ начини. Бидејќи производот на броевите во секој ред и во секоја колона е фиксиран, секој од горните избори еднозначно ги опреелува знаците на a_{in} и a_{nj} за $i,j\in\{1,2,...,n-1\}$. На крајот да забележиме дека

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_{in} = \prod_{i=1}^{n-1} a_{nj} \,,$$

бидејќи левиот производ (соодветно десниот производ), помножен со $\prod_{1\le i,j\le n} a_{ij}$ е еднаков на производот на броевите во првите $n-1$ редови (соодветно колони), т.е. на $(-2)^{n-1}$. Значи, зналот на a_{nn} е еднозначно определен, па затоа одговорот на задачата е $n!2^{(n-1)^2}$.

21. Правоаголна шема со димензии $m\times n$ е пополнета со броевите -1 и 1. На колку начини може да се направи пополнувањето така што производот на броевите во секоја колона да е -1, а производот на броевите во секој ред да е еднаков на 1?

Решение. Со a_{ij} ќе го означиме бројот кој е запишан во пресекот на i-тиот ред и j-тата колона, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$. Притоа $a_{ij}\in\{-1,1\}$.

За да производот на броевите запишани во квадратчињата во секој од првите $m-1$ редови е еднаков на 1 потребно и доволно е да

$$\prod_{j=1}^{n-1} a_{ij} = a_{in} \,,\ i=1,2,...,m-1\,. \tag{1}$$

За да производот на броевите запишани во квадратчињата во секоја од првите $(n-1)$-на колона е еднаков на 1 потребно е и доволно да

$$-\prod_{i=1}^{m-1} a_{ij} = a_{mj} \,,\ j=1,2,...,n-1\,. \tag{2}$$

За да производот на броевите запишани во m-тиот ред биде еднаков на 1, потребно и доволно е да е исполнето равенството

$$x_{mn} = \prod_{j=1}^{n-1} x_{mj} = \prod_{j=1}^{n-1}(-\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}) = (-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}\,. \tag{3}$$

Од друга страна, за производот на броевите запишани во n-тата колона да биде еднаков на -1 потребно е и доволно да

$$x_{mn} = -\prod_{i=1}^{m-1} x_{in} = -\prod_{i=1}^{m-1}(\prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}) = -\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}\,. \tag{4}$$

Од (3) и (4) имаме $(-1)^{n-1}=-1$. Според тоа, такво пополнување е можно само ако n е парен број. Ако n е непарен број, такви пополнувања нема, односно нивниот број е еднаков на 0.

Нека n е парен број. Во полињата на пресекот на првите $m-1$ редови и првите $(n-1)$-на колона ќе запишеме на произволен начин броеви 1 и -1, во секое поле по еден број. Полињата на последната колона и последната редица ќе ги пополниме на тој начин да се исполнети равенствата (1), (2), (3) и (4). На тој начин добиваме пополнување кое ги задоволува условите на задачата. Притоа

- бројот на пополнувања на квадратна шема од облик $(m-1)\times(n-1)$ во која го нема бројот 1 е еднаквов на $\binom{(m-1)(n-1)}{0}$.
- бројот на пополнувања на квадратна шема од облик $(m-1)\times(n-1)$ во која бројот 1 се појавува точно еднаш е еднаквов на $\binom{(m-1)(n-1)}{1}$, итн.
- бројот на пополнувања во кои бројот 1 се појавува точно i-пати е еднаков на $\binom{(m-1)(n-1)}{i}$.

Според тоа, бројот на пополнувања на квадратната шема кои го исполнуваат условот на задачата е еднаков на

$$\binom{(m-1)(n-1)}{0}+\binom{(m-1)(n-1)}{1}+\ldots+\binom{(m-1)(n-1)}{i}+\ldots+\binom{(m-1)(n-1)}{(m-1)(n-1)}=2^{(m-1)(n-1)}.$$

22. Матрицата $n\times n$ со елементи од множеството $S=\{1,2,\ldots,2n-1\}$ се нарекува *сребрена* матрица, ако за секој $i=1,2,\ldots,n$, $i-$тата редица и $i-$тата колона заедно ги содржат сите елементи од *S*. Покажи дека:

а) не постои сребрена матрица за $n=1997$,

б) сребрени матрици постојат за бесконечно многу броеви *n*.

Решение.. а) Нека $n>1$ е цел број. Да претпоставиме дека постои $n\times n$ сребрена матрица *A*. Нека *x* е некој елемент од множеството $\{1,2,\ldots,2n-1\}$ кој што не се појавува на дијагоналата. (Таков елемент постои, бидејќи има *n* елементи на дијагоналата, но вкупно имаме $2n-1$ броеви.) Унијата на *i*-тата редица и *i*-тата колона ќе ја наречеме *i*-ти „дел“. Елементот *x* се појавува во секој „дел“ само по еднаш. Ако *x* е $(i,j)-$ти елемент од *A*, тогаш тој припаѓа во *i*-тиот *j*-тиот „дел“. Во овој случај двата „дела“ се означени со *x*. (На пример во вториот пример под б) првиот и четвртиот дел се означени со 6.) Тоа значи дека сите *n* „делови“ сме ги поделиле во парови *x*-обележани, па затоа *n* е парен број. Бидејќи $n=1997$ е непарен број, следува дека не постои сребрена матрица за овој број *n*.

б) За $n=2$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

е сребрена матрица. За $n=4$ има повеќе примери, од кои еден е

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6 & 7\\ 3 & 1 & 7 & 6\\ 4 & 5 & 1 & 2\\ 5 & 4 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Со помош на математичка индукција може да се конструираат бесконечно многу сребрени матрици, како што може да се види од следниот пример:

$$B=\begin{bmatrix}A & Y\\ X & A\end{bmatrix}$$

каде што A е сребрена матрица со елементи од множеството $\{1,2,\dots,2n-1\}$,

$$X=\begin{bmatrix}2n & 2n+1 & ... & 3n-1\\ 3n-1 & 2n & ... & 3n-2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 3n+1 & 2n+2 & \dots & 2n\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}3n & 3n+1 & ... & 4n-1\\ 4n-1 & 3n & ... & 4n-2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 3n+1 & 2n+2 & \dots & 3n\end{bmatrix}.$$

Матрицата B е исто така сребрена.

23. Во табела со димензии 2007×2007 се обоени неколку полиња. Нека S_{ij} е множеството од обоени полиња (x,y) за кои $x\le i,\ y\le j$. На почетокот во секое обоено поле го запишуваме бројот $|S_{i,j}|$. Во секој следен чекор во секое обоено поле (i,j) го запишуваме збирот на сите броеви кои во претходниот чекор се запишани во полињата од множеството $S_{i,j}$. Докажи, дека постои природен број M таков што по M чекори сите броеви запишани во обоените клетки ќе бидат непарни.

Решение. Нека $a_{i,j}$ е бројот запишан во полето (i,j) по модул 2, т.е. $a_{i,j}=0$ ако во (i,j) има парен број и $a_{i,j}=1$ ако во (i,j) има непарен број.

Ќе користиме индукција по бројот на обоените полиња n. Ако $n=1$, тогаш во секој чекор имаме $a_{i,j}=1$, т.е. тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за $n=k$ и да разгледаме табела со обоени $k+1$ поле.

Ќе велиме, дека $(i,j)\ll(p,q)$ ако истовремено $i\le p$ и $j\le q$. Нека (s,r) е максимално обоено поле при ова подредување. Ако го отстраниме полето (s,r), од индуктивната претпоставка следува дека постои M таков што после M чекори важи $a_{i,j}=1$ во сите останати обоени полиња. Не е тешко да се покаже дека полето (s,r) не влијае на останатите полиња во ниту еден чекор. Според тоа, и без да го отстраниме полето (s,r) после M чекори за сите останати полиња ќе важи $a_{i,j}=1$. Ако во овој момент $a_{s,r}=1$, тогаш нема што да се докажува. Ако пак после M чекори важи $a_{s,r}=0$, тогаш овие чекори на $a_{r,s}$ додале 1, па затоа уште после M чекори (т.е. по вкупно $2M$ чекори) ќе имаме $a_{i,j}=1$ во сите полиња.

24. Табелата со димензии $n\times n$ во чии единечни полиња се броевите $1,2,...,n^2$ (на секое поле точно по еден број и секој број се наоѓа на точно едно поле) ја нарекуваме *добра* ако сите производи од по n броеви кои се наоѓаат на n „расфрлени“ полиња даваат ист остаток при делење со n^2+1. Дали постои добра табела за:

а) $n=8$, б) $n=10$?

(n полиња се „расфрлени“ ако ниту една редица и ниту една колона не содржи две од овие полиња.)

Решение. а) Нека претпоставиме дека постои табела со димензии 8×8 таква што производот на секои 8 расфрлени броеви дава остаток r по модул $8^2+1=5\cdot 13$. Сите броеви во табелата можеме да ги поделиме на 8 дисјунктни множества од по 8 расфрлени броеви. Меѓу овие множества постои едно кое содржи множител 13 и едно кое не содржи таков множител. Производот на броевите во првото множество е делив со 13, а во второто не е делив со 13, противречност. Според тоа, добра табела со димензии 8×8 не постои.

б) За $n=10$ бројот $n^2+1=101$ е прост. Да ја пополниме табелата како на цртежот десно, каде q е примитивен корен по модул 101. Лесно се проверува дека производот на броевите во било кои 10 расфрлени полиња е конгруентен со q^{495} по модул 101. Според тоа, ова е пример на добра 10×10 табела.

g^0	g^1	g^2	$\cdots$	g^9
g^{10}	g^{11}	g^{12}	$\cdots$	g^{19}
g^{20}	g^{21}	g^{22}	$\cdots$	g^{29}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
g^{90}	g^{91}	g^{92}	$\cdots$	g^{99}

25. Определи ја најголемата вредност на бројот a таков што за било кој распоред на кружница на броевите 1, 2, 3, ..., 10 мора да постојат три соседни броеви чиј збир е поголем или еднаков на a.

Решение. Да ги разгледаме сите последователни тројки броеви. Такви има 10 и да ги означиме со $S_1,S_2,...,S_{10}$. Важи

$$S_1+S_2+...+S_{10}=3(1+2+...+10)=165.$$

Оттука следува дека мора да постои $i \in \{1, 2, ..., 10\}$ таков што $S_i \geq \frac{165}{10} = 16,5$. Значи, $a \geq 17$.

Ќе докажеме дека $a = 18$. Ако го испуштиме бројот 1 ќе добиеме низа од девет броеви и истата да ја поделиме во три последователни збирови од по три броја T_1, T_2, T_3. Збирот на овие броеви ќе биде

$$2 + 3 + ... + 9 + 10 = 54 = T_1 + T_2 + T_3.$$

Од овде следува дека за некој i мора да важи $T_i \geq \frac{54}{3} = 18$. Дека a не може да биде поголем од 18 следува врз основа на цикличното распоредување $(1, 10, 6, 2, 9, 4, 5, 3, 8, 7)$.

26. Нека $n \in \mathbb{N}$. Броевите $1, 2, ..., n$ се распоредени на кружница така што збирот на никои три последователни броја не е поголем од S. Определи ја најмалата можна вредност на S за $n = 9$.

Решение. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ е пермутација на броевите $1, 2, ..., n$ да означиме $s_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$, каде $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$. Од $s_k - s_{k+1} = a_k - a_{k+3} \neq 0$, следува дека барем еден од броевите s_k, s_{k+1} не е поголем од $S - 1$. Исто така, не може да важи $s_k = s_{k+2} = s_{k+4} = S$ и $s_{k+1} = s_{k+3} = s_{k+5} = S - 1$, бидејќи тогаш ќе биде $a_k = a_{k+6}$. Според тоа, $s_k + s_{k+1} + ... + s_{k+5} \leq 6S - 4$. Ако собереме по сите k добиваме $18(a_1 + a_2 + ... + a_n) \leq n(6n - 4)$, од каде следува $9n(n+1) \leq n(6S - 4)$, т.е. $S \geq \frac{9n+13}{6}$. За $n = 9$ добиваме $S \geq \frac{47}{3}$, т.е. $\min S = 16$ и истиот се достигнува за распоредот 1, 6, 7, 2, 5, 8, 3, 4, 9.

27. Даден е природен број n. Ги разгледуваме сите тројки (a, b, c) различни природни броеви такви што $a + b + c = n$. Со k да го означиме најголемиот број такви тројки кои може да се изберат така што никои две немаат заеднички елемент. Докажи дека $k \leq \frac{2n-3}{9}$.

Решение. Нека тројките $(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, ..., k$ ги задоволуваат условите на задачата. Збирот на сите елементи a_i, b_i, c_i е еднаков на nk. Од друга страна, овој збир не е помал од $1 + 2 + ... + 3k = \frac{3k(3k+1)}{2}$. Значи, $nk \leq \frac{3k(3k+1)}{2}$, од каде до биваме $k \leq \frac{2n-3}{9}$.

28. Даден е природен број n. Определи го бројот на дисјунктни парови елементи на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ кои може да се изберат така што збировите во паровите се различни и не се поголеми од n.

Решение. Нека x е бројот на паровите. Бидејќи се дисјунктни, збирот S на сите $2x$ елементи во нив е поголем или еднаков на

$$1+2+...+2x = x(2x+1)\ .$$

Од друга страна, збировите во паровите се различни и не се поголеми од n, па затоа

$$S \le n+(n-1)+...+(n+1-x) = \tfrac{x(2n+1-x)}{2}\ .$$

Значи, $2x(2x+1) \le x(2n+1-x)$, од каде добиваме $x \le \frac{2n-1}{5}$.

Ќе дадеме пример со точно $x = [\frac{2n-1}{5}]$ парови. За $n = 5k+3$ можеме да избереме $\frac{2n-1}{5} = 2k+1$ парови и тоа:

Пар	$2k+2$ $2k$	$2k+3$ $2k-2$	... ...	$3k+1$ 2	$3k+2$ $2k+1$	$3k+3$ $2k-1$	... ...	$4k+1$ 3	$4k+2$ 1
Збир	$4k+2$	$4k+1$	...	$3k+3$	$5k+3$	$5k+2$	...	$4k+4$	$4k+3$

Истата конструкција работи и за $n \in \{5k+4, 5k+5\}$. За $n = 5k+1$ имаме $[\frac{2n-1}{5}] = 2k$ и пример може да се добие со бришење на парот $(3k+2, 2k+1)$ и намалување на првиот елемент на секој преостанатпар за 1. Истата конструкција работи и за $n = 5k+2$.

29. Докажи дека броевите 1, 2, ..., 2013 не може да се распоредат на кружница така што за секои два соседни броја x, y важи $503 \le |x-y| \le 1005$.

Решение. Нека претпоставиме дека такво распоредување е можно. Броевите да ги поделиме на две множества:

$$A = \{504, 505, ..., 1510\} \text{ и } B = \{1, 2, ..., 503, 1511, 1512, ..., 2013\}\ .$$

Два елементи од множеството B не може да се соседни. Освен тоа, броевите 504 и 1510, кои припаѓаат на A, не се соседни и имаат барем по еден сосед од A. Според тоа, $1007 = |A| \ge |B| + 2 = 1008$, што е противречност.

30. Во p точки од кружницата се запишани знаци плус, а во m точки се запишани знаци минус (во секоја точка по еден знак). Кружницата ја обиколуваме обратно од движењето на стрелките на часовникот. Нека x е бројот на знаци плус кои следуваат по знак плус, а y е бројот на знаци минус кои следуваат по знак минус. Докажи дека $p-m = x-y$.

Решение. Со d ќе го означиме бројот на премини од знак плус кон знак минус. Јасно, бројот d е еднаков и на бројот на премини од знак минус кон знак плус. Бројот x на знаци плус кои следуваат по знак плус собрани со бројот на премини d од знак плус кон знак минус го дава бројот p на знаци плус запишани во точките од кружницата (бројот на знаци плус кои се први во низа знаци плус и кои не следуваат по знак плус е еднаков на бројот од премини од знак плус кон знак минус).

Истото е точно и за бројот на знаци минус. Значи $p = x + d$ и $m = y + d$. Значи, $d = p - x$ и $d = m - y$, од каде добиваме $p - x = m - y$, т.е. $p - m = x - y$.

31. На кружница се запишани 100 цели броеви. Секој од запишаните броеви е поголем од збирот на двата броја запишани по него во насока на движењето на стрелката на часовникот. Определи го најголемиот можен број позитивни броеви.

Решение. Да допуштиме дека меѓу запишаните броеви два ненегативни броја се еден до друг. Тогаш бројот кој е запишан пред нив, кој е поголем од нивниот збир е позитивен. Последното важи за бројот кој е пред него итн., што значи дека сите запишани броеви се ненегативни. Го избираме најмалиот меѓу запишаните броеви и тој не може да биде поголем од збирот на двата броја кои следуваат во насока на движење на стрелката на часовникот, што е противречност.

Од претходните разгледувања следува дека меѓу секои два последователни броја едниот мора да е негативен. Последното значи дека има најмногу 50 позитивни броеви. Да разгледаме три последователни броја $-a, b, -c$, каде $a, b, c > 0$. Тогаш $-a > b - c > -c$, што значи дека секој негативен број е строго поголем од следниот негативен број, што не е можно бидејќи броевите се запишани на кружница. Од добиената противречност следува дека имаме најмногу 49 позитивни броеви. Лесно се проверува дека броевите

$$-200, 1, -202, 1, -204, 1, -206, ..., -296, 1, -298, -99$$

запишани во овој редослед ги задоволуваат условите на задачата.

32. Момчиња и девојчиња, кои се вкупно n^2, се распоредени во $n \times n$ квадрат. За секој ред и за секоја колона, како и за секоја од $2(2n-1)$ дијагонали, знаеме колку девојчиња има во неа. За кои броеви n овие податоци ни се доволни за да ги определиме местата на сите девојчиња? За кои места со сигурност можеме да кажеме дека на нив се девојчиња или момчиња?

Решение. Да означиме $a_{ij} = 1$ ако во пресекот на $i-$тиот ред и $j-$тата колона е девојче, а $a_{ij} = 0$ ако е момче.

За $n = 1, 2$ тривијално ги определуваме сите a_{ij}. Исто така за $n = 3$ знаејќи ги a_{11} и a_{13} го определуваме a_{12}. Слично ги определуваме a_{21}, a_{23}, a_{32} и a_{22}.

За $n = 4$ ги знаеме $a_{11}, a_{14}, a_{41}, a_{44}$. Понатаму, знаејќи

$$r_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14},\ k_1 = a_{11} + a_{21} + a_{32} + a_{41},$$

$$d_2 = a_{12} + a_{21} \text{ и } d_3 = a_{13} + a_{22} + a_{31},$$

добиваме

$$a_{22} = d_3 - (r_1 + k_1) + (2a_{11} + a_{14} + a_{41} + d_2).$$

Слично ги определуваме a_{23}, a_{32}, a_{33}. Од друга страна останатите 8 вредности не е можно да се определат бидејќи распоредот во кој е

$$a_{12} = a_{24} = a_{43} = a_{31} = 1 \text{ и } a_{13} = a_{34} = a_{42} = a_{21} = 0$$

дава исти податоци како и распоредот во кој е

$$a_{12} = a_{24} = a_{43} = a_{31} = 0 \text{ и } a_{13} = a_{34} = a_{42} = a_{21} = 0.$$

За $n = 5$ ги знаеме четирите аголни вредности. Концентрирајќи се на подквадрати 4×4 заклучуваме дека не е можно да се определат вредностите во ниту едно друго поле различно од централното. Од друга страна, централното поле може да се определи: знаејќи ги

$$a_{11} + a_{12} + a_{21},\ a_{15} + a_{14} + a_{25},\ a_{55} + a_{54} + a_{45} \text{ и } a_{51} + a_{41} + a_{52},$$

наоѓаме $a_{13} + a_{31} + a_{35} + a_{53}$, а оттука и $a_{22} + a_{24} + a_{42} + a_{44}$. Најпосле знаејќи ги збировите на големите дијагонали го определуваме a_{33}.

За $n \geq 6$, концентрирајќи се на подквадрати 5×5, гледаме дека во општ случај не е можно да се определи ниту една вредност освен аголните.

33. Ѓердан се состои од 100 сини и неколку црвени мониcтра. Познато е дека секој дел од ѓерданот кој содржи 8 сини мониcтра, содржи и најмалку 5 црвени мониcтра. Определи го најмалиот можен број на црвените мониcтра.

Решение. *Одговор*: 72.

Да ги нумерираме сините монситра со броевите од 1 до 100, на пример, во насока на движењето на стрелките на часовникот. Нека меѓу првите две сини мониcтра има a_1 црвени, меѓу второто и третото има a_2 црвени итн. меѓу последното и првото сино има a_{100} црвени. Да ги запишеме броевите $a_1, a_2, ..., a_{100}$ редоследно на кружница. Тогаш збирот на било кои седум последователни од овие броеви е поголем или еднаков на 5 и треба да го определиме најмалиот можен збир на овие 100 броеви.

Јасно е дека има два последователни броја чиј збир е најмалку 2 (во спротивно збирот на 7, па дури и 8 последователни броеви нема да е поголем од 4). Да ги одделиме овие два броја и да ги поделиме преостанатите 98 броеви на 14 групи од по 7 последователни броја. Збирот на броевите во секоја од овие групи е најмалку 5, па затоа збирот на сите 100 броеви е најмалку $5 \cdot 14 + 2 = 72$.

Останува да забележиме дека ако броевите $a_1, a_2, ..., a_{100}$ се распоредени на следниот начин: 11111001111100...111110011, тогаш нивниот збир е точно 72.

34. За природниот број $n \geq 4$ ќе велиме дека е *необичен*, ако во секое поле на $n \times n$ квадрат $\mathbb{P}$ може да се запише реален број така што збирот на 9-те броја во секој 3×3 квадрат, кој се содржи во $\mathbb{P}$, е негативен, а збирот на 16-те броја во секој 4×4 квадрат, кој се содржи во $\mathbb{P}$, е позитивен. Определи ги сите необични броеви.

Решение. Ќе докажеме дека единствени необични броеви се $n = 4$ и $n = 5$.
Да разгледаме 5×5 квадрат во кој во секое поле во средната колона е запишан бројот -5, а сите преостанати броеви се еднакви на 2. Овој квадрат го има саканото својство, што покажува дека $n = 4$ и $n = 5$ се необични броеви.
Ако $n \geq 6$, да разгледаме произволен 6×6 квадрат кој се содржи во $\mathbb{P}$ и овој квадрат да го означиме со $\mathbb{Q}$. Директно се проверува дека збирот на броевите во сите 3×3 квадрати од $\mathbb{Q}$ е еднаков на збирот на броевите во сите 4×4 квадрати од $\mathbb{Q}$. Последното е противречност, бидејќи првиот збир како збир на негативни броеви треба да е негативен, а вториот збир како збир на позитивни броеви требна да е позитивен.

35. Квадрат со страна 5 е поделен на 25 квадратчиња со страна 1. Во секое мало квадратче е запишан по еден позитивен број, помал или еднаков на 1, така што се исполнети следниве услови:

- збирот на броевите запишани во секој ред и во секоја колона е цел број,
- збирот на сите 25 броеви е еднаков на 11.

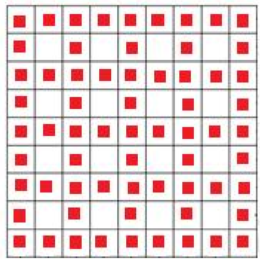
а) Докажи дека барем еден од броевите е поголем или еднаков на $\frac{3}{5}$.

б) Ако точно еден од запишаните броеви е поголем или еднаков на $\frac{3}{5}$, докажи дека збирот на броевите во неговиот ред е еднаков на збирот на броевите во неговата колона.

Решение. а) Нека претпоставиме дека сите броеви се помали од $\frac{3}{5}$. Тогаш збирот на броевите во секој ред е помал од $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$, па како е цел број тој е помал или еднаков на 2. Според тоа, збирот на сите запишани броеви е помал или еднаков на $5 \cdot 2 = 10$, што е противречност.
б) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно мал број. Бидејќи точно еден од запишаните броеви е поголем или еднаков на $\frac{3}{5}$, збирот на броевите во редот и колоната кои го содржат најголемиот број може да се направи да е поголем или еднаков $4(\frac{3}{5} - \varepsilon) + \frac{3}{5} = 3 - 4\varepsilon$, а е помал или еднаков на $4(\frac{3}{5} - \varepsilon) + 1 = 3{,}4 - 4\varepsilon$. Но овој збир е цел број, па затоа тој е еднаков на 3. Бидејќи $5 \cdot \frac{3}{5} < 3$, заклу-чуваме дека најголемиот збир на броевите во останатите четири реда и четири колони е 2. Но, $11 = 4 \cdot 2 + 3$, што значи дека постојат ред и колона во кои збирот на броевите е 3 и тоа се редот и колоната кои го содржат најголемиот елемент.

36. Едно распоредување на жетони во полињата на $n\times n$ квадрат се нарекува разредено ако секој 2×2 квадрат содржи најмногу 3 жетони. Горјан поставил жетони така што добил разредено распоредување, но забележал дека, ако го премести било кој жетон во било кое слободно поле, тогаш ќе добие распоредување кое не е разредено. Определи ги природните броеви n за кои што ова е можно.

Решение. *Одговор*: Сите непарни броеви n.



Пример за непарен n е распоредувањето во кое има жетони во сите полиња на работ на квадратот, во следниот слој жетоните се распоредени шаховски без жетони во аголните полиња, во третиот слој има жетони во сите полиња итн. Ова распоредување за $n=9$ е прикажано на цртежот десно.

Кога n е парен број квадратот може да биде поделен на квадрати 2×2 и секогаш е можно да се премести еден жетон така што распоредувањето ќе остане разредено. Ова тврдење ќе го докажеме во поопшт случај, а тоа е за секоја конфигурација од k дисјунктни 2×2 квадрати.

За $k=1$ тврдењето е очигледно. Нека тоа е точно за k квадрати и да претпоставиме дека имаме конфигурација од $k+1$ квадрат и разредено распоредување на жетони за кое не може да се премести жетон така што распоредувањето повторно ќе биде разредено. Да ги разгледаме најгорните 2×2 квадрати и најлевиот од нив да го означиме со A. Ако левото горно поле на A е празно, можеме да преместиме жетон во тоа поле и распоредувањето ќе остане разредено. Според тоа, во левото горно поле на A има жетон. Ако во спротивното поле, т.е. десното долно поле на A има жетон, тогаш едно останатите полиња на A е празно и жетонот од долното десно поле може да се премести во тоа празно поле, по што распоредувањето повторнно ќе биде разредено. Значи, во десното долно поле на A има жетон.

Да ја разгледаме конфигурацијата која се добива од дадената со отстранување на квадратот A. Распоредувањето на жетонити во оваа конфигурација е разредено и согласно индуктивната претпоставка во оваа конфигурација може да се премести жетон така што распоредувањето ќе остане разредено. При ова преместување и распоредувањето во почетната конфигурација со $k+1$ квадрати ќе биде разредено. Навистина, секој 2×2 квадрат во ова распоредување кој се сече со A и е различен од A го содржи празното долно десно поле од A.

37. а) Докажи дека постојат пет ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1 и се такви што како и да се распоредат овие пет броеви на кружница, постојат два соседни броја чиј производ не е помал од $\frac{1}{9}$.

б) Докажи дека било кои пет ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1 може да се распоредат на кружница така што на секои два соседни броја производот не е поголем од $\frac{1}{9}$.

Решение. а) Да ги разгледаме броевите $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0$. Бидејќи како и да ги распоредиме овие броеви секогаш ќе има два соседни броја еднакви на $\frac{1}{3}$, заклучуваме дека секогаш постојат два соседни броја чиј производ не е помал од $\frac{1}{9}$.

б) Нека се дадени броевите x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 и нека за овие броеви важи $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5$. Овие броеви да ги поставиме во насока на движењето на стрелките на часовникот во редослед x_1, x_5, x_2, x_3, x_4. Бидејќи важи $x_1 x_5 \leq x_1 x_4$, $x_2 x_5 \leq x_2 x_3$ и $x_3 x_4 \leq x_2 x_3$, доволно е да докажеме дека важи $x_1 x_4 \leq \frac{1}{9}$ и $x_2 x_3 \leq \frac{1}{9}$.

Прво ќе докажеме дека $x_2 x_3 \leq \frac{1}{9}$. Ако $x_1 \leq \frac{1}{3}$, тогаш $x_2 \leq \frac{1}{3}$ и $x_3 \leq \frac{1}{3}$, па очигледно важи $x_2 x_3 \leq \frac{1}{9}$. Ако $x_1 > \frac{1}{3}$, тогаш $x_2 + x_3 < \frac{2}{3}$, па затоа важи $\sqrt{x_2 x_3} \leq \frac{x_2 + x_3}{2} < \frac{1}{3}$, т.е. $x_2 x_3 \leq \frac{1}{9}$.

Сега ќе докажеме дека $x_1 x_4 \leq \frac{1}{9}$. Нека претпоставиме дека $x_1 x_4 > \frac{1}{9}$. Тогаш $x_1 x_2 \geq x_1 x_3 \geq x_1 x_4 > \frac{1}{9}$, па затоа $x_1(x_2 + x_3 + x_4) > \frac{1}{3}$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} \geq \sqrt{x_1(x_2 + x_3 + x_4)} > \sqrt{\frac{1}{3}},$$

односно

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > \sqrt{\frac{4}{3}} > 1,$$

што е противречност.

38. Определи ги сите парови природни броеви a и b за кои во темињата на правилен $(a+b)-$аголник може да се постават a единици и b нули така што броевите кои се поставени во темињата може да се заротираат за некој агол и по ротацијата во однос на почетната положба во две соседни темиња нулата и единицата ги заменат местата, а во сите останати темиња се наоѓаат истите броеви како во почетната положба.

Решение. Полињата на многуаголникот да ги нумерираме со броевите $1, 2, ..., a+b$. Ќе докажеме дека паровите заемно прости броеви ги задоволуваат условите на задачата. Бидејќи a и b се заемно прости, добиваме дека и броевите a и $a+b$ се заемно прости. Затоа постои единствен природен број

$k < a+b$ таков што $ka \equiv 1(\bmod\, a+b)$. Единиците ги поставуваме во полињата $1, k+1, 2k+1, ..., (a-1)k+1$ (нумерирањето на полињата е по модул $a+b$). Забележуваме дека ниту еден од овие броеви не е конгруентен со 2 по модул $a+b$ (во спротивно за некој $i < a$ ќе важи $ik \equiv 1(\bmod\, a+b)$, што не е можно). Затоа при ротација за k места последниот број се пресликува во нулата која е соседна на првата единица (бидејќи се пресликува во местото нумерирано со бројот 2), додека очигледно сите преостанати единици се пресликуваат во единици. Единствено во првата единица не се пресликува некоја друга единица, што значи дека во неа се пресликува некоја нула, додека преостанатите нули се пресликуваат во нули. Затоа единствени два броја кои си ги смениле мсетата се броевите на местата 1 и 2, со што доказот е завршен.

Сега ќе докажеме дека ако a и b не се заемно прости, тогаш единиците и нулите не може да се распоредат на саканиот начин. Нека претпоставиме дека е можно да се распоредат нулите и единиците на саканиот начин и дека со ротација за k места се добива саканата конфигурација. Да го разгледаме збирот на индексите на кои се единиците по модул $a+b$. При ротација за k места збирот на сите индекси се зголемува за ka по мудул $a+b$. Од условот на задачата следува дека овој збир треба да се зголеми или намали за 1 по мудул $a+b$, од каде следува дека ka е конгруентен со 1 или -1 по модул $a+b$. Последното не е можно бидејќи броевите a и $a+b$ не се заемно прости.

39. Нека m и n се заемно прости природни броеви. Во секое поле на бесконечна шаховска табла е запишан по еден реален број така што важи: збирот на броевите во секој правоаголник $m \times n$ или $n \times m$ е еднаков на нула. Докажи дека барем два од запишаните броеви се меѓусебно еднакви.

Решение. Броевите m и n се заемно прости, па затоа при делење на броевите $m, 2m, 3m, ..., (n-1)m$ со бројот n се добиваат остатоците $1, 2, ..., n-1$. Според тоа, за некој $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ бројот $km+1$ е делив со n, па затоа и бројот $mn-(km+1)$ е делив со n, т.е. $mn-1 = km+nl$, каде l е природем број.

На шаховската табла да воведеме правоаголен координатен систем така што точките со целобројни координати се темиња на полињата на таблата. Квадратот $ABCD$ со темиња $A(0,0), B(mn,0), C(mn,mn), D(0,mn)$, може да се разбие на правоаголници со димензии $m \times n$ или $n \times m$. Затоа збирот на броевите кои се запишани внатре во квадратот $ABCD$ е еднаков на нула. Воведуваме ознаки $B_1(mn-1,0), B_2(km,0), C_1(mn-1,mn), C_2(km,mn)$. Тогаш секој од правоаголниците AB_2C_2D и $B_2B_1C_1C_2$ може да се разбие на правоаголници со димензии $m \times n$ или $n \times m$. Збирот на сите тие броеви кои се запишани внатре во правоаголникот AB_1C_1D е еднаков на нула, што значи дека и збирот на броевите кои се запишани внатре во правоаголникот B_1BCC_1 е еднаков на нула. Аналогно се докажува дека исто својство има и правоаголникот FEE_1F_1 каде

$$F(mn,1),\ F_1(mn-1,1),\ E(mn,mn+1),\ E_1(mn-1,mn+1)\,.$$

Според тоа, во полињата BFF_1B_1 и CEE_1C_1 се запишани исти броеви.

40. Еден клас има точно 28 ученици кои учат во училница која има точно 14 клупи. Во секоја клупа седат точно по два ученика. По истекот на месецот класниот раководител ги прераспоредува учениците, така што двајца ученици кои претходно седеле еден до друг не може да седат еден до друг во некој од наредните месеци. Колку месеци редоследно такви распореди на учениците може да направи класниот раководител?

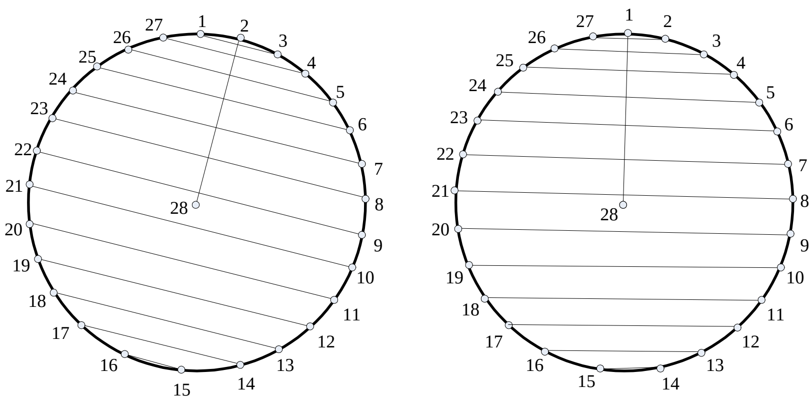
Решение. Еден ученик може да седи со најмногу 27 други различни ученици во една клупа. Според тоа, добиваме дека бројот на месеци во кои такви распореди може да направи класниот раководител не е поголем од 27.

Доволно да докажеме дека тоа може да се направи точно во 27 последователни месеци.

Учениците ќе ги означиме со броевите од 1 до 28 (на секој ученик по еден број и во текот на понатамошните разгледувања тој распоред е фиксен). Броевите од 1 до 27 ќе ги запишеме во темињата на правилен 27-аголник, а во центарот на кружницата опишана околу него ќе го запишеме бројот 28.

За парот броеви 28 и 1 ќе повлечеме радиус. Од секој од броевите 2,3,…,27 ќе повлечеме отсечка нормална на правата која минува низ точките 28 и 1, а краевите и се на опишаната кружница. На тој начин, заедно со парот 28 и 1 ќе добиеме уште 13 пара броеви поврзани со отсечки кои се темиња на 27-аголникот. Според паровите броеви поврзани со отсечки класниот раководител може да направи еден распоред на учениците во клупите.

Потоа, центарот на кружницата ќе ги поврзиме со темето во кое е запишан



бројот 2. Од секоја од преостанатите темиња 1,3,4,…,27 ќе повлечеме отсечка со крајни точки во опишаната кружница и која е нормална на правата која минува низ 2 и 28. Секоја таква отсечка (тетива), поврзува два броја. Како и претходно, паровите броеви (пар формираат броевите кои се поврзани со отсечка) определуваат 14 пара ученици кои класниот раководител може да ги распореди на клупите. Овој распоред не може да е ист со претходниот заради нормалноста на повлечените тетиви кои поврзуваат две темиња од 27-аголникот.

Понатаму ќе направиме поврзување последователно на 28 со 3, па со 4 и на крајот во 27-миот месец со бројот 27. Бидејќи нема два радиуси (што го поврзува цнтарот со теме на 27-аголникот) кои формираат рамен агол, сите добиени распореди што ќе ги направи класниот раководител ќе бидат различни. Значи, класниот раководител може 27 месеци последоватлно да прави распореди кои ќе го исполнуваат условот од задачата.

41. Нека $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. На кружница се поставени n светилки $L_0, L_1, ..., L_{n-1}$, во овој редослед. Секоја светилка е запалена или изгасната. На почетокот сите светилки се запалени. Се прават чекори $S_0, S_1, ..., S_j, ...$. Во чекорот S_j ако светилката L_{j-1} е запалена, тогаш се менува состојбата на L_j и тоа од запалена во изгасната и обратно, а ако светилката L_{j-1} е изгасната тогаш состојбата на светилката L_j не се менува. Во чекорот S_j состојбата на останатите светилки не се менува. Светилките се означени по $\bmod n$, т.е. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ итн.

Докажи дека

а) Постои природен број $M(n)$ таков што после $M(n)$ чекори сите светилки ќе бидат запалени.

Б) Ако n е од облик 2^k тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - 1$ чекори.

в) Ако n е од облик $2^k + 1$ сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - n + 1$ чекори.

Решение. а) Чекорите ќе ги поделиме во групи и тоа така што првите n чекори во првата група, вторите n во втората група итн.

По секој чекор можеме да ја констатираме состојбата пред него: ако по $i-$ от чекор светилката на местото $i-1$ била запалена, тогаш $i-$ тата светилка ја променила својата состојба, а ако светилката на местото $i-1$ била изгасната, тогаш состојбата на $i-$ тата светилка не се променила. На ваков начин можеме да ја констатираме состојбата пред произволно многу чекори.

Бидејќи имаме конечно многу комбинации за состојбите на светилките, по конечно многу чекори мора да се појави периода. Да земеме дека состојбата по

k чекори е еднаква на состојбата по m чекори, $k>m$. Состојбите по k и m чекори се еднакви, па затоа и состојбите по $k-1$ и $m-1$ чекори се еднакви. Исто така и состојбите по $k-2$ и $m-2$ чекори се еднакви итн, за на крајот да се еднакви состојбите по $m-m=0$ и $k-m$ чекори. Според тоа, по $k-m$ чекори ја добиваме почетната состојба во која сите светилки се запалени.

б) Бројот 1 нека означува запалена, а 0 изгасната светилка. Чекорите ги запишуваме во табела со помош на низа од нули и единици. Кога ќе стигнеме до првата светилка продолжуваме да запишуваме во следниот ред. Со (x,y) да ја означиме состојбата на светилката на местото y во $x-$ от ред. Низата $(x,i),...,(x,j)$ ги означува состојбите на светилките од $i-$ то до $j-$ то место во $x-$ от, а низата $(i,y),...,(j,y)$ состојбната на светилките од $i-$ то до $j-$ то место во колоната y. Конечно,

$$\begin{matrix}(i,x) & (i,y)\\ (j,x) & (j,y)\end{matrix}$$

ја означува состојбата од $i-$ от до $j-$ от ред и од $x-$ тата до $y-$ тата колона. На пример:

Почетна состојба	1	1	1	1
1. ред	0	1	0	1
2. ред	1	0	0	1
3. ред	0	0	0	1
4. ред	1	1	1	

Ќе докажеме дека за $n=2^k$ сите табели се од овој облик. Навистина:

- полињата $(n,1),...,(n,n-1)$ имаат вредност 1 (последниот ред),
- полињата $(n-1,1),...,(n-1,n-1)$ имаат вредност 0 (претпоследниот ред),
- полињата $(1,n),...,(n-1,n)$ имаат вредност 1 (последната колона), и
- полињата $(1,n-1),...,(n-1,n-1)$ имаат вредност 0 (претпоследната колона).

Ако сите табели се од овој облик, тогаш сите светилки ќе бидат запалени по n^2-1 чекори. Последното тврдење може да се докаже со индукција. Деталите ги оставаме на читателот.

с) Аналогно се докажува тврдењето за $n=2^k+1$. Во овој случај сите табели се од обликот прикажан десно:

- полињата $(1,1),...,(n-1,1)$ имаат вредност 0 (прва колона),
- полињата $(1,2),...,(n-1,2)$ имаат вредност 1 (втора колона),

Почетна состојба	1	1	1	1	1
1. ред	0	1	0	1	0
2. ред	0	1	1	0	0
3. ред	0	1	0	0	0
4. ред	0	1	1	1	1
5. ред	1				

- полињата $(n-1,2),...,(n-1,n)$ имаат вредност 1 (претпоследен ред),
- полињата $(n-2,3),...,(n-2,n)$ имаат вредност 0 (претпретпоследен ред),
- полињата $(1,n),...,(n-2,n)$ имаат вредност 0 (последна колона), и
- полето $(n,1)$ има вредност 1.

Јасно, ако сите табели имаат ваков облик, тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n(n-1)+1=n^2-n+1$ чекори.

Последното тврдење може да се докаже со индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

42. Во секое теме на еден правилен 360-аголник $\boldsymbol{F}$ со центар O е запишан по еден природен број помал или еднаков на 180, така што збирот на сите запишани броеви е непарен. Докажи, дека може да се најдат две темиња A и B на $\boldsymbol{F}$ такви што разликата на запишаните броеви во нив е еднаква на мерката на $\measuredangle AOB$ изразена во степени.

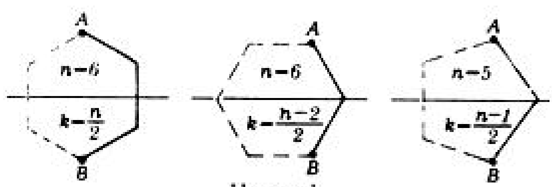
Решение. За секое теме A на $\boldsymbol{F}$ нека A' е она теме на $\boldsymbol{F}$ за кое мерката на $\measuredangle AOB$ изразена во степени е еднаква на бројот запишан во A и $\triangle AOB$ е позитивно ориентиран. За секое теме A да нацртаме стрелка насочена од A кон A'.

Ако две од овие стрелки покажуваат едно исто теме на $\boldsymbol{F}$, тогаш нивните почетни темиња формираат пар од видот кој се бара во задачата.

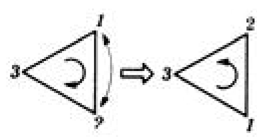
Нека претпоставиме дека таков пар не постои. Тогаш, бидејќи од секое теме излегува точно една стрелка, добиваме дека во секое теме треба да влегува точно една стрелка. Според тоа, стрелките формираат неколку независни циклуси. Бидејќи секој таков циклус извршува цел број пати обиколувања околу O, збирот, изразен во степени, на мерките на стрелките кои учествуваат во циклусот е делив со 360. Оттука следува дека збирот, изразен во степени, на сите стрелки – кој се совпаѓа со збирот на сите запишани броеви – ќе биде делив со 360, што противречи на условот дека збирот на сите запишани броеви е непарен.

43. На тркалезна маса седат n, $n\geq 3$ луѓе. Секоја минута еден пар соседи ги менува своите места. Кое е најмалото време за кое сите луѓе ќе седат во спротивна насока, (левиот сосед на секој човек ќе стане десен и обратно)?

Решение. Со t_n да го означиме најмалото време изразено во минути. Ќе докажеме дека за $n\geq 4$ важи



Цртеж 1



Цртеж 2

$$t_n \geq t_{n-1} + [\tfrac{n-1}{2}] \qquad (1)$$

каде со $[a]$ е означен целиот дел од бројот a. Да земеме дека луѓето се наоѓаат во темиња на правилен $n-$аголник. Тогаш новиот распоред може да се добие со симетрија во однос на некоја оска. Нека A е еден од луѓето кои се најоддалечени од оската, а B е човекот симетричен на него. Најкусиот пат од A до B по страните на многуаголникот (полната линија на цртеж 1) содржи $k \geq [\frac{n-1}{2}]$ страни, па затоа A за да дојде на местото на B мора да помине најмалку k страни, т.е. треба да имаме најмалку k менувања на местата. Но при овие менувања на местата распоредот на останатите луѓе не се менува, па затоа за да се постигне целта треба да се направат уште t_{n-1} менување на местата, што значи дека точна е оценката (1).

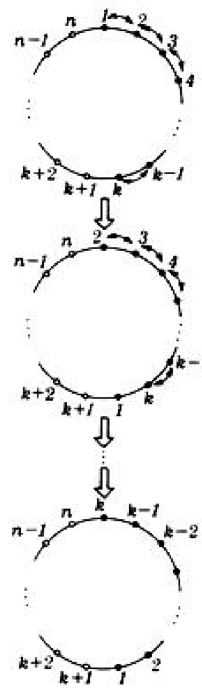
Бидејќи $t_3 = 1$, (цртеж 2), од оценката (1) наоѓаме

$$t_{2k} \geq 1 + [\tfrac{3}{2}] + ... + [\tfrac{2k-1}{2}] = 2(1+2+...+(k-1)) = k^2 - k \qquad (2)$$

$$t_{2k+1} \geq 1 + [\tfrac{3}{2}] + ... + [\tfrac{2k-1}{2}] + [\tfrac{2k}{2}] = k^2 \qquad (3)$$

Ќе докажеме дека најдените броеви на менување на местата на соседите се и доволни, т.е. дека во (2) и (3) знакот $\geq$ може да се замени со знакот $=$. Да ги нумерираме луѓето со броевите од 1 до n и да ги поделиме во две групи, од првиот до $k-$тиот и од $(k+1)-$тиот до $n-$тиот човек. За да го смениме редоследот во првата група првиот човек ќе го смени местото со вториот, па со третиот, итн. со $k-$тиот; потоа вториот човек ќе го смени местото со третиот, па со четвртиот итн со $k-$тиот, итн (цртеж 3). На тој начин имаме

$$(k-1)+(k-2)+...+2+1 = \tfrac{k(k-1)}{2} = \tfrac{k^2-k}{2}$$



Цртеж 3

менување на местата. Аналогно за да останатите $n-k$ луѓе го променат редоследот на седење ќе имаме $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ менување на местата. Сега за $n = 2k$, односно $n = 2k+1$, т.е. $k = [\frac{n+1}{2}]$, добиваме дека се потребни $k^2 - k$, односно k^2 менувања на местата.

44. Кејптаунската банка издава монети со вредност $\frac{1}{n}$ за секој природен број n. Ако имаме конечно многу такви монети (не задолжително со различни вредности) со вкупна вредност не поголема од $99 + \frac{1}{2}$, докажи дека можеме да ги

распоредиме во најмногу 100 групи тако што вкупната вредност на монетите во секоја група не е поголема од 1.

Решение. Ќе докажеме дека, ако вкупната вредност на монетите е $n-\frac{1}{2}$ за некој $n\in\mathbb{N}$, тогаш монетите можеме да ги распоредиме во n групи во секоја од кои сумата не е поголема од 1. Монетите со вредност 1 се групи сами за себе, па можеме да сметаме дека такви монети нема. Понатаму, ако имаме $d>1$ монети со вредност $\frac{1}{k}$, каде $d\,|\,k$, тогаш можеме да ги замениме со една монета со вредност $\frac{1}{e}$ за $e=\frac{k}{d}$. На овој начин можеме да претпоставиме дека:

(1) монета со вредност $\frac{1}{2k-1}$, $k\in\mathbb{N}$ се појавува најмногу $2k-2$ пати, и

(2) монета со вредност $\frac{1}{2k}$, $k\in\mathbb{N}$ се појавува најмногу еднаш.

За $k=1,...,n$, во $k-$тата група ги ставаме сите монети со вредност $\frac{1}{2k-1}$ и $\frac{1}{2k}$ и вкупната сума во оваа група не е поголема од $\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{1}{2k}<1$. Преостанатите монети, кои се со вредности помали од $\frac{1}{2n}$, ќе ги распоредуваме една по една. Да земеме една од овие монети. Барем во една група сумата не е поголема од $\frac{1}{n}(n-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2n}$, па оваа монета ќе ја ставиме во таа група. На овој начин ја завршуваме поделбата.

25. МЕРЕЊА

1. Марко има 100 јаболки со вкупна маса од $10kg$, такви што масата на секоја јаболка не е помала од $25g$. Марко треба да ги расече јаболките на делови и да ги подели на 100 гости, така што секој гостин да добие по $100g$. Докажи, дека Марко може да го направи расекувањето така што секое парче да има најмалку $25g$.

Решение. Сите тежини во решението се во грамови. За едно парче јаболко (или цело јаболко) ќе велиме дека е *големо*, ако неговата маса е најмалку $25g$. Со индукција по n ќе докажеме дека секогаш е можно да поделиме n големи јаболки со вкупна маса $100n$ подеднакво на n лица.

Случајот $n=1$ е очигледен. Нека $n>1$ и да ги разгледаме двете најголеми јаболки со маси a и b, $a \geq b$. Да забележиме дека $a+b \geq 200$ (во спротивно просечната маса на јаболките е помала од $\frac{200}{2}=100$ и нема да имаме вкупна маса $100n$). Да ги замениме овие две јаболки со едно јаболко со вкупна маса $c=a+b-100 \geq 100$. Согласно индуктивната претпоставка добиениот „комплет“ јаболки може да се раздели на големи парчиња и да се подели подеднакво на $n-1$ лица. Ако во таа поделба има парче со маса поголема од 50, да го расечеме на две големи парчиња и по оваа постапка да сметаме дека јаболките се расечени на парчиња со маси $c_1, c_2, ..., c_k$ чии маси се помали или еднакви на 50. Да означиме $s_d = c_1 + c_2 + ... + c_d$, за $d=1,2,...,k$ и да ставиме $s_0 = 0$.

Сега да го разгледаме почетниот комплет јаболки. Да ги расечеме сите јаболки без a и b како во новиот комплет. За забележиме дека $a \geq \frac{200}{2} = 100$. Со t да го означиме минималниот индекс за кој $a - s_t \leq 75$ и од a да отсечеме парчиња $c_1, c_2, ..., c_t$, а од b последователно отсекуваме парчиња $c_{t+1}, c_{t+2}, ...$ Бидејќи $a - s_{t-1} > 75$, заклучуваме дека од a останало парче $a' = a - s_t = (a - s_{t-1}) - c_t$ за кое важи $75 \geq a > 75 - c_t \geq 25$. Од b останало парче b' за кое важи $a' + b' = a + b - c = 100$, па затоа $25 \leq b' \leq 75$. Сега a' и b' можеме да ги дадеме на еден човек и останатите парчиња да ги распределиме како во новиот комплет.

2. Дадени се n тегови со маси природни броеви $w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_n$. Едно такво множество од тегови се нарекува *комплетно*, ако секој природен број, кој е

помал од $w_1 + w_2 + ... + w_n$, може да се претстави како збир од неколку од дадените маси. Докажи, дека ако од комплетно множество се отстрани најголемата мада, тогаш останатите маси повторно формираат комплетно множество.

Решение. Ќе ја користиме ознаката $\{w_1, w_2, ..., w_n\} \to a$, ако бројот a може да се претстави како збир на некои од броевите $w_1, w_2, ..., w_n$. Притоа ќе велиме дека $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ го генерира бројот a. Ќе докажеме дека $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ е комплетно множество ако и само ако

$$w_1 = 1, \ \ w_i \le w_1 + ... + w_{i-1} + 1, \ \text{за секој } i \in \{2, 3, ..., n\}. \qquad (1)$$

Ако $w_1 > 1$ или $w_i > w_1 + ... + w_{i-1} + 1$, за некој $i \in \{2, 3, ..., n\}$, тогаш соодветно масите 1 или $w_1 + ... + w_{i-1} + 1$ не може да бидат генерирани од множеството $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$.

Обратно, нека претпоставиме дека $w_1, w_2, ..., w_n$ го задоволуваат условот (1). Со индукција ќе докажеме дека овие броеви формираат комплетно множество. За $n = 1$ тврдењето е точно и нека претпоставиме, дека тоа е точно за $n-1$.

Бидејќи $w_1, w_2, ..., w_n$ го задоволуваат условот (1), добиваме дека броевите $w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ исто така го задоволуваат условот (1). Затоа за секој $W \le w_1 + w_2 + ... + w_{n-1}$ важи $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}\} \to W$. Ако

$$w_1 + w_2 + ... + w_{n-1} < W \le w_1 + w_2 + ... + w_{n-1} + w_n$$

тогаш

$$W - w_n \le w_1 + w_2 + ... + w_{n-1}.$$

За $W = w_n$ е јасно, дека $\{w_1, w_2, ..., w_n\} \to W$, а ако $W > w_n$, тогаш од $1 \le W - w_n \le w_1 + w_2 + ... + w_{n-1}$ следува дека $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}\} \to W - w_n$, па затоа $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}, w_n\} \to W$.

Конечно, од претходно изнесеното следува тврдењето на задачата.

3. Дадени се n торби и во секоја торба има по 100 монети. Во една од торбите секоја монета е со маса 9 грама, а во останатите $n-1$ торби секоја монета е со маса 10 грама. Располагаме со вага која покажува маси до 1 килограм. Определи го најмалиот можен број мерења, со кои може да се определи торбата со полесните монети.

Решение. Со $f(k)$ да го означиме максималниот број торби, за кои k мерења се доволни. Јасно, функцијата $f(k)$ е монoто растечка.

Ќе докажеме, дека $f(1) = 14$. Ако $n = 14$, на вагата поставуваме по $i-1$ монета от i-тата торба за $i = 1, 2, ..., 14$. Тогаш ќе биде покажана маса $910 - k$ и тоа ќе значи дека торбата со полесните монети е $k+1$-вата. Според тоа, $f(1)\geq 14$. Нека имаме некој број на торби и право на едно мерење. Нека a_i е бројот на торбите, од кои сме зеле по i монети. Тогаш

$$a_1+2a_2+\ldots+ma_m\leq 100\ , \qquad (1)$$

каде $a_i\leq 1$ за секој $i\geq 0$, бидејќи ако земеме еднаков број монети од две различни торби и една од тие торби е со полесните монети, нема да можеме да направиме разлика меѓу тие торби. Треба да најдеме максимум на бројот на торбите $\sum_{i=0}^{m}a_i$. Ова се постигнува, кога прво се ќе се најде максимум на a_0, потоа на a_1 итн. Имајќи го предвид неравенството (1) добиваме дека максимумом е 14, т.е. $f(1)\leq 14$.

Во вториот чекор ќе докажеме, дека $f(2)=60$. Неравенството (1) одново е исполнето и од $f(1)=14$ следува, дека $a_i\leq 14$ за секој $i\geq 0$. Сега максимумот на $\sum_{i=0}^{m}a_i$ се добива за $a_0=a_1=a_2=a_3=14$ и $a_4=4$, од каде наоѓаме $f(2)=4\cdot 14+4=60$.

На сличен начин се докажува, дека $f(3)=140$. На крајот, ако $k>3$, тогаш бидејќи $a_i\leq 100$ треба да имаме $a_0\leq f(k-1)$ и добиваме максимум кога $a_0=f(k-1)$ и $a_1=100$. Според тоа, $f(k)=f(k-1)+100$, што заедно со најдените $f(1), f(2)$ и $f(3)$, ја определува функцијата $f(k)$.

4. Дадени се N тегови такви што односот на масите на секои два тега е помал или еднаков на 1,25. Петар ги разделил теговите на 10 групи со еднакви маси, а Васил на ги разделил теговите на 11 групи со еднакви маси. Определи ја најмалата можна вредност на N.

Решение. Нека имаме 20 тегови од $5kg$ и 30 тегови од $4kg$. Петар може да ги подели сите тегови на 10 групи, во секоја од која има по два тега од $5kg$ и три тега од $4kg$, а Васил може да ги подели на пет групи од 4 тегови со маси $5kg$ и шест групи од 4 тегови со маси $4kg$. Според тоа, $N=50$ е можна вредност.

Нека претпоставиме дека $N<50$ е можна вредност. Тогаш во една од групите на Петар и во една од групите на Васил има најмногу 4 тегови. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека две групи од k и l тегови ($k<l$) имаат еднакви маси. Тогаш $k\geq 4$. За $k=4$ следува $l=5$ и во секоја од групите масите се еднакви.

Доказ. Нека во групата со l тегови најмалиот тег има маса m. Тогаш масата на таа група е поголема или еднаква на lm и како $l \geq k+1$ добиваме $lm \geq (k+1)m$. Од друга страна, масата на втората група е помала или еднаква на $1,25km$, па затоа $(k+1)m \leq 1,25km$, т.е. $k \geq 4$. Ако $k=4$, тогаш горните неравенства се равенства, па затоа $l=k+1=5$ и во групата со 5 тегови сите тегови имаат маси $m=4x$, а во групата со 4 тегови сите тегови имаат маси $5x$. Со тоа лемата е докажана. ■

Да се вратиме на задачата. Можни се два случаја.

Случај 1. Меѓу десетте групи на Петар има две со различен број на тегови. Тогаш од лемата следува, дека некои од групите на Петар се состојат од 4 тегови со маси $5x$, а останатите од 5 тегови со маси $4x$. Според тоа, вкупната маса на сите тегови е $200x$. Последното не е можно, бидејќи 200 не е делив со 11, а масата на секоја од 11-те групи на Васил е од видот $px,\ p \in \mathbb{N}$.

Случај 2. Сите 10 групи на Петар имаат ист број на тегови. Тогаш $10 \mid N$.

Ако меѓу 11-те групи на Васил има две со различен број на тегови, тогаш од лемата следува, дека секоја од тие групи има најмалку 4 тегови. Значи, $N \geq 44$ и бидејќи $10 \mid N$, добиваме $N \geq 50$, што е противречност.

Ако сите 11 групи на Васил имаат ист број на тегови, тогаш $11 \mid N$, па затоа $110 \mid N$, од каде следува дека $N \geq 110$, што повторно е противречност.

5. Нека n е природен број. Дадена е вага и n тегови со маси $2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}$. Сите n тегови се ставаат еден по друг на тасовите на вагата, односно во секој од n – те чекори се избира еден од теговите, кој не се наоѓа на тасовите, и се става или на левиот или на десниот тас. Притоа теговите се ставаат така што во ниту еден момент десниот тас не е потежок од левиот. Определи го бројот на начините на кои оваа постапка може да се реализира.

Решение. *Прв начин*. Нека f_n е бројот на начините на поставувањата на n тегови со опишаната постапка. Овие поставувања ќе ги наречеме *добри*. Секое вакво поставување му соодветствува на изразот $x_1 + x_2 + ... + x_n$ во кој $\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} = \{2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}\}$ и кој задоволува $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq 0$, за $k = 1, 2, ..., n$.

За распоредот на елементите и знакот на собирокот ± 1 има $2n$ можности, при што за $x_1 = -1$ нема добри поставувања. Во секој друг случај, вредноста на изразот $x_1 + x_2 + ... + x_i$ е различна од нула за секои i, па затоа со изоставување на собирокот ± 1 и делење со 2 се добива добро поставување за $n-1$ тегови, а такви има f_{n-1}. Според тоа, $f_n = (2n-1) f_{n-1}$, што заедно со почетниот услов $f_1 = 1$ дава $f_n = (2n-1)!!$.

Втор начин. Бројот на добрите поставувања на n тегови да го означиме со a_n. Нека во првиот чекор се поставува тегот 2^i. Теговите полесни од него потоа може да се постават на било кој тас (бидејќи $2^0 + ... + 2^{i-1} < 2^i$). Чекорите во кои овие тегови може да се постават може да ги избереме на $\binom{n-1}{i}$ начини, нивниот редослед на $i!$ начини, а тасовите на 2^i начини. Од друга страна, во преостанатите потези потешките тегови може да се постават на a_{n-i-1} начини, бидејќи полесните тегови не влијаат на исправноста на нивното поставување. Според тоа,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i i!\binom{n-1}{i} a_{n-i-1}, \quad a_0 = 1. \qquad (1)$$

Ако означиме $b_n = \frac{a_n}{2^n n!}$, рекурентната релација го добива обликот

$$2nb_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i ,$$

па имаме

$$2nb_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i = b_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i = b_{n-1} + 2(n-1)b_{n-1} = (2n-1)b_{n-1},$$

т.е. $b_n = \frac{2n-1}{2n} b_{n-1}$, со почетен услов $b_0 = 1$. Според тоа, $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, па затоа

$$a_n = 2^n n! b_n = 2^n n! \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n)! \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n-1)!!.$$

Забелешка. Наоѓањето на a_n од (1) може да се направи и на следниов начин. Од $(k+1) \cdot \binom{n}{k+1} = n\binom{n-1}{k}$ со замена во (1) добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} 2^i i!\binom{n}{i} a_{n-i} = a_n + \sum_{i=1}^{n} 2^i i!\binom{n}{i} a_{n-i} \\ &= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}(k+1)!\binom{n}{k+1} a_{n-k-1} \\ &= a_n + 2n\sum_{k=0}^{n-1} 2^k k!\binom{n-1}{k} a_{n-k-1} \\ &= a_n + 2na_n = (2n+1)a_n. \end{aligned}$$

Сега, ако се земе предвид почетниот услов $a_0 = 1$ добиваме

$$a_n = (2n-1)a_{n-1} = (2n-1)(2n-3)a_{n-2} = ... = (2n-1)!!.$$

Трет начин. Нека f_n е бројот на начините на поставувањата на n тегови со опишаната постапка. Овие поставувања ќе ги наречеме *добри*.

Да разгледаме добро поставување на теговите $2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}$. Да ја разгледаме истата низа на чекори без чекорот во кој ја поставуваме тежината 1. Бидејќи

$$2^k = 2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^1 + 2 > 2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^1 + 1$$

оваа низа од чекори е добра за теговите $2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}$. Бидејќи бројот на добрите низи за $2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}$ е еднаков на бројот на добрите низи за $2^0, 2^1, ...,$ 2^{n-2}, тој број е еднаков на f_{n-1}.

Сега да ги разгледаме можните поставувања на тегот 1. Ако тој е поставен во првиот чекор,тој треба да се постави на левиот тас. Ако е поставен во некој од следните чекори, тој може да се постави на кој било тас (разликата меѓу било кои два тега е најмалку 2). Според тоа,

$$f(n) = (2n-1) f_{n-1},$$

и бидејќи $f(1) = 1$ имаме

$$f_n = (2n-1) f_{n-1} = (2n-1)(2n-3) f_{n-2} = ... = (2n-1)!!.$$

6. Меѓу 9^k на изглед исти монети една е полесна од останатите. Дадени се три ваги без тегови, едната од кои е неисправна (при секое мерење таа може случајно да биде како точна, така и неточна). Како може со најмногу $3k+1$ мерења да се определи неисправната монета?

Решение. Неисправната монета да ја означиме со НМ. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Меѓу 9^k монети со $3k$ мерења можеме или да ја определиме НМ, или да најдеме три монети, една од кои е НМ. Во вториот случај можеме да најдеме и една исправна вага.

Доказ. Ќе користиме индукција по k.

Нека $k=1$. Да ги распоредиме монетите во форма на 3×3 квадрат и да ги нумерираме редовите и колоните од 1 до 3, а монетите со нивните координати.

Ги мериме монетите од првиот и вториот ред на првата вага, а потоа монетите од втората и третата колона на втората вага.

Да претпоставиме дека и двете ваги се во рамнотежа. Бидејќи барем една од вагите е исправна, НМ е во третиот ред или третата колона. Со третото мерење од третата вага ги споредуваме масите $(3,1)+(3,2)$ и $(1,3)+(2,3)$. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш НМ е $(3,3)$, но не знаеме која вага е неисправна (зошто?). Нека една од тежините е помала, на пример $(3,1)+(3,2)$, тоа значи, дека резултатот од мерењето на третата вага противречи на резултатот од мерењето на втората вага. Според тоа, првата вага е исправна и НМ е меѓу монетите од третиот ред.

Другите два случаи: една од првите две ваги не е во рамнотежа или и двете не се во рамнотежа, се разгледуваат аналогни.

Нека тврдењето важи за $k-1$ и нека имаме 9^k монети. Монетите да ги разделиме во групи од по 9 монети и секоја од групите да ја наречеме *нова монета*. Согласно индуктивната претпоставка со $3(k-1)=3k-3$ мерења можеме или да ја најдеме неисправната *нова монета* или да најдеме исправна вага и три *нови монети*, едната од кои е НМ.

Во првиот случај имаме 9 монети и трите ваги, па сега тврдењето следува од базата на идндукцијата за $k=1$.

Во вториот случај имаме исправна вага и 27 монети од кои едната е НМ. Тогаш со три мерења, при што прво ги делиме монетите во групи од по 9 монети и вршиме споредување со кое ја наоѓаме групата во која е НМ, а потоа таа група ја делиме во три групи од по 3 монети и вршиме споредување со кое повторно ја наоѓаме групата во која е НМ, за на крај да споредиме две монети со што ја наоѓаме НМ.

Конечно од принципот на математичка индукција следува точноста на лемата. ■

Сега лесно можеме да ја решиме задачата. Да реализираме $3k$ мерења како во лемата. Ако по овие мерења не сме ја откриле НМ, тогаш сме нашле исправна вага и 3 монети меѓу кои е НМ. Јасно, со последното мерење ја наоѓаме НМ.

7. Во $n>1$ сандаци се наоѓаат два вида златници: исправни и неисправни, кои на изглед не се разликуваат. Во секој сандак се наоѓаат само златници од едниот вид. Златниците од ист вид имаат еднаква маса, додека златниците од различните видови имаат различна маса. Масата на исправниот златник е позната. Определи го максималниот број мерења на дигитална вага со кои може да се констатира кои сандаци содржат неисправни златници, како и колкава е масата на неисправен златник.

(Од секој сандак можеме да земеме онолку златници колку што ни се потребни при мерењата.)

Решение. Ќе докажеме дека се доволни две мерења. Нека масите на исправниот и неисправниот златник ги означиме со x и y, соодветно и нека $a_i=1$ ако златниците во $i-$тиот сандак се неисправни, а $a_i=0$ во спротивно.

Во првото мерење да земеме по еден златник од секој сандак. Тогаш $a_1+a_2+...+a_n=\frac{nx-m_1}{x-y}$, каде m_1 е добиената маса. Нека претпоставиме дека $nx\neq m_1$, бидејќи во спротивно нема неисправни златници. Во второто мерење, за некој $q\in\mathbb{N}$, од $i-$тиот сандак земаме q^{i-1} златници. Ако е добиена маса m_2, имаме

$$a_1 + a_2 q + ... + a_n q^{n-1} = \frac{(1+q+...+q^{n-1})x - m_2}{x-y} .$$

Оттука добиваме

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1 + a_2 q + ... + a_n q^{n-1}}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{(1+q+...+q^{n-1})x - m_2}{nx - m_1} .$$

Сакаме вредноста f еднозначно да ги определува $a_1, a_2, ..., a_n$. Значи, доволно е да докажеме дека постои природен број q таков што функцијата

$$f : \{0,1\}^n \setminus \{(0,0,...,0)\} \to \mathbb{R}$$

е инјекција.

Нека $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Равенството $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ е еквивалентно на равенството

$$P_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(q) = (a_n b - b_n a)q^{n-1} + (a_{n-1} b - b_{n-1} a)q^{n-2} + ... + (a_2 b - b_2 a)q + (a_1 b - b_1 a) = 0$$

каде $a = a_1 + a_2 + ... + a_n \neq 0 \neq b_1 + b_2 + ... + b_n = b$. Според тоа, ако функцијата f не е инјекција, тогаш q е нула на полиномот

$$P(q) = \prod_{\mathbf{a},\mathbf{b} \in \{0,1\}^n \setminus \{(0,0,...,0)\}} P_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(q) .$$

Но, бидејќи ниту еден од полиномите $P_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(q)$ не е идентично еднаков на 0, постојат само конечно многу броеви q за кои $P(q) = 0$, па затоа може да се избере q за кои функцијата f е инјекција.

Според тоа, за избраниот q во две мерења со помош на функцијата f можеме да ја определиме подредената $n-$торка $(a_1, a_2, ..., a_n)$, т.е. да ги определиме сандаците со неисправни златници. Конечно, y го определуваме од равенството $y = x - \frac{nx - m_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$.

Дека се потребни најмалку две мерења следува од фактот, дека ако земеме k_i златници од $i=$тиот сандак, тогаш ја добиваме равенката

$$k_1 a_1 + ... + k_n a_n = \frac{kx - m}{x - y} ,$$

каде $k = k_1 + ... + k_n$, која во општ случај има повеќе решенија. На пример, две нејзини решенија за $(a_1, a_2, ..., a_n, y)$ се $(1, 0, ..., 0, x - \frac{kx-m}{k_1})$ и $(0, ..., 0, 1, \frac{kx-m}{k_n})$.

8. Нумизматичар има 100 на изглед еднакви монети. Тој знае дека 30 од нив се вистински, а 70 се фалсификувани. Освен тоа знае дека сите вистински монети се со еднаква маса, а сите фалсификувани монети имаат различни маси и секоја фалсификувана монета е потешка од секоја вистинска монета. Масите на поединечните монети не му се познати. Нумизматичарот има вага со два таса без тегови, на која може со едно мерење да спореди две групи со една-

ков број монети. Определи го најмалиот број мерења со кој со помош на вагата нумизматичарот може со сигурност да најде барем една вистинска монета.

Решение. *Одговор*:70.

Прво ќе докажеме дека 70 мерења се доволни. Да ги ставиме монетите на едно купче. Во секое мерење избираме две монети од купчето и ги споредуваме. Ако масите им се еднакви, двете монети се вистински и сме ја нашле саканата монета. Ако не се еднакви, тогаш потешката монета е фалсификувана. Ја отстрануваме потешката монета, а другата ја враќаме во купчето.

Во случај, кога рамнотежа на вагата не се достигнува во ниту едно од првите 70 мерења, по овие мерења сите 70 фалсификувани монети ќе бидат отстранети и во купчето ќе останат сите 30 вистински монети и сме нашле вистинска монета.

Останува да докажеме дека не постои алгоритам со кој можеме да најдеме вистинска монета со најмногу 69 мерења. Да го допуштиме спротивното, т.е. дека нумзматичарот знае таков алгоритам.

Нека масата на вистинска монета е 2^{100}, а масата на $i-$тата фалсификувана монета е $m_i = 2^{100} + 2^i$ (ваква претпоставка е допустлива, бидејќи само може да му олесни на нумизматичарот).

Нека при некое мерење на вагата има по k монети на двете страни, од кои $d > 0$ се фалсификувани и нека броевите на фалсификуваните монети се $i_1 < i_2 < ... < i_d$. Тогаш на страната на која е најтешката фалсификувана монета имаме маса најмалку $2^{100}k + 2^{i_d}$, а вупната маса на другата страна не надминува $2^{100}k + (2^1 + ... + 2^{i_{d-1}}) = 2^{100}k + 2^{i_d} - 1$, т.е. таа е помала. Според тоа, при постоење на барем една фалсификувана монета вагата ќе превагне на онаа страна на која е фалсификуваната монета со најголем број (маса).

Нека нумизматичарот работи според својот алгоритам. Ние ќе му ги соопштуваме резултатите од мерењата и ќе задаваме маси m_i на некои монети, при што по секое мерење зададените маси се од видот $m_{70}, m_{69}, ..., m_{70-i}$ за некој i. Притоа, ако соодветните монети навистина ги имаат масите кои им се зададени (а преостанатите маси се распределени произволно), тогаш резултатите од мерењата ќе бидат навистина такви какви што сме ги соопштиле.

При првото мерење избираме произволна монета меѓу монетите кои се мерат, на оваа монета и задаваме маса m_{70} и соопштуваме дека нејзината страна превагнува. При секое следно мерење, ако на вагата има монета со веќе зададена маса, ја избираме најголемата од сите зададени маси кои учествуваат во мерењето и соопштуваме дека нејзината страна превагнува. Ако пак во мерењето нема монета со зададена маса, повторно избираме произволна монета меѓу мерените монети, на оваа монета и ја задаваме најголемата сè уште незададена маса и соопштуваме дека нејзината страна претегнува. Лесно се гледа дека сите наши постапки можеме да ги реализираме.

Откако нумизматичарот извршил најмногу 69 мерења, ние сме задале најмногу 69 маси. Според тоа, масата m_1 не е зададена и може да и припаѓа на било која монета, за која се уште нема зададена маса, а притоа сите резултати од мерењата ќе останат такви какви што сме ги соопштили. Тоа значи дека во овој момент нумизматичарот не може со сигурност да посочи вистинска монета.

9. Работник располага со контејнер и мала количка. Контејнерот може да собере најмногу $1000\,kg$, а количката најмногу $1\,kg$ жито. Даден е конечен број торби со жито, чија вкупна маса е поголема од $1001\,kg$, но масата на секоја од нив не е поголема од $1\,kg$. Определи го максималното количество жито кое може да биде натоварено заедно во контејнерот и количката, независно од масата на одделните торби.

Решение. Прво ќе докажеме дека може да се натоварат $1000\,kg$. Почнуваме со полнење на контејнерот и товараме на случаен начин се додека тоа е можно. Да претпоставиме дека сме натовариле $1000-x\ kg$. Тогаш $x<1$ и ни преостанале торби со маса која е поголема од x, но не е поголема од $1\,kg$. Според тоа, произволна торба од преостанатите натоварена на количката обезбедува да се натоварат најмалку $1000\,kg$.

Нека претпоставиме дека без разлика на масите на одделните торби може да се натоварат $1000+d\ kg$, каде $d>0$ е константа. Нека $e>0$ е таков што $2000e<d$ и да разгледаме сет од еднакви торби, секоја од кои собира $0,5+e\ kg$ (може да сметаме дека $e<0,5\,kg$). Тогаш количката може да собере најмногу една торба, а контејнерот најмногу 1999 торби. Според тоа, вкупната маса на натовареното жито не е поголема од

$$2000(0,5+e)=1000+2000e<1000+d\,,$$

што е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека максималното количество жито кое може да биде натоварено заедно во контејнерот и количката, независно од масата на одделните торби е $1000\ kg$.

10. Работник располага со две колички. Едната може да носи не повеќе од $8\ kg$, а другата не повеќе од $9\ kg$. Даден е конечен број торби со жито кои имаат вкупна маса поголема од $17\ kg$, но масата на секоја од нив е не поголема од

$1\,kg$. Определи го максималното количество на жито кое може да биде натоварено заедно во двете колички, независно од масите на одделните торби.

Решение. Одговор: $15,3\,kg$. Прво ќе докажеме дека не може да се натовари повеќе од $15,3\,kg$. Нека претпоставиме дека може да се натовари $15,3+d\;kg$, каде $d>0$ е константа. Нека $e\in(0;0,1)$ е таков што $17e<d$ и да разгледаме сет со еднакви торби секоја од кои има маса $0,9+e\;kg$. Тогаш малата количка не може да собере повеќе од 8 торби, а големата не може да собере повеќе од 9 торби. Според тоа, вкупната маса на натовареното жито не е поголема од

$$17(0,9+e)=15,3+17e<15,3+d\,,$$

што е противречност.

Ќе докажеме дека може да натовариме најмалку $15,3\,kg$.

Лема. Меѓу конечен број торби со вкупна маса поголема од $a\;kg$ (секоја торба има маса помала или еднаква на $1\,kg$) можеме да избереме неколку така што нивната вкупна маса е во интервалот $[a-\frac{a}{a+1},a]$.

Доказ. Да ги подредиме торбите според масата во опаѓачки редослед и да ги товараме по ред почнувајќи од торбата со најголема маса. Нека претпоставиме дека вкупната маса на првите k торби е помала од $a-\frac{a}{a+1}$, а по додавање на следната торба таа станува поголема од a . Тогаш $k\geq a$ и $(k+1)-$ вата торба има маса поголема од $\frac{a}{a+1}$. Според тоа, вкупната маса на првите k торби е поголема од $\frac{ka}{a+1}\geq\frac{a^2}{a+1}=a-\frac{a}{a+1}$, што е противречност. ■

Да претпоставиме дека можеме да избереме неколку торби со вкупна маса меѓу 7,2 и $8\,kg$. Овие торби ќе ги натовариме на малата количка. Потоа меѓу преостанатите торби (чија вкупна маса е поголема од $19-8=9\,kg$), согласно лемата, можеме да избереме неколку со вкупна маса меѓу 8,1 и $9\,kg$, кои ќе ги натовариме на големата количка. На овој начин имаме натоварено најмалку $15,3\,kg$.

Аналогно, ако можеме да избереме неколку торби со вкупна маса меѓу 8,2 и $9\,kg$, нив го товариме на големата количка, а меѓу преостанатите торби, согласно лемата, можеме да избереме неколку со вкупна маса 7,1 и $8\,kg$, кои ќе ги натовариме на малата количка, и одново имаме најмалку $15,3\,kg$.

Ќе докажеме дека секогаш можеме да избереме торби со вкупна маса во еден од интервалите $[7,2;8]$ или $[8,2;9]$. Нека го претпоставиме спротивното. Бидејќи согласно лемата постои множество S од торби со вкупна маса во интервалот $[8,1;9]$, заклучуваме дека S всушност има маса во интервалот

$[8,1;8,2)$. Ако S има $k, k \geq 0$ торби со маса помала од 0,8, тогаш ги отстрануваме една по една.

Бидејќи не можеме да го прескокнеме интервалот $[7,2;8]$, а по претпоставка не можеме и да паднеме во него, во крајна мера ќе добиеме множество $S_1 \subset S$, во кое сите торби имаат маса најмалку $0,8\, kg$, а масата на отстранетите торби е не поголема од $0,2\, kg$. Тогаш преостанатите големи торби се со маса поголема или еднаква на $8,1-0,2=7,9$ и има најмалку 8 такви торби. Секоја од овие торби има маса $0,9\, kg$ (во спротивно ја отстрануваме од S и добиваме противречност). Според тоа, можеме да земеме 8 од нив и да добиеме вкупна маса во интервалот $[7,2;8]$.

11. Нека N е природен број. Дадено е множество тегови кое ги задоволува следниве услови:

1) Секој тег од множеството има некоја од масите $1,2,...,N$;
2) За секој $i \in \{1,2,...,N\}$ постои тег со маса i .
3) Збирот на масите на сите тегови од даденото множество е парен број.

Докажи дека даденото множество тегови може да се разбие на две подмножества кои имаат еднакви маси.

Решение. Нека $2S$ е збирот на масите на сите тегови. Нека T е најголем збир на маси кој можеме да го добиеме во едната група, но таков што $T \leq S$. Ако $T=S$, тогаш тврдењето е докажано. Нека $T<S$. Нека A е група која има збир на маси T , а нека B е групата која има збир на маси $2S-T$. Ако некој тег со маса 1 се наоѓа во групата B , тогаш можеме да го префрлиме во групата A , па тогаш групата A ќе има маса поголема од T која и понатаму е помала или еднаква на S , што противречи на претпоставката дека T е најголемиот збир на кој е помал или еднаков на S . Значи, сите тегови со маси 1 се наоѓаат во групата A . Понатаму, ако некој тег со маса 2 се наоѓа во групата B , тогаш овој тег го префрламе во A и еден од теговите со маса 1 од групата A го префрламе во групата B , и повторно групата A ќе има маса поголема од T која е помала или еднаква на S , што е противречност. Значи, сите тегови со маса 2 се наоѓаат во групата A . Продолжувајќи ја постапката, после $N-1$ чекори, добиваме дека сите тегови со маса $N-1$ се наоѓаат во групата A , па затоа во групата B се наоѓаат само тегови со маса N . Ако сега тег со маса $N-1$ од групата A замениме со тег со маса N од групата B , повторно групата A ќе има маса поголема од T која е помала или еднаква на S , што е противречност со претпоставката дека T е најголемиот збир на маси кој е помал или еднаков на S . Конечно, претпоставката дека $T<S$ доведува до противречност, па затоа $T=S$.

12. Емилија и Весна го пребарувале таванот на дедо Марко и нашле вага и кутија со тегови. Кога теговите ги распределиле по маси, констатирале дека има 5 различни групи тегови. Играјќи се со вагата и теговите, констатирале дека ако на едната страна на вагата стават било кои два тега, тогаш е можно во кутијата да се најдат други два тега такви што со нивно ставање на другата страна на вагата, вагата е во рамнотежа.

Определи го најмалиот можен број тегови во кутијата.

Решение. Според условот на задачата, за секој пар тегови (x,y) постои пар тегови (u,v) таков што $x+y=u+v$. Во овој случај ќе велиме дека парот (u,v) го *урамнотежува* парот (x,y).

Нека a,b,c,d,e се различни тежини на теговите од ова множество. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c<d<e$. Да го разгледаме парот (a,b). Бидејќи $2a<a+b<2b$ и $a+b<x+y$ за секои x и y различни од a и b, заклучуваме дека овој пар го урамнотежува само ист таков пар, т.е. парот (a,b). Затоа во множеството од сите тегови S мора да има два тега со маса a и два тега со маса b.

Бидејќи во S постојат најмалку два тега со маса a, треба да го разгледаме парот (a,a). Вкупната маса на овој пар е $a+a=2a$. Секој пар $(x,y)\neq(a,a)$ има поголем збир на маси од парот (a,a). Според претпоставката постои пар тегови кој го урамнотежува, а тоа единствено е можно ако урамнотежувачкиот пар е (a,a). Тоа значи дека имаме најмалку 4 тегови со маса a.

Сега да го разгледаме парот (d,e). Единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар, што значи дека имаме 2 тега со маса d и 2 тега со маса e. Парот (e,e) има најголема вкупна маса, па единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар. Значи, имаме 4 тегови со маса e.

Според условот на задачата постои тег чија маса е поголема од b и е помала од d. Масата на тој тег ја означивме со c.

Од досега изнесеното следува дека бројот на теговите не може да биде помал од $4+2+1+2+4=13$. Ќе докажеме дека тоа е најмалиот број елементи на множеството S. Последното може да го докажеме, ако конструираме множество S со 13 елементи кои го задоволуваат условот на задачата. Такво множество се состои од 4 тегови со маса 1, 2 тега со маса 2, 1 тег со маса 3, 2 тега со маса 4 и 4 тегови со маса 5.

13. Разгледуваме комплет тегови, секој од кои има маса цел број грамови, а заедно имаат маса $200\ g$. Таков комплет го нарекуваме правилен, ако секој предмет со целобројна маса од 1 до 200 грама може да се измери со определен број тегови и тоа на единствен начин, при што предметот се поставува на

едниот тас, а теговите на другиот тас и две мерења кои се разликуваат со замена на неколку тегови со други, но со иста маса, ќе ги сметаме за еднакви.
а) Да се најде пример за правилен комплет во кој не сите тегови се по $1g$.

б) Колку различни правилни комплети постојат? (Два комплети се различни, ако некој тег учетвува различен број пати).

Решение. Да разгледаме еден правилен комплет тегови. Нивните маси да ги означиме со $a_1 < a_2 < ... < a_n$, а бројот на теговите од соодветните маси со $k_1, k_2, ..., k_n$. Јасно, јасно $a_1 = 1$, бидејќи во спротивно масата од $1g$ не би можеле да ја измериме.

Ќе докажеме дека $a_2 = k_1 + 1$. Навистина, ако $a_2 > k_1 + 1$, тогаш масата $k_1 + 1$ не може да се измери, а ако $a_2 < k_1 + 1$, масата може да се измери на два начини:

а) со еден тег од a_2 грама,

б) со a_2 тегови од по 1 грам.

Со индукција ќе покажеме дека

$$a_i = (k_{i-1} + 1)a_{i-1}, \text{ за } i = 2, 3, 4, ... \qquad (1)$$

Ова равенство означува дека секој тег има 1 грам поголема маса од збирот на масите на сите тегови полесни од него. Навистина,

$$\begin{aligned} a_i &= (k_{i-1} + 1)a_{i-1} = k_{i-1}a_{i-1} + a_{i-1} = k_{i-1}a_{i-1} + (k_{i-2} + 1)a_{i-2} = ... \\ &= k_{i-1}a_{i-1} + k_{i-2}a_{i-2} + ... + k_2a_2 + a_2 \\ &= k_{i-1}a_{i-1} + k_{i-2}a_{i-2} + ... + k_2a_2 + k_1a_1 + 1 \end{aligned}$$

За $i = 2$ равенството (1) е докажано. Да претпоставиме дека

$$a_q = (k_{q-1} + 1)a_{q-1}, \text{ за } q < i .$$

Значи, за секој тег до $(i-1)$ – от важи: секој тег има за 1 грам поголема маса од збирот на сите тегови полесни од него. Значи, секоја маса од x грама каде

$$x < k_{i-1}a_{i-1} + k_{i-2}a_{i-2} + ... + k_2a_2 + k_1a_1 + 1 = (k_{i-1} + 1)a_{i-1}$$

може да се измери со тегови чија маса е помала или еднаква на a_{i-1} на единствен начин (индуктивна претпоставка). Ако $a_i < (k_{i-1} + 1)a_{i-1}$, масата a_i може да се измери на два начини. Еден начин според индуктивната претпоставка со тегови со помала маса од масата a_i , а еден со тег со маса a_i , па затоа $a_i \ge (k_{i-1} + 1)a_{i-1}$. Но, масата $a_i = (k_{i-1} + 1)a_{i-1}$ не може да се измери со маси кои не се поголеми од a_{i-1} , и затоа $a_i = (k_{i-1} + 1)a_{i-1}$ (според условот на задачата). Сега, равенството (1) следува од принципот на математичка индукција.

Бидејќи вкупната маса е 200 грама, наоѓаме

$$201 = k_na_n + k_{n-1}a_{n-1} + ... + k_2a_2 + k_1a_1 + 1 = (k_{n-1} + 1)a_{n-1} = a_n .$$

Значи, 201 е еднаков на $(k_{n-1}+1)a_{n-1}$, од каде наоѓаме дека 201 е делив со a_{n-1} итн. Лесно се гледа дека 201 е делив со секој a_i, за $i=1,2,...,n-1$. Бидејќи $201=1\cdot 3\cdot 67$ добиваме три различни правилни комплети:

1) $a_n=1$, комплет од 200 тегови, секој по 1 грам;
2) $a_n=3$, комплет од 2 тега по 1 грам и 66 тегови од по 3 грама;
3) $a_n=67$, комплет од 66 тегови по еден грам и 2 тега по 67 грама.

14. Нека се $a_1,a_2,...,a_n$ по парови различни природни броеви и нека M е множество кое се состои од $n-1$ природни броеви и не го содржи бројот $s=a_1+a_2+...+a_n$. Скакулец треба да направи n скокови надесно по бројната права, тргнувајќи од точката со координа 0. Притоа, должините на неговите скокови мора да бидат еднакви на броевите $a_1,a_2,...,a_n$, во некој редослед. Докажи, дека тој редослед може да се избере така што скакулецот никогаш нема да скокне во точка чија координата е во множеството M.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $n\geq 2$ и дека тврдењето важи за сите $k<n$. Нека $a_1<a_2<...<a_n$ и $m=\min M$. Можни се два случаја.

1) $m<a_n$. Ако $a_n\notin M$, скакулецот го прави првиот скок со должина a_n. Потоа, треба да направи скокови со должини $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ така што прескокнува $n-2$ точки од множеството $M\setminus\{m\}$, а тоа според индуктивната претпоставка тоа може да го направи. Нека претпоставиме дека $a_n\in M$. Паровите (a_i,a_i+a_n) за $1\leq i\leq n-1$ се меѓусобно дисјунктни, па барем еден од нив не содржи ниту еден елемент од множеството $M\setminus\{a_n\}$ (а не го содржи ниту a_n). Нека тоа е парот (a_k,a_k+a_n). По два скока со должини a_k и a_n редоследно, на скакулецот му останува да направи скокови со должини $a_1,...,a_{k-1},a_{k+1}...,a_{n-1}$ така што ќе прескокне $n-3$ точки на множеството $M\setminus\{m,a_n\}$, што според индуктивната претпоставка повторно може да го направи.
2) $m\geq a_n$. Според индуктивната претпоставка, скакулецот може првиот скок да го направи со должина a_n и останатите скокови по некој редослед a_{i_1}, . . . , $a_{i_{n-1}}$ така што ќе ги заобиколи сите точки на множеството $M\setminus\{m\}$. Ако притоа не скокне и во точката m, доказот е завршен. Затоа нека претпоставиме дека во $k-$тиот скок тој скокнува во точката m, т.е. $a_n+a_{i_1}+...+a_{i_k-1}=m$. Во овој случај, скакулецот со низата скокови $a_{i_1},...,a_{i_k},a_n$, $a_{i_{k+1}},...,a_{n-1}$ ги исполнува барањата на задачата. Навистина,

и на овој начин скакулецот ги прескокнува точките на множеството $M \setminus \{m\}$, но ја прескокнува и точката m бидејќи

$$a_{i_1} + ... + a_{i_k} < m < a_{i_1} + ... + a_{i_k} + a_n .$$

Конечно, од претходните разгледувања следува дека тврдењето важи и за n, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број.

15. Во земјата на математичарите избрале реален број $\sim > 2$ и во оптек пуштиле монети со вредност 1 денар и $\sim^k$ денари за секој природен број k. Притоа бројот $\sim$ бил избран така што сите вредности на монетите, без најмалата, биле ирационални броеви. Дали може да се случи, секоја сума на пари од природен број денари да се исплати со такви монети, при што секој вид монета се користи не повеќе од 6 пати?

Решение. Ќе докажеме дека бројот $\sim = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$, кој е корен на равенката $\sim^2 + \sim = 7$ го задоволува условот на задачата. Јасно, $\sim > 2$. За секој природен број m имаме $(2\sim)^m = a_m + b_m\sqrt{29}$, каде a_m и b_m се цели броеви такви што $a_m < 0 < b_m$ за непарно m и $a_m > 0 > b_m$ за парно m. Во случајов, бројот $\sim^m$ е ирационален.

Останува да докажеме, дека за секој природен број n сумата од n денари може да се исплати на саканиот начин. Да ги разледаме сите можности за исплаќање на n денари со дадените монети (барем еден начин постои – со n монети од по 1 денар). Меѓу сите можности на исплаќање да ја избереме онаа, при која се користи најмал број монети.

Да претпоставиме, дека во тој момент некоја монета со вредност $\sim^i$, i е ненегативен цел број се користи 7 и повеќе пати. Тогаш од дефиницијата на $\sim$, т.е. од $\sim^{i+2} + \sim^{i+1} = 7\sim^i$ следува, дека овие 7 монети со вредност $\sim^i$ можеме да ги замениме со две монети со вредности $\sim^{i+2}$ и $\sim^{i+1}$. Притоа сумата останува иста, а вкупниот број монети се намалува за 5, што противречи на претпоставката дека сме искористиле најмал број монети.

Забелешка. Од условот следува дека сумата од 7 монети на саканиот начин може да исплати само во видот $7 = \sim^2 + \sim$. Оттука следува единственоста на бројот $\sim$.

16. Дадени се n еднакви топки, три од кои се радиоактивни. Располагаме со уред, кој го определува количеството на радиоактивност. Притоа со едно мерење на произволно множество топки може да се определи дали во него

има 0, 1 или повеќе од 1 радиоактивни топки. Ако со $L(n)$ го означиме минималниот број мерења, потребни за наоѓање на трите радиоактивни топки:
а) определи го $L(6)$,

б) докажи, дека $L(n) \le [\frac{n+5}{2}]$.

Решение. а) Ќе докажеме дека 4 мерења се доволни. Топките да ги означиме со 1, 2, 3, 4, 5, 6. И последователно да измериме $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}$ и $\{1,5\}$.

1) Ако при сите мерења има радиоактивност, тогаш 1 е радиоактивна (во спротивен случај сите четири 2, 3, 4 и 5 се радиоактивни, што не е можно). Ако во $\{1,a\}$, $a = 2,3,4,5$ има повеќе од една радиоактивна, тогаш a е радиоактивна, а ако има само една тогаш a не е радиоактивна. Според тоа, можеме да разбереме кои од 2, 3, 4, 5 се радиоактивни, па оттука знаеме и за 6.
2) Ако при некое мерење нема радиоактивност, тогаш 1 не е радиоактивна. Според тоа, можеме да определиме кои од 2, 3, 4, 5 се радиоактивни, па оттука знаеме и за 6.

Нека претпоставиме дека $L(6) \le 3$, т.е. можеме да сметаме дека 3 мерења се доволни. Резултатите од секое мерење се три: нема радиоактивни топки, има само една радиоактивна топка или има повеќе од една радиоактивна топка. Според тоа, при две мерења имаме $3^2 = 9$ можни резултати. При првото мерење може да се изберат 1, 2, 3, 4, 5 или 6 топки. Јасно, меѓу секои 5 или 6 топки секогаш има повеќе од една радиоактивна топка, па така ова мерење не дава никаква информација.
Нека првото мерење е на множество од x, $x \le 4$ топки. При $x = 1$ и резултат *има една радиоактивна топка* можностите за радиоактивните топки се 10 (меѓу останатите 5 топки има две радиоактивни и $\binom{5}{2} = 10$), а во исто време можните резултати од останатите две мерења се $3^2 = 9$. Аналогно, при првото мерење на:

- две топки и одговор *има една радиоактивна* можностите се

$$\binom{2}{1}\binom{4}{2} = 12 > 9,$$

- три топки и *има повеќе од една радиоактивна* можностите се

$$\binom{3}{2}\binom{3}{1} + \binom{3}{3} = 10 > 9,$$

- четири топки и одговор *има повеќе од една радиоактивна* можностите се

$$\binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{4}{3} = 13 > 9.$$

Според тоа, три мерења не се доволни и $L(6) = 4$.

б) Ќе докажеме дека $[\frac{n+5}{2}]$ мерења се доволни за определувањена трите радиоактивни топки, од каде ќе следува бараното неравенство. Нека $n = 2t - e$, каде $e \in \{0,1\}$. Сите топки да ги поделиме на t множества од по две топки (кога $e=0$) или на $t-1$ множество од по две топки и едно множество со една топка (кога $e=1$). И во двата случаи да ја провериме радиоактивноста на $t-1$ множество со две топки. Во зависност од резултатите од тие мерења за сите t множества имаме два случаја:

1) Наоѓаме едно множество со две радиоактивни топки и едно множество со 1 радиоактивна топка.
2) Наоѓаме три множества со по една радиоактивна топка.

И во двата случаја уште три мерења се доволни за наоѓање на радиоактивните топки. Вкупниот број на мерење е $t-1+3=t+2$. Бидејќи

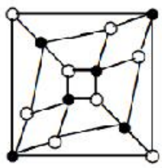
$$[\frac{n+5}{2}]=[\frac{2t-e+5}{2}]=t+2+[\frac{1-e}{2}]=t+2\ ,$$

добиваме $L(n) \le [\frac{n+5}{2}]$.

26. ПАТИШТА

1. На цртежот десно е прикажана мрежа на патишта меѓу 14 градови. Дали може да се обиколат сите градови така што секој град се посети точно еднаш?

Решение. Секое кругче претставува еден град, а соседни градови се оние меѓу кои постои пат. Кругчињата да ги обоиме со црна и бела боја така што соседните градови се обоени со различни бои, како што тоа е прикажано на долниот лев цртеж.

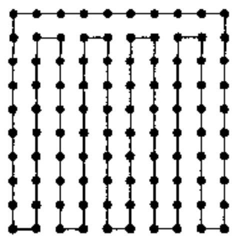


На овој начин осум градови се обоени со бела боја, а шест се обоени со црна боја. При премин од еден град во нему соседен град, се менува бојата на градот, бидејќи така ги обоивме градовите. Ако постои пат по кој секој град ќе се посети точно еднаш, тој пат би се состоел од седум бели и седум црни кругчиња. Но, на мапата на патиштата постојат 8 бели и 6 црни градови, па затоа бараната обиколка не е можна.

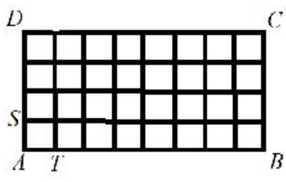
Забелешка. Горното боење на градовите не е можно за секоја мрежа на патишта, но во нашиот случај тоа постои

2. Десет улици во еден град се паралелни една на друга, а другите десет ги сечат под прав агол. Колку најмалку кривини може да има затворена маршрута која минува низ сите раскрсници на дваесетте улици?

Решение. Пример со 20 кривини е даден на цртежот десно. Ќе докажеме дека не е можно да има помалку од 20 кривини. Да разгледаме 10 улици со ист правец. Ако маршрутата минува низ секоја, таа на секоја од нив има најмалку 2 кривини и тврдењето е докажано. Ако меѓу нив има улица по која маршрутата не минува, тогаш таа мора да минува низ сите 10 улици кои се нормални на неа. Овие 10 улици се со ист правец, па значи маршрутата на секоја од нив има најмалку по 2 кривини.



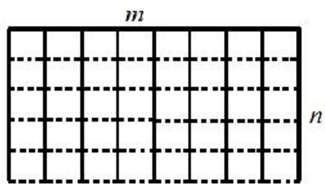
3. Дадена е правоаголна табла со димензии $m \times n$, каде $n = km$, $k \in \mathbb{N}$ (види цртеж). Да ги разгледаме сите патишта од A до C кои имаат должина $m+n$. Докажи, дека бројот на таквите патишта кои поминуваат низ T е k пати поголем од оние кои поминуваат низ S.



Решение. Од условот на задачата следува дека n е бројот на хоризонталните и m е бројот на вертикалните придвижувања, при што важи $n = km$. Секој пат можеме да го кодираме со нули и единици, ставајќи 0 за хоризонтален чекор и 1 за вертикален чекор, па затоа вкупниот број на патишта од A до C кои имаат должина $m+n$ е еднаков на C_{m+n}^{n}. Аналогно, бројот на патиштата низ T е еднаков на C_{m+n-1}^{n-1}, а бројот на патиштата низ S е еднаков на C_{m+n-1}^{n}. Затоа $\frac{C_{m+n-1}^{n-1}}{C_{m+n-1}^{n}} = \frac{n}{m} = k$.

4. Еден град има мрежа од m „хоризонтални" и n „вертикални" улици, при што секои две соседни раскрсници се еднакво оддалечени. Определи ја најмалата должина која треба да се асфалтира така што од секоја раскрсница до секоја раскрсница може да се стигне по асфалтен пат.

Решение. Во градот има mn раскрсници. Делот од улицата меѓу две соседни раскрсници ќе го наречеме сокак. Ако тргнеме од една раскрсница, за да поминеме низ секоја од останатите раскрсници, движејќи се по асфалтен дел од мрежата, мора да асфалтираме најмалку $mn-1$ сокак (до секоја следна раскрсница стигнуваме по нов сокак). На цртежот е прикажана мрежа на која се асфалтирани $m(n-1)+m-1 = mn-1$ сокаци, при што секои две раскрсници се поврзани со асфалтен пат.



5. Во една држава постојат n, $n \geq 2$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека ако меѓу два града не постои директен пат, тогаш постои град со кој двата града се поврзани со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

Решение. Ќе докажеме дека во државата има најмалку $n-1$ пат.

Нека A е еден од градовите и нека од него поаѓаат k патишта. Ако $k = n-1$, тогаш нема што да се докажува. Нека $k < n-1$ и нека A е директно поврзан со градовите $A_1, A_2, ..., A_k$, а не е поврзан со градовите $A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_{n-1}$. Но, тогаш од секој од градовите $A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_{n-1}$ постои барем еден пат до некој од градовите $A_1, A_2, ..., A_k$. Според тоа, во државата има најмалку $k+(n-1-k) = n-1$ пат.

Понатаму, ако фиксен град се поврзе со директен пат со секој од останатите $n-1$ градови, добиваме мрежа од $n-1$ пат која ги задоволува условите на задачата.

6. Во една држава има $n, n \geq 4$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека ако меѓу два града не постои директен пат, тогаш постојат најмалку два града кои со секој од двата неповрзани градови се поврзани со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

Решение. Ќе докажеме дека во државата има најмалку $2n-4$ патишта.

Нека X е произволен град. Бројот на патиштата кои поаѓаат од градот X го нарекуваме степен на градот X. Јасно степенот на секој град е поголем или еднаков на 2. Можни се следниве случаи:

1) постои град со степен еднаков на 2,
2) не постои град со степен еднаков на 2, но постои град со степен еднаков на 3 и
3) степенот на секој град е поголем или еднаков на 4.

Одделно ќе го разгледаме секој од овие случаи.

1) Нека градот A е поврзан само со градовите B и C. Според условот на задачата, бидејќи секој друг град не е поврзан со A, тој мора да е поврзан со B и C. Значи, во земјата постојат најмалку $2(n-3)+2=2n-4$ патишта.
2) Нека градот A е поврзан само со градовите $B,C,$ и D. Ако A,B,C и D се единствени градови во државата, тогаш бидејќи сите имаат степен 3, во државата има $\frac{4\cdot3}{2}=6>4=2\cdot4-4$ патишта. Нека во државата постои град различен од градовите A,B,C и D. Според условот на задачата, бидејќи секој друг град не е поврзан со A тој мора да е поврзан со два од градовите $B,C,$ и D. Според тоа, во земјата постојат најмалку $2(n-4)+3=$ $2n-5$ патишта, при што се броени само патиштата од A кон $B,C,$ и D, и од другите градови кон $B,C,$ и D се броени само по два пата. Но степенот на градот кој е различен од градовите A,B,C и D е 3, па затоа во државата постојат најмалку $2n-5+1=2n-4$ патишта.
3) Во овој случај вкупниот број на патишта е поголем или еднаков на $\frac{4\cdot n}{2}=2n>2n-4$.

Останува уште да покажеме дека $2n-4$ патишта се доволни за бараниот вид поврзување. Ако фиксни два града A и B ги поврземе со секој друг град, тогаш ваквата мрежа од $2(n-2)=2n-4$ патишта ги задоволува условите на задачата.

7. Во една држава има $n, n \geq 4$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека за секои два града постои град кој со секој од двата града е поврзан со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

Решение. Ќе докажеме дека $n-1+[\frac{n}{2}]$ патишта се доволни за бараниот вид поврзување.

Нека $n=2k+1, k\geq 2$. Избираме град A и го поврзуваме со сите други градови. Останатите $2k$ градови ги делиме во k парови и ги поврзуваме градовите од секој пар. Ваквата патна мрежа има $3k=n-1+[\frac{n}{2}]$ патишта и ги задоволува условите на задачата.

Нека $n=2k, k\geq 2$. Избираме град A и го поврзуваме со сите други градови. Останатите $2k-1$ градови ги делиме во $k-2$ парови и една тројка градови B,C,D. Ги поврзуваме градовите од секој пар и го поврзуваме градот B со градовите C и D. Ваквата патна мрежа има $2k-1+k-2+2=\ n-1+[\frac{n}{2}]$ и ги задоволува условите на задачата.

Ќе докажеме дека се потребни најмалку $n-1+[\frac{n}{2}]$ патишта. Јасно, секој пат има степен (број на патишта кои што поаѓаат од него) поголем или еднаков на 2. Ако степенот на секој град е најмалку 3, тогаш бројот на патиштата е поголем или еднаков на $\frac{3n}{2}$. Бидејќи $n-1+[\frac{n}{2}]<n-1+\frac{n}{2}<\frac{3n}{2}$, следува дека се потребни најмалку $n-1+[\frac{n}{2}]$ патишта.

Нека постои град A со степен 2, кој е поврзан само со градовите B и C. За градовите A и B постои град кој е поврзан и со двата града, па како A е поврзан само уште со C, добиваме дека B и C се поврзани. Со M да го означиме множеството од преостанатите $n-3$ градови. За градот X од M и градот A постои град кој е поврзан и со X и со A, што значи дека X е поврзан со еден од градовите B или C. Значи, во државата има најмалку $3+n-3=n$ патишта, при што се броеви само патиштата меѓу градовите A,B,C и од градовите од M кон градовите B и C. Но степенот на секој град е најмалку 2, па затоа од секој град на множеството M поаѓа најмалку уште по еден пат, што значи дека во државата има најмалку уште $[\frac{n}{2}]-1$ патишта, што значи дека вкупниот број патишта е поголем или еднаков на $n-1+[\frac{n}{2}]$.

8. Некои парови на множество од n точки $A_1,A_2,...,A_n$ $(n\geq 4)$ се меѓусебно поврзани со отсечки, така што секоја точка е поврзана со барем три од дадените точки. Докажи дека постојат различни точки $X_1,X_2,...,X_{2k}\in\{A_1,A_2,...,A_n\}$ за некој $k\geq 2$ така што точките X_i и X_{i+1} се поврзани за секој $i\ (1\leq i\leq 2k)$ каде $X_{2k+1}=X_1$.

Решение. Да го разгледаме најдолгиот пат $Y_1Y_2...Y_m$ со меѓусебно различни точки $Y_i \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Заради максималноста на патот, точката Y_1 е поврзана само со точката Y_2 и некои Y_i, Y_j, каде $2 < i < j \le n$. Меѓу индексите $2, i, j$, два се со иста парност: да ги означиме со $k, l\ (k < l)$. Тогаш $Y_1 Y_k Y_{k+1} ... Y_l Y_1$ е кружен пат со парен број точки.

9. Некои од n градови се поврзани со авионски линии (сите линии се двонасочни). Постојат точно m линии. Нека d_i е бројот на линиите кои тргнуваат од градот i, за $i = 1, 2, ..., n$. Ако $1 \le d_i \le 2010$, за секој $i = 1, 2, ..., n$, докажи дека важи

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \le 4022m - 2010n.$$

Определи ги сите вредности на n за кои се достигнува знак за равенство.

Решение. Од условот на задачата следува $0 \le (d_i - 1)(2010 - d_i)$, за секој i, т.е. $d_i^2 \le 2011 d_i - 2010$. Ако ги собереме овие неравенства и искористиме дека $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \le 2011 \sum_{i=1}^{n} d_i - 2010n = 4022m - 2010n,$$

а знак за равенство важи ако и само ако $d_i \in \{1, 2010\}$ за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

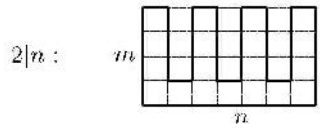
1) Нека $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Линии меѓу градовите i и j постојат ако и само ако $|j - i| = k$, тогаш важи $d_i = 1$, за секој i.

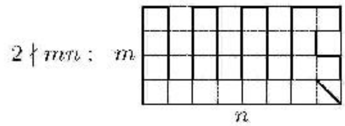
2) Нека $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$. Не може да важи $d_i = 1$ за секој i бидејќи тогаш ќе важи $2m = n = 2k - 1$. Затоа мора да важи $d_j = 2010$ за некој j. Оттука следува $n \ge 2011$. Од друга страна, ако воспоставиме авиолинии меѓу градовите 1 и $i\ (1 \le i \le 2010)$ и меѓу градовите $2i$ и $2i + 1$, за $1 = 1006, ..., k$ добиваме мрежа во која $d_1 = 2010$ и $d_i = 1, 2 \le i \le n$.

Според тоа, знак за равенство важи ако $2 \mid n$, или $2 \nmid n$ и $n \ge 2011$.

10. Човек се наоѓа во точката $(1,1)$ во координатната рамнина и сака да најде предмет кој се наоѓа во некоја точка (a, b), каде $a \in \{1, 2, ..., m\}$, $b \in \{1, 2, ..., n\}$ и после тоа да се врати во точката од која тргнал. Определи ја должината на најкраткиот пат кој треба да го помине за да ја заврши работата, ако човекот не знае во која од дадените точки се наоѓа предметот и може да се движи во произволен правец.

Решение. Човекот треба да ја посети секоја точка $(a,b), (1 \le a \le m, 1 \le b \le n)$, па затоа барем mn пати мора да помине пат со должина 1.





Ако, на пример, $2 \mid n$, човекот може тоа да го направи одејќи по пат со должина еднаква на mn (види цртеж).

Од друга страна, ако m и n се непарни, тогаш при секој премин во соседна точка се менува парноста на збирот на координатите на положбата. Бидејќи по непарен број чекори треба да се врати во почетната точка, заклучуваме дека барем во еден чекор треба да помине во некоја несоседна точка и така да помине пат со должина најмалку $\sqrt{2}$, па затоа вкупниот пат не е помал од $mn + \sqrt{2} - 1$ (види цртеж).

11. Во темето A на коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стои мравка. Мравката патува 2015 минути, при што секоја минута поминува преку раб до соседно теме. Нека m е бројот на патеките со кои мравката своето патување го завршува во темето B, а n е бројот на патеките со кои таа своето патување го завршува во темето C_1. Пресметај ја вредноста на изразот $m - n$.

Решение. Нека m_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во B. Поради симетрија овој број е еднаков на бројот на патеките и до D и до A_1. Нека n_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во C_1. Нека p_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во B_1. Поради симетрија тој број е еднаков на бројот на патеките и до C и до D_1. Нека q_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во A. Имаме

$$m_{k+1} = q_k + 2p_k,\ n_{k+1} = 3p_k,\ p_{k+1} = n_k + 2m_k,\ q_{k+1} = 3m_k .$$

Според тоа,

$$m_{k+1} - n_{k+1} = q_k + 2p_k - 3p_k = q_k - p_k \text{ и}$$
$$q_{k+1} - p_{k+1} = 3m_k - n_k - 2m_k = m_k - n_k ,$$

па затоа

$$m - n = m_{2015} - n_{2015} = q_{2014} - p_{2014} = m_{2013} - n_{2013} = \dots$$
$$= m_3 - n_3 = q_2 - p_2 = m_1 - n_1 = q_0 - p_0 = 1.$$

12. Секои два града во една држава се поврзани со еднонасочен пат така што не постои затворена маршрута. Дали е можно за поминувањето по секој пат да се наплатува патарина (за различните патишта патарините може да се

различни) така што за секои два града A и B патарина која се плаќа за секоја маршрута, која почнува во A и завршува во B, да биде една иста?

Решение. Ако од секој град излегува барем еден пат, тогаш тргнувајќи од произволен град ќе формираме затворена маршрута (бидејќи влегувајќи во еден град секогаш можеме да излеземе по некој пат). Според тоа, има град од кој не излегува ниту еден пат. Разгледувајќи ги останатите градови, со индукција добиваме, дека градовите може да се наредат во низа $A_1, A_2, ..., A_n$ при што патот меѓу секои два града е кон градот со поголем број. На патот $A_i A_j$, $i<j$ да ставиме патарина $j-i$. Тогаш секоја маршрута меѓу два града A_p и A_q за $p<q$ има цена $q-p$, што значи дека одговорот на поставеното прашање е позитивен.

13. Дадени се природни броеви M и N. Иван се наоѓа во точката $(0,N)$ и се движи со чекори до точката $(M,0)$, при што ги почитува следниве две правила:

1) Секој чекор е со должина 1 и е паралелен на некоја од координатните оски.
2) За секоја точка (x,y) на неговиот пат важи $x \geq 0, y \geq 0$.

При секој чекор тој го запишува растојанието до оската која е паралелна на тој чекор, при што ако чекорот го оддалечува од координатниот почеток, тој тоа растојание го запишува со позитивен знак, а во спротивен случај го запишува со негативен знак.

Докажи дека кога Иван ќе стигне во точката $(M,0)$, збирот на сите запишани броеви ќе биде еднаков на нула.

Решение. Нека Иван прави k чекори и на $i-$тиот чекор преминал од точката (x_{i-1}, y_{i-1}) во точката (x_i, y_i). Ако овој чекор е паралелен со $x-$оската, тогаш $y_i = y_{i-1}$ и запишаниот број е $y_{i-1}(x_i - x_{i-1})$. Ако чекорот е паралелен со $y-$оската, тогаш $x_i = x_{i-1}$ и запишаниот број е $x_i(y_i - y_{i-1})$. Според тоа, независно од насоката, бројот кој се запишува е еднаков на

$$y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_i(y_i - y_{i-1}).$$

Значи, збирот на сите запишани броеви е

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_i(y_i - y_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{k}(x_i y_i - x_{i-1}y_{i-1}) \\ &= x_k y_k - x_0 y_0 = M \cdot 0 - 0 \cdot N = 0.\end{aligned}$$

14. Во една земја има n градови, секои два града се поврзани со двонасочна железничка линија. Цените на билетите се еднакви во двете насоки за секои два града, но се различни за секоја линија, која директно поврзува два града.

Докажи, дека патник може да тргне од некој од градовите и последователно да патува по $n-1$ линија, плаќајќи за секое патување помалку, отколку за претходното. (Патникот има право да минува низ еден ист град повеќе пати.)

Решение. Возот кој директно поврзува два града ќе го наречеме експрес. Да ги пуштиме експреси меѓу градовите еден по друг според цената на билетите за соодветните линии во растечки редослед, т.е. прво да го пуштиме најевтиниот експрес, вториот е најефтин од останатите итн. Во секој момент во секој град ќе го запишуваме максималниот број на експресите, со кои може да се патува последователно, почнувајќи од тој град, така да цените на патувањата монотоно се намалуваат.

Во почетниот момент сите броеви во градовите се еднакви на нула. Да разгледаме дадем момент во кој пуштаме нов експрес, кој ги соединува градовите A и B, во кои точно пред тоа соодветно биле запишани броевите a и b. По пуштањето на новиот експрес во A ќе се појави број кој не е помал од $b+1$ (бидејќи новиот експрес е поскап од сите досегашни и тогаш со него можеме да отидеме од A до B, а оттаму имаме маршрута со саканото својство со должина b). Аналогно, во B ќе биде запишан број кој не е помал од $a+1$. Тогаш збирот на броевите во A и B ќе се зголеми барем за 2, а броевите во останатите градови нема да се намалат. Според тоа, збирот на сите запишани броеви ќе се зголемува барем за 2.

Да ја разгледаме финалната ситуација, кога се пуштени сите $\frac{n(n-1)}{2}$ експреси. Тогаш збирот на броевите во градовите ќе биде барем $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$. Според тоа, барем во еден град ќе биде запишан број кој не е помал од $n-1$, што значи дека бараната маршрута за патникот постои.

15. Нека n е природен број и S_n е множеството точки со целобројни координати (x,y) такви што

$$|x|+|y+\tfrac{1}{2}|<n\,.$$

Низата различни точки $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_l,y_l)$ од S_n ја нарекуваме пат ако за $i=2,3,...,l$ растојанието меѓу точките (x_i,y_i) и (x_{i-1},y_{i-1}) е еднакво на 1, т.е. точките (x_i,y_i) и (x_{i-1},y_{i-1}) се соседни во целобројната решетка. Докажи дека точките на S_n не може да се разбијат на помалку од n патишта (разбивање на S_n на m патишта е множество P од m непразни патишта при што секоја точка од S_n се користи точно еднаш во патиштата од P).

Решение. Точките од S_n да ги обоиме со црна и бела боја на следниов начин:

- ако $y \geq 0$, тогаш точката (x, y) ја боиме во бело ако $x + y - n$ е парен број, а во црно ако $x + y - n$ е непарен број,
- ако $y < 0$, тогаш точката (x, y) ја боиме во бело ако $x + y - n$ е непарен број, а во црно ако $x + y - n$ е парен број.

Парот последователни црни точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i) во даден пат ќе го нарекуваме *црн пар*. Нека претпоставиме, дека S_n е разбиен на m патишта и нека k е бројот на црните парови во сите патишта. Бидејќи во множеството S_n имаме точно n црни парови (тоа се паровите $(x,0)$ и $(x,-1)$, за $x = -n+1, -n+3, ..., n-3, n-1$), заклучуваме дека $k \leq n$.

Да ги поделиме сите патишта низ црните парови. Добиваме разбивање на S_n на $k+m$ патишта. Во секој од овие патишта има најмногу по една црна точка повеќе од белите точки. Според тоа, вкупниот број на црни точки е поголем од вкупниот број на бели точки за најмногу $k+m$. Од друга страна, во направеното боење има $2n$ повеќе црни од бели точки (во секој ред на S_n има точно по една црна точка повеќе). Според тоа, $2n \leq k+m$ и бидејќи $k \leq n$ добиваме $2n \leq k+m \leq n+m$, па затоа $n \leq m$.

16. Во едно кралство има N градови при што некои парови градови се поврзани со двонасочни патишта кои не се сечат (градовите од таков пар ги нарекуваме соседни). Познато е дека од секој град може да се стигне до секој друг град, но не е можно, тргнувајќи од некој град и движејќи се по различни патишта, да се вратиме во тој град.

Во секој град кралот имал свој наместник. Кралот наредил реформа во која: секој од $N-$те наместници на градовите станал наместник во некој од градовите, при што секои два наместници кои биле во соседни градови пред реформата биле во соседни градови и по реформата. Докажи дека или во некој град по реформата не се променил наместникот, или некој пар соседни градови си ги замениле наместниците.

Решение. Ќе користиме индукција по N. Тврдењето е очигледно за $N=1$ и $N=2$. Нека Γ_1 е множеството градови од кои излегува еден пат, а Γ е множеството од преостанатите градови. Знаеме дека, дека одејќи по различни патишта од некој град (ако е можно), не можеме да стигнеме два пати во еден ист град и така некогаш ќе стигнеме до град од Γ_1. Тоа покажува дека множеството Γ_1 не е празно. Според тоа, кога $N \geq 3$ множеството Γ не е празно и има помалку од N елементи.

Да го наречеме значајност на даден наместник бројот на соседните градови на неговиот град. Според условот значајноста на даден наместник не се намалува по реформата. Во случајов, наместник на град од Γ, по реформата повторно е наместник на град од Γ, т.е. како резултат од реформата градовите од Γ си ги размениле наместниците. Јасно е дека од секој град $A \in \Gamma$ може да се стигне до секој друг град $B \in \Gamma$, без да се минува низ град од Γ_1.

Според тоа, множеството од градовите Γ и реформата разгледана само на нив ги задоволува условите на задачата. Останува да ја примениме идуктивната претпоставка.

17. Во државата Северна Баксузија има 100 градови, некои од кои се поврзани со патишта така што од секој град може да се стигне до секој друг град. Во земјата има вкупно 1000 патишта. Владата на Северна Баксузија има намера некои од патиштата (може и сите) да ги затвори така што од секој град тргнуваат парен број патишта (и нулата е парен број). На колку начини владата тоа може да го направи?

Решение. Ќе дозволиме патишта кои некој град го поврзуваат сам со себе, како и парови градови кои се поврзани повеќе од еднаш. Да разгледаме пат s кој ги поврзува градовите A и B. Да замислиме држава Јужна Баксузија со 99 градови и 999 патишта, која од Северна се разликува само во тоа што градовите A и B се споени во еден, а патот s исчезнал (сите останати патишта се сочувани). Да претпоставиме дека Јужна Баксузија, следејќи ја Северна, има намера да реализира ист таков план. Доволно е да го искористи планот на Северна Баксузија, бришејќи ги сите споменувања на планот s. Од друга страна, секој план на Северна Баксузија може да се добие од планот на Јужна Баксузија, со евентуален додаток на патот s се со цел за да од A и B излегуваат парни броеви патишта. На овој начин имаме биекција меѓу плановите на Северна и Јужна Баксузија.

Од претходните разгледувања следува дека со спојување на два града во еден бројот на можни планови не се менува. Да ја примениме операцијата спојување на два града во еден 99 пати. Ни останува еден град кој е поврзан сам со себе со помош на 901 пат. Било кое подмножество патишта да укинеме автоматски ќе важи условот за парност на патиштата. Според тоа, во овој случај, а со самото тоа и во почетниот случај бројот на можните планови е 2^{901}.

18. Во една држава има повеќе од 7 градови. Докажи, дека не постои мрежа од еднонасочни патишта со следниве својства:

1) меѓу секои два града постои точно еден директен пат,
2) за секои два града A и B постои точно еден град во кој директно може да се стигне и од A и од B,
3) за секои два града A и B постои точно еден град од кој директно може да се стигне и во A и во B.

Решение. Нека претпоставиме дека меѓу градвите $A_1, A_2, ..., A_n, (n > 7)$ постои мрежа еднонасочни патишта таква што се исполенти условите 1), 2) и 3). Да го означиме со A_iA_j патот со почеток во A_i и крај во A_j, а множеството од сите патишта со P. За секој $k \in \{1,2,...,n\}$ нека

$$B_k = \{A_i \mid A_kA_i \in P\} \text{ и } C_k = \{A_j \mid A_jA_k \in P\}.$$

Ако за некој i важи $A_i \in B_k$, тогаш од условот 3) следува дека постои точно еден град A_j таков што $A_jA_i \in P$ и $A_jA_k \in P$, па за A_j важи $A_j \in C_k$. Според тоа, $|B_k| \leq |C_k|$. На сличен начи, користејќи го условот 2) се докажува дека $|B_k| \geq |C_k|$. Според тоа, за секој $k \in \{1,2,...,n\}$ важи $|B_k| = |C_k|$. Од условот 1) следува дека $n = 1 + |B_k| + |C_k| = 1 + 2|B_k|$, т.е. n е непарен број. Ставме $n = 2r+1, |B_k| = |C_k| = r$.

Нека

$$P_k = \{(i,j) \mid i < j, A_kA_i \in P, \ A_kA_j \in P\}.$$

Од условот 3) следува дека за секој пар $(i,j), i < j$ постои точно еден број $k \in \{1,2,...,n\}$ таков што важи $(i,j) \in P_k$. Значи, множествата $P_1, P_2, ..., P_{2r+1}$ се дисјунктни по парови и според 1) важи

$$|P| = |P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{2r+1}| = |P_1| + |P_2| + ... + |P_{2r+1}|.$$

Бидејќи $|B_k| = r$, т.е. од градот A_k може директно да се стигне во r други градови добиваме $|P_k| = \binom{r}{2}$. Но, $|P| = \binom{2r+1}{2}$, па затоа

$$\binom{2r+1}{2} = |P| = |P_1| + |P_2| + ... + |P_{2r+1}| = (2r+1)\binom{r}{2},$$

од каде наоѓаме $r = 3$, т.е. $n = 7$, што противречи на претпоставката.

За држава со 7 градови може да се конструира мрежа која ги задоволува условите на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

19. Нека q е позитивен рационален број. Две мравки на почетокот се наоѓаат во иста точка X во рамнината. Во $n-$тата минута $(n = 1,2,...)$ секоја од нив избира дали ќе се движи на север, исток, југ или запад, и притоа минува растојание од q^n метри. По цел број минути тие повторно се наоѓаат во иста точка во рамнината (не задолжително во точката X), а дотогаш изминатите патеки не им се потполно идентични. Определи ги сите можни вредности на бројот q.

Решение. Со a_n да го означиме збирот на x и y координатата на првата мравка, а со b_n збирот на координатите на втората мравка по n минути. Од условот на задачата следува $|a_n - a_{n-1}| = |b_n - b_{n-1}| = q^n$, па затоа

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} £_i q^i \text{ и } b_n = \sum_{i=1}^{n} ¦_i q^i$$

за некои коефициенти $£_i, ¦_i \in \{-1,1\}$. Ако мравките се сретнале по n минути, тогаш

$$0 = \frac{a_n - b_n}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{£_i - ¦_i}{2} q^i = P(q)$$

при што коефициентите $\frac{£_i - ¦_i}{2}$ на полиномот $P(q)$ се целобројни и припаѓаат на множеството $\{-1,0,1\}$. Според тоа, ако $q = \frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{N}$, тогаш $a|1, b|1$ и затоа $q=1$. Вредноста $q=1$ очигледно е можна, на пример, ако првата мравка оди на исток па на запад, а втората на север па на југ.

Втор начин. Ги разгледуваме позициите на мравките $\sim_k$ и $\ _k$ по k чекори во комплексната рамнина, сметајќи дека појдовната точка е координатниот почеток и дека чекорите се паралелни на координатните оски. Знаеме дека $\sim_k - \sim_{k-1} = a_k q^k$ и $\ _k - \ _{k-1} = b_k q^k$, каде $a_k, b_k \in \{1,-1,i,-i\}$. Ако $\sim_n = \ \ n$ за некој $n > 0$, тогаш

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) q^k = 0 \text{, каде } a_k - b_k \in \{0, \pm 1 \pm i, \pm 2 \pm 2i\}.$$

Да забележиме дека коефициентот $a_k - b_k$ секогаш е делив со $1+i$ во прстенот $\mathbb{Z}[i]$. Навистина

$$c_k = \frac{a_k - b_k}{1+i} \in \{0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}.$$

Со скратување со $1+i$ добиваме $\sum_{k=1}^{n} c_k q^k = 0$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c_1, c_n \neq 0$. Ако сега $q = \frac{a}{b}, (a,b \in \mathbb{N})$, тогаш $a | c_1$ и $b | c_n$ во $\mathbb{Z}[i]$, што е можно само за $a = b = 1$. Според тоа, $q = 1$.

27. ПОЗНАНСТВА

1. Во група од $2n+1$ луѓе ($n\in\mathbb{N}$), за секои n луѓе постои еден од човек од преостанатите луѓе кој сите ги познава. Докажи дека во групата постои човек кој ги познава сите членови на групата. (Познанството е симетрична релација.)

Решение. Да разгледаме максимална група G на луѓе кои меѓусебно се познаваат. Ако G содржи помалку од $n+1$ човек, тогаш постои човек x кој сите ги познава, па G може да се зголеми со човекот x, што противречи на претпоставката дека G е максимална. Според тоа, најмалку $n+1$ човек припаѓа на групата G.

Надвор од G има најмногу n луѓе, па постои човек y од G кој ги познава сите овие луѓе. Овој човек y е во G, па затоа тој ги познава и сите луѓе кои се во G. Значи, y ги познава сите луѓе во групата.

2. Докажи, дека во произволна група луѓе постојат најмалку двајца кои меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници. Познанството е симетрична релација, т.е. ако A го познава B, тогаш B го познава A.

Решение. Нека $S=\{a_1,...,a_n\}$ е множество од n луѓе. За секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$ со A_i да го означиме подмножеството од S составено од оние луѓе ои имаат i познаници. Ако постои човек кој нема ниту еден познаник, тогаш не постои човек кој има $n-1$ познаник, што значи дека ако $A_0\neq\varnothing$, тогаш $A_{n-1}=\varnothing$. Точно е и обратното тврдење, т.е. ако $A_{n-1}\neq\varnothing$, тогаш $A_0=\varnothing$. Според тоа, најмногу $n-1$ од множествата A_i, $i=0,1,...,n-1$ се непразни. Но, $|S|=n$, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку едно од тие множества има барем два члена од S, што значи дека најмалку двајца меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници.

3. На еден натпревар секој натпреварувач има најмногу тројца познаници (познанството е симетрична релација). Докажи дека е можно натпреварувачите да се распоредат во две простории така да секој натпреварувач има најмногу еден познаник во просторијата во која е сместен.

Решение. Произволно да ги распоредиме натпреварувачите во две простории. Со S_1 да го означиме вкупниот број познанства во првата просторија, а со S_2 да го означиме вкупниот број познанства во втората просторија. Нека

$S = S_1 + S_2$ (доколку два натпреварувачи рапоредени во иста просторија се познаници, тоа познанство го броиме еднаш). Тогаш S е природен број. Да претпоставиме дека ваквиот распоред не е задоволителен, т.е. дека постои натпреварувач A така што во неговата просторија има барем двајца негови познаници B и C. Го префрламе A во другата просторија; да забележиме дека со ова вредноста на S се намалува најмалку за 1. Во другата просторија A има најмногу еден познаник. Според тоа, едниот од броевите S_1 и S_2 се намалил најмалку за два, а другиот се зголемил најмногу за 1, па затоа S се намалил најмалку за 1. Постапката ја продолжуваме се додека моменталниот распоред не е поволен. Бидејќи S е природен број, можни се само конечно многу вакви префрлања, по кои ќе стигнеме до поволен распоред, т.е. распоред во кој натпреварувачите се распоредени во две простории така што секој натпреварувач има најмногу еден познаник во просторијата во која се наоѓа.

4. Секој жител од градовите A, B, C познава најмногу еден од жителите на друг град. Ако
   1) бројот на жителите на градот A е еднаков на 6000,
   2) бројот на жителите на градот B кои имаат познаници во градот C е помал или еднаков на 2000, и
   3) во градовите B и C повеќе од половината жители немаат познаници во градот A,

   докажи дека вкупниот број жители во градовите A, B и C кои немаат познаници во други градови е поголем од 1999.

   Решение. Нека r е бројот на жителите во градовите A, B, C кои немаат познаници во други градови. Со k_A, k_B, k_C да ги означиме бројот на жители во градот A, B, C, соодветно, со k_{AB} бројот на жителите од градот A кои имаат познаници во градот B, k_{BC} и k_{AC} го имаат истото значење и k_{ABC} нека е бројот на жителите од градот A кои имаат познаници во градовите B и C. Тогаш

$$r = k_A + k_B + k_C - 2k_{AB} - 2k_{BC} - 2k_{AC} + 3k_{ABC}$$
$$\geq (k_A - 2k_{BC}) + (k_B - 2k_{AB}) + (k_C - 2k_{AC}).$$

   Од условот на задачата следува

$$k_A = 6000, \quad k_{BC} \leq 2000, \quad k_B - 2k_{AB} \geq 0, \quad k_C - 2k_{AC} \geq 0,$$

   па затоа

$$r \geq (k_A - 2k_{BC}) + (k_B - 2k_{AB}) + (k_C - 2k_{AC}) \geq 6000 - 2 \cdot 2000 > 1999.$$

5. Нека $N = mn - n + 1$, каде $m \geq 3$ и $n \geq 2$ се природни броеви. Докажи, дека ако во група од N лица меѓу секои m постојат две лица кои се познаваат,

тогаш постои лице кое познава барем n од преостанатите членови на групата. Дали тврдењето е точно за $N < mn-n+1$?

Решение. Од дадените N лица да избереме подгрупа со максимален број лица така што во подгрупата не постојат две лица кои се познаваат. Јасно, ако во групата има l лица, тогаш $l \leq m-1$. Освен тоа, од максималноста на l следува дека со додавање на било кој од преостанатите членови на групата, ќе имаме барем едно познанство. Според тоа, секое од преостанатите $N-l$ лица познава најмалку едно од избраните l лица. Тогаш некое од избраните l лица ќе има најмалку $\frac{N-l}{l}$ познати. Бидејќи

$$\frac{N-l}{l} = \frac{N}{l} - 1 \geq \frac{N}{m-1} - 1 = n + \frac{1}{m-1} - 1 > n-1,$$

постои лице со најмалку n познати.

Нека $N = mn - n = (m-1)n$ и да разгледаме $m-1$ групи од по n лица, такви што секои две лица од секоја група се познаваат и нема познати од различни групи. Тогаш меѓу секои m лица има двајца кои припаѓаат на иста група, т.е. двајца кои се познаваат. Од друга страна секој познава точно $n-1$ лице. Според тоа, тврдењето не е точно ако $N < mn-n+1$.

6. На устен испит учествуваат 100 студенти. Секој студент го испитува еден од 25 професори. Секој студент подкупил најмногу 15 професори. Докажи дека може да се направи распоред на испрашувања така што ниту еден студент нема да одговара кај професор кој го подкупил, а притоа ниту еден професор нема да испрашува повеќе од 10 студенти.

Решение. Со индукција по k го докажуваме следното тврдење: Ако има n студенти и m професори, при што секој студент заборавил да подкупи најмалку k професори, тогаш може да се направи распоред така што секој студент ќе одговара кај професор кој не го поткупил, а секој професор испрашува најмногу $[\frac{n}{k}]$ студенти.

За $k=1$ тврдењето е тривијално. Нека $k>1$. Ако секој професор има најмногу $[\frac{n}{k}]$ студенти кои не го поткупиле, тогаш произволен распоред на испитувачите ги задоволува условите. Нека претпоставиме дека некој професор има повеќе од $[\frac{n}{k}]$ студенти кои смее да ги испрашува и да му ги доделиме било кои $[\frac{n}{k}]$ од нив. Ни останувaат $n-[\frac{n}{k}]$ студенти и $m-1$ професор. Според индуктивната претпоставка за нив може да се направи соодветен распоред во кој ниту еден професор нема да испрашува повеќе од

$$[(n-[\tfrac{n}{k}])/k] \leq [\tfrac{n}{k}]$$

студенти, со доказот е завршен.

7. Докажи дека во множество од $\binom{2n}{n}$ луѓе, $n \in \mathbb{N}$, може да се најдат $n+1$ луѓе кои меѓусебно сите се познават или $n+1$ луѓе кои меѓусебно сите не се познаваат.

Решение. Ќе докажеме поопшто тврдење: Во множество од $\binom{p+q}{q}$ луѓе, $p,q \in \mathbb{N}$, може да се најдат $p+1$ луѓе кои сите меѓусебно се познаваат или $q+1$ луѓе кои сите меѓусебно не се познаваат. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $p+q$.

Ако $p+q=2$, тогаш $p=q=1$, па тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека имаме $\binom{p+q}{q}$ луѓе. Да избереме произволен човек A. Можни се следниве случаи:

1) Ако A познава $\binom{(p-1)+q}{p-1}$ луѓе, тогаш од индуктивната претпоставка следува дека меѓу познаниците на A може да се најдат p кои сите меѓусебно се познаваат и кои заедно со A се бараните $p+1$ луѓе кои сите меѓусебно се познаваат, или $q+1$ луѓе кои сите меѓусебно не се познаваат.
2) Ако A не познава барем $\binom{p+(q-1)}{p}$ луѓе, тогаш од индуктивната претпоставка следува дека меѓу луѓето кои не го познават A може да се најдат $p+1$ луѓе кои сите меѓусебно не се познаваат или q луѓе кои сите меѓусебно не се познаваат, па овие луѓе заедно со A се $q+1$ луѓе кои сите меѓусебно не се познаваат.
3) Случајот кога A познава најмногу $\binom{(p-1)+q}{p-1}-1$ луѓе и не познава најмногу $\binom{p+(q-1)}{p}-1$ луѓе не е можен, бидејќи

$$\binom{(p-1)+q}{p-1}-1+\binom{p+(q-1)}{p}-1=\binom{p+q}{p}-2<\binom{p+q}{p}-1 .$$

8. Определи го најмалиот број $n \geq 5$ за кој постои група од n лица, така што секои две лица кои се познаваат немаат заеднички познаник, а секои две лица кои не се познаваат имаат точно два заеднички познаници. (Ако $A \neq B$ и A го познава B, тогаш и B го познава A.)

Решение. Нека A е фиксиран член на групата и $A_1, A_2, ..., A_r$ се познаниците на A. Тогаш од условот на задачата следува дека меѓу лицата $A_1, A_2, ..., A_r$ не постојат двајца кои се познаваат и за секои две лица A_i и A_j, $1 \leq i < j \leq r$ постои точно едно лице $A_{ij} \neq A$ кое се познава со двајцата. Освен тоа, не постојат две од лицата A_{ij} кои се познаваат меѓу себе, бидејќи во спротивно ќе има член на групата кој има барем три заеднички познаници со A.

Множеството членови A_{ij} , $1 \le i < j \le r$ всушност е множеството од оние лица кои не го познаваат A. Според тоа, $n = 1 + r + \binom{r}{2}$, од каде наоѓаме $r = \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}$. Добиениот израз за r не зависи од изборот на A, што значи дека сите членови на групата имаат еднакв број познаници.

Од условот $n \ge 5$ следува $r \ge 3$. Уште повеќе, бидејќи познаниците на $A_{1,2}$ се A_1, A_2 и уште $r-2$ членови на множеството $\{A_{ij} \mid 3 \le i < j \le r\}$ треба да биде исполнето неравенството $r-2 < \binom{r-2}{2}$, па затоа $r \ge 5$ и $n \ge 16$.

Ќе дадеме пример на група од 16 лица $A, A_1, A_2, ..., A_5, A_{1,2}, A_{1,3}, ..., A_{4,5}$ во која познанствата се меѓу следниве парови

1) $(A, A_i), i = 1, 2, ..., 5$

2) (A_i, A_{ij}) , $(A_j, A_{ij}), 1 \le i < j \le 5$,

3) $(A_{ij}, A_{km}), 1 \le i < j \le 5, 1 \le k < m \le 5, \{i, j\} \cap \{k, m\} = \varnothing$.

Лесно се проверува дека оваа група ги има саканите својства, па затоа најмалиот број е 16.

9. Во група од n лица постојат тројца познаници, секој од кои се познава со повеќе од половината членови на групата. Определи го најмалиот број тројки познаници во оваа група?

Решение. Тројцата познаници да ги означиме со A, B и C .

Нека $n = 2k+1$. Во тој случај секој од A, B и C има барем $k+1$ познаник, т.е. $k-1$ од кои не се A, B или C. Со T да го означиме множеството од сите лица од групата без A, B и C и нека a_i, $i = 0,1,2,3$ е бројот на лицата од T кои имаат точно по i познаници меѓу A, B и C. Тогаш $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ е бројот на сите членови на T, т.е. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2k-2$. Од друга страна $a_1 + 2a_2 + 3a_3$ е бројот на познаниците на A, B и C, т.е.

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 \ge 3k-3 .$$

Оттука следува

$$3k-3 \le a_1 + 2a_2 + 3a_3 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + a_2 + 2a_3 = 2k-2 + a_2 + 2a_3$$

па затоа $a_2 + 2a_3 \ge k-1$. Бидејќи секој познаник со двајцата од A, B и C формира тројка познаници, а секој познат со тројцата формира три тројки познаници, добиваме дека бројот на тројките познаници е најмалку

$$1 + a_2 + 3a_3 > a_2 + 2a_3 \ge k-1 ,$$

што значи дека бројот на тројките познаници не е помал од k. Останува да дадеме пример во кој бројот на тројките познаници е точно k. Нека во T не постојат две лица кои се познаваат. Ако A познава точно $k-1$ лице од T ,

B ги познава останатите $k-1$ лице од T, а C познава било кои $k-1$ лица од T, тогаш само познаниците на C влегуваат во тројки познаници и вкупниот број на тројки е k.

Нека $n=2k$. Како и во случај кога n е непарен број, добиваме дека бројот на тројките познаници е најмалку $k+1$. Ако A и B имаат само еден заеднички познаник во T (тоа е можно бидејќи $|T|=2k-3$, а познаниците на A и B се по $k-1$), кој не е меѓу познаниците на C, тогаш имаме точно $k+1$ тројки познаници.

10. На математички натпревар некои ученици се пријатели; ако *A* е пријател со *B*, тогаш и *B* е пријател со *A*. Група ученици се нарекува дружина ако секои два ученика во таа групи се пријатели. (Специјално, секоја група со помалку од два ученика е дружина.) Бројот на учениците во една дружина се нарекува големина на дружината.

На овој натпревар максималната големина на дружина е парен број. Докажи, дека учениците може да се распоредат во две соби, така што максималната големина на дружине во едната соба е еднаква на максималната големина на дружина во другата соба.

Решение. На почетокот да ги сместиме сите ученици на една дружина со максимална големина $2n$ во соба *X*. Овие ученици да ги наречеме *П*–ученици. Преостанатите ученици ги сместуваме во соба *Y*. Нека се $d(X)$ и $d(Y)$ максималните големини на дружините во собите *X* и *Y* во дадениот момент, соодветно. Со префрлање на еден ученик од собата *X* во собата *Y* големината $d(X)$ се намалува за 1, а $d(Y)$ не се не менува или се зголемува за 1, па затоа разликата $d(X)-d(Y)$ се намалува за 1 или 2. Со повторување на оваа постапка можеме да постигнеме оваа разлика да биде 0 (со што тврдењето на задачата е докажано) или -1 (т.е. $d(Y)=d(X)+1$).

Во натамошните разгледувања ќе земеме дека $d(X)=l$ и $d(Y)=l+1$. Ги разликуваме следниве случаи:

1) Ако во собата *Y* постои *П*–ученик кој не припаѓа на некоја од дружините во *Y* со големина $l+1$, тогаш по неговото префрлање во собата X останува $d(Y)=l+1$, но бројот $d(X)$ се зголемува за 1, со што се постигнува $d(X)=d(Y)$.

2) Нека претпоставиме дека секој од $2n-l$ *П*–ученици во *Y* припаѓа на сите дружини во *Y* со големина $l+1$. Тогаш произволна дружина со големина $l+1$ во собата *Y* содржи $2n-l$ *П*–ученици и

$$0 \le l+1-(2n-l)=2(n-l)+1$$

ученици кои не се *П*–ученици (да ги наречеме не-*П*–ученици). Бидејќи $2(n-l)+1 \neq 0$, во секоја дружина со големина $l+1$ во *Y* постои не-*П*–ученик.

Сега да избереме некоја дружина во Y со големина $l+1$ и да префрлиме еден не-$П$–ученик од неа во X. Оваа постапка ја повторуваме се додека постојат дружини со големина $l+1$ во Y (нив ги има конечно многу). Бидејќи $d(Y)$ при секој ваков потег не се менува или се намалува за 1, во еден момент ќе важи $d(Y)=l$. Доволно е да докажеме дека по оваа постапка останува $d(X)=l$.

Навистина, ако претпоставиме дека во X се формирала дружина со големина $l+1$, тогаш сите ученици на таа дружине ги познаваат сите $2n-l$ $П$–ученици во Y (бидејќи сите се или $П$–ученици, или се префрлени од Y каде биле во дружина со овие $2n-l$ ученици), па нивната унија со овие $2n-l$ ученици формира дружина со големина

$$(l+1)+(2n-l)=2n+1>2n,$$

што не е можно.

Конечно, од претходните разгледувања следува точноста на тврдењето на задачата.

11. Во една група ученици се исполнети следниве услови:

- секој ученик познава најмногу N други ученици и
- за секој $k\in\{1,2,...,N\}$ бројот на учениците кои имаат k познаници е еднаков на k.

Определи ги сите можни вредности на N. (Познанството е симетрична релација, ако A го познава B, тогаш B го познава A.)

Решение. Бидејќи постои еден ученик кој има едно познанство, два ученика со две познанства итн. N ученици со N познанства, заклучуваме дека во групата има $1+2+...+N=\frac{N(N+1)}{2}$ ученици. Понатаму, $1^2+2^2+...+N^2$ е парен број, бидејќи во овој број секое познанство се брои двапати (за секој пар познаници по еднаш за секој ученик). Според тоа, бројот $\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ е парен, па затоа бројот $N(N+1)$ е делив со 4. Но, броевите N и $N+1$ се заемно прости, па затоа $N=4q, q\geq 1$ или $N=4q+3, q\geq 0$.

Ќе докажеме дека и во двата случаја постои група ученици кои ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $N=4q, q\geq 1$ и нека S е група од $\frac{N(N+1)}{2}$ ученици кои меѓусебно не се познаваат. Бидејќи $1+2+...+N=\frac{N(N+1)}{2}$, учениците можеме да ги поделиме во N групи $S_i, i=1,2,...,N$ така што групата S_i има i ученици, $i=1,2,...,N$. Сите ученици кои се во иста група ги запознаваме меѓусебно. На овој начин за секој $i=1,2,...,N$ имаме група S_i од i ученици секој од кои има по $i-1$ познаници. Останува секој ученик да се запознае со точно еден ученик. Учениците ги делиме во две групи R_1 и R_2 на следниов начин:

$$R_1=(S_1\cup S_2\cup...\cup S_q)\cup(S_{3q+1}\cup S_{3q+2}\cup...\cup S_{4q})$$
$$R_2=(S_{q+1}\cup S_{q+2}\cup...\cup S_{2q})\cup(S_{2q+1}\cup S_{2q+2}\cup...\cup S_{3q}).$$

Бројот на учениците во групата R_2 е еднаков на $\frac{2q(3q+1)}{2}=\frac{N(N+1)}{4}$, што значи дека тој е еднаков на бројот на учениците во групата R_1. Сега секој ученик од групата R_1 го запознаваме со различен ученик од групата R_2, со што секој ученик добива точно уште по едно познанство.

Нека $N=4q+3, q\geq 0$ и S е група од $\frac{N(N+1)}{2}$ кои меѓусебно не се познаваат. Постапуваме како во претходниот случај со тоа што групите R_1 и R_2 се дефинираат со:

$$R_1=(S_1\cup S_2)\cup(S_4\cup S_5\cup...\cup S_{q+3})\cup(S_{3q+4}\cup S_{3q+5}\cup...\cup S_{4q+3})$$
$$R_2=S_3\cup(S_{q+4}\cup S_{q+5}\cup...\cup S_{2q+3})\cup(S_{2q+4}\cup S_{2q+5}\cup...\cup S_{3q+3}).$$

12. За едно друштво луѓе ќе велиме дека е *добро*, ако неговите членови може да се распоредат во неколку соби така што во секоја соба не постојат двајца кои се познаваат, но да е можно да се избере по еден човек од секоја соба така што секои двајца од избраните се познаваат. Едно друштво луѓе се нарекува *совршено*, ако секое непразно множество од негови членови е добро друштво.

Едно совршено друштво имало забава. Еден член на друштвото, Васко, го довел својот другар Павле, кој не е од тоа друштво, и го запознал со сите свои познати. Докажи дека новото друштво исто така е совршено.

Решение. За едно распоредување по соби на луѓето од друштвото ќе велиме дека е правилно, ако го задоволува условот за добро друштво, т.е. никои двајца од иста соба не се познаваат и може да се избере по еден човек од секоја соба така што секои двајца од избраните се познаваат.

Ќе докажеме дека бројот на собите во правилно распоредување е константен и тој е еднаков на бројот на најголемата група познаници. Нека најголемата група познаници има n членови. Тогаш се потребни најмалку n соби, за да нема двајца познаници во иста соба. Од друга страна, ако бројот на собите е поголем од n, тогаш од условот следува дека можеме да избереме група која повеќе од n познаници, што е противречност. Според тоа, бројот на собите е точно n.

Се разбира, во друштвото може да има неколку групи познаници со максимален број членови, но при правилно распоредување во секоја соба мора да има точно по еден член од секоја максимална група познаници.

Ќе докажеме дека друштвото останува добро и откако Павле ќе пристапи на друштвото. Нека имаме правилно распоредување во n соби на оригиналното друштво. Ќе разгледаме два случаја.
Случај 1. Васко припаѓа на група која има максимален број од n познаници. Тогаш Павле се запознава со сите членови на групата и во новото друштво групата со најголем број познаници брои $n+1$ човек. Сега едно правилно распоредување е Павле да се смести сам во соба, а сите други да останат во собите во кои претходно биле распоредени.
Случај 2. Васко не припаѓа на група која има максимален број од n познаници. Да го отстраниме времено од друштвото Павле и сите кои се во една соба со Васко (без самиот тој). Тогаш секоја максимална група губи по еден член и во новото друштво максималната група има $n-1$ членови. Бидејќи оригиналното друштво е совршено, за новото друштво постои правилно распоредување (се разбира во $n-1$ соба). Сега додаваме нова соба во која ќе ги сместиме сите времено отстранети (Павле и тие од собата на Васко). Новото распоредување во n соби е правилно. Навистина во старите $n-1$ соба се е во ред, а во новата соба Павле не познава никого (бидејќи таму сите се непознати за Васко), а никои двајца од другите не се познаваат, бидејќи пред тоа биле во иста соба со Васко. На крајот, секоја максимална група има n членови и тие се распоредени по еден во секоја од $n-$те соби (во спротивно имаме противречност со правилното распоредување во $n-1$ соба или со состојбата во собата на Павле).
Останува да докажеме дека секое подмножество на ннвото друштво исто така е добро друштво. Ако тое е подмножество од оригиналното друштво, тогаш нема што да докажуваме. Ако Павле е во тоа друштво, а Васко не е, можеме да замислиме дека тие ги замениле местата и како познанствата не се појавуваат и не исчезнуваат, исто така имаме ситуација како подменожество од оригиналното друштво.
На крајот, а Васко и Павле се во подмножеството, тогаш времено го отстрануваме Павле и добиваме совршено друштво. Сега го додаваме Павле кон тоа друштво и можеме да ги повториме размислувањата како погоре.
Забелешка. Случајот 2 може да се докаже на следниов начин. Бидејќи Васко не припаѓа на група која има максимален број познаници, неговата група има најмногу $n-1$ членови кои се распоредени во n соби. Од принципот на Дирихле следува дека постои најмалку една соба во која нема ниту еден член од групата на Васко. Сега, Павле ќе го сместиме во ваква соба и бидејќи во оваа соба нема ниту еден познаник на Васко, заклучуваме дека Павле нема да се познава со ниту еден човек сместен во оваа соба, а било кои други двајца меѓусебно не се познаваат. Јасно, ако на момент замислиме дека Павле не е во собата во која е сместен, тогаш имаме добро распоредување на оригиналното друштво, па затоа од секоја соба може да се избере по еден човек така

што секои двајца од избраните се познаваат. Според тоа, новото друштво е добро.

13. Македонската математичка олимпијада се одржува во две соби означени со броеви 1 и 2. На почетокот сите натпреварувачи влегуваат во соба бр. 1. Краен распоред на натпреварувачите по соби се добива на следниот начин: листа со имиња на неколку од натпреварувачите се чита на глас; кога едно име ќе биде прочитано, тој натпреварувач и сите негови познаници меѓу останатите натпреварувачи ја менуваат просторијата во која моментално се наоѓаат. Така на секоја листа имиња соодветствува по еден краен распоред на натпреварувачите по соби. Докажи дека вкупниот број на можни крајни распореди не е еднаков на 2009. (Познанство меѓу натпреварувачи е симетрична релација).

Решение. Ќе покажеме дека вкупниот број можни крајни рапореди е парен, па затоа не може да биде 2009. Доволно е да се покаже дека постои листа имиња на некои од натпреварувачите со која сите натпреварувачи од соба бр. 1 се префрлаат во соба бр. 2. (ако ова важи тогаш за секој можен краен распоред и обратниот распоред во кој секој натпреварувач е во другата соба е можен, па имаме спарување на можните крајни рапореди) .

Тврдењето ќе го покажеме со индукција по *n*, каде *n* е бројот на натпреварувачи.

За $n=1$ тврдењето очигледно важи.

Нека претпоставиме дека за *n* натпреварувачи тврдењето важи.

Да го разгледаме случајот со $n+1$ натпреварувачи: за секои *n* меѓу нив постои листа имиња со која се префрлаат во соба бр. 2; доколку со некоја таква листа и преостанатиот натпреварувач се префрла во соба бр. 2 тогаш тврдењето важи; затоа да претпоставиме дека за секој од ($n+1$)-те натпреварувачи постои т.н. негова добра листа со која преостанатите *n* се префрлаат во соба бр. 2, а тој натпреварувач останува во соба бр. 1; ќе разгледаме два случаи:

i) *n* е непарен; тогаш со големата листа составена од ваквите $n+1$ добри листи сите натпреварувачи се префрлаат во соба бр. 2;

ii) *n* е парен; тогаш меѓу ($n+1$)-те натпреварувачи постои барем еден со парен број на познаници меќу преостанатите; името на таков натпреварувач ни е прво во новоформираната листа; по прочитувањето на тоа име во собата бр. 2 има непарен број натпреварувачи, па ги додаваме нивните добри листи; така е конструирана листа со која сите натпреварувачи од соба бр. 1 се префрлаат во соба бр. 2.

Со тоа индуктивниот доказ е комплетиран.

14. Природните броеви . и n се поголеми од 1. Во една група од kn луѓе, секој член на групата се познава со повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите луѓе од

групата. Дали постојат $k+1$ луѓе од групата кои попарно се познаваат меѓу себе? (Да се докаже за било кои k и n кои ги поседуваат дадените својства).

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција. За $k=2$ групата на луѓе има $2n$ членови. Било кој човек од групата се познава со повеќе од $(2-1)n=n>1$ членови на групата, па според тоа, постојат барем двајца кои се познаваат меѓу себе. Секој од нив се познава со повеќе од n членови на групата. Нека множеството на луќе со кои се познава едниот го означиме со A а множеството луѓе со кои се познава другиот го означиме со B. Според тоа $|A|>n$ и $|B|>n$. Користејќи ја формулата

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,$$

добиваме

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|>n+n-|A\cap B|=2n-|A\cap B|.$$

Ако $|A\cap B|=0$, тогаш $|A\cup B|>2n$, што не е можно. Значи, $|A\cap B|>0$, односно $A\cap B\neq\varnothing$. Значи, постои барем еден член на групата кој припаѓа на множеството A и кој припаѓа на множеството B. Значи, тој се познава и со едниот и со другиот избран член на групата кои што ги избравме. Бидејќи двата члена на групата ги избравме да се познаваат, добиваме дека тројцата се познаваат меѓу себе. Според тоа тврдењето е точно за $k=2$.

Нека тврдењето е точно за $k=m$, односно во група во која има mn луѓе во која сечкој човек од групата се познава со повеќе од $(m-1)n$, постојат барем $m+1$ од нив кои попарно се познаваат меѓу себе.

За $k=m+1$, нека имаме група од $(m+1)n$ луѓе, во која секој од нив се познава со повеќе од mn луѓе од групата. Ќе избереме еден член на групата, кој според претпоставката се познава со повеќе од mn членови на групата. Значи, можеме да избереме точно mn членови од групата со кои тој се познава. Од новата група составена од mn членови секој од нив се познава со повеќе од $(m-1)n$ од нив (од почетната група се отстранети најмногу $n-1$ член со кои тој се познава, па според тоа тој се познава со не помалку од $mn-(n-1)$ член од избраната груп;а. Или од групата од mn членови кои се избрани, секој од нив се познава со повеќе од mn членив од почетната група од $(m+1)n$ луѓе. Бидејќи се отстранети n членови од почетната група, тој се познава со повеќе од $mn-n$ членови од избраната група). Значи, во избраната група од mn членови на групата, секој од нив се познава со повеќе од $(m-1)n$ од нив. Според индуктивната претпоставка, постојат $m+1$ луѓе од избраната група од mn луѓе кои попарно се познаваат. Тие заедно со на почеток избраниот човек, формираат група од $m+2$ луѓе во која секои двајца се познаваат.

Според принципот на математичка индукција, тврдењето е точно, односно во група од kn луѓе во која секој познава повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите, постојат $k+1$ член од групата така што било кои два од нив попарно се познаваат.

28. ЗАДАЧИ СО ТУРНИРИ

1. На еден шаховски турнир учествувале n жени и $2n$ мажи и сите меѓусебно одиграле по една партија при што ниту една партија не завршила нерешено. Бројот на партии во кои победиле жените во однос на бројот на партии во кои победиле мажите се однесува како $7:5$. Определи го n.

Решение. Бројот на партии меѓу две жени на турнирот е еднаков на $\frac{n(n-1)}{2}$ а бројот на партии кои се одиграле меѓу два мажи е еднаков на $n(2n-1)$. Бројот на партии кои се одиграле меѓу маж и жена е еднаков на $2n\cdot n=2n^2$. Ако во меѓусебните партии меѓу маж и жена на турнирот жените извојувале x победи, тогаш бројот на победи кои ги извојувале жените е $\frac{n(n-1)}{2}+x$ а бројот на победи кои ги извојувале мажите е еднаков на $n(2n-1)+2n^2-x$. Од условот на задачата имаме

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}+x}{n(2n-1)+2n^2-x}=\frac{7}{5},$$

која што можеме да ја запишеме во облик $8x=17n^2-3n$. Бидејќи $x\leq 2n^2$, добиваме $8x\leq 16n^2$, т.е. $16n^2\geq 17n^2-3n=8x$. Последното неравенство можеме да го запишеме во облик $n(n-3)\leq 0$ кое е можно и точно за $n=1,2,3$. За $n=1,2$ равенката $8x=17n^2-3n$ нема целобројни решенија. За $n=3$, добиваме $x=18$.

Според тоа, бројот на мажи, учесници на турнирот е 6, а бројот на жени кои се учесници на турнирот е 3.

2. На турнир на кој било предвидено секој шахист да одигра по една партија со секој шахист вкупно се одиграни 55 партии. Два учесника го напуштиле турнирот, при што еден по првата одиграна партија, а другиот одиграл 10 партии. Дали овие шахисти играле меѓусебно?

Решение. Нека n е бројот на учесниите на турнирот. Тогаш $n-2$ е бројот на шахистите кои играле до крајот на турнирот и тие меѓусебно одиграле $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партии. Шахистите A и B кои го напуштиле турнирот учествувале со вкупно 10 или 11 партии, зависно од тоа далииграле мешусебно или не. Според тоа, треба да ги разгледаме двете квадратни равенки

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}+10=55 \text{ и } \frac{(n-2)(n-3)}{2}+11=55 .$$

Притоа не интересираат само кога n е природен број. Барано решение $n=12$ има само првата равенка, што значи дека A и B играле меѓу себе.

3. На еден шаховски турнир учествувале n шахисти, мајстори и велемајстори. По завршувањето на турнирот се покажало дека секој учесник половина од своите поени ги освоил играјќи против мајсторите. Докажи, дека $\sqrt{n}$ е природен број.

Решение. Нека на турнирот учествувале m мајстори и v велемајстори. Мајсторите во меѓусебните средби освоиле вкупно $\frac{m(m-1)}{2}$ бодови, и според условот на задачата исто толку бодови освоиле против велемајсторите. Слично велемајсторите меѓусебно и против мајсторите освоиле $\frac{v(v-1)}{2}$ бодови. Сега, бидејќи бројот на освоените бодови меѓу шахистите од различните категории е mv, добиваме

$$\frac{m(m-1)}{2}+\frac{v(v-1)}{2}=mv ,$$

од каде по средувањето следува $m+v=(m-v)^2$. Конечно,

$$\sqrt{n}=\sqrt{m+v}=\sqrt{(m-v)^2}=|m-v| ,$$

што е требаше да се докаже.

4. На еден фудбалски турнир учествувале 4 екипи, при што секоја екипа со секоја друга екипа одиграла по еден натпрвар. На крајот на турнирот во табелата бројот на освоените поени на секои две соседни екипи се разликувал за 1. Колку бодови може да има првопласираната екипа? (Во фудбалот за победа се добиваат 3 бода, за пораз 0 бодови и за нерешен резултат секоја екипа добива по 1 бод.)

Решение. Според условот на здачата, ако првопласираната екипа освоила n бодови, тогаш останатите три екипи освоиле $n-1.n-2$ и $n-3$ бодови. Според тоа, четирите екипи вкупно освоиле $4n-6$ бодови. Бидејќи на турнирот се одиграни $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ натпревари, а од секој натпревар се добиваат по 3 или 2 бода, заклучуваме дека збирот на освоените бодови е најмалку $6\cdot 2=12$, а најмногу $6\cdot 3=18$. Според тоа,

$$12\leq 4n-6\leq 18 \text{, т.е. } \frac{9}{2}\leq n\leq 6 .$$

Бидејќи n е природен број, добиваме $n=5$ или $n=6$.

Ако $n=6$, тоа значи дека на турнирот вкупно се освоени 18 бодови. Последното значи, дека сите натпревари завршиле со победа на една од екипите. Но, тоа не е можно, бидејќи тогаш две екипи или ќе имаат еднаков број бодови или бројот на освоените бодови ќе се разликува за содржател на бројот 3, а тоа противречи на условот на задачата.

Случајот $n=5$ е можен. Имено, ако според пласманот екипите ги означиме со A,B,C,D, тогаш овој случај се реализира кога A ја победила B, B ја победила D и сите други напревари завршиле нерешено. Притоа, A освоила $3+1+1=5$ бода, B освоила $0+1+3=4$ бода, C освоила $1+1+1=3$ бода, D освоила $1+0+1=2$ бода и вкупно се освоени $5+4+3+2=14$ бодови.

5. На еден фудбалски турнир учествувале 6 екипи, при што секоја екипа со секоја друга екипа одиграла по еден натпрвар. На крајот од турнирот секоја од првите три екипи освоила по a бодови, а секоја од последните три екипи освоила по b бодови, каде $a>b$. Определи го бројот на можните различни вредности на збирот $a+b$.

Решение. На турнирот вкупно се одиграле $\frac{6\cdot5}{2}=15$ натпревари. Збирот на бодовите кои ги освоиле сите екипи е поголем или еднаков на $15\cdot2=30$ (ако сите напревари завршиле нерешено) и е помал или еднаков на $15\cdot3=45$ бодови (ако сите напревари завршиле со победа на едната екипа). Од друга страна, збирот на освоените бодови од сите шест екипи е еднаков на $3a+3b$. Значи, $30\le 3a+3b\le 45$, од каде добиваме $10\le a+b\le 15$.

Останува да провериме која од вредностите 10, 11, 12, 13, 14 и 15 на збирот $a+b$ може да се реализира при што се исполнети условоите на задачата.

Ако $a+b=10$, тоа значи дека сите натпревари завршиле нерешено и тогаш $a=b$, што противречи на условот на задачата.

Ако $a+b=11$, тогаш збирот на сите бодови е $3\cdot11=33$ и $45-33=12$ натпревари завршиле нерешено. Ако првата ја победила четвртата, втората ја победила петтата, третата ја победила шестата и сите други натпревари завршиле нерешено, тогаш првите три екипи освоиле по 7 бодови, а последните три по 4 бодови и условите на здачата се исполнети.

Ако $a+b=12$, тогаш збирот на сите бодови е $3\cdot12=36$ и $45-36=9$ натпревари завршиле нерешено. Ова се реализира ако првата ги победила четвртата и петтата, втората ги победила петтата и шестата, третата ги победила шестата и четвртата, а сите други натпревари завршиле нерешено. Тогаш првите три екипи освоиле по 9 бодови, а последните три по 3 бодови и условите на задачата се исполнети.

Ако $a+b=13$, тогаш збирот на сите бодови е $3\cdot13=39$ и $45-39=6$ натпревари завршиле нерешено. Ова се реализира ако првите три екипи ги победиле последните три екипи и сите други натпревари звршиле нерешено. Тогаш првите три екипи освоиле по 11 бодови, а последните три екипи освоиле по 2 бода.

Ако $a+b=14$, тогаш збирот на сите бодови е $3\cdot 14=42$ и $45-42=3$ натпревари завршиле нерешено. Ова се реализира ако првите три екипи ги победиле последните три екипи, во меѓусебните средби секоја победила во еден натпревар и загубила во еден натпревар, а последните три екипи меѓусебно играле нерешено. Тогаш првите три екипи освоиле по 12 бодови, а последните три екипи освоиле по 2 бода.

Ако $a+b=15$, тогаш збирот на сите бодови е $3\cdot 14=42$ и нема нерешени натпревари завршиле нерешено. Ова се реализира ако првите три екипи ги победиле последните три екипи, во меѓусебните средби секоја победила во еден натпревар и загубила во еден натпревар, а во средбите на последните три екипи секоја екипа победила по еден натпревар и загубила по еден натпревар. Тогаш првите три екипи освоиле по 12 бодови, а последните три екипи освоиле по 3 бода.

6. На еден фудбалски турнир учествуваат n екипи, при што секоја екипа со секоја друга екипа одиграла по еден натпрвар. Екипата која освоила најмногу бодови, победила во помалку натпревари од секоја друга екипа. Определи ја најголемата можна вредност на n?

Решение. Ако екипата со најмногу бодови нема победа, тогаш таа освоила најмногу $n-1$ бод (ако во сите натпревари играла нерешен). Но, сите екипи освоиле најмалку $n(n-1)$ бодови (секој натпревар носи најмалку 2 бода), па не е можно екипата со најмногу бодови да има $n-1$ бод.

Ако првопласираната екипа нема нерешен резултат, тогаш таа не може да има помалку победи од било која друга екипа, што противречи на условот на здачата.

Според тоа, првопласираната екипа има најмалку една победа и најмалку еден нерешен резултат.

Првопласираната екипа да ја означиме со A и нека B е екипа со која A играла нерешено. Според условот B има повеќе победи од A (значи барем една повеќе), па затоа од победите има најмалку 3 бода повеќе од A. За да може A да има повеќе бодови од B, потребни се барем 4 бода, кои треба да ги освои од нерешени резултати. Значи, има најмалку 7 екипи и тоа: A, B, победената екипа од A и 4 екипи, од кои A треба да освои по еден бод.

Нека претпоставиме дека има 7 екипи. Тогаш A треба да има 7 бодови, а секоја од другите 6 екипи по 6 бода (тие имаат барем по две победи и помалку од 7 бода). Но, вкупниот број освоени бодови е $7+6\cdot 6=43$, при што најмалку $1+6\cdot 2=13$ натпревари завршиле со победник, па значи се освоени најмалку $3\cdot 13+8\cdot 2=55$ бодови, што е противречност.

Значи, на турнирот имало најмалку 8 екипи. Пример за турнир со 8 екипи, кој ги задоволува условите на задачата е: првиот има 2 победи и 5 нерешени резултати, секоја од другите седум екипи има по три победи и по три порази во меѓусебните средби. Значи, првата освоил $2\cdot 3+5\cdot 1=11$ бодови, втората, третата, четвртата, петата и шестата екипа освоиле по $3\cdot 3+3\cdot 0+1\cdot 1=10$ бодови, а седмата и осмата екипа освоиле по $3\cdot 3+4\cdot 0=9$ бодови. Во следната табела се прикажани освоените бодови во меѓусебните натпревари.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
I		1	1	1	1	1	3	3
II	1		3	3	3	0	0	0
III	1	0		3	3	3	0	0
IV	1	0	0		3	3	3	0
V	1	0	0	0		3	3	3
VI	1	3	0	0	0		3	3
VII	0	3	3	0	0	0		3
VIII	0	3	3	3	0	0	0	

7. На шаховски турнир учествуваат n шахисти од државата A и n шахисти од државата B. Се покажало дека како и да се поделат во парови, тогаш барем еден од паровите се сретнал порано. Докажи, дека може да се изберат a шахисти од државата A и b шахисти од државата B, $a+b>n$ така, што секој од избраните a шахисти се сретнал порано со секој од избраните b шахисти.

Решение. Шахистите од секоја држава да ги нумерираме со броевите $1,2,...n$ и да формираме табела M со димензии $n\times n$, при што $a_{ij}=0$ или 1 во зависност од тоа дали шахистот i од A не се сретнал со шахистот j од B или обратно. Од условот следува, дека како и да избереме n елементи на M (од секој ред и секоја колона по еден елемент), тогаш барем еден елемент ќе биде еднаков на 1. Последното значи дека нулите може да се покријат со најмногу $n-1$ хоризонтална и вертикална линија. Нека тоа се k редови и $n-k-1$ колони. Тоа значи дека пресекот на преостанатите $n-k$ редови и $k+1$ колона се состои само од единици. Сега, ги земаме овие $a=n-k$ шахисти од земјата A и $b=k+1$ шахист од земјата B кои соодветствуваат на пресекот на редовите и колоните кој се состои само од единиц. Јасно, секои двајца од овие шахисти се среќавале порано и важи $a+b=n-k+k+1>n$, што и требаше да се докаже.

8. На одбојкарски турнир играле $n\geq 4$ тимови и секои два тима одиграле точно по еден натпревар (во одбојката нема нерешен резултат). Познато е дека не постојат четири тима A,B,C,D такви што A го победил B, B го победил C, C го победил D и D го победил A. Определи го најголемиот можен

број тројки (A,B,C) такви што A го победил B, B го победил C, C го победил A. (За тројките (A,B,C) и (B,C,A) сметаме дека си исти.)

Решение. Ако тимот A го победил тимот B ќе пишуваме $A \to B$. Да забележиме дека во никои две од нив немаат заеднички тим. Навистина, нека претпоставиме дека $A \to B \to C \to A$ и $A \to D \to E \to A$. Тогаш за тимовите B и D важи или $B \to D$ или $D \to B$. Во случајот кога $B \to D$, добиваме $A \to B \to D \to E \to A$, а во случајот $D \to B$ имаме $A \to D \to B \to C \to A$, што значи дека секогаш имаме недозволена четворка. Според тоа, бројот на бараните тројки е помал или еднаков на $[\frac{n}{3}]$. Останува да докажеме дека овој број може да се достигне.

Нека тимовите се $A_1, A_2, ..., A_n$. Разгледуваме турнир во кој $A_{3k} \to A_{3k-2}$ за $k = 1, 2, ..., [\frac{n}{3}]$ и $A_i \to A_j$ за $i < j$ во сите останати случаи. На овој турнир има точно $[\frac{n}{3}]$ од бараните тројки. Нека претпоставиме дека постои четворка $A_i \to A_j \to A_k \to A_l \to A_i$ и нека $i = \max\{i, j, k, l\}$. Тогаш за некој r важи $i = 3r$, $j = 3r - 2$, $j < k$ и $l < i$. Според тоа, $3r - 2 = j < k < i = 3r$, па затоа $k = 3r - 1$. Понатаму, од $A_k \to A_l$ следува $k < l$, па затоа $3r - 1 < l < 3r$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека на овој турнир не постои четворка со бараните својства.

9. На шаховски турнир учествувале $2n+3$ шахисти, при што секои два шахиста меѓусебно играле по една партија. Партиите се играат последователно, при што секој шахист по изиграна партија одмара најмалку n партии. Докажи дека некој шахист играл во првата и последната партија.

Решение. Стапка на даден шахист ќе го наречеме бројот на партиите меѓу две негови соседни партии, вклучувајќи ја втората партија (бројот на неговите стапки е $2n+1$). Значи, сите стапки не се помали од $n+1$.

Да разгледаме произволни $n+3$ последователни партии $g_1, ..., g_{n+3}$. Во нив учествуваче $2n+6$ шахисти. Да забележиме дека само тројца шахисти може да учествуваат по двапати во овие партии. Навистина, тоа може да се случи само во паровите партии $(g_1, g_{n+1}), (g_1, g_{n+3})$ и (g_2, g_{n+3}) и овие парови се различни. Јасно, секој од овие парови има по еден заеднички шахист (во случајов во партиите $g_1, ..., g_{n+3}$ учествувале сите шахисти). Според тоа, стапката на двајцата шахисти од партијата g_1 е еднаква на $n+1$ и $n+2$ (и една од стапките од партијата g_2 е еднаква на $n+1$). Според тоа, стапката е еднаква на $n+1$ или $n+2$.

Подолу ќе докажеме дека постои шахист за кој сите стапки се еднакви на $n+2$. Тогаш збирот на неговите $2n+1$ стапка е еднаков на

$$(n+2)(2n+1)=2n^2+5n+2.$$

Бидејќи вкупниот број партии на турнирот е еднаков на

$$\frac{(2n+3)(2n+2)}{2}=2n^2+5n+3,$$

заклучуваме дека овој шахист играл во првата и во последната партија.

Нека претпоставиме дека секој шахист имал барем една стапка еднаква на $n+1$. Да го разгледаме шахистот X кој последен имал прва таква стапка. Нека по таа стапка тој играл со шахистот Y во $t-$тата партија.Тогаш Y пред тоа имал стапка еднаква на $n+1$ и нека последната таква стапка била од $q-$тата до $q+(n+1)-$вата партија. Значи, сите k стапки на Y потоа (до $t-$тата партија) се еднакви на $n+2$ и затоа $t=q+(n+1)+k(n+2)$. Од друга страна, сите претходни стапки на X се еднакви на $n+2$. Ако тој имал барем k такви стапки, тогаш тој играл во партијата со број $t-(n+1)-k(n+2)=q$. Тоа значи дека X и Y играле двапати, што е противречност. Ако пак X имал помалку од k претходни стапки, тогаш првата негова партија била партијата со број $t-(n+1)-(k-1)(n+2)=q+(n+2)$. Последното противречи со веќе докажаното дека сите шахисти играле во некоја од првите $n+2$ партии.

10. Во НБА има 30 тимови, секој од кои во текот на една сезона треба да одигра по 82 натпревари. Дали е можно тимовите да се поделат во две конференции (не задолжително со еднаков број тимови) – Источна и Западна, и натпреварувањето да се организира така што бројот на натпреварите меѓу тимовите од различните конференции да е еднаков на половина од бројот на сите натпревари?

Решение. Ќе докажеме дека натпреварувањето не може да се организира така што ќе биде исполнет сакaниот услов.

Со x и y да го означиме бројот на натпреварите одиграни внатре во Источната и Западната конференција, соодветно, а со z да го означиме бројот на одиграните натпревари меѓу тимовите од различните конференции. Треба да докажеме дека равенството $z=\frac{x+y+z}{2}$ не е можно.

Секој тим (k на број) од Источната конференција учествува во 82 натпревари и затоа $82k=2x+z$ (коефициентот 2 се појавува заради фактот дека при броењето на секој внатрешен натпревар истиот го броиме и за двата тима кои го играат натпреварот). Според тоа, бројот $z=82k-2x$ е парен број. Од друга страна, за вкупниот број натпревари добиваме $x+y+z=\frac{30\cdot 82}{2}$, односно $z=\frac{x+y+z}{2}=\frac{30\cdot 82}{4}=15\cdot 41$ е непарен број, што е противречност.

11. На тениски турнир учествуваат 14 тенисери и секој со секого одиграл точно по еден меч. Тројката тенисери (a,b,c) ја нарекуваме *триаголник* ако a го победил b, b го победил c и c го победил a. Кој е најголемиот можен број на триаголници на овој турнир?

Решение. Вкупно има $\binom{14}{3}=364$ тројки. Ќе ги преброиме тројките кои не се триаголници. Со a_i да го означиме бројот на победите на $i-$тиот играч. Имаме

$$a_1+a_2+...+a_{14}=\binom{14}{2}=91.$$

Ако тројката не е триаголник, тогаш еден од тие три играчи победник (ги победил другите два играчи). Така тројки кои не се триаголници, а во кои е победник $i-$тиот играч има точно $\binom{a_i}{2}$. Значи, вкупно имаме $S=\sum_i \binom{a_i}{2}$ тројки кои не се триаголници. Јасно, бројот триаголници е максимален кога S е минимален (заедно со условот $\sum_i a_i = 91$).

Од

$$\binom{a_i-1}{2}+\binom{a_j+1}{2}=\binom{a_i}{2}+\binom{a_j}{2}-(a_i-a_j-1),$$

за $a_i-a_j>1$, следува дека збирот S е најмал кога сите a_i се разликуваат точно за 1, т.е. кога меѓу нив има по седум еднакви на 6 и 7. Тогаш $S=7\binom{6}{2}+7\binom{7}{2}=252$, па имаме $364-252=112$ триаголници.

Овој број навистина може да се постигне, на пример, кога $i-$тиот играч ги победил играчите $i+1, i+2, ..., i+6$, за $i=1,2,...,14$ (индексите се по модул 14). Тогаш по седум играчи имаат по 6 и 7 победи.

12. На тениски турнир учествувале 2^n тенисери. Секој тенисер одиграл по еден меч со секој од останатите тенисери. Докажи, дека можеме да избереме $n+1$ тенисери и да ги подредиме во низа така што секој од нив ги победил сите тенисери кои во низата се наоѓаат по него.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

Ако $n=1$, тогаш на турнирот има точно два тенисера, па прв во низата е победникот од нивниот меѓусебен меч.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број n, т.е. дека меѓу 2^n тенисери кои играле секој со секој можеме да избереме $n+1$ тенисери и да ги подредиме во низа така што секој од нив ги победил сите тенисери кои во низата се наоѓаат по него.

Понатаму, победникот на турнир со 2^{n+1} тенисери победил најмалку 2^n тенисери. Имено, ако секој тенисер има помалку од 2^n победи, тогаш вкупниот број победи е најмногу $2^{n+1}(2^n-1)$. Меѓутоа, бројот на победите е еднаков на бројот на мечевите, т.е. еднаков е на

$$\frac{1}{2}2^{n+1}(2^{n+1}-1)=2^n(2^{n+1}-1)>2^{n+1}(2^n-1).$$

Значи, не е можно сите играчи да имале помалку од 2^n победи. Според претпоставката, меѓу 2^n тенисери кои ги победил победникот на турнирот можеме да избереме $n+1$ тенисер и да ги подредиме во низа така што секој од нив ги победил сите тенисери кои во низата се наоѓаат после него. Сега, доволно е победникот на турнирот да го додадеме на почетокот на низата.

13. На еден тениски турнир секои двајца играчи играле еден против друг. На крајот на турнирот играчот A имал k, $k\geq 2$ победи повеќе од играчот B. Докажи, дека постои група S од играчи, $|S|\geq k-1$, таква што секој играч од S е поразен од A и секој играч од S го победил B.

Решение. Нека R_A е множеството играчи кои се поразени од A и нека b е бројот на играчите кои на турнирот се поразени од B. Тогаш $|R_A|=k+b$. Можни се два случаја:

1) $B\in R_A$. Нека V е подмножество играчи од R_A кои што го победиле B. Јасно, $V\neq\varnothing$. Ако претпоставиме дека $|V|<k-1$, тогаш

$$b\geq|R_A|-1-|V|>(b+k)-1-(k-1)=b,$$

што е противречност.

2) $B\notin R_A$. Нека V е подмножество играчи од R_A кои што го победиле B. Јасно, $V\neq\varnothing$. Ако претпоставиме дека $|V|<k-1$, тогаш

$$b\geq|R_A|-|V|>(b+k)-(k-1)=b+1,$$

што е противречност.

14. На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати, учествувале два ученика и неколку студенти. Играле секој со секого. Двата ученика освоиле заедно 8 поени, додека секој студент освоил по еднаков број на поени. Колку студенти учествувале на турнирот и колку поени освоиле. Да се најдат сите решенија.

Решение. Нека x е бројот на студенти што учествувале на турнирот и k е бројот на поени што секој од нив го освоил. Тогаш

$$\binom{x+2}{2}=kx+8\text{, т.е. } x^2-(2k-3)x-14=0.$$

Бидејќи $x,k\in\mathbb{N}$, дисриминантата на горната равенка мора да е точен квадрат, т.е.

$$(2k-3)^2+56=n^2,$$

односно $(2k-3)^2-n^2=-56$. Ова може да се запише во следниот облик

$$(n-2k+3)(n+2k-3)=56=1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7 .$$

Ги имаме следните можности:

1° $n-2k+3=1$	и	$n+2k-3=56$
2° $n-2k+3=2$	и	$n+2k-3=28$
3° $n-2k+3=4$	и	$n+2k-3=14$
4° $n-2k+3=8$	и	$n+2k-3=7$
5° $n-2k+3=56$	и	$n+2k-3=1$
6° $n-2k+3=28$	и	$n+2k-3=2$
7° $n-2k+3=14$	и	$n+2k-3=4$
8° $n-2k+3=7$	и	$n+2k-3=8$

Со непосредна проверка се гледа дека само системите 2° и 3° даваат решенија кои соодветствуваат на дадените услови.

Од 2° се добива $n=15$, $k=8$ и $x=14$

Од 3° се добива $n=9$, $k=4$ и $x=7$.

15. Нека n е природен број. Не една конференција се наоѓаат $6n+4$ математичари. Се одржуваат $2n+1$ состаноци. На секој состанок математичарите седат околу една тркалезна маса со 4 места и n тркалезни маси со по 6 места. Растојанието меѓу секои две соседни столици на една маса се еднакви. Ќе велиме дека двајца математичари се во специјална положба ако седат на иста маса и ако се соседи или ако седат на дијаметрално спротивни столици. За кои природни броеви n е можно по завршувањето на сите состаноци никои двајца математичари да не биле во специјална положба повеќе од еднаш?

Решение. *Одговор*: за секој природен број n.

Лема. За секој природен број k може да се организира турнир на кој ќе учествуваат $2k+1$ тимови, кој има $2k+1$ кола и во кој секои две екипи ќе играат точно еднаш една против друга.

Доказ. Земаме правилен $(2k+1)-$ аголник $A_1A_2...A_{2k+1}$. Нека тимовите ги претставуваат темињата, а отсечките кои ги поврзуваат нека се меѓусебните натпревари на тимовите. Турнирот го организираме на следнов начин: ако во едно коло играат тимовите A_i и A_j ($i\neq j$) тогаш во тоа коло играат и сите тимови претставени со темињата A_k и A_l така што важи $A_iA_j \parallel A_kA_l$ (забележуваме дека имаме $k-1$ вакви отсечки кои се паралелни со A_iA_j, а се различни од неа и дека точно едно теме не е крајна точка на ниту една од овие отсечки (со тоа теме е претставен тимот кој е слободен во тоа коло).

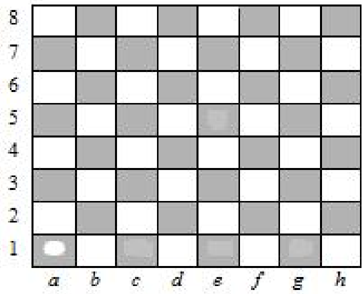
Бидејќи од секое теме излегуваат $2k$ различни отсечки ќе имаме точно $2k$ кола во кои ќе игра тимот претставен со тоа теме и едно коло во кое овој тим ќе биде слбоден, што вкупно дава $2k+1$ кола. Со ова доказот на лемата е завршен. ■

Сега ќе дадеме конструкција, т.е. ќе покажеме како математичарите може да се распоредат на масите на сите овие состаноци за секој природен број n.

Множеството од $6n+4$ математичари ќе го поделиме на $2n+2$ дисјунктни подмножества, од кои $2n+1$ се триелементни и едно множество во кое се наоѓа само еден математичар (да го означиме со A). Според лемата, на $2n+1$ состаноци, на секоја маса која има 6 места, можеме да ги ставиме математичарите од две од воочените тројки, така што било кои две од воочените тројки на иста маса седат точно еднаш. Притоа математичарите од овие тројки околу масата ги распоредуваме наизменично, што значи дека никои два математиари од иста тројка нема да бидат соседи, а нема да седат и на дијаметрално спротивни столици. На масата која има 4 столици ги на произволен начин ги распоредуваме трите математиари од тројката која преостанала, т.е. чии членови не седат на масите со 6 столици и математичарот A, кој на секој состанок седи на масата со 4 столици. Јасно, A со секој од преостанатите математиари точно еднаш ќе биде во специјална положба. Двајца математичари од секоја тројка во специјална положба ќе бидат само на масата со 4 столици, а математичарите од различни тројки само кога нивните тројки ќе се состанат на маса со 6 столици.

29. КОМБИНАТОРИКА НА ШАХОВСКА ТАБЛА

1. На колку начини шаховската фигура крал може од полето $a1$ да дојде до полето $h8$, ако во секој потез кралот се поместува на соседното поле десно, горе или по дијагонала десно-горе? Кој пат е најкраток?



Решение. Од полето $a1$ на полето $h8$ кралот може да дојде во $k+7$ чекори, одејќи k чекори надесно, k чекори нагоре и $7-k$ чекори по дијагонала, каде $k \in \{0,1,2,...,7\}$. Очигледно, најмалиот број чекори е кога кралот се движи по дијагонала (случајот $k=0$). На секое движење во $k+7$ чекори му придружуваме пермутација со повторување од тип $(k,k,7-k)$ на броевите $0,1,2$ при што цифрата 0 соодветствува на чекор надесно, цифрата 1 на чекор нагоре и цифрата 2 на чекор по дијагонала, во редоследот во кој се прават чекорите. Опишаното придружување е обратно еднозначно, па затоа бараниот број е еднаков на

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{(k+7)!}{k!k!(7-k)!} = 48639 .$$

2. Шаховската фигура крал може да се придвижи само на соседно поле на таблата (поле кое има барем една заедничка точка со полето на кое се наоѓа кралот), што значи дека може да нападне само фигура која се наоѓа на едно од осумте соседни полиња. Определи го максималниот број на кралеви кои можат да се постават на шаховска табла со димензии 12×12 така што секој крал да напаѓа само еден друг крал.

Решение. Дадената шаховска табла да ја дополниме до табла со димензии 13×13 додавајќи нулти ред и нулта колона. На новата табла, на кралот поставен на полето (i,j), $i,j \in \{1,2,...,12\}$ да му ги придружиме полињата $(i,j),(i-1,j),(i,j-1),(i-1,j-1)$.

Лесно се гледа дека на два крала кои се напаѓаат вкупно им се придружени најмногу 6 полиња, т.е. најмалку две полиња се придружени и со други два крала. Понатаму, ниту едно поле не е придружено со два пара кралеви кои меѓусебно се напаѓаат. Според тоа, бараниот минимален број е помал или еднаков на $2[\frac{13^2}{6}] = 56$.

Обиди се да прикажеш конструкција на 56 кралеви секој од кои напаѓа точно еден друг крал.

3. Петар и Никола ја играат следнава игра: на почетокот Петар замислил едно од полињата на шаховска 100×100 табла. Потоа Никола покажува на произволно поле од шаховската табла и го прашува Петар колку најмалку потези и се потребни на шаховската фигура крал за да стигне од посоченото до замисленото поле. Откако ќе го добие одговорот, Никола може повторно на ист начин да постави прашање или да го погоди полето кое Петар го замислил итн. Петар на сите прашања одговара коректно. Колку најмалку прашања треба да постави Никола за да го открие замисленото поле?

Решение. Ќе докажеме дека две прашања не се доволни. Нека претпоставиме дека Петар на првото прашање одговорил со „Еден“. Тогаш (независно кое е првото избрано поле) меѓу допуштените положби на замисленото поле има три полиња a,b и c кои формираат „агол“ (a и c имаат заедничко теме, а секое од нив има заедничка страна со b). Лесно се проверува, дека било кое поле да го избере Никола за да го постави второто прашање, Петар секогаш може да одговори така што или a и b, или b и c, или c и a се на еден потез од замисленото поле и Никола не може еднозначно да ја определи положбата на замисленото поле.

За да го открие замисленото поле, Никола едноставно може да посочи три од аголните полиња на таблата. Множеството полиња, еднакво оддалечени од аголното поле за шаховската фигура крал формираат $\Gamma-$фигура составена од рабни полиња на две соседни страни на квадрат кои се спротивни на аголното поле. Пресекот на две вакви фигури, соодветни на две спротивни аголни полиња на таблата, се состои од најмногу две полиња. Притоа двете полиња секогаш се на различно растојание и затоа по третото прашање местоположбата на замисленото поле е еднозначно определена.

4. Растојание меѓу две единечни полиња на бесконечна шаховска табла го нарекуваме минималниот број чекори потребни кралот да стигне од едното до другото поле. На таблата се означени три полиња, такви што растојанието меѓу секои две од нив е еднакво на 100. Определи го бројот на полињата кои од обележените полиња се наоѓаат на растојание еднакво на 50.

Решение. Да разгледаме две произволни полиња A и B. Нека разликата меѓу апцисите на нивните центри е $x\geq0$, а разликата меѓу ординатите е $y\geq0$. Лесно се покажува, дека растојанието $^\circ(A,B)$ меѓу тие две полиња е еднакво на $\max\{x,y\}$.

Нека обележените полиња се A,B,C. Тогаш за секои две од овие три полиња постои координата во која тие се разликуваат за 100. Јасно, за две од полињата тоа ќе биде една иста координата. Нека, на пример, паровите (A,B) и (A,C)

се разликуваат во апцисата. Тогаш апцисите на B и C или се оддалечени за 200 или се совпаѓаат. Првиот случај не е можен, бидејќи $^\circ(B,C)=100$. Според тоа, нивните апциси се совпаѓаат, а ординатите се разликуваат за 100. Тогаш (со точност до симетрија) можеме да сметаме дека полињата имаат координати $B(0,0),$, $C(0,100)$ и $A(100,x)$. Притоа, $0\le x\le 100$ бидејќи во спротивно $^\circ(A,B)$ или $^\circ(A,C)$ е поголем од 100.

Да разгледаме точка X за која $^\circ(X,A)=\,^\circ(X,B)=\,^\circ(X,C)=50$. Нејзината апциса е 50, бидејќи во спротивно или $^\circ(X,B)>50$ или $^\circ(X,A)>50$. Аналогно, нејзината ордината е 50, бидејќи во спротивно или $^\circ(X,B)>50$ или $^\circ(X,C)>50$. Според тоа, координатите на точката X се $(50,50)$ и притоа важи $^\circ(X,A)=\,^\circ(X,B)=\,^\circ(X,C)=50$. Конечно, постои само една точка со саканото својство.

5. Дадени се шаховска табла со димензии $n\times n$ и m топови (шаховски фигури), $n\ge m$. Определи го бројот на начините на кои може да се распоредат топовите, но така да тие меѓусебно не се напаѓаат.

Решение. Таблата има n^2 полиња, и еден топ можеме да го ставиме на било кое од нив. Значи еден топ може да се стави на таблата на n^2 начини.
Ако е ставен еден топ, тогаш втор топ не може да се стави на било кое поле од хоризонталата и вертикалата на која не се наоѓа првиот топ. Но тој може да се стави на било кое од преостанатите

$$n^2-(2n-1)=(n-1)^2$$

полиња, и нема да го напаѓа првопоставениот топ. Значи, два топа може да се ставаат на таблата така да не се напаѓаат на $n^2(n-1)^2$ начини.

Истиот чекор ќе го повториме за третиот и секој следен од m-те топови кој претходно не е поставен. Според тоа, бројот на поставувања на топовите, кој ги исполнува условите од задачата е еднаков на

$$n^2(n-1)^2(n-2)^2...(n-m+1)^2.$$

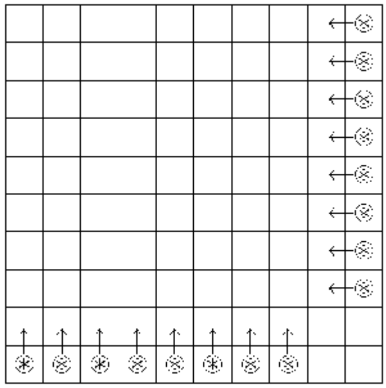
6. Во некои полиња на табла со димензии 10×10 се поставени k топови и се означени сите полиња кои се нападнати (топот го напаѓа и полето на кое се наоѓа). Определи го најголемиот k при кој по отстранување на било кој топ барем едно означено поле не е нападнато.

Решение. Да ја разгледаме положбата на k топови кои го задоволуваат условот на задачата. Можни се два случаја.

1) Во секој ред или во секоја колона има барем по еден топ, на пример во секоја колона. Тогаш секое поле од таблата е нападнато, при што може да

отстраниме топ од колоната во која има најмалку два топа. Значи, во секоја колона има точно по еден топ и $k \le 10$.

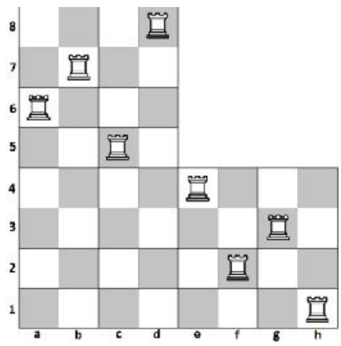
2) Има колона и ред без топови. Тогаш нивното заедничко поле не е нападнато. Да забележиме дека секој топ е единствен во својот ред или колона (во спротивно го отстрануваме и полињата од редот или колоната остануваат нападнати). За секој топ го обележуваме тој ред или колона. Ако се обележени не повеќе од 8 реда и 8 колони, тогаш имаме најмногу $8+8=16$ топови. Ако се означени 9 колони, тогаш имаме 9 топови (по еден во секоја колона, а според претпоставката во десеттата колона нема топ).



Од претходните разгледувања следува дека $k \le 16$. Пример со 16 топови е даден на цртежот десно.

7. Горната десна четвртина на шаховската табла е покриена со хартија. Колку најмногу топови можеме да поставиме на преостанатиот дел на шаховската таблатака што тие меѓусебно нема да се напаѓаат? На колку начини тоа може да се направи?

Решение. Два топа меѓусебно се напаѓаат ако се наоѓаат во ист ред или иста колона. Според тоа, не е можно да се постават повеќе од 8 топови, бидејќи во секој ред може да има најмногу еден топ. Примерот на цртежот десно покажува како 8 топови може да се постават на саканиот начин.

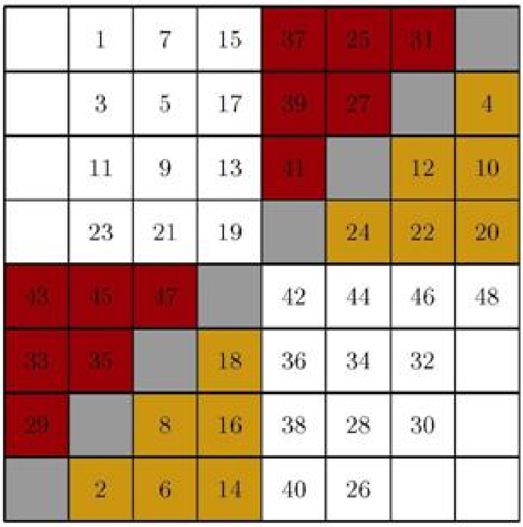


На долната половина на шаховската табла не може да има повеќе од 4 топови, па затоа во горниот лев дел на шаховската табла мора да има 4 топови, секој во свој ред и во своја колона. Тоа значи дека во долната лева четвртина на таблата не може да има ниту еден топ, па затоа уште 4 топа треба да распоредиме во долната десна четвртина на таблата.

Четири топа на 4×4 табла може да се распоредат на $4!=24$ начини. Имено, во првиот ред топ може да се постави во било кое од 4 полиња. За вториот ред топот не може да е во иста колона како првиот топ, па затоа имаме 3 можности. Во третиот ред имаме уште 2 ненападнати полиња и конечно во четвртиот ред имаме само едо можно поле. Сега, од принципот на производ следува дека топовите може да се постават на $4!^2 = 24^2 = 576$ начини.

8. Осумте полиња на големата црна дијагонала на шаховската табла ги нарекуваме ограда. Топ се движи по таблата така што не стапнува на едно исто поле повеќе од еднаш и не стапнува на оградата. Кој е најголемиот број скокови кои топот може да ги направи преку оградата?

Решение. *Одговор*: 47 скокови.



Таблата да ја поделиме на четири 4×4 квадрати и полињата на таблата да ги обоиме како што е прикажано на цртежот десно. Забележуваме дека кога топот скока преку оградата, тогаш почетното или крајното поле не е бело на скокот. Бидејќи 24 полиња не се бели и не се на оградата и на секое поле соодветствуваат најмногу два скока (полето е почетно или полето е крајно), заклучуваме дека бројот на скоковите е помал или еднаков на 48.

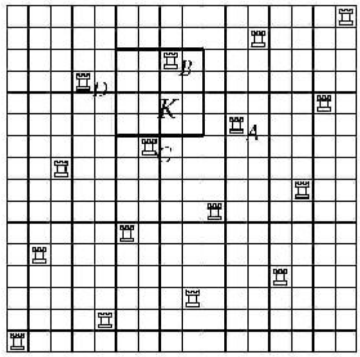
Ако има 48 скокови, тогаш секој скок од/во обоено поле треба да е скок во/од бело поле (Зошто?). Според тоа, сите скокови од црвените полиња се во бели полиња под дијагоналата, а оттаму повторно мора да скокнеме на црвено поле. Последното значи дека топот никогаш нема да стапне на жолто поле, што е противречност.

На цртежот горе е даден пример за 47 скокови (броевите во полињата го покажуваат редоследот по кој топот стапнува на полињата).

9. Даден е природен број $n\geq 2$. Разгледуваме шаховска табла $n\times n$ која се состои од n^2 полиња. За распоредот на n топови на таблата ќе велиме дека е *мирољублив* ако во секој ред и во секоја колона се наоѓа тачно еден топ. Определи го најголемиот природен број k таков што за секој мирољублив распоред на n топови постои квадрат $k\times k$ кој не содржи топ ниту на едно од своите k^2 полиња.

Решение. Прво ќе докажеме дека за $k^2 < n$ таков квадрат секогаш постои. За произволен мирољубив распоред, го разгледуваме полето A на првата колона во кое се наоѓа топ, како и k последователни редови кои го садржат ова поле. Унијата на овие k редови е правоаголник $k\times n$ со точно k топови.

Од овој правоаголник да го отстраниме полето *А*. Остатокот садржи $k-1$ топови, но од него може да се исечат *k* дисјунктни квадрати $k\times k$, од кои барем еден мора да биде празен.



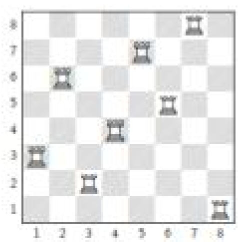
Сега за $n=k^2$ $(k>1)$ ќе конструираме мирољубив распоред во кој бараниот квадрат не постои. Со (a,b) да го означиме полето во $(a+1)-$от ред и $(b+1)-$та колона. За секој $0\le i,j\le k$ ќе ставиме топ во полето $(ik+j, jk+i)$. Бидејќи секој цел број од 0 до $n-1$ може на единствен начин да се запише во облик $ik+j$, овој распоред навистина е мирољубив. Останува да докажеме дека во секој квадрат $k\times k$ се наоѓа барем еден топ. Да го разгледаме квадратот *K* со долно лево поле $(a,b), 0\le a,b\le k^2-k+1$. Постои поле $A(x,y)$ со $x\ge a$ и $y\ge b$ на кое се наоѓа топ. Разгледуваме такво поле со најмал збир $x+y$. Да претпоставиме дека полето A е надвор од квадратот *K*. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x\ge a+k$. По конструкција, на полињата

$$B(x-k+1, y+k-1), C(x-k, y-1) \text{ и } D(x-2k+1, y+k-2)$$

исто така се наоѓаат топови (ако се на таблата). Од условот за минималност на полето A следува дека $x-2k+1<a$ и $y-1<b$, од каде добиваме $x\le a+2k-2$ и $y=b$, но, тогаш квадратот *K* содржи поле *B* на кој има топ.

Конечно, за $n<k^2$, со бришење на првите k^2-n редови и првите k^2-n колони од опишаниот распоред добиваме распоред со најмногу *n* топови таков што ниту еден квадрат $k\times k$ не е празен. Овој распоред по потреба може да се дополни до мирољубливо биективно спарување на празните колони и празните редови. Според тоа, одговорот е најголемиот k за кој $k^2<n$, т.е. $k=[\sqrt{n-1}]$.

10. Во полињата на шаховската табла да ги запишеме броевите од 1 до 64, во секое поле по еден број, така што во првот ред од лево на десно ги запишуваме броевите од 1 до 8, во вториот ред од лево на десно броевите од 9 до 16 итн. На таблата произволно поставуваме 8 топови кои меѓусебно не се напаѓаат (еден распоред од можните 40320 е даден на цртежот десно). Определи го збирот на броевите кои се запишани во полињата на кои се поставени топовите.



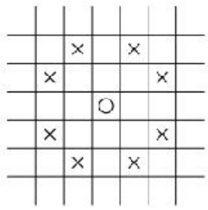
Решение. Редовите и колоните на шаховската табла да ги нумерираме со броевите од 1 до 8. Сите полиња на таблата се пополнети со броевите од 1 до 64. Притоа на секое поле му придружуваме подреден пар (i, j), каде i е редот, а j е колоната во која се наоѓа полето. Не е тешко да се види дека во полето (i, j), $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ е запишан бројот $8i + j - 8$. Знаеме дека топовите меѓусебно не се напаѓаат, што значи дека во секој ред и секоја колона се наоѓа по еден топ. Нека (i_k, j_k), $k = 1,2,3,4,5,6,7,8$ се полињата на кои се наоѓаат топовите. Тогаш мора да важи

$$\sum_{k=1}^{8} i_k = \sum_{k=1}^{8} j_k = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36\,.$$

Според тоа, збирот на броевите кои се запишани во полињата на кои се поставени топовите ќе биде

$$\sum_{k=1}^{8} (8i_k + j_k - 8) = 8\sum_{k=1}^{8} i_k + \sum_{k=1}^{8} j_k - 8\cdot 8 = 9\cdot 36 - 64 = 260\,.$$

11. Дали може скокач да обиколи табла со димензија 4×2012 и да се врати на полето од кое тргнал при што на секое поле ќе застане само еднаш?



Скокачот е фигура која во шахот се движи во облик на бквата L: од полето означено со кругче може да скокне на едно од осумте полиња означени со крвче (ако тоа поле е на таблата).

Решение. Таблата да ја обоиме шаховски црвено и бело како на цртежот десно. Бидејќи скокачот се движи во облик на буквата L, во секој потег ја менува бојата на полето во кое се наоѓа.

A	A	A	A	A	A	A	A	A	...
B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
A	A	A	A	A	A	A	A	A	...

Понатаму, полињата во првиот и четвртиот ред да ги означиме со A, а полињата во вториот и третиот ред со B. Скокачот мора од поле од поле означен со A да скокне во поле означено со B.

Да претпоставиме дека постои начин скокачот да го посети секое поле точно еднаш и да се врати на почетокот. Бројот на полињата означени со A е еднаков на бројот на полињата означени со B. Тоа значи дека колку пати скокаќот ќе се најде на поле означено со A толку пати ќе се најде на поле означено со B. Затоа скокачот мора од поле означено со B да скокне на поле означено со A, бидејќи ако скокне од поле означено со B на поле означено со B, тој мора во еден момент да скокне од поле означено со A на поле означено со A, а тоа не е можно.

Скокачот во еден момент мора да дојде на бело поле означено со A. Во следниот потег доаѓа на црвено поле означено со B, па потоа повторно на бело поле означено со A итн. Затоа тој никогаш не доаѓа на бело поле означено со B, што противречи на претпоставката дека скокачот го посетува секое поле.

12. Докажи дека скокаќот (скокајќи според правилата како шаховска фигура) не може да го обиколи секое поле на табла со димензии $(2k+1)\times(2r+1)$ и да се врати на почетното поле.

Решение. Полињата на таблата да ги обоиме црно-бело на шаховски начин. При секој скок скокачот оди од бело на црно или од црно на бело поле, т.е. ја менува бојата на полето. Ако саканото обиколување на таблата е можно, тогаш скокачот треба да скокне непарен број пати и да се врати на почетното поле, што не е можно, бидејќи при непарен број скокови скокачот се наоѓа на поле кое е обоено со спротивната боја од полето од кое тргнал.

Забелешка. Турите на скокачот, на кои се однесуваат претходните две задачи, се познат математички проблем. Разликуваме затворени тури (оние во кои скокачот мора да се врати на почетното поле) и отворени (оние на кои не мора). Проблемите во горните две задачи се проблеми за непостоење на затоворени тури на скокачот за некои конкретни димензии на таблата. Allen J. Schwenk во 1991 година докажал дека за табла со димензии $m\times n$, $m\le n$, затворена тура на скокачот е можна ако не е исполнет ниту еден од следниве услови:

1) m и n се непарни броеви,
2) $m=1, m=2$ или $m=4$,
3) $m=3$ и $n=4, n=6$ или $n=8$.

13. Докажи дека скокачот (скокајќи според правилата како шаховска фигура) може да го обиколи секое поле на табла со димензии 8×8.

Решение. На цртежот десно е прикажано едно решение на задачата.

30	21	50	9	32	19	52	7
49	10	31	20	51	8	33	18
22	29	48	61	42	27	6	53
11	60	41	28	45	62	17	34
40	23	64	47	26	43	54	5
59	12	25	44	63	46	35	16
24	39	2	57	14	37	4	55
1	58	13	38	3	56	15	36

Забелешка. Како што рековме во забелешката на претходната задача за турите на скокачот постои обемна литература. Во оваа задача станува збор за отворени тури на скокачот, за кои е докажано дека има решение на сите правоаголни табли со димензии $m\times n$ за $m,n\ge 3$, освен за таблите $3\times 3, 3\times 5, 3\times 6$ и 4×4.

14. На колку начини на шаховската табла 8×8 може да се поставaт црн и бел скокач, така да тие не се напаѓаат (според правилата на шаховската игра)?

Решение. Во секое поле од таблата е запишан бројот на полиња на кои може да се наоѓа белиот скокач, а да не го напаѓа црниот скокач, кога тој се наоѓа на тоа поле.

На пример, ако црниот скокач се наоѓа на полето $a1$, тогаш белиот скокач не може да се наоѓа на три полиња $a1, b3, c2$. Според тоа, во полето $a1$ ќе го запишеме бројот 61.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
1	61	60	59	59	59	59	60	61
2	60	59	57	57	57	57	59	60
3	59	57	55	55	55	55	57	59
4	59	57	55	55	55	55	57	59
5	59	57	55	55	55	55	57	59
6	59	57	55	55	55	55	57	59
7	60	59	57	57	57	57	59	60
8	61	60	59	59	59	59	60	61

Исто така, ако црниот скокач се наоѓа во полето $b2$, тогаш белиот скокач не може да се наоѓа на полињата $b1, a3, c3, d2$. Значи, белиот скокач може да се наоѓа на 60 полиња, па затоа во полето $b2$ ќе го запишеме бројот 60.

Ако опишаната постапка ја направиме за секое поле од шаховската табла ќе го добиеме прикажаниот цртеж.

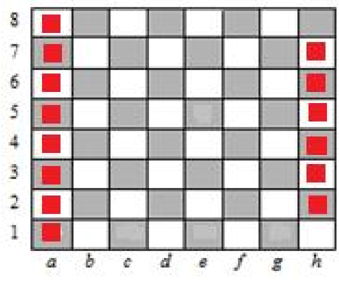
Сега, бараниот број е

$$4\cdot 61+8\cdot 60+20\cdot 59+16\cdot 57+16\cdot 55=3966 .$$

Значи, белиот и црниот скокач на шаховската табле може да се постават на 3696 начини, а тие да не се напаѓаат.

15. Колку најмногу ловци можат да се постават на шаховска табла со димензии $n\times n$ така што било кои два од нив да не се напаѓаат (според правилата на шаховската игра).

Решение. Најголемиот број на дијагонали кои попарно не се сечат на шаховска табла со димензии $n\times n$ е $2n-1$. Значи, на таблата не може да се постават повеќе од $2n-1$ ловци кои не се напаѓаат. Од друга страна, во било кој распоред на ловците на овие дијагонали, ловецот поставен на 1 и ($2n-1$)-та дијагонала ќе се напаѓаат. За случајот $n=8$ направи цртеж. Според тоа, тој број не може да е поголем од $2n-2$. Еден распоред, за случајот $n=8$, т.е. на $2n-2=16-2=14$ е даден на цртежот десно (ловците се претставени со црвени квадратчиња).



Аналогно се прави распоред за било кој природен број n.

16. За две кралици поставени на шаховската табла ќе велиме дека се независни ако меѓусебно не се напаѓаат. Нека D_1 и D_2 се две независни кралици, d_i е бројот на полинањата кои ги напаѓа кралицата D_i, $i=1,2$, а $d_{1,2}$ е бројот на полињата кои ги напаѓаат истовремено двете кралици. Со $d(D_1, D_2)$ да го означиме бројот на полињата кои се нападнати барем од една кралица.

Докажи дека за две независни кралици D_i, $i=1,2$ е точно неравенството:

$$d(D_1,D_2)\le 42\,. \qquad (1)$$

Решение. Во решението на задачата 64-те полиња на шаховската табла ќе ги означуваме со точки. Лесно се гледа дека

$$d_{1,2}\ge 4\,. \qquad (2)$$

Навистина, доволно е да го разгледаме правоаголникот $P_{1,2}$ со спротивни темиња D_1 и D_2, чии две страни се хоризонтални. Очигледно овој правоаголник содржи четири полиња, кои се нападнати од две кралици.

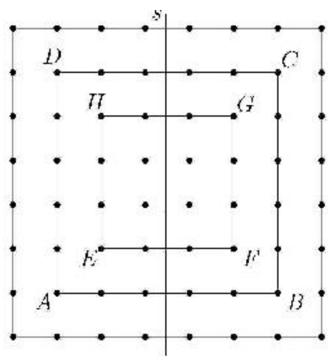
Понатаму, лесно се гледа дека ако кралицата е на работ на таблата таа напаѓа 21 поле, ако е на растојание едно поле од работ на таблата таа напаѓа 23 полиња, кога е на растојание две полиња од работ на таблата таа напаѓа 25 полиња и кога е на растојание три полиња од работ на таблата таа напаѓа 27 полиња.

Од принципот на вклучување и исклучување следува равенството

$$d(D_1,D_2)=d_1+d_2-d_{1,2}\,. \qquad (3)$$

Сега, од (2) и (3) следува дека неравенството (1) е исполнето во случајот кога $d_1+d_2\le 46$, т.е. ако $d_i\le 23, i=1,2$ и исто така ако еден од броевите d_i е 21, а другиот е 25.

Нека $d_1=23$ и $d_2=25$. За да го докажеме (1) доволно е да докажеме дека $d_{1,2}\ge 6$, т.е. бројот на полињата кои истовремено се нападнати од двете дами и се надвор од правоаголникот $P_{1,2}$ е најмалку 2. Без ограничување на општоста можеме да земеме, дека D_1 е на отсечката AB (цртеж десно). Освен тоа ќе земеме дека D_1 е на некое од трите полиња на десната половина на AB, бидејќи во спротивно можеме да ги замениме местата на D_1 и D_2 во однос на симетралата на AB, при што бројот на нападнатите полиња од двете кралици не се менува. Сега, кралицата D_2 се наоѓа на некоја од страните на квадратот $EFGH$, па лесно се проверува дека е исполнето бараното неравенство. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

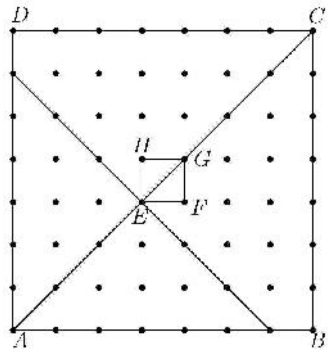


Нека $d_1=d_2=25$. Доволно е да докажеме дека $d_{1,2}\ge 8$. Кралиците D_1 и D_2 се наоѓаат на страните на квадратот $EFGH$ и аналогно какопогоре можеме да сметаме дека D_1 е на некое од двете полиња на десната половина на EF. Лесно се проверува дека бројот на полињата кои истовремено се нападнати од двете кралици и не се на страните на правоаголникот $P_{1,2}$ е најмалку 4.

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Останува да ги разгледаме случаите, кога $d_2 = 27$, а d_1 е 21, 23 или 25 (не е можно $d_1 = 27$, бидејќи кралиците се независни).

Нека $d_1 = 21$ и $d_2 = 27$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека кралицата D_2 е во полето E, а дека кралицата D_1 е на една од отсечките AB или BC, ќе ја префрлиме D_1 на полето симетрично во однос на дијагоналата AC, при што бројот на нападнатите полиња не се менува. Сега лесно се гледа дека бројот на нападнатите полиња од D_1 и D_2 кои не се на страните на правоаголникот $P_{1,2}$ е најмалку 3, па затоа важи $d_{1,2} > 6$, па значи во (1) важи строго неравенство.



За $d_1 = 23$ и $d_2 = 27$ неравенството (1) следува од неравенството $d_{1,2} \geq 8$, кое се докажува аналогно како во претходните случаи. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

На крајот нека $d_1 = 25$ и $d_2 = 27$. Ќе докажеме дека $d_{1,2} \geq 10$. Можеме да ја поставиме D_2 како во претходните случаи, а ако ја искористиме симетријата добиваме дека за D_1 има само две можности, во секоја од кои $d_{1,2} = 10$.

Со тоа доказот на неравенството (1) е завршен.

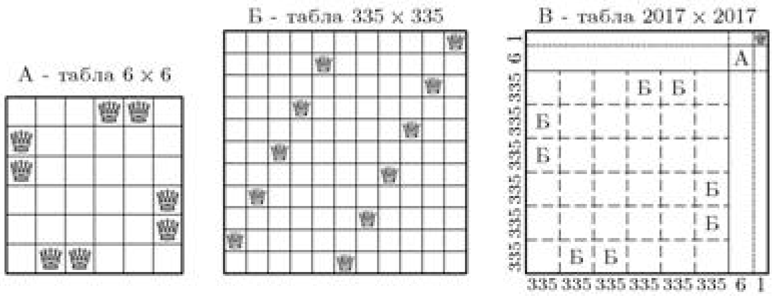
17. Определи колку најмногу кралици може да се постават на табла со димензии 2017×2017 така што секоја кралица смее да напаѓа најмногу една од преостанатите кралици.

Решение. Да означиме $n = 2017$. Нека претпоставиме дека се поставени $m > n$ кралици. Ниту во еден ред нема повеќе од две кралици, па затоа најмалку во $m - n$ редови се наоѓаат по две кралици, што значи дека има најмногу $m - 2(m - n) = 2n - m$ кралици кои се сами во својот ред. Слично, најмногу $2n - m$ кралици се сами во својата колона. Од друга страна, секоја кралица е сама во својот ред или во својата колона, па затоа $m \leq 2(2n - m)$, од каде следува дека $m \leq [\frac{4n}{3}] = 2689$.

На цртежот А е прикаж распоред на 8 кралици на табла 6×6, при што се исполнети условите на задачата. Пред да конструираме пример на табла со димензии 2017×2017 да го разгледаме следниот распоред на кралици:

- На табла 335×335 може да се постават 335 кралици кои меѓусебно не се напаѓаат. Навистина, доволно е кралиците да се поставата на сите полиња

$(x, y),\ 1 \le x,\ y \le 335$, за кои важи $y \equiv 2x(\mathrm{mod}\,335)$, како на цртеж Б. Тогаш, сите збирови $x + y$ се меѓусебно различни по модул 335, сите разлики $x - y$ се меѓусебно различни по модул 335, па затоа нема две кралици во ист ред, колона или дијагонала.



Да ја поделиме таблата со димензии 2017×2017 на правоаголници и квадрати со должини на страни 335, 6 и 1, како на цртеж В. Квадратите означени со Б и А ќе ги пополниме како на цртежите Б и А, соодветно, а во горното десно поле на таблата ќе ставиме уште една кралица. На овој начин распоредивме $8 \cdot 335 + 8 + 1 = 2689$ кралици. Лесно се проверува дека овој распоред ги задоволува условите на задачата.

18. Разгледуваме поделби на шаховска 8×8 табла на p правоаголници кои немаат заеднички внатрешни точки, такви што секоја поделба ги задоволува условите:

а) Секој правоаголник се состои од еднаков број бели и црни полиња.

б) Ако со a_i го означиме бројот на бели полиња во i – тиот правоаголник, тогаш $a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_p$.

Најди ја најголемата вредност на p за која ваква поделба е можна. За вака најденото p најди ги сите можни низи броеви $a_1, a_2, a_3, ..., a_p$.

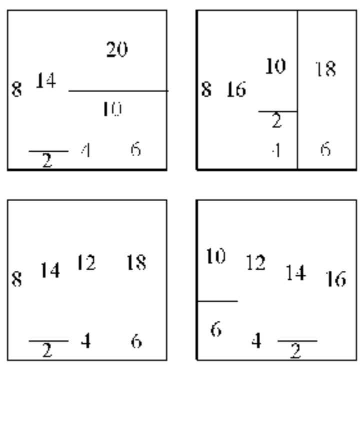
Решение. Вкупниот број на бели полиња е

$$a_1 + a_2 + ... + a_p = 32.$$

Бидејќи сите броеви a_i се различни меѓу себе исполнето е неравенството

$$a_1 + a_2 + ... + a_p \ge 1 + 2 + 3 + ... + p = \frac{p(p+1)}{2},$$

од каде се добива $p \le 7$. Бројот 32 може да се запише на следниве пет начини како збир од седум меѓусебно различни броеви:



$$\begin{aligned}32 &= 1+2+3+4+5+6+11\\ &= 1+2+3+4+5+7+10\\ &= 1+2+3+4+5+8+9\\ &= 1+2+3+4+6+7+9\\ &= 1+2+3+5+6+7+8.\end{aligned}$$

На првиот од овие начини не соодветствува ниту една поделба на шаховската табла, бидејќи на неа не може да се смести правоаголник со 22 полиња. На останатите случаи соодветствуваат поделби како на горните цртежи.

30. ЗАДАЧИ НА ТРИАГОЛНА РЕШЕТКА

1. *Триаголна* $n \times n$ *решетка* е рамностран триаголник со должина на страна n, и поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Пресечните точки на линиите на решетката ги нарекуваме *јазли* на решетката. Докажи дека триаголна решетка со должина на страна n има n^2 мали триаголници и $\binom{n+2}{2}$ јазли.

   Решение. Нека е дадена триаголна решетка. Тогаш одејќи одгоре-надолу во првиот ред имаме 1 мал триаголник, во вториот ред имаме 3 мали триаголници, во третиот ред имаме 5 мали триаголници, во претпоследниот ред $2n-3$ и во последниот ред имаме $2n-1$ мали триаголници. Според тоа, решетката содржи

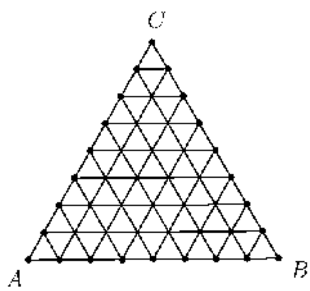
$$1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)=n^2$$

   мали триаголници. Понатаму, решетката содржи n хоризонтални линии и притоа гледајќи одгоре надолу прво имаме 1 јазол, па на првата линија имаме 2 јазли, па на втората линија имаме 3 јазли, ..., на $k-$тата линија имаме $k+1$ јазол, ..., на $n-$тата линија имаме $n+1$ јазол. Според тоа, бројот на јазлите на решетката е еднаков на

$$1+2+3+...+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\binom{n+2}{2}.$$

2. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на ромбовите составени од два мали триаголници.

   Решение. Нека е даден триаголникот ABC (за $n=8$ види цртеж десно). Ги броиме ромбовите со остар агол чии краци се паралелни со краците на аглите на триаголникот ABC. На пример, за темето A такви ромбови имаме



$$(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

   Според тоа, бројот на сите ромбови составени од два мали триаголници е

$$d(n)=\frac{3n(n-1)}{2}=3\binom{n}{2}.$$

3. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на паралелограмите од видот $1\times k$ $(k\geq 1)$ чии страни се на делбените линии и темињата се во јазлите на решетката.

Решение. Ги броиме паралелограмите од видот $1\times k$ $(k\geq 2)$. Тогаш за најдолниот ред AB имаме две ориентации на такви паралелограми (од A кон B и обратно), па за целиот триаголник имаме вкупно 6 ориентации. За едната ориентација во првиот ред имаме $\binom{n-1}{2}$ паралелограми, во вториот ред имаме $\binom{n-2}{2}$ итн. во $(n-2)-$ от ред имаме $\binom{2}{2}$ паралелограми. Според тоа, за една ориентација вкупниот број паралелограми е еднаков на

$$\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{2}+...+\binom{2}{2}=\frac{(n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)+...+2\cdot 1}{2}$$

$$=\frac{(n-1)^2+(n-2)^2+...+2^2+1^2-(n-1)-(n-2)-...-2-1}{2}$$

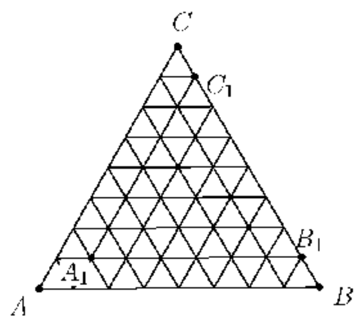
$$=\frac{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{n(n-1)}{2}}{2}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\binom{n}{3}.$$

Конечно, бидејќи имаме 6 ориентации и ако го земеме предвид бројот на ромбовите со страна 1, за бараниот број паралелограми добиваме

$$p(n)=3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}.$$

4. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Колку паралелограми може да се формираат од малите триаголници?

Решение. Ги разгледуваме јазлите кои се долно лево теме на паралелограм со остар агол чии краци се паралелни на краците на аголот во темето A. Бројот на спротивните темиња го определува бројот на паралелограмите. За темето A тоа се сите јазли на триаголникот $A_1B_1C_1$, чија должина на страна е $n-2$, па од задача 1 следува дека тој има $\binom{n}{2}$ јазли. Понатаму,



за следните јазли кои се на страната AB имаме $\binom{n-1}{2},\binom{n-2}{2},...,\binom{2}{2}$ паралелограми. Според тоа, за првот ред имаме

$$\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{2}+...+\binom{2}{2}=\binom{n+1}{3}$$

паралелограми. Ако долното лево теме е на следниот ред, тогаш бројот на паралелограмите е

$$\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{2}+...+\binom{2}{2}=\binom{n}{3}$$

итн. Според тоа, бројот на паралелограмите чие долно лево теме е со остар агол и краци кои се паралелни на краците на аголот во темето A е еднаков на

$$\binom{n+1}{3}+\binom{n}{3}+...+\binom{3}{3}=\binom{n+2}{4}.$$

Конечно, имаме три темиња, па затоа вкупниот број на разгледуваните паралелограми е $P(n)=3\binom{n+2}{4}$.

5. Докажи дека:

а) $\binom{2k}{2}+\binom{2k-2}{2}+...+\binom{4}{2}+\binom{2}{2}=\frac{1}{2}(\binom{2k+1}{3}+k^2)$,

б) $\binom{2k-1}{2}+\binom{2k-3}{2}+...+\binom{5}{2}+\binom{3}{2}=\frac{1}{2}(\binom{2k+1}{3}-k^2)$.

Решение. *Прв начин*. Идентитетите ќе ги докажеме со индукција по k.

а) За $k=1$ имаме $\frac{1}{2}(\binom{2\cdot 1+1}{3}+1^2)=\frac{1}{2}(1+1)=1=\binom{2\cdot 1}{2}$, т.е. тврдењето е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за k. Тогаш за $k+1$ добиваме

$$\begin{aligned}\binom{2(k+1)}{2}+\binom{2k}{2}+...+\binom{4}{2}+\binom{2}{2}&=\binom{2(k+1)}{2}+\frac{1}{2}(\binom{2k+1}{3}+k^2)\\&=\frac{(2k+2)(2k+1)}{2}+\frac{1}{2}(\binom{2k+1}{3}+k^2)\\&=\frac{1}{2}(\frac{(2k+1)(4k^2+10k+12)}{6}+k^2)\\&=\frac{1}{2}(\frac{(2k+1)((2k+3)(2k+2)+6)}{6}+k^2)\\&=\frac{1}{2}(\frac{(2k+3)(2k+2)(2k+1)}{6}+k^2+2k+1)\\&=\frac{1}{2}(\binom{2k+3}{3}+(k+1)^2),\end{aligned}$$

па од принципот на матемтичка индукција следува дека важи за секој природен број k.

б) Доказот е наполно аналоген на доказот на идентитетот под а). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Втор начин. Да ставиме

$$f(2k)=\binom{2k}{2}+\binom{2k-2}{2}+...+\binom{4}{2}+\binom{2}{2}$$

и

$$f(2k-1)=\binom{2k-1}{2}+\binom{2k-3}{2}+...+\binom{5}{2}+\binom{3}{2}.$$

Тогаш

$$f(2k)+f(2k-1)=\binom{2k}{2}+\binom{2k-1}{2}+...+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=\binom{2k+1}{3}$$

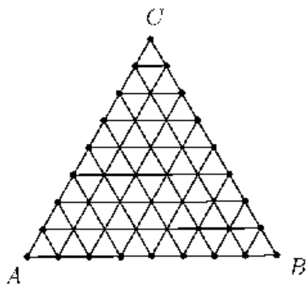
а од Паскаловото правило следува

$$f(2k)-f(2k-1)=\binom{2k}{2}-\binom{2k-1}{2}+\binom{2k-2}{2}-\binom{2k-3}{2}+...+\binom{4}{2}-\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$$
$$=\binom{2k-1}{1}+\binom{2k-3}{1}+...+\binom{3}{1}+1$$
$$=(2k-1)+(2k-3)+...+3+1=k^2.$$

Сега, ако ги собереме последните две равенства го добиваме идентитетот под а), а ако ги одземеме истите равенства го добиваме идентитетот под б). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

6. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на ромбовите чии страни се на делбените линии и темињата се во јазлите на решетката.

Решение. Нека е даден триаголникот ABC (за $n=8$ види цртеж десно). Ги броиме ромбовите со остар агол чии краци се паралелни со краците на аглите на триаголникот ABC. Во задача 2 докажавме, дека за еден агол имаме $\binom{n}{2}$ мали ромбови составени од два триаголници. Понатаму, имаме



$$(n-3)+(n-4)+...+2+1=\frac{(n-2)(n-3)}{2}=\binom{n-2}{2}$$

ромбови составени од осум триаголници, па

$$(n-5)+(n-6)+...+2+1=\frac{(n-4)(n-5)}{2}=\binom{n-4}{2}$$

ромбови составени од осумнаесет триаголници итн.

Конечно при ознаките од претходната задача следува дека за $n=2k$ бројот на ромбовите е:

$$D(2k)=3(\binom{2k}{2}+\binom{2k-2}{2}+...+\binom{4}{2}+\binom{2}{2})=\frac{3}{2}(\binom{2k+1}{3}+k^2)=\frac{k(k+1)(4k-1)}{2},$$

а за $n=2k-1$ бројот на ромбовите е

$$D(2k-1)=3(\binom{2k-1}{2}+\binom{2k-3}{2}+...+\binom{5}{2}+\binom{3}{2})=\frac{3}{2}(\binom{2k+1}{3}-k^2)=\frac{k(k-1)(4k+1)}{2}.$$

7. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на триаголниците чии страни се на делбените линии и темињата се во јазлите на решетката.

Решение. Забележуваме дека имаме два типа триаголници, тип X и тип Y. Кај типот X врвот е меѓу основата и темето на големиот триаголник, а кај типот Y врвот е мешу основата и основата на големиот триаголник. Ќе ги изброиме двата типа триаголници одделно.

Да ги изброиме триаголниците од типот X. Започнуваме од темето C. Тоа е теме на n триаголници од типот X. Двата јазли под него се темиња на $n-1$ триаголник, трите јазли под нив се темиња на по $n-2$ триаголника итн. Според тоа, имаме

$$\begin{aligned}X(n) &= 1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+...+n\cdot 1\\ &= n(1+2+...+n)-1\cdot 2-2\cdot 3-...-n(n-1)\\ &= \tfrac{n^2(n+1)}{2}-(1^2+2^2+...+(n-1)^2)-(1+2+...+(n-1))\\ &= \tfrac{n^2(n+1)}{2}-\tfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\tfrac{n(n-1)}{2}\\ &= \tfrac{n}{6}(3n^2+3n-2n^2+3n-1-3n+3)\\ &= \tfrac{(n+2)(n+1)n}{6}=\binom{n+2}{3}.\end{aligned}$$

Сега да ги изброиме триаголниците од типо Y. Забележуваме дека секој триаголник од типот Y е половина од три ромба со темиња во јазлите на дадената триаголна решетка и страни на линиите на решетката. Според задача 6 бројот на овие ромбови е

$$D(2k)=\tfrac{k(k+1)(4k-1)}{2} \text{ и } D(2k-1)=\tfrac{k(k-1)(4k+1)}{2}.$$

Оттука го наоѓаме вкупниот број на триаголници кога $n=2k$ и $n=2k-1$. Имаме:

$$A(2k)=X(2k)+\tfrac{1}{3}D(2k)=\binom{2k+2}{3}+\tfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}=\tfrac{k(k+1)(4k+1)}{2},$$

$$A(2k-1)=X(2k-1)+\tfrac{1}{3}D(2k-1)=\binom{2k+1}{3}+\tfrac{k(k-1)(4k+1)}{6}=\tfrac{k(4k^2-k-1)}{2}.$$

8. Докажи дека за секој природен број $k\geq 2$ важи:

а) $\binom{2k}{3}+\binom{2k-2}{3}+...+\binom{4}{3}=\tfrac{k^2(k+1)(k-1)}{3}$,

б) $\binom{2k-1}{3}+\binom{2k-3}{3}+...+\binom{5}{3}+\binom{3}{3}=\tfrac{k(k-1)(2k^2-2k-1)}{2}$.

Решение. *Прв начин*. Идентитетите ќе ги докажеме со индукција по k.

а) За $k=2$ имаме $\binom{2\cdot 2}{3}=\binom{4}{3}=4=\tfrac{2^2(2+1)(2-1)}{3}$, т.е. тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $k\geq 2$. Тогаш за $k+1$ добиваме

$$\begin{aligned}\binom{2(k+1)}{3}+\binom{2k}{3}+...+\binom{4}{3} &= \binom{2k+2}{3}+\tfrac{k^2(k+1)(k-1)}{3}\\ &= \tfrac{(2k+2)(2k+1)2k}{6}+\tfrac{k^2(k+1)(k-1)}{3}\\ &= \tfrac{k(k+1)(k^2+3k+2)}{3}=\tfrac{(k+1)^2(k+2)k}{3},\end{aligned}$$

па од принципот на матемтичка индукција следува дека важи за секој природен број k.

б) Доказот е наполно аналоген на доказот на идентитетот под а). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Втор начин. Нека $k \geq 2$ и да ставиме

$$g(2k) = \binom{2k}{3} + \binom{2k-2}{3} + \ldots + \binom{4}{3} \text{ и } g(2k-1) = \binom{2k-1}{3} + \binom{2k-3}{3} + \ldots + \binom{3}{3}.$$

Тогаш лесно се докажува дека

$$g(2k) + g(2k-1) = \binom{2k}{3} + \binom{2k-1}{3} + \binom{2k-2}{3} + \binom{2k-3}{3} + \ldots + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = \binom{2k+1}{4},$$

а од Паскаловото правило и задача 5 следува

$$g(2k) - g(2k-1) = \binom{2k}{3} - \binom{2k-1}{3} + \binom{2k-2}{3} - \binom{2k-3}{3} + \ldots + \binom{4}{3} - \binom{3}{3}$$

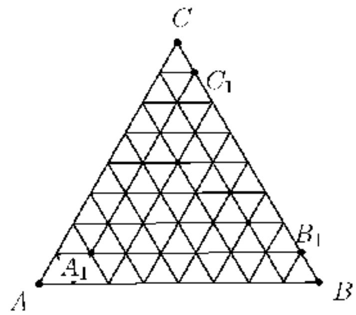
$$= \binom{2k-1}{2} + \binom{2k-3}{2} + \ldots + \binom{3}{3}$$

$$= \frac{1}{2}(\binom{2k+1}{3} - k^2).$$

Сега, ако ги собереме последните две равенства го добиваме идентитетот под а), а ако ги одземеме истите равенства го добиваме идентитетот под б). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

9. Рамностран триаголник со должина на страна n е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1, чии страни се паралелни на страните на триаголникот. Определи го бројот на сите рамнокраки трапези чии страни се на делбените линии и темињата се во јазлите на решетката.

Решение. Прво ќе ги преброиме трапезите од прв вид, т.е. трапезите кај кои големата основа големата основа се наоѓа меѓу малата основа и страната на триаголникот. Нивниот број да го означиме со $F_1(n)$. Ги разгледуваме јазлите, кои се лево долно теме на трапез и се наоѓаат на страната AB на триаголникот. Ако долното лео теме на трапезот е A, тогаш горното десно теме е еден од јазлите на триаголникот $A_1B_1C_1$, па затоа имаме $\binom{n}{2}$ трапези. Понатаму, на потполно ист начин се покажува дека последователно за јазлите кои се на страната AB имаме $\binom{n-1}{2}, \binom{n-2}{2}, \ldots, \binom{2}{2}$ рамнокраки трапези, што значи дека вкупно имаме



$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{2}{2} = \binom{n+1}{3}$$

рамнокраки трапези. Сега аналогно за следниот ред имаме

$$\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \ldots + \binom{2}{2} = \binom{n}{3},$$

за следниот ред

$$\binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{2} + \ldots + \binom{2}{2} = \binom{n-1}{3}$$

итн. рамнокраки трапези. Според тоа, бројот на рамнокраките трапези од првиот вид со основи паралелни на една од страните на триаголникот е еднаков на

$$\binom{n+1}{3}+\binom{n}{3}+\binom{n-3}{3}+...+\binom{3}{3}=\binom{n+2}{4},$$

па како имаме три можности, добиваме $F_1(n)=3\binom{n+2}{4}$.

Сега, да ги преброиме рамнокраките трапези кај кои помалата основа е меѓу поголемата основа и страната на триаголникот. Такви трапези кои во себе содржат само триагплници од еден ред има:

$$\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{2}+...+\binom{2}{2}=\binom{n}{3},$$

кои во себе содржат триаголници од два реда има

$$\binom{n-3}{2}+\binom{n-4}{2}+...+\binom{2}{2}=\binom{n-2}{3},$$

кои во себе содржат триаголници од три реда има

$$\binom{n-5}{2}+\binom{n-6}{2}+...+\binom{2}{2}=\binom{n-4}{3}$$

итн. Но, триаголникот има три страни, па затоа од задача 9 следува дека вкупниот број рамнокраки трапези $F_2(n)$ од овој вид за $n=2k$ е:

$$\begin{aligned}F_2(2k)&=3(\binom{2k}{3}+\binom{2k-2}{3}+...+\binom{4}{3})\\&=k^2(k+1)(k-1),\end{aligned}$$

а за $n=2k-1$ е

$$\begin{aligned}F_2(2k-1)&=3(\binom{2k-1}{3}+\binom{2k-3}{3}+...+\binom{5}{3}+\binom{3}{3})\\&=\frac{3k(k-1)(2k^2-2k-1)}{2}.\end{aligned}$$

Конечно, од претходните разгледувања добиваме дека бараниот број трапези $F(n)$, за $n=2k$ е:

$$\begin{aligned}F(2k)&=F_1(2k)+F_2(2k)\\&=3\binom{2k+2}{4}+k^2(k+1)(k-1)\\&=\frac{k(k+1)(6k^2-2k-1)}{2},\end{aligned}$$

а за $n=2k-1$ е:

$$\begin{aligned}F(2k-1)&=F_1(2k-1)+F_2(2k-1)\\&=3\binom{2k+1}{4}+\frac{k(k-11)(2k^2-2k-1)}{2}\\&=k(k-1)(3k^2-k-1).\end{aligned}$$

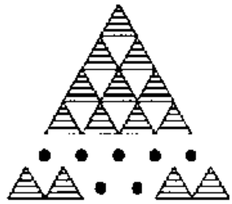
10. Секоја страна на рамностран триаголник ја делиме на k еднакви дела. Низ точките на страните повлекуваме прави паралелни на страните на триаголникот. Повлекуваме искршена линија низ триаголникот, при што:

а) Ниеден триаголник не се јавува два пати;

б) Секој нареден триаголник на искршената линија има заедничка страна со претходниот.

Низ колку триаголници минува искршената линија?

Решение. Да забележиме дека триаголникот е разбиен на k^2 мали триаголници. Да го обоиме триаголникот со две бои. Притоа црни триаголници има k повеќе од бели. Бројот на белите триаголници е $\frac{k(k-1)}{2}$ а на црните е $\frac{k(k+1)}{2}$. Два триаголници со иста боја не се допираат. Затоа, при поминувањето на искршената линија се менува бојата на триаголникот. Ако тргнеме од триаголникот со црна боја, тогаш можеме да ги опфатиме сите бели триаголници, т.е. $\frac{k(k-1)}{2}$ и уште $\frac{k(k-1)}{2}+1$ црни триаголници. Значи, сите опфатени триаголници се:



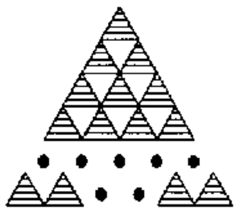
$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+1=k^2-k+1.$$

11. Рамностран триаголник со должина на страна $n, n\in\mathbb{N}$ е поделен со прави паралелни на страните на рамнострани триаголници со должина на страна 1. Колку најмногу отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници може да се отстранат така што да не постои триаголник со страни кои се наоѓаат меѓу отстранетите отсечки?

Решение. Бројот на отсечките со должина 1, паралелни на секоја страна од триаголникот е еднаков на

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

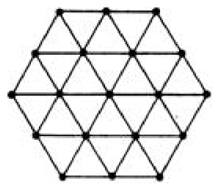
што значи дека вкупниот број на отсечки со должина 1 е еднаков на $\frac{3n(n+1)}{2}$. Секои две отсечки, паралелни со две страни на почетниот триаголник не формираат мал триаголник, бидејќи секој мал триаголник се состои од три отсечки кои се паралелни на сите три страни. Според тоа, сигурно може да се отстранат $\frac{2}{3}\cdot\frac{3n(n+1)}{2}=n(n+1)$ отсечки со должина 1.



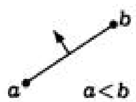
Ќе докажеме дека повеќе отсечки не може да се отстранат. Да штрафираме триаголници со должина на страна 1 како на цртежот. Овие триаголници ги содржат сите отсечки со должина 1, при што секоја отсечка припаѓа само на еден триаголник. Затоа, за да не може да се состави ниеден од штрафираните триаголници, во секој може да се отфрлат најмногу 2 отсечки. Според тоа, бројот на отстранетите отсечки не е поголем од $\frac{2}{3}$ од вкупниот број отсечки, т.е. не е поголем од $\frac{2}{3}\cdot\frac{3n(n+1)}{2}=n(n+1)$.

12. Правилен шестаголник е поделен на 24 рамнострани триаголници како што е прикажано на цртеж 1. На 19-те темиња на триаголниците им се придружени 19 различни броеви. Докажи дека меѓу 24-те триаголници постојат најмалку 7 такви што за броевите a,b,c придружени на темињата на овие триаголници и земени во редослед спротивно од движењето на стрелките на часовникот важи $a<b<c$.

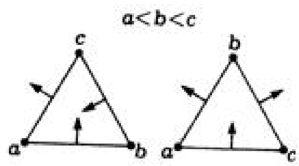
Решение. На секоја страна на триаголник од дадената поделба (цртеж 1) и придружуваме стрелка насочена лево од страната, ако по страната се движиме од теме со помал број кон теме со поголем број (цреж 2). Ако броевите, запишани во темињата на некој триаголник, растат кога темињата ги обиколуваме во насока спротивна од насоката на стрелките на часовникот, тогаш кон внатрешноста на тој триаголник се насочени две стрелки, а ако се движиме во насока на стрелките на часовникот тогаш кон внатрешноста на триаголникот е насочена една стрелка. Нека имаме n триаголници од првиот тип и m триаголници од вториот тип, $m+n=24$. Бидејќи вкупниот број на стрелки насочени кон внатрешноста на шестаголникот е $N=2n+m=24+n$ доволно е да докажеме дека $N\geq 31$.


Цртеж 1

Стрелките кои соодветствуваат на 30 внатрешни отсечки на поделбата на



Цртеж 2



Цртеж 3

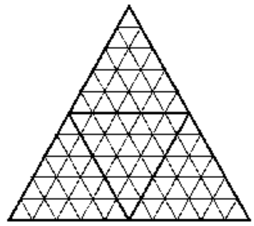
шестаголникот лежат во внатрешноста на шестаголникот. Од преостанатите дванаесет стрелки, соодветни на страните на триаголниците кои лежат на контурата на шестаголникот барем една мора да е насочена кон внатрешноста на шестаголникот. Во спротивно, за броевите $a_1,a_2,...,a_{12}$ соодветни на темињата кои лежат на контурата треба да важи $a_1<a_2<...<a_{12}<a_1$, што не е можно. Значи, $N\geq 30+1=31$.

13. Дадена е триаголна $n\times n$ решетка. Триаголниците, кои се наоѓаат меѓу две соседни паралелни прави формираат лента.

а) Нека $n=10$. Колку најмногу полиња може да се обојат така, што никои две обоени полиња не се во иста лента во ниту еден правец на решетката?

б) Нека $n=9$. Колку најмногу полиња може да се обојат така, што никои две обоени полиња не се во иста лента во ниту еден правец на решетката?

Решение. а) Да го поделиме триаголникот на 4 триаголника со по 25 мали триаголници (цртеж десно). Нека во аголните триаголници се обоени a,b,c мали триаголници, а во централниот триаголник се обоени d мали триаголници. Бидејќи било кои два аголни триаголници заедно со централниот триаголник се покриени од 5 ленти (види цртеж десно), а во секоја лента може да има најмногу по едно обоене поле, добиваме дека:



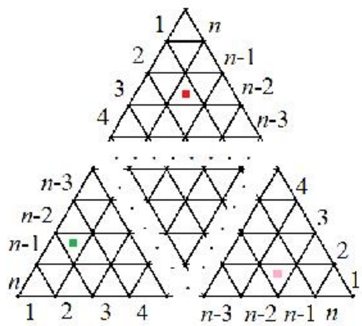
$$a+b+d \le 5, \quad a+c+d \le 5, \quad b+c+d \le 5.$$

Според тоа,

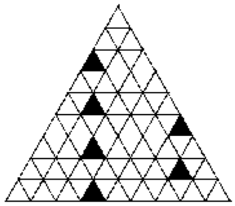
$$a+b+c+d = \frac{1}{2}(2a+2b+2c+2d)$$
$$\le \frac{1}{2}(2a+2b+2c+3d) \le \frac{15}{2},$$

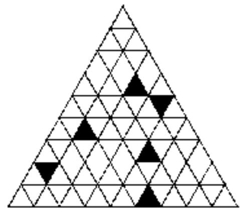
односно $a+b+c+d \le 7$.

б) Да ја разгледаме задачата за произволен број n. Спроти секоја од страните на почетниот триаголник ги нумерираме лентите, при што за дадена страна почнуваме од лентата која ја содржи избраната страна на триаголникот (цртеж десно). На тој начин за секој мал триаголник имаме подредена тројка броеви, кои ги запишуваме почнувајќи од бројот со кој е означена хоризонталната лента во насока обратна на насоката на движење на стрелките на часовникот. Така на полето во кое е портокаловото квадратче му соодветствува тројката $(1,2,n-2)$, на полето во кое е црвеното квадратче му соодветствува тројката $(n-2,2,2)$ и на полето во кое е зеленото квадратче му соодветствува тројката $(2,n-2,1)$. Да ги наречеме овие тројки координати на соодветниот мал триаголник. Збирот на координатите на секој мал триаголник е $n+2$ (кога има иста ориентација како почетниот триаголник) или $n+1$ (ако има спротивна ориентација од почетниот триаголник). Нека се обоени k мали триаголничиња, така што никои две не се во иста лента. Од една страна за збирот на нивните координати S имаме $S \le k(n+2)$, а од друга страна бидејќи збирот по секоја координата не е помал од $1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$, добиваме $3\frac{k(k+1)}{2} \le S$. Според тоа, $3\frac{k(k+1)}{2} \le S \le k(n+2)$, од каде добиваме $k \le \frac{2n+1}{3}$, т.е. $k \le [\frac{2n+1}{3}]$.



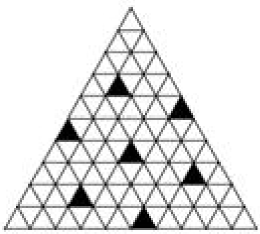
Како може да се обојат точно точно $k=[\frac{2n+1}{3}]$, кога $n=9$, т.е. $k=[\frac{2\cdot 9+1}{3}]=6$ мали триаголници е прикажано на долните два цртежи.

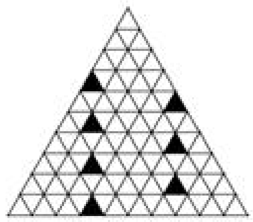




Како може да се обојат точно $k=[\frac{2n+1}{3}]$, кога $n=10$, т.е. $k=[\frac{2\cdot 10+1}{3}]=7$ мали триаголници е прикажано на следните два цртежи.

Во општ случај боењето на $k=[\frac{2n+1}{3}]$ мали триаголници може да се реализира на следниов начин.



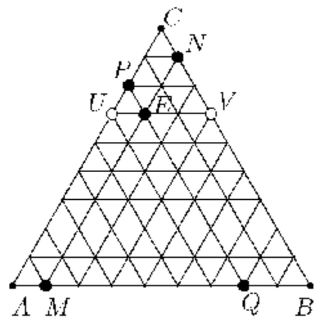


Ставаме $m=[\frac{n+1}{3}]$. Го боиме $(m+1)-$виот мал триаголник сметано одлево кој има иста ориентација како и големиот триаголник. Во истата вертикала ги боите триаголниците кои се над него и се со иста ориентација. Така сме обоиле $m+1$ мал триаголник. Во втората хоризонтална лента го боиме $(2m+1)-$виот мал триаголник сметано одлево кој има иста ориентација како и големиот триаголник. Во истата вертикала вертикала ги боите триаголниците кои се над него и се со иста ориентација. Така сме обоиле уште $n-1-2m$ мали триаголници. Значи, вкупно сме обоиле

$$m+1+n-1-2m=n-m=n-[\frac{n+1}{3}]=[\frac{2n+1}{3}].$$

Точно на последното равенство непосредно се покажува со разгледување на деливоста на бројот n со 3.

14. Град има форма на триаголна $n\times n$ решетка. *Улици* во овој град ќе ги наречеме сите линии од решетката, а *раскрсници* сите јазли од решетката. Градоначалникот решил да ги осветли сите улици на градот со светилки, поставени на раскрсниците, при што не смее да има две светилки на една иста улица. Секоја светилка ги осветлува сите улици, кои излегуваат од раскрсницата на која е светилката. Колку најмногу светилки може да постави фирмата која треба да го реализира осветлувањето на градот?



Решение. Да го разгледаме цртежот десно. Светилката поставена на раскрсницата E ги осветлува улиците MN, PQ и UV. На секоја раскрсница во соодветствие и ставаме тројка броеви – растојанијата од раскрсницата до крајните улици, т.е. до страните на триаголникот ABC. За единица должина ја земаме должината на висината на еден мал триаголник. Така, на пример, координатите на точката E се 1, 2 и 6.

Нека $n \geq 2$ е природен број, N е максималниот број светилки кои може да се поставаат според условите на задачата и $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$ е множеството од тројки координати кои ги задоволуваат условите на задачата. Притоа, ако ставиме $T_i = (a_i, b_i, c_i)$, тогаш бидејќи збирот на растојанијата од секоја внатрешна точка на рамностраниот триаголник е еднаков на должината на неговата висина, добиваме дека $a_i + b_i + c_i = n$. Да ги запишеме тројките како во следнава табела:

a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_N	b_N	c_N

Сега, од условот на здачата следува дека во секоја колона нема два исти броја (во спротивно две светилки ќе осветлуваат една иста улица), па затоа

$$a_1 + a_2 + ... + a_N \geq 0 + 1 + 2 + ... + (N-1) \geq \frac{N(N-1)}{2},$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_N \geq 0 + 1 + 2 + ... + (N-1) \geq \frac{N(N-1)}{2},$$

$$c_1 + c_2 + ... + c_N \geq 0 + 1 + 2 + ... + (N-1) \geq \frac{N(N-1)}{2}.$$

Ако ги собереме трите неравенства и искористиме дека

$a_i + b_i + c_i = n$, за $i = 1, 2, ..., N$,

добиваме

$$nN \geq 3\frac{N(N-1)}{2},$$

од каде следува $2n \geq 3N - 3$, односно

$$N \leq [\tfrac{2n}{3}] + 1.$$

Во табелите 1, 2 и 3 е прикажано како може за случаите

$$n = 3k - 1, n = 3k \text{ и } n = 3k + 1, \text{ за } k \geq 1,$$

да се распоредат светилки при што $N = [\frac{2n}{3}] + 1$.

$n=3k-1$, $[\frac{2n}{3}]+1=2k$		
a_i	b_i	c_i
0	$k+1$	$2k-2$
1	$k+2$	$2k-4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	$2k$	0
k	0	$2k-1$
$k+1$	1	$2k-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k-1$	$k-1$	1

Табела 1

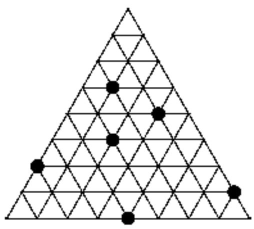
$n=3k$, $[\frac{2n}{3}]+1=2k+1$		
a_i	b_i	c_i
0	k	$2k$
1	$k+1$	$2k-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2k$	0
$k+1$	0	$2k-1$
$k+2$	1	$2k-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k$	$k-1$	1

Табела 2

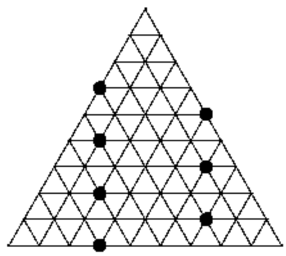
$n=3k+1$, $[\frac{2n}{3}]+1=2k+1$		
a_i	b_i	c_i
0	k	$2k+1$
1	$k+1$	$2k-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2k$	1
$k+1$	0	$2k$
$k+2$	1	$2k-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k$	$k-1$	2

Табела 3

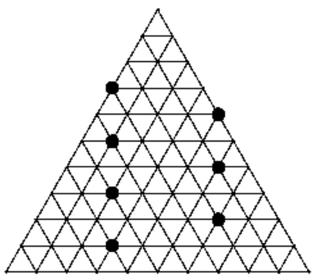
На долните цртежи се прикажани распореди на светилките за случаите $n=8,9$ и 10.



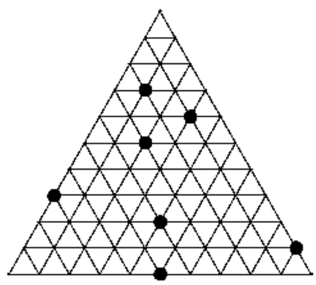
$n=8$



$n=9$



$n=10$



$n=10$

15. Во рамнина, 2014 прави се распоредени во три групи заемно паралелни прави. Определи го најголемиот можен број на триаголници кои ги формираат правите (секоја страна од триаголникот лежи на некоја од правите).

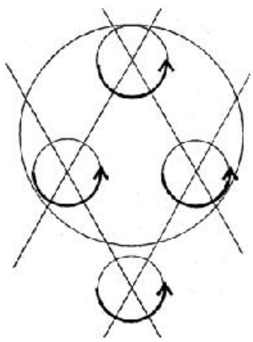
Решение. Нека $a \ge b \ge c$ се броевите на прави во трите групи за кои се добива најголем можен број на триаголници. Тогаш $a+b+c=2014$, а најголемиот можен број на триаголници е abc (кога никои три прави немаат заедничка точка). Ќе докажеме дека $a \le c+1$.

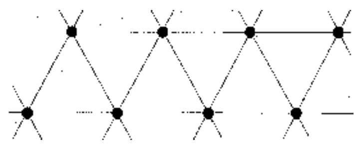
Да го претпоставиме спротивното, т.е. $a > c+1$. Тогаш

$$abc < b(ac+a-c-1) = b(a-1)(c+1),$$

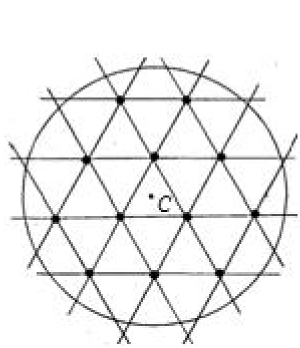
што е противречи на изборот на a, b и c. Не може $a=c$, бидејќи во тој случај $a=b=c=\frac{2014}{3}$ не е цел број. За a, b и c да бидат цели мора $a=672$ и $b=c=671$ и бројот на триаголници е $672\cdot 671^2$.

16. Секое множество од n точки во рамнината ќе го наречеме $n-$аголник. Постои дванаесетаголник K во двобојна (сино-црвена) рамнина P така, што P не содржи ниту монохроматска црвена отсечка со должина 1, ниту монохроматски син дванаесетаголник, складен со K. Докажи!





Решение. Прво ќе ја опишеме рамнината P. Конструираме решетка од рамнострани триаголници со должина на страна 2 (цртеж десно). Ја боиме црвено внатрешноста на секој круг со центар на решетката и радиус $\frac{1}{2}$, лакот од неговата гранична кружница под хори-зонталниот дијаметар и најлевата точка од тој дија-метар. Преостанатиот дел од рамнината го боиме во сино (цртеж лево). Лесно се покажува дека, добие-ната двобојна рамнина P не содржи монохромат-ска црвена отсечка со должина 1. Исто така, секој круг со радиус $\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}$ (види цртеж лево) целосно содржи барем еден од претходно конструираните кругови со радиус $\frac{1}{2}$.



Сега ќе го определиме бараниот дванаесетаголник K. Како погоре конструираме триаголна решетка, но сега со должина на страна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и кружница C со радиус $\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}$ и со центар на еден од триаголниците на решетката (цртеж десно). Во внатрешноста на C има точно 12 јазли на решетката, кои го формираат бараниот дванаесетаголник. Останува да докажеме, дека P не содржи монохроматски син дванаесетаголник, складен со K. Да разгледаме дванаесетагоник K_1, складен со K, заедно со кружницата C_1

која го ограничува и е еднаква на кружницата C. Како што забележавме, C_1 содржи барем еден од црвените кругови, да го означиме со C_2. Од друга страна, C_2 содржи барем едно теме на K_1, што значи дека сите темиња на K_1 не може да се сини.

31. КОМБИНАТОРНА ГЕОМЕТРИЈА

Под комбинаторна геометрија обично се подразбираат геометриски задачи со голем или неограничен степен на слобода, како што се геометриските распореди, егзистенцијалните задачи за чие решавање често пати се користи принципот на Дирихле, или разни задачи кои содржат комбинаторни идеи. Во претходните параграфи разгледавме поголем број задачи од комбинаторна геометрија, но заради нивната разновидност овде ќе дадеме дополнителни задачи од оваа интересна област.

1. Докажи дека меѓу било кои четири точки кои лежат во внатрешноста на единичната кружница постојат две кои се на растојание помало од $\sqrt{2}$.

   Решение. Нека O е центарот на кружницата. Меѓу било кои четири точки, за некои две од нив, да кажеме A и B, важи $\measuredangle AOB \le 90^\circ$, што заедно со $\overline{OA}, \overline{OB} < 1$ дава $\overline{AB} < \sqrt{2}$.

2. (*Задача на Силвестер*). Во рамнината е дадено конечно множество точки S такви што не лежат сите на една права. Докажи дека постои права која содржи точно две точки од множеството S.

   Решение. Да ги разгледаме недегенерираните триаголници чии темиња се точки од множеството S. Нека ABC е триаголникот кој има најкратка можна висина и нека тое е висината h_A повлечена од темето A. Ќе докажеме дека на правата BC нема други точки од множеството S, освен точките B и C. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека точката $D \in S \setminus \{B, C\}$ припаѓа на правата BC. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека распоредот е $B - C - D$ и дека $\measuredangle ACD \le 90^\circ$. Тогаш $\overline{AD} \ge \overline{CD}$, па во триаголникот ACD висината повлечена од темето C е пократка од висината повлечена од темето A, односно од h_A, што е противречност.

3. Рамнинска фигура Φ со плоштина поголема од 1012 е сместена во правоаголник $\boldsymbol{P}$ со димензии 1×2023. Докажи дека Φ содржи две точки на меѓусебно растојание 1.

   Решение. Нека Φ' е фигурата добиена од фигурата Φ со транслација ² за вектор $\vec{v}$ со должина 1 во правец на подолгата страна на правоаголникот $\boldsymbol{P}$. Фигурата Φ' лежи во правоаголникот ²$(\boldsymbol{P})$, што значи дека унијата $\Phi \cup \Phi'$

припаѓа на правоаголникот $\boldsymbol{P} \cup {}^2(\boldsymbol{P})$ со димензии 1×2024. Според тоа, плоштината на фигурата $\Phi \cup \Phi'$ е помала или еднаква на 2024, а бидејќи секој од фигурите Φ и Φ' има плоштина поголема од 1012, нивниот пресек не може да е празен. Нека $Y \in \Phi \cap \Phi'$ и нека точката X е таква што ${}^2(X) = Y$. Тогаш $X \in \Phi$ и притоа важи $\overline{XY} = 1$.

4. Затворена искршена линија во рамнината се состои од парен број отсечки со должина 1. Докажи, дека постојат две темиња на оваа искршена линија кои се на растојание поголемо од 1.

Решение. Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно. Нека

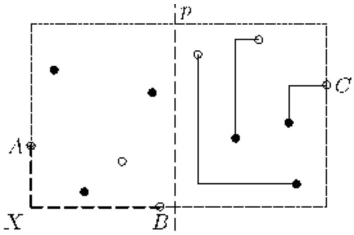
$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = ... = \overline{A_{2n-1}A_{2n}} = \overline{A_{2n}A_1} = 1.$$

Ако за некој $3 \le i \le 2n-1$ точките A_i и A_{i+1} се од иста страна на правата A_1A_2, тогаш четириаголникот $A_1A_2A_iA_{i+1}$ или четириаголникот $A_1A_2A_{i+1}A_i$ е конвексен со две спротивн страни еднакви на 1, па збирот на неговите дијагонали е поголем од 2, што значи дека барем едната од нив е поголема од 1, а тоа е противречност. Според тоа, за секој i точките A_i и A_{i+1} се на различни страни на правата A_1A_2. Тоа значи дека точките $A_3, A_5, ..., A_{2n-1}$ се од едната страна на правата A_1A_2, а точките $A_2, A_4, ..., A_{2n}$ се од другата нејзина страна. Но, тогаш четириаголникот $A_{2n}A_1A_3A_2$ е конвексен со две спротивни страни еднакви на 1, па збирот на неговите дијагонали е поголем од 2, што значи дека барем едната од нив е поголема од 1, што е противречност.

5. Во координатната рамнина секоја искршена линија која се состои од една вртикална и една хоризонтална отсечка ја нарекуваме *ќоше*. Во рамнината се дадени n сини и n црвени точки чии проекции на координатните оски Ox и Oy се меѓусебно различни. Докажи дека може да се нацртаат n ќошиња без заеднички точки такви што секое ќоше има една црвена и една сина крајна точка.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. Очигледно, за $n=1$ тврдењето е точно. Нека $n>1$ и нека се A, B и C соодветно крајната лева, крајната долна и крајната десна меѓу дадените точки. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека точката B е црвена.

1) Ако една од точките A и C, да кажеме A е сина, тогаш точките A и B ги поврзуваме со ќоше AXB така што отсечката AX е вертикална, а на преостанатите точки да ја примениме индуктвната претпоставка.



2) Ако точките A и C се црвени, даде-

ните точки можме да ги поделиме со вертикална права на p на две непразни множества така што лево од правата p (а исто така и десно) има еднаков број црвени и сини точки. Навистина, при непрекинато поместување на правата p од точката A до точката C, разликата на бројот на црвените и сините точки се менува од 1 (на почетокот) до -1 (на крајот) и тоа при секој премин преку една од точките таа разлика се менува за 1. Оттука следува дека во еден момент разликата мора да е 0. Сега е доволно индуктивната претпоставка да ја примениме на две множества точки лево и десно од правата p.

6. Во рамнината е дадено конечно множество точки. Докажи дека од него секогаш може да се исфрли една точка и остатокот да се подели на две подмножества, секое од кои има дијаметар строго помал од почетното множество.

Решение. Нека d е дијаметарот на даденото множество M. Да разглеаме две точки A и B од M такви шо $\overline{AB} = d$. Тогаш секоја точка M припаѓа на пресекот на круговите со радиус d и центри во A и B. Нека кружниците $k(A,d)$ и $k(B,d)$ се сечат во точките C и D. Тврдиме дека барем еден од пократките лаци AC и BD не содржи точки од множеството M различни од A и B. Навистина, ако претпоставиме дека лаците AC и BD содржат соодветно точки K и L од множеството M, тогаш $\overline{KB} = \overline{AB} = \overline{AL} = d$ и $\overline{AB} + \overline{KL} > \overline{BK} + \overline{AL}$, па е $\overline{KL} > d$, што е противречност.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека лакот AC не содржи точки од множеството M. Од множеството M да ја исфрлиме точката A, а преостанатите точки да ги поделиме на множества M' и M'', при што M' е множеството точки од множеството $M\setminus\{A\}$ кои се на правата AB или на иста страна од таа права како и точката C. Јасно, множествата M' и M'' имаат дијаметри помали од d.

7. Во внатрешноста на кружница со радиус 1 или на неа се наоѓаат 212 точки. Докажи дека постојат барем 2017 парови точки чие растојание е најмногу 1.

Решение. Да ја поделиме единичната кружница на шест еднакви делови, така да на секој дел соодветствува централен агол од 60°. Притоа растојанието на секои две точки од ови делови е помало или еднакво на 1. Нека a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 се броевите на точките во секој од шесте делови (ако точката припаѓа на заедничката граница на два дела ќе земеме дека припаѓа на еден од овие делови, кој било). Притоа важи

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 212 .$$

Според тоа, за секој $i=1,2,3,4,5,6$ во $i-$ от дел постојат точно $\frac{a_i(a_i-1)}{2}$ парови точки, чие најголемо меѓусебно растојание е помало или еднакво на 1. Значи, дадените 212 точки формираат најмалку $\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i(a_i-1)}{2}$ парови точки чие растојание е најмногу 1. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\frac{x(x-1)}{2}$. Оваа функција е конвексна на целата реална права, па од неравенството на Јенсен следува

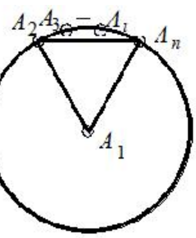
$$\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i(a_i-1)}{2}= f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(a_5)+f(a_6)$$
$$\geq 6f(\tfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6})=6f(\tfrac{212}{6})$$
$$=6\cdot\frac{\frac{106}{3}\cdot(\frac{106}{3}-1)}{2}=\frac{106\cdot 103}{3}=\frac{10918}{3}>2017,$$

што и требаше да се докаже.

8. Дадени се n, $n\geq 3$ точки во рамнината, такви што растојанието меѓу било кои две од нив не е поголемо од 1. Определи го најголемиот можен број на отсечки со должина 1 чии краеви се во дадените точки.

Решение. Ќе докажеме дека најголемиот можен број отсечки кои го задоволуваат условот на задачата е еднаков на n.

Ќе докажеме дека постојат n точки за кои што постојат n отсечки чии краеви се во дадените точки и имаат должина 1. Нека избереме единечна кружница k со центар во точка A_1. Нека $A_2, A_n\in k$ такви што $\overline{A_2A_n}=1$, а сите останати точки $A_3,...,A_{n-1}\in\widehat{A_2A_n}$. Тогаш отсечките $A_1A_i, i=2,3,...,n$ и A_2A_n имаат должина 1, а сите останати парови точки се на растојание помало од 1 (цртеж десно).



Сега ќе докажеме дека не може да постојат повеќе од n отсечки со бараното својство. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција.

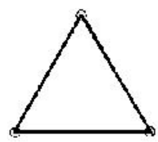
Нека точката X припаѓа на даденото множество. Бројот на отсечките со должина 1 чија една крајна точка е X го нарекуваме *степен* на точката X.

Во доказот ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Ако P,Q,R,S се точки такви што PQ и RS се сечат, тогаш

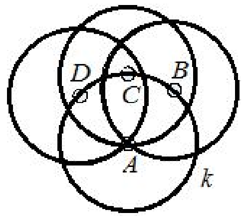
$$\overline{PQ}+\overline{RS}>\overline{PR}+\overline{QS}\ .\ \square$$

Нека $n=3$, т.е. дадени се три точки такви што растојанието меѓу било кои две од нив не е поголемо од 1. Ако тие точки се темиња на рамностран триаголник со страна 1, тогаш



имаме точно три отсечки со должина 1 и крајни точки во дадените. Значи тврдењето е точно за $n=3$ (цртеж десно).

Нека претпоставиме дека за било кои ($n-1$)-на дадена точка такви што растојанието меѓу било кои две од нив не е поголемо од 1, постојат најмногу $n-1$ парови точки кои се на растојание 1.



Нека се дадени n точки. Ако степенот на секоја од нив не е поголем од 2, тогаш нема што да се докажува. Затоа ќе претпоставиме дека постои точка A со степен поголем или еднаков на 3. Значи, постојат најмалку три точки B, C, D такви што

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 1 .$$

Тие припаѓаат на кружница k со центар во A и радиус 1. Нека претпоставиме дека во дадениот редослед се поставени на кружницата во насока обратна од движењето на стрелките на часовникот (види цртеж). Јасно, $\overline{BD} \le 1$ и $\overline{BC} \le 1$, $\overline{CD} \le 1$. Сите преостанати точки мора да припаѓаат во пресекот на круговите со центри A, B, C, D и радиуси 1. Од лемата следува дека единствена точка која од точката C е на растојание 1 е точката A. Значи степенот на C е 1. За преостанатите $(n-1)$-на точка е исполнета индуктивната претпоставка. Според тоа, за нив, има најмногу $n-1$ парови точки кои се на растојание 1, па заедно со отсечката AC нивниот број не е поголем од n.

Сега тврдењето на задачата следува од принципот на математичка индукција.

9. Во рамнината се дадени n прави такви што било кои две не се паралелни и било кои три не се сечат во една точка (прави во општа положба). На колку делови овие прави ја делат рамнината?

Решение. Нека x_n е бројот на деловите на кои $n-$те прави ја делат рамнината. Тогаш важат следниве равенства

$$x_1 = 2,\ x_n = x_{n-1} + n \text{ , за } n \ge 2 .$$

Навистина, нека $p_1, p\ ,..., p_n$ се прави во рамнината за кои важат условите на задачата. Правите $p_1, p\ ,..., p_{n-1}$ ја делат рамнината на x_{n-1} деловии и ја сечат правата p_n во $n-1$ точка. Овие $n-1$ точка ја делат правата p_n на n делови, а секој од нив дели еден од претходно воочените x_{n-1} делови на рамнината на два нови дела. Затоа со додавање на правата p_n бројот на деловите во рамнината се зголемува за n. Конечно, ако ги собереме равенствата $x_k = x_{k-1} + k$, за $k = 1, 2, ..., n$ добиваме

$$x_n = 2 + 2 + 3 + 4 + ... + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} .$$

10. Во просторот се дадени n рамнини такви што секои три рамнини се сечат и било кои четири немаат заедничка точка (рамнини во општа положба). На колку делови овие рамнини го делат просторот?

Решение. Нека x_n е бројот на деловите на кои $n-$те рамнини го делат просторот. Тогаш $x_1 = 2$. Нека се дадени n рамнини за кои се исполенти услвоите на задачата. Првите $n-1$ рамнини го делат просторот на x_{n-1} делови и ја сечат $n-$тата рамнина во $n-1$ права. Според претходната задача овие $n-1$ прави ја делат $n-$тата рамнина на $\frac{n^2-n+2}{2}$ делови и секој од овие делови го дели просторот на два нови дела. Затоа со додавање на новата рамнина бројот на деловите во просторот се зголемува за $\frac{n^2-n+2}{2}$. Значи, $x_n = x_{n-1} + \frac{n^2-n+2}{2}$, за $n \geq 2$. Конечно, ако ги собереме равенствата $x_k = x_{k-1} + \frac{k^2-k+2}{2}$, за $k = 2,...,n$ добиваме

$$x_n = 2 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(k^2 - k + 2) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2 - n + 6).$$

11. Дадена е точка T во просторот. На колку најмногу делови може да биде поделен просторот со n рамнини кои минуваат низ точката T?

Решение. Да земеме дека низ точката T минуваат n рамнини кои просторот го делат на најголем број можни делови и да земеме една од овие рамнини, која ќе ја означиме со ± .

Заради централната симетрија на целата конфигурација во однос на T добиваме дека секој од двата дела на кои просторот е поделен со ± има еднаков број делови $M(n)$ определени со дадените n рамнини.

Повлекуваме рамнина ° паралелна на ± , (± ≢ °) . Според условот на задачата рамнината ° , освен ± , ги сече сите дадени рамнини, при што добиваме $n-1$ пресечна права. Јасно, со овие прави рамнината ° ќе биде поделена на еднаков број делови колку што има делови просторот од онаа страна на ± на која се наоѓа ° , т.е. на $M(n)$. Очигледно, важи и обратното, т.е. со задавање на T,± и ° каде ° е поделена со $n-1$ права секогаш може да се најдат $n-1$ рамнини низ T кои ° ќе ја сечат точно во зададените прави.

Значи, задачата се сведува на тоа да се определи на колку најмногу делови рамнината може да биде поделена со $n-1$ права. Тој број да го означиме со $N(n-1)$. Според задача 9 имаме

$$N(n-1) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Конечно, бараниот број е еднаков на

$$2M(n) = 2N(n-1) = 2(1+\frac{n(n-1)}{2}) = n^2 - n + 2\,.$$

12. Во рамнината се дадени n кружници такви што секои две се сечат во две точки и било кои три немаат заедничка точка. На колку делови ја делат рамнината овие n кружници?

Решение. Нека x_n е бројот на деловите на кои е поделена рамнината со n кружници кои го задоволуваат условот на задачата. Бидејќи $n-$те кружници ја сечат $(n+1)-$та кружница во n парови точки и тие истата ја делат на $y_n = 2n$ делови, добиваме дека $(n+1)-$та кружница сече $y_n = 2n$ од x_n деловите на кои е поделена рамнината со $n-$те кружници. Затоа,

$$x_{n+1} = x_n + y_n = x_n + 2n\,. \qquad (1)$$

Ако во равенството (1), наместо n последователно ставиме $n-1,...,2,1$ и ги собереме добиените равенства наоѓаме $x_n = n^2 - n + 2$.

13. Во просторот се дадени n сфери такви што секои две се сечат во кружница и било кои три немаат заедничка кружница. На колку делови го делат просторот овие n сфери?

Решение. Бидејќи $n-$те сфери ја сечат $(n+1)-$та сфера во n кружници и како тие нејзината површина ја делат на $n^2 - n + 2$ делови, добиваме дека ако n сфери кои го задоволуваат условот на задачата го делат просторот на x_n делови, тогаш $n+1$ сфера просторот го делат на

$$x_{n+1} = x_n + (n^2 - n + 2) \qquad (1)$$

делови. Сега постапувајќи аналогно како во решението на претходната задача добиваме $x_n = \frac{n(n^2-3n+8)}{3}$.

14. На колку делови со своите дијагонали е поделен конвексен $n-$аголник таков што било кои три негови дијагонали не се сечат во една точка.

Решение. *Прв начин.* Со R_n да го означиме бројот на деловите на кои дијагоналите на $n-$аголникот ја делат неговата внатрешност. Ќе докажеме, дека

$$R_n = R_{n-1} + \binom{n-1}{3} + n - 2\,.$$

Нека имаме $(n-1)-$аголник. Ако го додадеме $n-$тото теме ќе се добијат $n-2$ нови делови со страна и уште онолку нови делови колку што има пресеци на новите дијагонали со старите дијагонали и страните, па бидејќи отсечката која ги поврзува $n-$тото и $k-$тото теме сече точно $(k-1)(n-(k+1))$ дијагонали тоа е

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)(n-(k+1)) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (n-1)$$

$$= \frac{n-1}{6}(3n(n-2) - n(2n-1) + 6)$$

$$= \frac{n-1}{6}(n^2 - 5n + 6) = \binom{n-1}{3},$$

Според тоа,

$$R_n = R_{n-1} + \binom{n-1}{3} + n - 2\,.$$

Сега имаме $R_3 = 1$ и од Паскаловото правило следува

$$R_n = \sum_{k=3}^{n-1}\binom{k}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} k = \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}\,.$$

Втор начин. Конвексниот $n-$аголникот има $\frac{n(n-3)}{2}$ дијагонали. Меѓу множеството S_1 на пресечните точки на дијагоналите на конвексниот $n-$аголник кои се наоѓаат во внатрешноста на $n-$аголникот и множеството комбинации од четврта класа од n елементи постои биекција (зошто?). Затоа $|S_1| = \binom{n}{4}$. Да ги конструираме сите дијагонали на конвексниот $n-$аголник една по друга. Со конструкцијата на секоја нова дијагонала се добиваат онолку нови области колку што е бројот на деловите на кои таа дијагонала ја делат веќе конструираните дијагонали, а тој број е за еден поголем од бројот на пресеците на новата дијагонала со претходно конструираните дијагонали. Според тоа, бројот на областите, кој на почетокот беше еднаков на 1, со конструкцијата на сите дијагонали се зголемува за збирот на бројот на сите дијагонали и бројот на сите пресечни точки, што значи дека тој е еднаков на

$$1 + \frac{n(n-3)}{2} + \binom{n}{4} = \binom{n}{4} + \binom{n}{2}\,.$$

15. Конвексен n-аголник е разделен на триаголници со дијагонали кои не се сечат меѓу себе. Секое теме на n-аголникот е теме на непарен број на делбени триаголници. Определи ги сите можни вредности за n.

Решение. Јасно е дека $n = 3$ е тривијално решение на задачата. За $n = 4$ може да се повлече најмногу една дијагонала која не се сече со останатите негови дијагонали. Но тогаш постојат две темиња на четириаголникот кои се темиња на по два делбени триаголници.

Во случајот $n = 5$ секоја повлечена дијагонала го дели петаголникот на два многуаголници од кои едниот е триаголник а едниот е четириаголник Ако имаме поделба што го задоволува условот на задачата имаме и една дијагонала. Во четираголникот, што се добива со повлекување на таа дијагонала, е повлечена најмногу уште една дијагонала која е делбена. Не е тешко да се провери дека во сите можни случаи претходно опишани секогаш ќе се јави теме од 5-аголникот, кое е теме на парен број на делбени триаголници.

Според тоа $n > 5$. Во даден n-аголник секоја негова дијагонала го дели на два многуаголници. Ако имаме поделба што го задоволува условот на задачата, тогаш не постои дијагонала која го дели n-аголникот на два многуаголници од кои едниот е четириаголник. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека имаме поделба на n-аголникот кој го задоволува условот од задачата, при што постои делбена дијагонала која n-аголникот го дели на два многуаголници од кои едниот е четириаголник. Тој четириаголник е поделен на два триаголници со една од двете негови дијагонали. Не е тешко да се види дека едно од темињата на четириаголникот е теме на парен број на триаголници кои се делбени за n-аголникот. Тоа не е можно, па според тоа таква дијагонала не постои.

Од друга страна секогаш постои триаголник формиран од една делбена дијагонала (зошто?).

Нека d е делбена дијагонала таква што еден од двата многуаголници $A_1A_2...A_k$ е со најмал број на страни во однос на сите други многуаголници што се добиваат кога делбена дијагонала го дели n-аголникот на многуаголници. Значи $d = A_1A_k$ и секоја друга делбена дијагонала d' го дели n-аголникот на два многуаголници кои што немаат помалку страни од $A_1A_2...A_k$.

Од претходната дискусија е јасно дека $k \geq 5$. Нека претпоставиме дека $k > 5$. Бидејќи $A_1A_2...A_k$ е поделен на триаголници, на една негова делбена дијагонала крај е или A_1 или A_k. Во тој случај $A_1A_2...A_i$, $i < k$ или $A_kA_{k-1}...A_{k-i}$, $1 < i < k-2$ е многуаголник кој е добиен со делбена дијагонала на n-аголникот. Тоа е во спротивност со минималноста на $A_1A_2...A_k$. Значи, $k \leq 5$, односно $k = 5$.

Отсечката A_1A_5 е страна на делбен триаголник на $A_1A_2A_3A_4A_5$, и заради изборот на $A_1A_2A_3A_4A_5$ тој не може да е $A_1A_5A_4$ или $A_1A_5A_2$. Единствена можност е $A_1A_3A_5$. Во тој случај делбени триаголници се $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_5$ и $A_5A_4A_3$.

Темињата A_1 и A_5 во $A_1A_2A_3A_4A_5$ се темиња на по 2 делбени триаголници. Затоа, ако ги исфрлиме темињата A_2, A_3, A_4 ќе добиеме ($n-3$)- аголник кој е поделен на триаголници според условот на задачата, односно условот за непарност на A_1 и A_5 нема да се наруши.

Оваа постапка можеме да ја повторуваме последователно при што во секој следен чекор n ќе се намалува за 3. Во крајниот можен чекор ќе го добиеме бројот 3. Не може да се добие ниту 5 ниту 4 бидејќи тоа би значело дека постои 5-аголник или 4-аголник кој го исполнува условот на задачата. Но тоа е во спротивност со претходните разгледувања. Значи, за некој p ќе имаме $n-3p=3$, т.е. $n=3(p+1)$. Конечно потребен услов е $3|n$, а не е тешко да се докаже дека тој услов е и доволен.

16. Во рамнина дадени се 5 точки. Правите кои се определени со овие точки се различни и меѓу нив нема ниту паралелни, ниту нормални прави. Низ секоја точка конструирани се сите нормали така што секоја од нив е нормална на некоја права одредена со две од преостанатите 4 точки. Определи го најголемиот можен број пресечни точки на овие нормали, не сметајќи ги дадените точки.

Решение. Вкупно има $\binom{5}{2}=10$ прави. Низ секоја точка, на пример A, минуваат четири прави. Според тоа, низ секоја точка минуваат шест нормали (на секоја права која не минува низ точката A). Разгледуваме било кои две точки, на пример A и B. Ќе го пресметаме бројот на пресеци на нормалите од точката A и нормалите од точката B. Нормала низ точката A кон права низ точката B, ги сече сите нормали низ точката B. Низ точката B минуваат три прави кои не минуваат низ точката A. Тоа значи дека низ точката A кон нив може да се повлечат три нормали. Тие се сечат со нормалите низ точката B во $3\cdot 6=18$ точки. Секоја друга нормала низ точката A на преостанатите три прави, кои не минуваат низ точката A, сече пет нормали низ точката B. Со една од нив не се сече бидејќи е паралелна со неа. На тој начин се добиваат уште 15 точки. Значи, нормалите низ тие две точки се сечат во $18+15=33$ точки. Од петте точки може да се состават 10 парови. Затоа, бројот на пресечни точки не е поголем од $33\cdot 10=330$. Но, некои од тие точки се повторуваат. Имено, секои три точки од дадените 5 точки се темиња на триаголник. Правите на кои лежат висините на секој триаголник се сечат во една точка. Оваа точка е броена 3 пати. Такви триаголници има $\binom{5}{3}=10$, па според тоа вкупниот број на пресечни точки не е поголем од $330-30+10=310$.

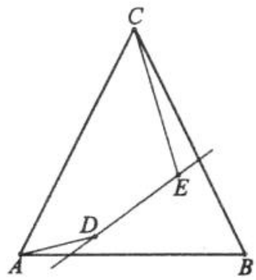
17. Даден е конвексен $n-$аголник таков што било кои три негови дијагонали не се сечат во една точка. Определи го бројот на отсечките на кои сите дијагонали на $n-$аголникот се поделени со пресечните точки.

Решение. Нека $A_1A_2...A_n$ е конвексен $n-$аголник. Дијагоналата A_1A_k, каде $3\le k\le n-1$, останатите дијагонали ги сече во $(k-2)(n-k)$ точки и притоа се добиваат $(k-2)(n-k)+1$ отсечка. Според тоа, бараниот број отсечки е еднаков на

$$\frac{n}{2}\sum_{k=3}^{n-1}((k-2)(n-k)+1)=\frac{n(n-3)(n^2-3n+8)}{12}.$$

18. Во рамнина се дадени $n, (n>4)$ точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Докажи дека постојат најмалку $\binom{n-3}{2}$ конвексни четириаголници кои имаат темиња во четири од дадените точки.

Решение. *Лема.* Во рамнина се дадени пет точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Тогаш постојат четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник.



Доказ. Ако конвексното затворање на дадените точки е петаголник, тогаш било кои четири точки се темиња на конвексен четириаголник. Ако конвексното затворање на дадените точки е четириаголник, тогаш тој е бараниот четириаголник. Нека конвексното затворање е триаголник и точките A, B, C од дадените се темиња на тој на триаголник. Две точки D и E од дадените, лежат во внатрешноста на тој триаголник, а правата DE сече две од страните на тој триаголник во внатрешни точки. Нека се тоа на пример AB и BC (цртеж десно). Тогаш точките A, C, D и E се темиња на конвексниот четириаголник. ■

Ги разгледуваме сите комбинации од по 5 точки. Нив ги има $\binom{n}{5}$. Секоја комбинација содржи подмножество од четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник. Секое теме на четириаголникот е вклучено во $n-4$ комбинации. Значи, постојат барем $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ конвексни четириаголници, кои припаѓаат на даденото множество точки. Останува да докажеме дека

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5} \geq \binom{n-3}{2}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(n-5)(n-6)(n+8) \geq 0.$$

кое е точно за секој $n>4$. Знак за равенство важи ако и само ако $n=5$ или $n=6$.

19. Трака со ширина w го нарекуваме множеството точки во рамнината кои се наоѓаат на или меѓу две паралелни прави кои се на растојание w една од друга. Нека S е множество од n точки во рамнината такво што било кои три точки од множеството S може да се покријат со трака со ширина 1. Докажи, дека S може да се покрие со трака со ширина 2.

Решение. Меѓу сите триаголници со темиња во S, го разгледуваме триаголникот кој има најголема плоштина, и нека тоа е $\triangle ABC$. Нека A', B', C' се симетричните точки на точките A, B, C во однос на средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Тврдиме дека сите точки на множеството S лежат внатре или на страните на $\triangle A'B'C'$. Навистина, ако $X \in S$ е надвор од $\triangle A'B'C'$, тогаш без ограничување на општоста можеме да земеме дека X и BC се на различни страни од правата $B'C'$, па затоа $\triangle BCX$ има поголема плоштина од $\triangle ABC$, што е противречност.

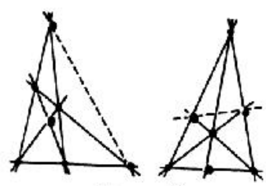
Триаголникот ABC може да се покрие со трака со ширина 1, па затоа триаголникот $A'B'C'$ може да се покрие со трака со ширина 2, бидејќи е хомотетична слика на $\triangle ABC$ со коефициент на хомотетија 2. Оваа трака го покрива множеството S.

20. Во рамнината се дадени шест точки, така што било кои три од нив не се колинеарни. Ги повлекуваме петнаесетте прави определени со овие шест точки. Во колку точки, различни од дадените, најмногу можат да се сечат по три од овие петнаесет прави?

Решение. Пример на распоред со 10 точки во секоја од кои се сечат по три прави е даден на црт. 1. За почетните 6 точки се земени темињата на правилен петаголник и неговиот центар (петаголникот со поголема страна). Сега ќе докажеме дека на секоја од петнаесетте разгледувани прави лежат најмногу две точки во кои се сечат по три прави (различни од дадените точки), т.е. дека вкупниот број на вакви точки е најмногу $(15 \cdot 2) : 3 = 10$.

Цртеж 1

Да забележиме, дека шесте прави, кои минуваат низ било кои од четирите точки се сечат две по две во три точки (ако меѓу овие прави нема паралелни) при што овие точки не може да лежат на една права (црт. 2). Затоа на правата која ги поврзува двете преостанати точки може да лежат најмногу две точки од тројниот пресек, што и требаше да се докаже.



Цртеж 2

21. Дадени се n различни точки на кружницата k. Било кои три отсечки со крајни точки во дадените не се сечат во една точка, која е внатрешна точка за кружницата. На колку области отсечките со крајни точки во дадените точки го делат кругот?

Решение. Со a_n ќе го означиме бројот на дисјунктни области на кој е поделен кругот кога се дадени n точки.

Нека бројот на точки е $n+1$, односно на множеството од n точки додаваме уште една точка. Со додавање на една отсечка која поврзува една од n-те стари точки со додадената точка се добиваат нови $(m+1)$-на делбена област. Притоа m е бројот пресеци на дадените отсечки со додадената отсечка (бројот на пресечни точки е m, а бројот на отсечки на кои е разделена додадената

отсечка е еднаков на $m+1$. Секоја од тие ($m+1$)-на отсечка дели постоечка област на два дела.
Останува да се пресмета бројот на пресеци на дадените отсечки со една нова делбена отсечка. Додадената делбена отсечка го дели множеството на точки на два дела и тоа $(k-1)$ -на точка што се наоѓаат на една страна од делбената отсечка и $(n-k)$-точки кои се наоѓаат од другата страна од делбената отсечка. Според тоа, новата делбена отсечка сечи $(k-1)(n-k)$ отсечки при што се добиваат $(k-1)(n-k)+1$ нови области, каде $k=1,2,3,...,n$. Затоа

$$a_{n+1}=a_n+\sum_{k=1}^{n}[(k-1)(n-k)+1]\,.$$

Значи,

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_n+\sum_{k=1}^{n}[-k^2+n(k-1)+1-n]\\&=a_n-\sum_{k=1}^{n}k^2+n\sum_{k=1}^{n}(k-1)+n(1-n)\,.\\&=a_n+\tfrac{1}{6}(n^3-3n^2+8n)\end{aligned}$$

Со повеќекратна примена на ова равенство добиваме

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\tfrac{1}{6}(\sum_{k=1}^{n-1}k^3-3\sum_{k=1}^{n-1}k^2+8\sum_{k=1}^{n-1}k)\\&=1+\tfrac{1}{6}(\tfrac{n^2(n-1)^2}{4}-3\tfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}+8\tfrac{(n-1)n}{2})\\&=\tfrac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24).\end{aligned}$$

Формулата $a_n=\frac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)$ е точна и за $n=0$ и $n=1$ односно е точна за секој $n\in\mathbb{N}_0$.

22. Определи ги сите природни броеви n за кои во рамнината постојат n точки, секоја од кои припаѓа на точно $\frac{1}{3}$ од правите определени со тие точки.

Решение. Ќе докажеме, дека единствено решение е $n=6$. Ако имаме 6 точки во општа положба (никои три не лежат на една права), тогаш имаме 15 прави и секоја точка лежи на 5 прави, т.е. $n=6$ е решение.
Нека k е бројот на правите определени од дадените n точки. Нека има права на која лежат 4 од дадените точки. Секоја од дадените точки лежи на уште $\frac{k}{3}-1$ прави, што значи дека има најмалку $4(\frac{k}{3}-1)+1$ различни прави. Според тоа, $4(\frac{k}{3}-1)+1\le k$, т.е. $k\le 9$. Од друга страна, бидејќи секоја точка, која не лежи на разгледуваната права, лежи на барем 4 различни прави (правите низ таа точка и четирите точки на правата), добиваме дека $k\ge 12$, што е против-

речност. Според тоа, на секоја од правите има најмногу 3 точки. Нека на a од правите има точно по 2 точки. Тогаш на секоја од останатите $k-a$ прави има по 3 точки.

Бројот на точките (секоја броена $\frac{k}{3}$ пати) е еднаков на $2a+3(k-a)$, па затоа $2a+3(k-a)=\frac{nk}{3}$. Од друга страна, бидејќи n точки определуваат $\frac{n(n-1)}{2}$ прави (некои од кои се совпаѓаат) и секоја права со три точки на неа е броена три пати, добиваме $a+3(k-a)=\frac{n(n-1)}{2}$. Од последните две равенства наоѓаме $a=\frac{n(n-1)(9-n)}{2(2n-9)}$ и $k=\frac{3n(n-1)}{2(2n-9)}$. Бидејќи $k\le\frac{n(n-1)}{2}$, добиваме $2n-9\ge 3$, т.е. $n\ge 6$. Од друга страна $a\ge 0$, па затоа $n\le 9$. За $n=7$ вредностите на a и k не се целобројни, па затоа $n=8$ или $n=9$. За $n=8$ имаме $k=12, a=4$, а за $n=9$ добиваме $k=12, a=0$.

Со l да го означиме најголемиот број точки меѓу дадените n точки, такви што никои три од нив не се колинеарни. Тогаш сите преостанати точки лежат на правите, определени од овие l точки.

1) $l=3$ и нека тоа се точките A_1, A_2, A_3. Секоја од преостанатите точки лежи на една од правите A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_1. Бидејќи на една права нема повеќе од 3 точки, добиваме најмногу 6 точки, што е противречност.
2) $l=4$ и нека тоа се точките A_1, A_2, A_3, A_4. Бидејќи имаме најмалку 8 точки, следува дека постои точка, која лежи точно на една од правите, определени од точките A_1, A_2, A_3, A_4. Без ограничување на општоста нека тоа е точката A_5 и $A_5\in A_1A_2$. Тогаш четворките точки A_1, A_3, A_4, A_5 и A_2, A_3, A_4, A_5 се во општа положба. Според тоа, сите точки треба да лежат на правите определени од A_1, A_2, A_3, A_4; A_1, A_3, A_4, A_5 и $A_2, A_3,$ A_4, A_5. Единствените заеднички прави се A_3A_4 и $A_1A_2\equiv A_1A_5\equiv A_2A_5$, т.е. сите точки лежат на две прави, што противречи на фактот дека на права нема повеќе од три точки.
3) $l=5$ и нека тоа се точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Од секоја од точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 излегуваат по точно 4 прави. Тоа значи дека A_6A_i, $i=1,2,...,5$ треба да се меѓу веќе постојните прави. Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека $A_6\in A_1A_2$. Тогаш A_6A_3 треба да се совпадне со некоја од правите A_3A_4, A_3A_5 или A_4A_5. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $A_6\in A_3A_4$ и тогаш A_6A_5 е нова права, што е противречност.

23. Даден е природен број n. Во рамнината се избрани точки $P_1, P_2, ..., P_{4n}$ такви што никои три од нив не лежат на иста права. Познато е дека за секој $i = 1, 2, ..., 4n$ сликата на полуправата $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ при ротација со центар P_i и агол 90° во насока на движењето на стрелката на часовникот е полуправата $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$. Определи го максималниот можен број подредени парови (i, j), $1 \le i < j \le 4n$, за кои отсечките P_iP_{i+1} и P_jP_{j+1} се сечат во точка, различна од крајна точка на отсечка. (Земаме $P_0 = P_{4n}, P_{4n+1} = P_1$.)

Решение. За $k = 1, 2, ..., n$ да ставиме $A_k = P_{4k-3}, B_k = P_{4k-2}, C_k = P_{4k-1}$ и $D_k = P_{4k}$. Освен тоа, нека $A_{n+1} = A_1$ и $B_{n+1} = B_1$. Можеме да сметаме, дека насочените отсечки A_iB_i, B_iC_i, C_iD_i и D_iA_{i+1} се соодветно во насока налево, надолу, надесно и нагоре. За секој $i = 1, 2, ..., n$ ќе велиме дека конвексната линија е од тип налево-надолу и аналогно дефинираме надолу-надесно, надесно-нагоре и нагоре-налево конвексни линии.

Ја разгледуваме пресечната точка на две отсечки, кои се насочени соодветно налево и надолу како пресечна точка на две конвексни линии од видот налево-надолу. Задачата се сведува на наоѓање на максималниот број на пресечните точки на две налево-надолу конвексни линии, две надолу-надесно конвексни линии, две надесно-нагоре конвексни линии и две нагоре-налево конвексни линии.

Ќе велиме дека парот $(i, j), 1 \le i \ne j \le n$ е добар, ако конвексните линии во секој од следните четири парови $A_iB_iC_i$ и $A_jB_jC_j$, $B_iC_iD_i$ и $B_jC_jD_j$, $C_iD_iA_{i+1}$ и $C_jD_jA_{j+1}$, $D_iA_{i+1}B_i$ и $D_jA_{j+1}B_j$ се сечат. Да забележиме дека, ако парот (i, j) е добар и A_i се наоѓа над A_j, тогаш B_i лежи десно од B_j, C_i лежи под C_j, D_i се наоѓа лево од D_j и A_{i+1} е под A_{j+1}.

Лема. Да го означиме комплементот на секое непразно вистинско подмножество X на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ со $Y = X^c$. Тогаш постојат $x \in X$ и $y \in Y$, за кои парот (x, y) не е добар.

Доказ. За секој $x \in \{1, 2, ..., n\}$ дефинираме

$$x^+ = \begin{cases} x+1, & \text{ако } 1 \le x \le n-1 \\ 1, & \text{ако } x = n \end{cases}, \qquad x^- = \begin{cases} x-1, & \text{ако } 2 \le x \le n \\ 1, & \text{ако } x = 1 \end{cases}$$

Нека за секој избор на $x \in X$ и $y \in Y$ парот (x, y) е добар. Дефинираме $f(k) = i$ и $f^{-1}(i) = k$, ако A_k е на $i-$тата позиција одгоре надолу меѓу точките $A_1, A_2, ..., A_n$.

Ќе докажеме, дека за секој $k, 1 \le k \le n$ бројот на точките меѓу $f(1), f(2),...,$ $f(k)$ кои припаѓаат на X е еднаков на бројот на точките меѓу $f(1)^-$, $f(2)^-,..., f(k)^-$ кои припаѓаат на X. Нека претпоставиме дека во првото множество има повеќе елементи. Тогаш постои $x \in X$, токов што $f^{-1}(x) \le k$ и $f^{-1}(x^+) > k$. Освен тоа, бидејќи бројот на точките од множеството $\{f(k+1), f(k+2),..., f(n)\}$ кои се од Y е поголем од бројот на точките од множеството $\{f(k+1)^-, f(k+2)^-,..., f(n)^-\}$ кои се од Y, постои $y \in Y$ таков што $f^{-1}(y) > k$ и $f^{-1}(y^+) \le k$. Тоа значи дека парот (x, y) не е добар, што е противречност. Аналогно се добива противречност ако претпоставиме, дека второто подмножество има повеќе елементи од првото.

Ако го искористиме равенството на бројот на елементите на двете множества, за $k = l$ и $k = l-1$ добиваме дека $f(l) \in X$ ако и само ако $f(l)^- \in X$. Тоа значи дека за секој x важи $x \in X$ ако и само ако $x^- \in X$. Последното противречи на претпоставката, дека X е непразно подмножество на $\{1, 2,..., n\}$, со што доказот на лемата е завршен. ■

Нека претпоставиме дека бројот на паровите (x, y) кои не се добри е најмногу $n-2$. Тогаш бројот на елементите на множеството $\{1, 2,..., n\}$, кои можат да бидат достигнати од 1 со низа на парови кои не се добри е најмногу $n-1$. Нека X е множеството на оние елементи, кои можат да бидат достигнати од 1 на посочениот начин, а Y е комплементот на X. Добиваме противречност со лемата. Според тоа, имаме најмногу $n-1$ парови од множеството $\{1, 2,..., n\}$ кои не се добри. Значи, максималниот број парови (i, j), кои го задоволуваат условот е еднаков на

$$4\binom{n}{2} - (n-1) = (2n-1)(n-1) .$$

Дади пример, во кој има точно $(2n-1)(n-1)$ пресечни точки.

24. Дадени се $n \ge 5$ рамнини, такви што било кои три имаат точно една заедничка точка и не постојат четири рамнини кои минуваат низ една точка. Докажи, дека меѓу деловите на кои со дадените рамнини е поделен просторот има најмалку $\frac{2n-3}{4}$ тетраедри.

Решение. Секој дел од просторот заграден со рамнини од дадените n рамнини, а кој не е пресечен со рамнина од преостанатите рамнини го нарекуваме клетка на поделбата. Според условите од задачата било кои четири рамнини од дадените n рамнини определуваат единствен тетраедар. Бројот на тетраедри определени со овие n рамнини е еднаков на $\binom{n}{4}$. Ако секој од овие тетраедри е делбена клетка на просторот, тогаш задачата е решена, бидејќи $\binom{n}{4} > \frac{2n-3}{4}$, за $n \geq 5$. Меѓутоа, може да се случи некој од овие тетраедри определен со четири рамнини, петта рамнина да го дели на два дела при што и двата дела да не се тетредри, а да се делбени клетки на простор (направи цртеж).

Единствената заедничка точка на три рамнини избрани од дадените n рамнини ќе ја нарекуваме теме. За секоја рамнина ~ од дадените n рамнини ќе го разгледаме темето A кое е на најмало растојание до неа. Таквото теме е определен со три рамнини кои заедно со дадена рамнина ~ определуваат тетраедар $ABCD$ ($B, C, D \in$ ~).

Ако некоја рамнина различна од дадените четири рамнини го сече тетраедарот $ABCD$, тогаш таа сече некој од рабовите AB, AC, AD со што се добива теме S кое е поблиску до ~ од темето A, а тоа противречи на изборот на точката A. Значи, таква рамнина не постои. Според тоа $ABCD$ е делбена клетка.

Рамнината ~ го дели просторот на два полупростори. Ако точката A припаѓа на еден од полупросторите, тогаш постои точка W која е теме и е на најмало растојание од сите темиња кои се наоѓаат во полупросторот во кој не лежи A. Трите рамнини кои го определуваат W заедно со рамнината ~ определуваат тетраедар $WXYZ$ кој не го сече ниту една од преостанатите рамнини. Според тоа и тој тетраедар е делбена клетка.

Ако се случи во некој од полупросторите определен со рамнина од дадените n -рамнини да нема теме, тогаш таа рамнина ќе ја нарекуваме крајна.

Не е можно да има повеќе од три крајни рамнини. Нека претпоставиме дека има четири крајни рамнини. Тогаш тие определуваат единствен тетраедар кој ќе го наречеме „краен“. Било која друга рамнина од n -те рамнини различна од четирите крајни рамнини, не може сите шест рабови на „крајниот“ тетредар да ги сече во точки кои ќе лежат на иста страна од крајните рамнини како и најблиското теме до неа. Според тоа, барем една од крајните рамнини нема да е крајна. Значи, може да има најмногу три крајни рамнини.

Од досега изнесеното следува, дека секоја рамнина генерира два тетраедри кои се клетки на просторот, освен трите крајни рамнини кои генерираат по еден. Секој од нив го броиме по четири пати (за секоја рамнина која го определува по еднаш). Според тоа, бројот на тетраедрите е еднаков на $\frac{2n-3}{4}$.

25. Квадрат со страна 2 поделен на единечни квадрати може да се нацрта со цртање на три квадрати: два спротивни аголни квадрати и голем квадрат. Колку најмалку квадрати е потребно да се нацртаат за да се добие квадрат со страна n поделен на единечни квадрати?

Решение. Нека $n \geq 3$. Д ги разгледаме страните на единечните квадратчња со точно по еден крај на страна на големиот квадрат. Вакви отсечки има $4(n-1)$ и секој квадрат кој ќе го нацртаме може да покрие најмногу две од овие отсечки. Затоа ни се потребни најмалку $2(n-1)$ квадрати. Овој број може да се достигне на следниов начин. Ги цртаме сите квадрати со должини на страни $n-1, n-2, ..., [\frac{n}{2}]+1$ со едно теме во теме на големиот квадрат. Уште за $2|n$ доцртуваме два квадрати со должини на страни $\frac{n}{2}$ со по едно темево спротивните темиња на големиот квадрат. Вака нацртавме $2n-2$ квадрати кои ги задоволуваат условите на задачата.

26. Квадрат е разделен на $n^2 \geq 4$ правоаголници со $2n-2$ прави, $n-1$ од кои се паралелни на едната страна на квадратот, а преостанатите $n-1$ се паралелни на другата страна на квадратот. Докажи дека од овие правоаголници може да се изберат $2n$ такви што за секои два од избраните правоаголници едниот може да се постави во другиот (евектуално по ротација).

Решение. За еден пар правоаголници ќе велиме дека е добар, ако едниот од нив може да се стави во другиот.

Нека хоризонталната страна на квадратот е разбиена на отсечки со должини $a_1,...,a_n$, а вертикалната на отсечки со должини $b_1,...,b_n$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a_1 \geq ... \geq a_n$ и $b_1 \geq ... \geq b_n$ (Зошто?). Со $Q_{i,j}$ да го означиме правоаголникот од разбивањето со страни a_i и b_j. Јасно, за $i \leq k$ и $j \leq l$ паротt $(Q_{i,j}, Q_{k,l})$ е добар.

Бидејќи $a_1+...+a_n = b_1+...+b_n$, постојат различни индекси i и j, за кои $a_i \geq b_i$ и $a_j \leq b_j$. Можеме да сметаме дека $i<j$. Тогаш постои индекс $k \in [i,j]$ таков што $a_k \leq b_k$ и $a_{k-1} \geq b_{k-1}$.

Тврдиме дека правоаголниците $Q_{1,1}, Q_{1,2}, ..., Q_{1,k-1}, Q_{2,k-1}, ...Q_{k,k-1}$ заедно со правоаголниците $Q_{k-1,k}, Q_{k,k}, ..., Q_{k,n}, Q_{k+1,n}, ..., Q_{n,n}$ го задоволуваат условот на задачата. Навистина, имаме вкупно $2(k-1)+2(n-k+1)=2n$ правоаголници. Секој пар, освен $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$, е добар според горната забелешка, а последниот пар е добар бидејќи $a_k \leq b_k$ и $a_{k-1} \geq b_{k-1}$.

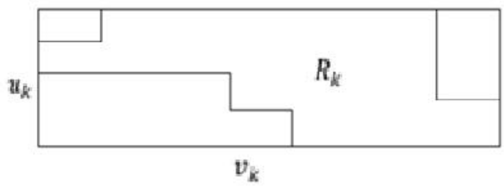
27. Квадрат со страна 1 е поделен на многуаголници. Страните на сите многуаголници се паралелни со страните на квадратот. Вкупната должина на внатрешните страни на многуаголниците е еднаква на $2n$. Докажи дека постои барем еден многуаголник чија плоштина е поголема или еднаква на $\frac{1}{(n+1)^2}$.

Решение. Нека претпоставиме дека квадратот е поделен на многуаголниците

$R_1, R_2, ..., R_m$. Нека P_{R_i} и O_{R_i} се плоштината и периметарот на многуаголникот R_i , соодветно. Тогаш, бидејќи секоја отсечка на поделбата се јавува во периметарот на два многуаголника, имаме

$$1 = \sum_{i=1}^{m} P_{R_i} \text{ и } 4 + 2 \cdot 2n = \sum_{i=1}^{m} O_{R_i} .$$

Сега, да разгледаме некој многуаголник R_k (цртеж десно). Да опишеме минимален правоаголник околу многуаголникот R_k и нека должините на страните на овој правоаголник се u_k и v_k . Важи



$$P_{R_k} \le u_k v_k \le \frac{(u_k + v_k)^2}{4}, \quad O_{R_k} \ge 2(u_k + v_k),$$

т.е.

$$\sqrt{P_{R_k}} \le \frac{u_k + v_k}{2} \le \frac{O_{R_k}}{4} .$$

Од последното неравенство следува

$$\sum_{k=1}^{m} \sqrt{P_{R_k}} \le \sum_{k=1}^{m} \frac{O_{R_k}}{4} = \frac{4n+4}{4} = n + 1 .$$

Нека претпоставиме дека $P_{R_k} < \frac{1}{(n+1)^2}$ за секој многуаголник R_k . Според тоа,

$$1 = \sum_{i=1}^{m} P_{R_i} = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{P_{R_k}} \sqrt{P_{R_k}} < \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{m} \sqrt{P_{R_k}} \le \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) = 1 ,$$

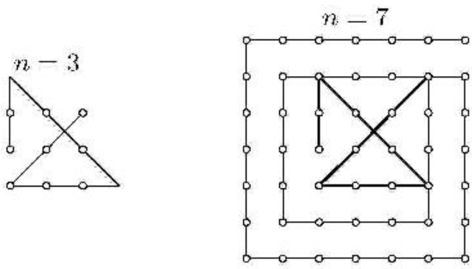
што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека постои барем еден многуаголник чија плоштина е поголема или еднаква на $\frac{1}{(n+1)^2}$.

28. Во координатната рамнина се дадени 2013 квадрати со страна 1, чии страни се паралелни со координатните оски. Докажи дека збирот на плоштините на сите области кои се покриени со непарен број квадрати не е помал од 1.

Решение. За секоја точка A во рамнината дефинираме $S[A]$ како множество од сите точки кои се добиваат со транслација на точката A за некој вектор $(i, j), i, j \in \mathbb{Z}$. Ако ниту една точка на множеството $S[A]$ не лежи на границата на некој од дадените квадрати, добиваме дека секој квадрат покрива точно една точка од $S[A]$. Бидејќи бројот на квадратите е непарен, барем една точка во $S[A]$ е покриена непарен број пати. Тоа значи дека со транслација на деловите на областите кои се покриени непарен број пати може да се покрие единечен квадрат, па значи дека нивната вкупна плоштина е најмалку 1.

29. Дадени се n^2 точки наредени во рамнината во форма на квадратна мрежа $n\times n$. Искршена линија со должина l ја нарекуваме унијата на отсечките $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3,..., A_{l-1}A_l$ во таа рамнина. Определи го најмалиот природен број l за кој постои искршена линија со должина l на која лежат сите n^2 дадени точки.

Решение. Бараната вредност на бројот l да ја означиме со l_n. Тривијално е $l_1=1$ и $l_2=3$. Примерите на цртежите десно покажуваат дека $l_3\le 4$ и воопшто $l_n \le 2n-2$ за секој $n\ge 3$.



Нека претпоставиме дека искршена линија $\boldsymbol{C}$ со должина l ги покрива сите n^2 точки. Меѓу отсечките на линијата $\boldsymbol{C}$ има a хоризонтални и b вертикални. Преостанатите $l-a-b$ отсечки на линијата $\boldsymbol{C}$ ги нарекуваме коси. Точките кои не се покриени со хоризонталните и вертикалните отсечки формираат правоаголна решетка $\boldsymbol{S}$ со димензии $(n-a)\times(n-b)$.

1) Ако $a\ge n$ (аналогно за $b\ge n$), тогаш не постои решетка $\boldsymbol{S}$, но се потребни најмалку $n-1$ отсечка за да се поврзат n хоризонтални отсечки.
2) Ако $a=n-1$ (аналогно $b=n-1$), решетката $\boldsymbol{S}$ се состои од $n-b$ точки, а секоја коса отсечка покрива најмногу една точка, па затоа ни требаат барем уште $n-b$ отсечки, што вкупно дава $l\ge n-1+b+n-b=2n-1$ отсечки.
3) Ако $a\le n-2$ и $b\le n-1$, тогаш консвексната обвивка на решетката се состои од $2(2n-a-b-2)$ точки, а секоја коса отсечка покрива најмногу две точки, па затоа ни требаат уште барем $2n-a-b-2$ отсечки. Така имаме $l\ge a+b+(2n-a-b-2)=2n-2$ отсечки.

Според тоа, $l_n=2n-2$ за секој $n\ge 3$.

30. Нека n е природен број. Правоаголник со должини на страни $90n+1$ и $90n+5$ е поделен на единечни квадрати со страни паралелни на страните на правоаголникот. Нека S е множеството од сите темиња на овие единечни квадрати. Докажи, дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

Решение. Нека поставиме координатен систем со координатен почеток во центарот O на правоаголникот и $x-$оска паралелна на подолгата страна на правоаголникот. Множеството $\boldsymbol{P}$ од разгледуваните прави да го поделиме на две групи.

1) Прави кои не минуваат низ точката O. Има $(90n+2)+(90n+6)$ прави паралелни на една од координатните оски и овој број е делив со 4. За секоја од останатите прави кои минуваат низ точката O, правите кои се симетрични на неа во однос на координатните оски и во однос на точката O исто така припаѓаат на множеството $\boldsymbol{P}$, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества. Затоа, бројот на правите кои не минуваат низ точката O е делив со 4.
2) Прави кои минуваат низ точката O. Секоја права низ O која содржи некоја точка од S ја содржи и нејзината симетрична точка, па затоа припаѓа на $\boldsymbol{P}$, а нејзиниот коефициент на правец е рационален број $\frac{p}{q}$, каде p и q се непарни цели броеви такви што $|p|\leq 90n+1,\ \ 0<q\leq 90n+5$ и притоа $(p,q)=1$. Правите од оваа група ги делиме на три подгрупи:

   а) Две прави $l_1(x=y), l_2(x=-y)$.

   б) За секоја права која минува низ O со коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за $|p|\leq 90n+1$ и $0<q\leq 90n+1$, различна од l_1 и l_2, правите симетрични на неа во однос на правите x, l_1 и l_2 припаѓаат на множеството $\boldsymbol{P}$, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества.

   в) Остануваат правите кои минуваат низ O и имаат коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за кој $q\in\{90n+3, 90n+5\}$. Бидејќи $(x,q)=1$ и $2\nmid x$ ако и само ако $(q,q-x)=1$ и $2\,|\,q-x$, заклучуваме дека непарни природни броеви кои се помали или еднакви на q и се заемно прости со q има исто колку што има и парни, па затоа нивниот број е $\frac{1}{2}$¨(q). Според тоа, за $q=90n+3$ бројот на овие прави е ¨$(90n+3)$, додека за $q=90n+5$ нивниот број е ¨$(90n+4)-2$, бидејќи треба да се исклучат правите со коефициент на агол $\pm\frac{90n+3}{90n+5}$. Бидејќи

   $$4\,|\,¨(3)¨(30n+1)=¨(90n+3) \text{ и } 4=¨(5)\,|\,¨(90n+5),$$

   добиваме дека бројот на овие прави е од облик $4k-2$.

   Од а), б) и в) следува дека бројот на правите кои минуваат низ точката O е делив со 4.

Конечно, од 1) и 2) следува дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

31. Во рамнината е даден квадрат, чии страни се хоризонтални и вертикални. Во квадратот се наоѓаат неколку отсечки, паралелни со страните и такви што никои две отсечки не лежат на иста права и не се сечат во точка, која е внатрешна и за двете отсечки. Се покажало, дека отсечките го разбиваат квадратот на правоаголници, при што секоја вертикална права, која го сече квадратот и не содржи отсечки од разбивањето пресекува точно k правоаголници од разбивањето, а секоја хоризонтална права, која го сече квадратот и не содржи отсечки од разбивањето пресекува точно l правоаголници од разбивањето. Определи го бројот на правоаголниците во разбивањето.

Решение. Да фиксираме една хоризонтална отсечка I и нека I учествува во a правоаголници над неа и во b правоаголници под неа. Ќе докажеме дека $a=b$. Нека h е хоризонтална права, која на почетокот минува низ горната страна на квадратот и да почнеме да ја движиме паралелно надолу. Во моментот, кога правата минува низ I (според условот во тој момент таа минува само низ I), бројот на правоаголниците пресечен од h се намалува за a и се зголемува за b. Бидејќи според условот бројот на пресечените правоаголници е константен, добиваме дека $a=b$.

Со индукција по k, ќе докажеме дека бараниот број е kl. За $k=1$ тврдењето е очигледно. Нека $k>1$. Да ги разгледаме правоаголниците од разбивањето, кои имаат една страна врз долната страна на разбивањето. Јасно, вакви правоаголници има точно l (хоризонтална права, која е доволно блиска до долната страна, ги сече само нив). Разгледуваните правоаголници да ги разбиеме на групи од соседи со еднакви висини. Секоја таква група има за горна граница некоја од дадените отсечки.

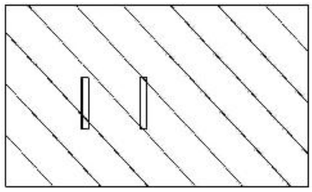
Да разгледаме една таква група чија горна граница е отсечката I. Да забележиме, дека вертикалните отсечки, кои ја ограничуваат групата, продолжуваат нагоре над I. Навистина, ако е точно обратното, на пример ако горниот крај на левата вертикална отсечка J лежи на I, тогаш оддесно на J се допира еден правоаголник, а одлево се допираат повеќе правоаголници, бидејќи J е граница на групата. Последното противречи на претходно докажаното.

Да ја отсраниме разгледуваната група и да ги продолжиме правоаголниците над I до долната страна на квадратот. Бидејќи под I и над I имаме еднаков број на правоаголници, секоја хоризонтална права се уште пресекува точно l правоаголници.

Да ја извршиме опишаната операција со сите групи. На таков начин отстранивме точно l правоаголници, а притоа секоја вертикална права ќе пресекува по еден правоаголник помалку, т.е. ќе пресекува $k-1$ правоаголници. Од индуктивната претпоставка следува дека бројот на преостанатите правоаголници ќе биде $(k-1)l$ и ако ги додадеме отстранетите правоаголници, добиваме дека имаме $(k-1)l+l=kl$ правоаголници.

32. Определи го најголемиот број правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ кој може да се добие од правоаголник со димензии 50×90, ако е дозволено сечење по прави паралелни на страните на дадениот правоаголник.

Решение. Нека темињата на правоаголникот се $A(0,0), B(0,50), C(90,50), D(90,0)$. Да ги повлечеме правите



$$L_n:\ x+y=10n\sqrt{2}\ ,$$

каде $n=1,2,3,...,[\frac{90+50}{10\sqrt{2}}]=9$ и да ги разгледуваме отсечките кои правоаголникот $ABCD$ ги отсекува од нив. Бидејќи горните прави зафаќаат агол од 45° со секоја од координатните оски, лесно се пресметува дека збирот на должините на отсечките од овие прави, кои лежат во произволен правоаголник со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ и страни паралелни на координатните оски е $\sqrt{2}$. Со l_n да ја означиме должината на отсечката од правата L_n која лежи во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$. Со едноставни пресметувања се добива дека

$$l_1=20,\quad l_2=40,\quad l_3=60,\quad l_4=l_5=l_6=50\sqrt{2},$$
$$l_7=140\sqrt{2}-140,\ \ l_8 140\sqrt{2}-160,\ \ l_9=140\sqrt{2}-180.$$

Според тоа, вкупната должина на тие отсечки е еднаква на $570\sqrt{2}-360$. Сега, ако вкупниот број на правоаголниоци со димензии е $1\times 10\sqrt{2}$, бидејќи секој ваков правоаголник покрива отсечка со должина $\sqrt{2}$, добиваме дека е исполнето неравенството $t\sqrt{2}\le 570\sqrt{2}-360$. Но, $316>\frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}>315$, па затоа $t\le[\frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}]=315$.

Ќе покажеме како може да се отсечат 315 правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$. Бидејќи $90>60\sqrt{2}$ дадениот правоаголник можеме да го поделиме на правоаголници со димензии $50\times 60\sqrt{2}$ и $50\times(90-60)\sqrt{2}$. Првиот правоаголник го делиме на 50 правоаголници со димензии $1\times 60\sqrt{2}$, а потоа секој од нив го делиме на 6 правоагиолници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ и така првиот правоаголник може да подели на 300 правоаголници $1\times 10\sqrt{2}$. Бидејќи $(90-60)\sqrt{2}>5$ и $50>30\sqrt{2}$ од вториот правоаголник може да се отсечат уште $3\cdot 5=15$ правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$, Според тоа, од дадениот правоаголник може да се добијат 315 правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$.

33. Во рамнината се дадени неколку правоаголници со страни паралелни со координатните оски. Познато е дека за секои два правоаголника постои вертикална или хоризонтална права кој ги сече. Докажи дека постои една вертикална и една хоризонтална права така што секој правоаголник се сече со барем една од овие прави.

Решение. *Лема*. Ако секои два од неколку дадени правоаголника можат да бида пресечени со вертикална права, тогаш постои вертикална права која ги сече сите правоаголници.

Доказ. Да ги разгледаме правоаголникот со најлева меѓу десните страни и правоаголникот со најдесна меѓу левите страни. Според условот овие два правоаголника можат да бидат пресечени со вертикална права. Тогаш левата на секој од преостанатите правоаголници ќе биде лево од таа права, а неговата десна страна ќе биде десно од таа права. Јасно, оваа права го сече секој од преостанатите правоаголници, т.е. го сече секој правоаголник. ■

Да се вратиме на задачата. Нека го претпоставиме спротивното. За два правоаголника ќе велиме дека се разделени, ако не можеме да ги пресечеме со вертикална права. Да ги разгледаме сите парови разделени правоаголници. За секој пар ја разгледуваме правата на која лежи најдолната од нивните хоризонтални страни. Нека h најгорната од тие прави. Можни се два случаја.

Случај 1. Не постои пар разделени правоаголници кои лежат под h. Ги разгледуваме сите правоаголници кои не се пресечени од h. Ако меѓу нив има пар разделени, тогаш согласно лемата можеме да ги пресечеме со вертикална права и задачата е решена. Нека имаме пар (A,B) од разделени правоаголници. Тогаш согласно претпоставката еден од нив, на пример A, лежи над h. Од изборот на h следува дека долната страна на B лежи под h, па значи B лежи под h (оваа права не го сече). Следствено овој пар не може да се пресече ниту со вертикална, ниту со хоризонтална права, што противречи на условот на задачата.

Случај 2. Постои пар разделени правоаголници (C,D) кои лежат под h. Од изборот на h следува дека постојат два разделени правоаголници A и B, кои лежат не пониско од h. Ќе сметаме дека A е влево од B, а C е влево од D. Нека заради определеност десната страна од A не е подесно од десната страна на C. Тогаш правоаголниците A и D исто така се разделени при што едниот лежи не пониско од h, а другиот лежи пониско од h. Затоа тие не може да се пресечат ниту со хоризонтална, ниту со вертикална права, што е противречност.

34. Од остроаголен триаголник ABC отсечи 2003 правоаголници секој од кои има страна паралелна на AB и збирот на плоштините да е максимален.

Решение. Не е тешко да се заклучи дека збирот на плоштините е максимален ако правоаголниците имаат заеднички страни, страната на најдолниот пра-

воаголник лежи на AB и секој има по едно теме на страните AC и BC.
Со индукција ќе докажеме дека максимален збир на плоштините при n правоаголници се достигнува кога страната AC е поделена на $n+1$ еднакви делови од темињата на правоаголниците кои лежат на неа. Оттука ќе следува дека максималниот збир е $\frac{n}{n+1}P_{ABC}$.
За $n=1$ бараме правоаголник $MNPQ, M, N \in AB, P \in BC, Q \in AC$ со максимална плоштина. Ако означиме $\frac{\overline{CQ}}{\overline{AC}} = x$, тогаш лесно се пресметува дека $P_{MNPQ} = 2x(1-x)P_{ABC}$. Затоа P_{MNPQ} е максимална ако $x = \frac{1}{2}$, т.е. Q е средината на AC. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за k правоаголници и да разгледаме $k+1$ правоаголници $M_iN_iP_iQ_i$, каде

$$M_iN_i \in P_{i-1}Q_{i-1}, (P_0 \equiv A, Q_0 \equiv B) \text{ и } P_i \in BC, Q_i \in AC, i = 1,2,...,k+1.$$

Ако $\frac{\overline{CQ_1}}{\overline{AC}} = x$, тогаш $P_{M_1N_1P_1Q_1} = 2x(1-x)P_{ABC}$. Од индуктивната претпоставка следува дека $\sum_{i=2}^{k+1} P_{M_iN_iP_iQ_i}$ е максимална кога

$$\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = ... = \overline{Q_kQ_{k+1}} = \overline{Q_{k+1}C}$$

и затоа

$$\sum_{i=2}^{k+1} P_{M_iN_iP_iQ_i} \le \frac{kP_{Q_1P_1C}}{k+1} = \frac{kx^2P_{ABC}}{k+1}.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} P_{M_iN_iP_iQ_i} &\le (2x(1-x) + \tfrac{kx^2}{k+1})P_{ABC} \\ &= [\tfrac{k+1}{k+2} - \tfrac{k+1}{k+2}(x - \tfrac{k+1}{k+2})^2]P_{ABC} \\ &\le \tfrac{k+1}{k+2}P_{ABC}\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако $x = \frac{k+1}{k+2}$, т.е. ако точките $Q_i, i = 1,2,...,k+1$ ја делат страната AC на еднакви делови.

35. Во внатрешноста на конвексен $100-$аголник се избрани k точки, $2 \le k \le 50$. Докажи дека може да се изберат $2k$ темиња на $100-$аголникот така што со нив определениот $2k-$аголник во својата внатрешност ги содржи сите k точки.

Решение. Дадениот $100-$аголник да го означимесо $\boldsymbol{P} = P_1P_2...P_{100}$. За $k=2$ тврдењето е точно: ако A_1, A_2 се дадените точки, тогаш правата низ овие точки сече некои две страни a и b од многуаголникот $\boldsymbol{P}$. Овие две страни определкуваат четириаголник кој ги содржи двете точки.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој k и нека се дадени $k+1$ точка $A_1, A_2, ..., A_{k+1}$. Според индуктивната претпоставка постои $2k$ – аголник $\mathcal{P}_{2k} = P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_{2k}}$ ($i_1 < i_2 < ... < i_{2k}$) кој ги содржи точките $A_1, A_2, ..., A_k$. Ако $\mathcal{P}_{2k}$ ја содржи точката A_{k+1}, тогаш тврдењето тривијално важи и за $k+1$. Во спротивно, точката A_{k+1} лежи во еден од најмногу $2k$ многуаголници кои страните на $\mathcal{P}_{2k}$ ги отсекуваат од $\mathcal{P}$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е многуаголникот отсечен одстраната $P_{i_1}P_{i_2}$. Нека правата $P_{i_1}A_{k+1}$ ја сече страната P_jP_{j+1} на 100 – аголникот $\mathcal{P}$. Тогаш $(2k+2)$ – аголникот $\mathcal{P}_{2k+2} = P_{i_1}P_jP_{j+1}P_{i_2}...P_{i_{2k}}$ ги содржи сите точки $A_1, A_2, ..., A_{k+1}$.

36. Правилен n – аголник е поделен на триаголници со помош на $n-3$ дијагонали такви што меѓу нив никои две немаат заеднички внатрешни точки. Определи го најголемиот број на добиените триаголници кои меѓусебно не се складни.

Решение. Триаголниците со по две, една и ниту една страна на n – аголникот ($n>3$) ќе ги обоиме со црна, бела и црвена боја, соодветно. Нека во поделбата има a црвени, b бели и c црни триаголници. Тогаш бројот на страните на n – аголникот е $n = b + 2c$. Од друга страна, вкупниот број на триаголници е $a+b+c = n-2$. Од последните две равенства следува $c = a+2$.
Бидејќи бројот на нескладните триаголниците кои не се црвени е помал или еднаков на $[\frac{n-1}{2}]$, добиваме дека вкупниот број N на триаголници во поделбата кои меѓусебно не се складни е помал или еднаков на $\frac{n-1}{2} + a$. Од друга страна, во таква поделба има $a+2$ црни триаголници, а сите црни триаголници се складни, па затоа $N \le n-2-(a+1) = n-a-3$. Според тоа,

$$2N \le (\tfrac{n-1}{2} + a) + (n-a-3) = \tfrac{3n-7}{2}, \text{ т.е. } N \le [\tfrac{3n-7}{4}].$$

Конечно, ако ги повлечеме дијагоналите A_0A_{2i} и $A_{2i-2}A_{2i}$ $(i \le i \le [\frac{n}{4}])$ и A_0A_j $(2[\frac{n}{4}] < j \le n-2)$ добиваме пример со точно $[\frac{n-1}{2}] + [\frac{n}{4}] - 1 = [\frac{3n-7}{4}]$ триаголници кои меѓусебно не се складни. Според тоа, ако $n>3$, постојат $[\frac{3n-7}{4}]$ триаголници кои меѓусебно не се складни, а за $n=3$ имаме само еден таков триаголник.

37. Во конвексен n – аголник се повлечени неколку дијагонали. Една од повлечените дијагоналите се нарекува *добра*, ако во внатрешна точка сече точно

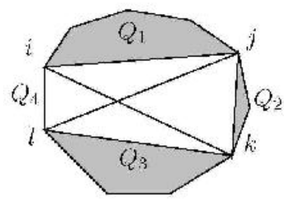
една од другите повлечени дијагонали. Определи го најголемиот можен број на добри дијагонали.

Решение. Во конвексен $n-$голник може да се повлечат најмногу $n-3$ дијагонали кои немаат заеднички внатрешни точки.

Со индукција по n ќе докажеме дека бројот на добрите дијагонали е помал или еднаков на $n-2$, ако n е парен број, и е помал или еднаков на $n-3$ ако n е непарен број. Отсечката ќе ја сметаме за $2-$аголник без дијагонали. Јасно, за $n=2,3$ тврдењето е точно. Нека $n\geq 4$ и нека многуаголникот е $P := A_1A_2...A_n$.

Ако никои две добри дијагонали не се сечат, од тврдењето следува дека нивниот број е помал или еднаков на 3. Нека A_iA_k и A_jA_l, $i<j<k<l$, се две добри дијагонали кои се сечат. Тогаш секоја од тие дијагонали не се сече со другите повлечени дијагонали.

На момент да заборавиме на A_iA_k и A_jA_l. Секоја од останатите повлечени дијагонали d е дијагонала или страна точно на еден од многуаголниците



$$Q_1 := A_i...A_j,\ Q_2 := A_j...A_k,$$

$$Q_3 := A_k...A_l \text{ или } Q_4 := A_l...A_nA_1...A_i .$$

Притоа, ако d е страна на некој од нив, тогаш d не се сече со други дијагонали, па значи не е добра.

Нека n е парен број. Од индуктивната претпоставка следува, дека меѓу сите дијагонали, кои припаѓаат на некој од многуаголниците Q_s, $s=1,2,3,4$ бројот на добрите дијагонали е помал или еднаков на бројот на темињата на Q_s намален за 2. Затоа, заедничкиот број на добри дијагонали на P е помал или еднаков на

$$2+(j-i-1)+(k-j-1)+(l-k-1)+(n-l+i-1)=n-2 . \qquad (1)$$

Кога n е непарен број, вкупниот број на темиња на многуаголниците Q_s, $s=1,2,3,4$ е еднаков на непарниот број $n+4$. Тоа значи дека барем еден од нив има непарен број темиња. Тогаш, соодветниот собирок во збирот (1) се намалува за 1 и вкупниот број на добри дијагонали е еднаков на $n-3$.

На читателот му препуштаме да најде примери кои ја покажуваат точноста на најдената оценка.

38. За дијагоналата на правилниот 2006-аголник $\boldsymbol{R}$ велиме дека е *добра* ако нејзините крајни точки ја делат границата на $\boldsymbol{R}$ на две дела такви што секој од деловите се состои од непарен број страни на $\boldsymbol{R}$. За страните на $\boldsymbol{R}$ исто така сметаме дека за добри.

Ги разгледуваме разбивањата на многуаголникот $\mathcal{R}$ на триаголници со помош на 2003 дијагонали такви што не постојат две дијагонали со заедничка внатрешна точка. Определи го најголемиот можен број рамнокраки триаголници со по две добри страни кои може да се појават во такво разбивање.

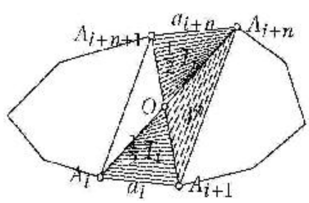
Решение. Рамнокраките триаголници со две добри страни ќе ги наречеме добри. Темињата на добар триаголник T ја делат границата на $\mathcal{R}$ на три дела, од кои два, да кажеме $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, се состојат од непарен број страни. Ќе велиме дека T ги поседува сите страни во $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$.

Секој добар триаголник различен од T поседува парен број страни во секој од деловите $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$. Бидејќи бројот на страните во $\mathcal{R}_i$ е непарен, барем една од нив, да кажеме a_i, не ја поседува ниту еден добар триаголник освен T. На триаголникот T му придружуваме две страни a_1 и a_2. По конструкција, не постојат два триаголници кои имаат заедничка придружена страна, па затоа добри триаголници не може да има повеќе од 1003.

Пример со 1003 добри триаголници може да се добие со повлекување на дијагоналите $A_{2k-2}A_{2k}$, за $k=1,2,...,1003$ (каде $A_0 \equiv A_{2006}$) и уште произволни 1000 дијагонали.

39. На секоја страна b на конвексниот многуаголник $\mathcal{R}$ и ја придружуваме најголемата плоштина на триаголникот кој се содржи во $\mathcal{R}$ и чија една страна е b. Докажи, дека збирот на сите плоштини придружени на страните на многуаголникот $\mathcal{R}$ е поголем или еднаков на двократната плоштина P на многуаголникот $\mathcal{R}$.

Решение. На секое теме A на многуаголникот $\mathcal{R}$ му соодветствува единствена точка A' на границата на $\mathcal{R}$ таква што правата AA' ја полови плоштината на $\mathcal{R}$. Сметајќи ги и овие точки по потреба во темињата, можеме да претпоставиме дека $\mathcal{R}$ има парен број темиња $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, и дека секоја дијагонала $A_iA_{i+n} (i=1,...,n)$ ја полови неговата плоштина.



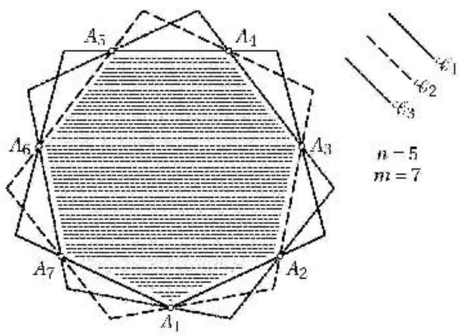
Со a_i и d_i да ги означиме страната A_iA_{i+1} и полуправата A_iA_{i+n}, $1 \le i \le 2n$ (индексите се по модул $2n$), соодветно. За $i=1,...,n$, нека $\mathcal{R}_i$ е областа ограничена со d_i, d_{i+1}, a_i и a_{i+n}, а T_i е нејзината плоштина. Ќе докажеме дека областите $\mathcal{R}_i$ го покриваат целиот $\mathcal{R}$. Нека X е произволна точка во внатрешноста на $\mathcal{R}$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека X е лево од d_i. Бидејќи X е десно од d_{i+n}, постои j ($i \le j < i+n$) таков што X е лево од d_j и десно од d_{j+1}, а тогаш $X \in \mathcal{R}_j$. Оттука следува дека $T_1+\ldots+T_n \geq P$. Со P_i да ја означиме плоштината придружена на страната a_i $(1 \leq i \leq n)$. Нека d_i и d_{i+1} се сечат во точката O . Триаголниците $OA_i A_{i+1}$ и $OA_{i+n}A_{i+n+1}$ имаат плоштина $\frac{1}{2}T_i$, додека барем еден од триаголниците $OA_i A_{i+n+1}$ и $OA_{i+1}A_{i+n}$ има плоштина T' која не е помала од $\frac{1}{2}T_i$. Според тоа, $P_i, P_{i+n} \geq \frac{1}{2}T_i + T' \geq T_i$. Конечно,

$$P_1+\ldots+P_{2n} \geq 2(T_1+\ldots+T_n) \geq 2P .$$

Знак за равенство важи ако и само ако многуаголникот $\mathcal{R}$ е централно симетричен.

40. Даден е цел број $n \geq 3$. Нека ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 се границите на три конвексни $n-$ аголници во рамнината такви да пресекот на секои две од нив е конечно множество точки. Определи го најголемиот можен број точки на $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$.

Решение. Точките во $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$ се темиња на конвексен многуаголник $\mathcal{P}$. Да разгледаме една негова страна AB . Таа припаѓа најмногу на една од границите на $n-$ аголниците ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 (пресекот на било кои две граници не содржи отсечка), што значи дека правата AB отсекува од останатите два $n-$ аголници барем по едно теме. Така секоја страна на $\mathcal{P}$ отсекува барем две од вкупно $3n$ темиња на ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 , па затоа $\mathcal{P}$ не може да има повеќе од $\frac{3n}{2}$ страни.



Бројот $m=[\frac{3n}{2}]$ може да се достигне. Нека $A_1A_2...A_m$ е конвексен $m-$ аголник, a_k $(1 \leq k \leq m)$ права низ темињата A_k, A_{k+1} и b_k $(1 \leq k \leq 3n-m)$ произволна права низ A_k која со $m-$ аголникот нема други заеднички точки ($A_{n+1}=A_1$, $b_{n+1} \neq b_1$). Доволно е да се дефинира ℓ_i, $(i=1,2,3)$ како многуаголник определен со сите прави a_k и b_q , каде $k \equiv q+1 \equiv i (\mathrm{mod}\, 3)$. Лесно се проверува дека ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 се конвексни $n-$ аголници.

41. Нека m и n , $n > m > 4$ се природни броеви, $A_1A_2...A_{2n+1}$ е правилен $(2n+1)-$ аголник и $P=\{A_1, A_2, ..., A_{2n+1}\}$. Определи го бројот на конвексните $m-$ аголници со темиња во множеството P кои имаат точно два внатрешни остри агли.

Решение. Да забележиме дека ако конвексен $m-$аголник, $m>4$, со темиња во P има точно два внатрешни остри агли, тогаш овие агли се во две последователни темиња (во спротивно ќе имаме два пара страни кои меѓу себе не се сечат, секој од кои зафаќа повеќе од половина од опишаната кружница). Затоа е доволно да се определи бројот на четворките темиња (последователни во $m-$аголникот), кои определуваат два остри агли, со фиксирано крајно во насока на движењето на стрелките на часовникот теме, а потоа добиениот број да се помножи со $2n+1$.

Нека големиот лак, определен од четирите точки, содржи k точки од P. Тогаш другиот (малиот) лак содржи $2n-1-k$ точки од P и темињата на $m-$аголникот може да бидат избрани на $\binom{2n-1-k}{m-4}$ начини. Двете внатрешни за големиот лак темиња може да бидат избрани на $(k-n-1)^2$ начини (јасно за да имаме голем лак мора да е $k\geq n$).

Според тоа, за фиксиран k имаме $(k-n-1)^2\binom{2n-1-k}{m-4}$ од саканиот вид $m-$аголници. Ако сумираме по k и направиме смена на променливата го добиваме збирот $\sum\limits_{k\geq 0} k^2\binom{n-k-2}{m-4}$. Ќе докажеме дека овој збир е еднаков на $\binom{n}{m-1}+\binom{n+1}{m-1}$. Притоа ќе користиме индукција по $n>m$ и по $m>4$.

Базните случаи $n=m+1$ и $m=5$ се проверуваат непосредно. Сега од индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} k^2\binom{n-k-2}{m-4} &= \sum_{k\geq 0} k^2\binom{(n-1)-k-2}{m-4}+\sum_{k\geq 0} k^2\binom{(n-1)-k-2}{(m-1)-4}\\ &=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n}{m-1}+\binom{n-1}{m-2}+\binom{n}{m-2}\\ &=\binom{n}{m-1}+\binom{n+1}{m-1}.\end{aligned}$$

Според тоа, бараниот број е $(2n+1)(\binom{n}{m-1}+\binom{n+1}{m-1})$.

42. Дадени се неколку тетиви на единичната кружница такви што секој нејзин дијаметар сече најмногу k тетиви. Докажи дека збирот на должините на сите тетиви е помал од k® .

Решение. На секоја тетива да и го придружиме лакот определен со нејзините крајни точки и дијаметрално спротивниот лак. Тогаш збирот на лаците придружени на тетива со должина d е поголем од $2d$. Дијаметар на кругот сече тетива ако и само ако ги сече двата придружени лаци. Тоа значи дека секој дијаметар сече најмногу $2k$ лаци, па збирот на должините на тие лаци е помал или еднаков на $2k$® . Следува дека збирот на должините на тетивите е помал од k® .

43. Во круг се нацртани n дијаметри кои го делат на $2n$ исечоци. Произволни n исечоци се обоени црвено, а преостанатите n сино. Во сините исечоци, почнувајќи од некој, во насока на движење на стрелките на часовникот се запишани броевите $1,2,...,n$. Во црвените исечоци, почнувајќи од некој, во спротивната насока се запишани броевите $1,2,...,n$. Дали постои полукруг кој ги содржи сите броеви од 1 до n.

Решение. Да разгледаме два исечоци со еднакви броеви кои се на најмало меѓусебно растојание: нека се тоа, да кажеме, синиот и црвениот исечок со број n и да ги означиме со A и B, при што B е по A во насока на движењето на стрелките на часовникот. Барем еден исечок со број 1 не е меѓу A и B, бидејќи во спротивно исечоците со број 1 би биле на помало растојание. Според тоа, сите исечоци кои се строго меѓу A и B имаат иста боја, да кажеме сина. Тврдиме дека полукругот кој почнува со син исечок бројот 1 и продолжува во насока на движењето на стрелките на часовникот ги содржи сите броеви од 1 до n. Навистина, ако црвените броеви на тој полукруг се $1,2,...,k$, тогаш во него има сини исечоци $n-k$ и тие се означени со броевите $n,n-1,...,k+1$.

44. На кружница се означени n точки, кои ја делат на n лаци. Кружницата се ротира околу центарот за агол $\frac{2\pi k}{n}$, k е некој природен број, по што означените n точки се пресликуваат во нови n точки, кои ја делат кружницата на n нови лаци. Докажи дека некој од новите лаци целосно лежи во некој од старите лаци. (Лаците се разгледуваат како затворени множества.)

Решение. Ќе сметаме дека радиусот на кружницата е 1, а ротацијата е во насока на движењето на стрелката на часовникот. Ако две нови точки лежат на еден ист стар лак, тогаш некој нов лак лежи исцело во тој стар лак. Затоа да претпоставиме, дека нема такви нови точки. Бидејќи како новите, така и старите лаци се вкупно по n, тоа е можно само кога на секој стар лак има точно по една нова точка (притоа новите точки не се краеви на старите лаци).

Нека старите точки се $A_1,A_2,...,A_n$, нумерирани во насока на движење на стрелката на часовникот и нека при ротацијата точката A_i се пресликува во нова точка B_i (индексите се по модул n, т.е. $A_{n+i}=A_i$, $B_{n+i}=B_i$). Јасно, соседните точки припаѓаат на соседни лаци, т.е. ако B_1 лежи во лакот A_jA_{j+1}, тогаш за секој i точката B_i лежи во лакот $A_{j+i-1}A_{j+i}$.

Нека $j \le k$. Да забележиме, дека сите лаци од видот $A_iA_{i+1}...A_{i+j}$ ја покриваат кружницата точно j пати. Според тоа, збирот на нивните должини е еднаков на $2\pi j \le 2\pi k$. Од друга страна, должината на лакот $A_iA_{i+1}...A_{i+j}$ е строго поголема од должината на лакот A_iB_i, која е еднаква на $\frac{2®k}{n}$, па затоа збирот на нивните должини е строго поголем од $n\frac{2®k}{n}=2®k$, што е противречност.

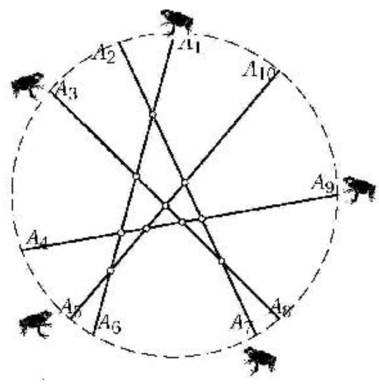
Аналогно, ако $j>k$, тогаш збирот на должините на сите лаци од видот $A_iA_{i+1}...A_{i+j-1}$ е еднаков на $2®(j-1)\geq 2®k$, а од друга страна тој е строго помал од збирот на должините на лаците A_iB_i, кој е еднаков на $2®k$, што повторно е противречност.

45. Во рамнита се дадени $n\geq 2$ отсечки така што секои две отсечки се сечат во внатрешна точка и никои три не се сечат во една точка. Ѓорѓи треба да избере по еден крај на секоја отсечка и на него да постави жаба свртена кон другиот крај на отсечката. Потоа тој ќе плесне со рацете $n-1$ пати. Секој пат кога ќе плесне со рацете, секоја жаба одма скокнува напред во следната пресечна точка на својата отсечка. Жабите никогаш не ја менуваат насоката во која скокаат. Ѓорѓи сака да ги постави жабите така што ниту во еден момент две жаби нема да се најдат во иста пресечна точка.

а) Ако *n* е непарен, докажи дека Ѓорѓи секогаш може да ја постигне целта.

б) Ако *n* е парен, докажи дека Ѓорѓи никогаш не може да ја постигне целта.

Решение. Разгледуваме голема кружница која ги содржи сите отсечки и да ги продолжиме отсечките на двете страни до пресекот со кружницата. Пресечните точки да ги означиме со $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ во насока на движењето на стрелките на часовникот. Дадените отсечки лежат на правите $A_i\ A_{n+i}$, $1\leq i\leq n$.



а) Ќе докажеме дека Ѓорѓи ја постигнува целта ако жабите ги постави во точките $A_1, A_3, A_5, ..., A_{2n-1}$. Ги разгледуваме жабите во точките A_i и A_j, каде *i* и *j* се непарни броеви и $i<j<n+i$ (индексите се по модул $2n$). Нека *X* е пресечната точка на отсечките A_iA_{n+i} и A_jA_{n+j}. На лакот $A_iA_{i+1}A_j$ има непарен број означени точки, а секоја отсечка со еден крај во овие точки сече точно една од отсечките A_iX и A_jX. Сите останати отсечки ги сечат или двете отсечки A_iX и A_jX, или ниту една. Следува дека на отсечките A_iX и A_jX вкупно има непарен број пресечни точки, па затоа овие две жаби нема да се судрат.

б) Ако *n* е парен, некои две жаби на Ѓорѓи ќе бидат во соседни точки на кружницата, да кажеме во A_i и A_{i+1}. Нека отсечките со краеви во овие две точки се сечат во точката X. Бидејќи секоја отсечка која сече една од отсечките A_iX и $A_{i+1}X$, мора да ја сече и другата, на отсечките A_iX и $A_{i+1}X$ има еднаков број пресечни точки. Затоа овие две жаби ќе се судрат во точката X.

46. Во рамнината разгледуваме n кружници $C_1, C_2, ..., C_n$ такви што центарот на кружницата C_i лежи на кружницата C_{i+1}, каде $C_{n+1} = C_1$. Определи го најголемиот можен број парови (i, j) за кои внатрешноста на кружницата C_j лежи во внатрешноста на кружницата C_i.

Решение. Да поставиме редум n кружници така што за $2 \le i \le n-1$ кружницата C_i е внатре во кружницата C_{i-1} и минува низ нејзиниот центар, а кружницата C_n има центар на C_1 и минува низ центарот на C_{n-1}. На овој начин добиваме пример со $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ парови (i, j) кои го задоволуваат условот на задачата.

Множеството G од разгледуваните парови ги има следниве својства:

1) $(i,i) \notin G$,

2) $(2,1), (3,2), ..., (n, n-1), (1, n) \notin G$,

3) ако $(i, j), (j, k) \in G$, тогаш $(i, k) \in G$,

4) ако $(i, j) \in G$, тогаш $(j, i) \notin G$.

Ќе докажеме со индукција по n (база на индукцијата $n = 2$) дека множеството со својства 1) – 4) има најмногу $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ елементи.

Ако ниту еден од паровите $(1,2), (2,3), ..., (n,1)$ не е во G, тогаш

$$|G| \le \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1.$$

Затоа да претпоставиме дека, на пример, $(n,1) \in G$. Тогаш $(1, n-1) \notin G$ (во спротивно од 3) ќе следува дека $(n, n-1) \in G$), па множеството

$$G' = \{(i, j) \in G \mid 1 \le i, j \le n-1\},$$

за $n-1$ ги задоволува условите 1) – 4), и по индуктивната претпоставка важи $|G'| \le \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Останува да докажеме дека $|G \setminus G'| \le n-2$, од што ќе следува дека

$$|G| = |G'| + |G \setminus G'| \le \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Нека претпоставиме дека $|G \setminus G'| = n-1$. Тогаш за секои $i = 1, 2, ..., n-1$ точно еден од паровите (i, n), (n, i) припаѓа на G. Бидејќи $(n, n-1) \notin G$, важи

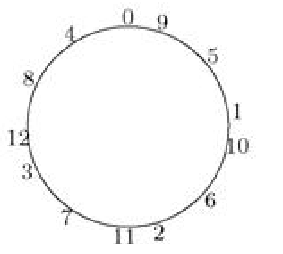
$(n,n-1)\in G$. Ако $(n,n-2)\in G$, тогаш од 3) следува $(n-1,n-2)\in G$, што не е точно. Значи, $(n,n-2)\notin G$ и $(n-2,n)\in G$. Слично, $(n,n-3)\notin G$ и $(n-3,n)\in G$ итн. и најпосле $(n,1)\notin G$ и $(1,n)\in G$, што е противречност, од што следува дека $|G\setminus G'|\leq n-2$.

47. Дадени се природен број $n\geq 3$ и $n+1$ точка кои дадена кружница ја делат на лаци со еднакви должини. Ги разгледуваме сите можни означувања на овие точки со броевите $0,1,...,n$, каде секоја ознака се користи точно еднаш и две такви означувања се сметаат за еднакви ако едното може да се добие од другото со ротација на кружницата. За означувањето ќе велиме дека е *убаво* ако за секои четири ознаки $a<b<c<d$, такви што $a+d=b+c$, тетивата која ги поврзува точките означени си a и d не ја сече тетивата која ги поврзува точките означени со b и c .

Нека M е бројот на убавите означувања, а N е бројот на подредени парови природни броеви (x,y) такви што $x+y\leq n$ и $(x,y)=1$. Докажи дека $M=N+1$.

Решение. Наместо означување на дадените $n+1$ точка ќе работиме со циклични распореди на броевите $0,1,...,n$ на кружницата, каде распоредот е *убав* ако соодветствува на убаво означување.

Избираме ирационален број $\alpha\in(0,1)$. Произволна точка на кружницата да ја означиме со 0, а за $k\in\mathbb{N}$ со k ја означуваме точката на кружницата на аголно растојание ~® од точката $k-1$ во насока на движењето на стрелките на часовникот. Добиениот распоред на броевите $0,1,...,n$ го нарекуваме *цикличен* и го означуваме со $R(\alpha)$, цртеж десно.



$R(\alpha)$ за $n=12$ и $\frac{2}{9}<\alpha<\frac{1}{4}$

Со $[p,q]$ да ја означиме тетивата на кружницата определена со точките p и q , а со $[\widehat{p,q}]$ соодветниот лак во насока на движењето на стрелките на часовникот. Ако броевите $a<b<c<d$ го задоволуваат условот $a+d=b+c$, тогаш точките означени со a,b,c,d се темиња на рамнокрак трапез, па затоа $[a,d]$ е паралелна со $[b,c]$. Следува дека распоредот $R(\alpha)$ е убав.

Бидејќи α се менува од 0 до 1, распоредот $R(\alpha)$ единствено се менува кога минува низ рационалниот број $\frac{p}{q}$ со $(p,q)=1$ и $q\leq n$. Бидејќи $\frac{p}{q}\to(p,q-p)$ е биекција меѓу ваквите дропки $\frac{p}{q}$ и паровите (x,y) природни броеви со $(x, y) = 1$ и $x + y \leq n$, вакви рационални броеви $\frac{p}{q}$ има точно N; нека $0 = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < ... < \frac{p_N}{q_N} < 1 < \frac{p_{N+1}}{q_{N+1}}$. Секој интервал $(\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ определува по еден цикличен распоред, па затоа има точно $N + 1$ различни циклични распореди.

Да забележиме дека за $\sim \in (\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ броевите непосредно пред и по бројот 0 во насока на движењето на стрелката на часовникот се еднакви на q_{i+1} и q_i, соодветно. Навистина, за доволно мало £, јасно е дека во $R(\frac{p_i}{q_i} + £)$ точката q_i е непосредно по 0, а додека во $R(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - £)$ точката q_{i+1} е непосредно пред 0.

Останува со индукција по n да докажеме дека секој убав распоред е цикличен. Ова е точно за $n \leq 2$. Да разгледаме убав распоред R на броевите $0, 1, ..., n+1$. Според индуктивната претпоставка, распоредот на броевите $0, 1, ..., n$ се совпаѓа со распоредот $R(\sim)$ за $\sim$ од некој интервал $(\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$.

Нека бројот n се наоѓа на лакот $[\widehat{x, y}]$ на кој нема други точки. Бидејќи тетивите $[x+1, n]$ и $[y, n+1]$ не се сечат, $n+1$ се наоѓа на лакот $[\widehat{x+1, x}]$. Тетивите $[y+1, n]$ и $[y, n+1]$ не се сечат, па затоа $n+1$ се наоѓа на лакот $[\widehat{y, y+1}]$. Значи, $n+1$ е на лакот $[\widehat{x+1, y+1}]$, цртеж десно. Од друга страна, заради цикличноста, единствена точка која може да лежи на овој лак е точката 0.

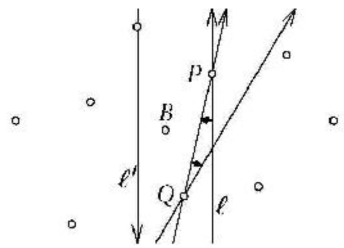
1) Ако точката 0 не е на лакот $[\widehat{x+1, y+1}]$, распоредот R е еднозначно определен и тој мора да се совпадне со $R(\sim)$.

2) Точката 0 е на лакот $[\widehat{x+1, y+1}]$ ако и само ако $\frac{k}{n+1} \in (\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ за некој $k \in \mathbb{N}$. Во овој случај, ако бројот $n+1$ го ставиме меѓу $x+1$ и 0, односно меѓу 0 и $y+1$, добиваме две можности за распоредот R. Во распоредот $R(\sim)$ за $\frac{p_i}{q_i} < \sim < \frac{k}{n+1}$ и $\frac{k}{n+1} < \sim < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, точката $n+1$ припаѓа на лаците $[\widehat{x+1, 0}]$ и $[\widehat{0, y+1}]$, соодветно. Значи, двата можни распореди се циклични.

48. Нека $\boldsymbol{S}$ е конечно множество точки во рамнината кое содржи најмалку две точки. Множеството $\boldsymbol{S}$ не содржи три колинеарни точки. *Ветерница* се

нарекува следнава постапка. На почетокот се избира права l која содржи точно една точка $P \in \boldsymbol{S}$. Правата l се ротира во насока на движењето на стрелките на часовникот околу центарот P до моментот во кој по прв пат содржи некоја друга точка Q од $\boldsymbol{S}$. Од тој момент таа точка Q станува нов центар, а правата продолжува да се ротира околу Q во насока на движењето на стрелките на часовникот до првиот момент во кој повторно содржи некоја друга точка од множеството $\boldsymbol{S}$. Оваа постапка бесконечно се повторува.
Докажи дека може да се избере некоја точка P од $\boldsymbol{S}$ и некоја права l која ја содржи P така што во добиената ветерница секоја точка на множеството $\boldsymbol{S}$ станува центар бесконечно многу пати.

Решение. *Прв начин*. Правата l во почетната позиција ја ориентираме произволно. Тогаш l во секој момент ја дели рамнината на лева и десна полурамнина. Во текот на работата на ветерницата, при премин на центарот од точката P во точката Q, точката P преминува од l во левата полурамнина, додека Q преминува од левата полурамнина на l. На овој начин броевите n_1 и n_2 на точките соодветно лево и десно од правата l остануваат исти во текот на целиот процес (со исклучок кога l содржи две точки).



Да земеме произволна точка $A \in \boldsymbol{S}$ и права l низ A таква што $|n_1 - n_2| \leq 1$ и да ја пуштиме ветерницата во погон. Нека претпоставиме дека постои точка B која ќе се најде на l само конечен број пати. Тоа значи дека почнувајќи од некој момент, B никогаш нема да биде на l, т.е. секогаш ќе се наоѓа од иста страна, да кажеме левата страна од правата l. Кога l ќе се заврти за 180°, ќе се најде во положба на некоја права l' паралелна со l, но со спротивна ориентација. Точката B е меѓу правите l и l', што значи дека лево од l се наоѓаат сите точки кои се десно од l', плус точката B и една точка која во тој момент лежи на l. Затоа $n_1 - n_2 \geq 2$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека ветерницата минува низ секоја точка бесконечно многу пати.
Втор начин. Правата l ја дели рамнината на две полурамнини. Едната од нив да ја наречеме сина, а другата црвена. Да забележиме дека при промена на центарот на вртење новиот и стариот центар преминуваат од една полурамнина во друга. Според тоа, во секој момент (освен кога правата минува низ две точки) бројот на точките во синиот дел е непроменет и бројот на точките во црвениот дел е непроменет.
Нека $|\boldsymbol{S}| = 2n+1$. Ќе го користиме добро познатиот факт, дека низ секоја

точка на $\mathcal{S}$ постои права која ја дели рамнината на две полурамнини со еднаков број точки. Да избереме точка P и права низ P, која ги разделува точките од $\mathcal{S}$ на два еднакви дела. Ќе докажеме дека при ротација за 180° правата минува низ секоја точка од $\mathcal{S}$.

Да разгледаме произволна точка Q од $\mathcal{S}$ и права l која ги разделува точките од $\mathcal{S}$. Точката Q е единствена точка од $\mathcal{S}$, за која права паралелна со l ги разделува точките на еднакви делови. Тоа значи дека кога правата на мелницата стане паралелна со l, таа всушност е правата l и затоа мелницата минува низ Q.

Нека $|\mathcal{S}|=2n$. Повторно ќе го искористиме познатиот факт дека за секоја точка постои права која минува низ таа точка и за која има $n-1$ точка во синиот дел и n точки во црвениот дел.

Да избереме една таква права за почетна состојба на мелницата. Ќе докажеме дека при завртување за 360° правата минува низ секоја точка од $\mathcal{S}$.

Да разгледаме произволна точка Q од $\mathcal{S}$ и права l за која имаме $n-1$ точка во синиот дел и n точки во црвениот дел од рамнината. Кога правата на мелницата стане паралелна со l со истите сина и црвена полурамнина, таа мора да биде точно правата l и затоа мелницата минува низ точката Q.

Конечно, од претходните разгледувања следува тврдењето на задачата.

49. Множеството T содржи 66 точки, а множеството P содржи 16 прави во рамнината. За точка $A\in T$ и права $l\in P$ велиме дека се *инцидентен пар* ако $A\in l$. Докажи, дека бројот на инцидентните парови не може да биде поголем од 159, како и дека постои конфигурација со 159 инцидентни парови.

Решение. Со $A_1, A_2, ..., A_{66}$ да ги означиме точките на множеството T и со a_i бројот на правите кои ја содржат точката A_i. Тогаш бројот на правите кои се сечат во A_i е еднаков на $\binom{a_i}{2}$, а бројот на инцидентните парови е $I=\sum a_i$.

Бидејќи секои две прави се сечат во најмногу една точка, важи

$$\sum_{i=1}^{66}\binom{a_i}{2}\le\binom{16}{2}=120 .$$

Нека b_k е бројот на точките од T низ кои минуваат точно k прави од T. Тогаш

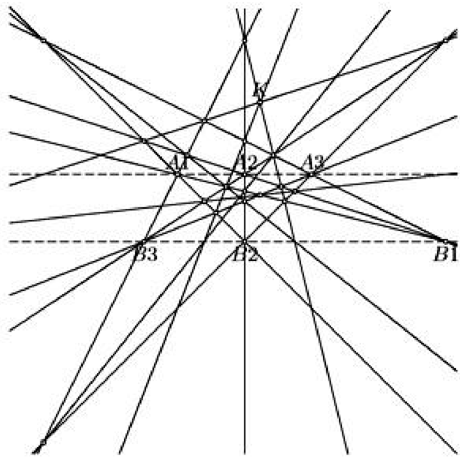
$$\sum b_k=66 ,\quad \sum\binom{k}{2}b_k\le 120 \text{ и } I=\sum kb_k\le\sum\tfrac{1}{2}\left(3+\binom{k}{2}\right)b_k=\frac{3\cdot 66+120}{2}=159 ,$$

бидејќи $3+\binom{k}{2}\ge 2k$. Знак за равенство важи ако $b_k=0$, за $k\ne 2,3$, $b_2=39$ и $b_3=27$, т.е. ако правите од P определуваат 39 двојни и 27 тројни пресеци.

Пример на конфигурација со 159 инцидентни парови може да се конструира со помош на теоремата на Дезарг. Да земеме точки A_1, A_2, A_3 на права a и B_1, B_2, B_3 на права $b \parallel a$ и да повлечеме 9 прави A_iB_j, $i, j \in \{1,2,3\}$. На пример, на цртежот имаме

$$\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{B_1B_2} : \overline{B_2B_3} = 2:2:3:6,$$

што значи дека меѓу овие прави нема паралелни. Според теоремата на Дезарг овие 9 прави определуваат 18 пресечни точки кои се по три колинеарни – што значи дека определуваат уште 6 прави. Заедно со овие 6 прави имаме цртеж со 15 прави и 24 тројни пресеци. Притоа трите прави добиени со теоремата на Дезарг се сечат во една точка (на цртежот точката K) и тоа е 25-тиот троен пресек. Да повлечеме само една права која минува низ две двојни пресечни точки. За множеството P од 16 нацртани прави и множеството T кое се состои од добиените 27 тројни и преостанатите 39 двојни пресеци важи знак за равенство.



50. Рамнината е поделена на области со конечен број прави, такви што не постојат три прави кои минуваат низ иста точка. За две области ќе велиме дека се соседни ако нивната заедничка граница е отсечка, полуправа или права. Во секоја област е запишан цел број така што се исполенти следниве услови:

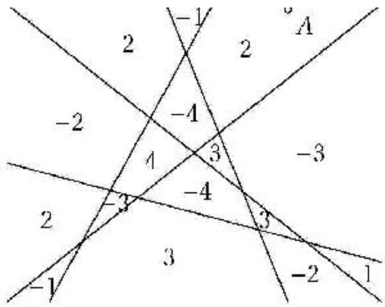
1) производот на броевите во соседните области е помал од нивниот збир,
2) збирот на сите броеви од секоја страна на произволна права е еднаков на нула.

Докажи, дека тоа е можно ако и само ако сите прави не се паралелни.

Решение. Ако сите прави се паралелни, тогаш од условот 2) следува дека сите броеви мора да бидат еднакви на нула, но тогаш не важи условот 1), па значи не е можно да се запишат цели броеви така што се исполенти условите 1) и 2).

Сега ќе го конструираме бараното запишување на броевите при кое се исполнети условите 1) и 2). На почетокот во рамнината да фиксираме точка A која не лежи ниту на една од дадените прави. За произволна област R земаме точка B внатре во областа. Јасно, бројот k_R на прави кои ја сечат отсечката AB не зависи од изборот на точката B. Освен тоа, за секои две соседни области R и S важи $k_R = k_S \pm 1$.

На областа R и го доделуваме бројот $u_R(-1)^{k_R}$, каде u_R е бројот на аглите на областа R (на пример, види цртеж). Ќе докажеме дека ова доделување на целите броеви ги задоволува условите на задачата.



1) По конструкција, броевите a и b доделени на две соседни области се со различен знак, да кажеме $a<0<b$, па затоа $ab \le a < a+b$.
2) Во секој агол на секоја област R го запишуваме бројот $(-1)^{k_R}$. Збирот на броевите во областите од една страна на права p е еднаков на збирот на броевите во сите агли на таа страна на правата. Бидејќи во секоја пресечна точка збирот на броевите во аглите (имаме 2 или 4 броја) е еднаков на 0, добиваме дека вкупниот збир исто така е еднаков на 0.

51. Во рамнината се дадени n конвексни k – аголници, такви што секои два од нив имаат заедничка внатрешна точка. Познато е дека секој од k – аголниците може да се преслика во секој друг k – аголник со хомотетија со позитивен коефициент. Докажи, дека во рамнината постои точка која припаѓа барем на $1+\frac{n-1}{2k}$ од тие k – аголници.

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Ако два конвексни многуаголници со заедничка внатрешна точка се пресликуваат еден во друг при хомотетија со позитивен коефициент, тогаш некое од темињата на едниот многуаголник е внатрешна точка за другиот многуаголник.

Доказ. Нека двата многуаголници се P и P'. Ако едниот од нив лежи во другиот, тогаш нема што да се докажува. Во спротивно, постои страна AB на P, која ја сече контурата на P'. Ако P' содржи една од точките A или B, тогаш тврдењето е докажано.

Останува да го разгледаме случајот кога P' ја сече AB по отсечка, која лежи во внатрешноста на AB. Јасно, P' има темиња и од двете страни на правата AB. Да ги разгледаме страната $A'B'$ на P' која при хомотетијата е соодветна на AB и произволно теме C' на P', такво што $A'B'$ и C' се во различни полурамнини во однос на AB. Нека C е во P соодветното теме на C'. Тогаш C' лежи во внатрешноста на $\triangle ABC$, бидејќи се наоѓа во една иста полурамнина во однос на AB, BC и AC со тој триаголник. Во случајов C' припаѓа на P, со што доказот е завршен. ■

Нека $P_1, P_2, ..., P_n$ се дадените $k-$аголници и да означиме $P_i = A_{i,1}...A_{i,k}$, за $i = 1, 2, ..., n$. За секое теме $A_{i,j}$ со $a_{i,j}$ да го означиме бројот на многуаголниците P_s, $s \neq i$, за кои $A_{i,j}$ е внатрешна точка. Од лемата следува, дека секој пар $k-$аголници е броен барем еднаш при наоѓање на броевите $a_{i,j}$. Затоа

$$a_{1,1} + ... + a_{1,k} + ... + a_{i,1} ... + a_{i,k} + ... + a_{n,1} + ... + a_{n,k} \geq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Оттука следува, дека најмалку еден од броевите $a_{i,j}$ не е помал од $\frac{n(n-1)}{2nk} = \frac{n-1}{2k}$. Бидејќи темето $A_{i,j}$ лежи во P_i и уште $a_{i,j}$ други $k-$аголници, добиваме дека тоа припаѓа на $1 + \frac{n-1}{2k}$ од $k-$аголниците, т.е. го има саканото својство.

52. Коцка со рамнини кои се паралелни на ѕидовите на коцката е разделена на 27 правоаголни паралелопипеди. Ако точно два од овие паралелопипеди се коцки, докажи дека тие имаат еднакви рабови.

Решение. Нека A е едно од темињата на коцката. Секој од трите раба кои излегуваат од A е поделен од дадените рамнини на три дела. Ако тоа не е така, тогаш нема да добиеме 27 паралелопипеди во поделбата.

Со $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ и z_1, z_2, z_3 да ги означиме должините на тие отсечки по секој раб на коцката кој излегува од темето A. Добиваме

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3.$$

Ако двете коцки во поделбата имаат рабови a и b, $a \neq b$, тогаш

$$a = x_i = y_j = z_k \text{ и } a = x_p = y_q = z_r \text{, каде } i \neq p,\ j \neq q, k \neq r.$$

Нека u не е i или p, v не е j или q и t не е k или r. Од горните равенства следува

$$a + b + x_u = a + b + y_v = a + b + z_t \text{, т.е. } x_u = y_v = z_t.$$

Последното значи дека имаме уште една коцка, што противречи на условот на задачата. Од добиената противречност следува $a = b$.

53. Тридимензионалниот простор е разбиен на тетраедри и октаедри со рамнини со равенки $x \pm y \pm z = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Нека точката (x_0, y_0, z_0) со рационални координати не лежи во ниту една од рамнините на разбивањето. Докажи дека постои природен број k, за кој точката (kx_0, ky_0, kz_0) лежи во внатрешноста на некој од октаедрите на разбивањето.

Решение. *Лема*. Нека a, b, c и $a + b + c$ се рационални броеви, кои не се цели. Тогаш постои природен број k таков што броевите ka, kb и kc не се цели и

$$1 < \{ka\} + \{kb\} + \{kc\} < 2 .$$

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a, b, c \in (0,1)$. Нека $f(t) = \{ta\} + \{tb\} + \{tc\}$. Ако $1 < a + b + c < 2$, тогаш доволно е да земеме $k = 1$.

Ако $a + b + c < 1$, избираме природен број m за кој ma, mb и mc се цели броеви. Тогаш

$$f(m-1) = f(-1) = 3 - (a + b + c) > 2 > 1 .$$

Нека k е минималниот природен број за кој $f(k) > 1$, што значи $f(k-1) \leq 1$. Ќе докажеме дека за вака избраниот k важи $f(k) < 2$. Ако го искористиме неравенството

$$\{ka\} \leq \{(k-1)a\} + a$$

и аналогните неравенства добиваме

$$f(k) \leq f(k-1) + (a + b + c) < f(k-1) + 1 \leq 2 .$$

Останува да докажеме дека ka, kb и kc не се цели броеви. Нека претпоставиме дека некој од овие броеви е цел број, на пример ka. Тогаш

$$\{ka\} = \{(k-1)a\} + a - 1 ,$$

па оттука добиваме

$$f(k) \leq f(k-1) + (a + b + c) - 1 < f(k-1) \leq 1,$$

што противречи на изборот на k.

Ако $a + b + c > 2$, тогаш ги разгледуваме броевите $a' = 1 - a, b' = 1 - b$ и $c' = 1 - c$, за кои $a', b', c' \in (0,1)$ и $a' + b' + c' < 1$, што значи дека за a', b' и c' постои k кој го задоволува условот на лемата. Тогаш k ќе го задоволува условот и за a, b и c. ■

Да се вратиме на задачата. Воведуваме координатен систем $Oabc$, за кој на секоја точка со координати (x, y, z) од $Oxyz$ и соодветствува точка со координати (a, b, c), каде $a = y + z - x, b = z + x - y$ и $c = x + y - z$. Тогаш $x = \frac{b+c}{2}$, $y = \frac{c+a}{2}$ и $z = \frac{a+b}{2}$, при што важи $x + y + z = a + b + c$. Тогаш во $Oabc$ рамнините од условот соодветствуваат на рамнините $a = n, b = n,$ $c = n$ и $a + b + c = n$. Нека $a_0 = y_0 + z_0 - x_0, b_0 = z_0 + x_0 - y_0$ и $c_0 = x_0 + y_0 - z_0$ при услов дека a_0, b_0, c_0 и $a_0 + b_0 + c_0$ не се цели броеви.

Нека (u, v, w) е точка од $Oabc$ која нема целобројни кординати. Тогаш таа припаѓа во некоја коцка од видот $A \leq a \leq A+1, B \leq b \leq B+1, C \leq c \leq C+1$. Оваа коцка ги сече рамнините

$$a + b + c = A + B + C + 1 \text{ и } a + b + c = A + B + C + 2 ,$$

кои ја разбиваат на два тетраедри и еден октаедар (кој може да не е правилен). Ако (u,v,w) лежи во внатрешноста на овој октаедар, таа го задоволува условот $1<\{u\}+\{v\}+\{w\}<2$. Согласно лемата, применета на броевите a_0, b_0, c_0, можеме да најдеме број k кој ги задоволува условите на задачата.

54. Нека n е природен број и нека

$$S=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\{0,1,...,n\},\ x+y+z>1\}$$

е множество точки кое се состои од $(n+1)^3-1$ точка на тридимензионалниот простор. Определи го најмалиот можен број рамнини чија унија ги содржи сите точки на множеството S, но не ја содржи точката $(0,0,0)$.

Решение. *Прв начин.* Унијата на $3n$ рамнини $x=i,\ y=i,\ z=i$ за $1\le i\le n$ го содржи множеството S и не ја содржи точката $(0,0,0)$. Нека претпоставиме дека постои фамилија $\{a_i x+b_i y+c_i z+d_i=0\,|\,1\le i\le N\}$ од $N<3n$ рамнини кои го содржат S и не ја содржат $(0,0,0)$. Го разгледуваме полиномот

$$P(x,y,z)=\prod_{i=1}^{N}(a_i x+b_i y+c_i z+d_i)\,.$$

Лема 1. Постојат броеви $¢_i,\ i=1,2,...,n$ такви што

$$\sum_{i=1}^{n}¢_i=-1 \text{ и } \sum_{i=1}^{n}¢_i i^m=0\,,\text{ за } 0<m<n\,.$$

Доказ. Горниот систем е систем од n линеарни равенки со n непознати. Детерминантата на системот е Вандермондовата детерминанта (за броевите $1,2,...,n$) која е различна од нула, од каде следува тврдењето на лемата. ■

Од лема 1 (ако се усвои $0^0=1$) следува дека постојат $¢_0=1, ¢_i,\ i=1,2,...,n$ такви што

$$\sum_{i=0}^{n}¢_i i^m=0 \text{ за } 0\le m<n\,.$$

Нека $\deg P=N<3n$ и

$$S_1=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}¢_i¢_j¢_k P(i,j,k)\,.$$

Бидејќи во претходната сума $¢_0^3 P(0,0,0)$ е единствен член различен од 0, следува дека $S_1=P(0,0,0)\ne 0$. Од друга страна, ако

$$P(x,y,z)=\sum_{\sim+\ \ +¥\le N} p_{\sim,\ ,¥}\, x^{\sim} y\ \ z^{¥}\,,$$

следува

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} ¢_i ¢_j ¢_k \sum_{~+ \ +¥ \le N} p_{~, \ ,¥}\, i^{~} j \ \ k^{¥} \\
&= \sum_{~+ \ +¥ \le N} p_{~, \ ,¥} \Big(\sum_{i=0}^{n} ¢_i i^{~}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} ¢_j j \ \ \Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} ¢_k k^{¥}\Big)
\end{aligned} \qquad (1)
$$

Да го разгледаме собирокот кој соодветствува на тројката $(~, \ ,¥)$ во (1). Бидејќи $~+ \ +¥ \le N < 3n$, барем еден од $~, \ ,¥$ мора да е помал од n. Без ограничлување на општоста можеме да земеме дека тоа е $~$ и тогаш важи $\sum_{i=}^{n} ¢_i i^{~} = 0$. Според тоа, секој собирок во (1) е 0, па затоа $S_1 = 0$, што е противречност

Од добиената противречност следува дека се потребни најмалку $3n$ рамнини, што значи дека врз основа на горниот пример, бараниот број рамнини е $3n$.

Забелешка. Без користење на Вандермондовата детерминанта може да се докаже дека броевите $¢_0 = 1, ¢_i = (-1)^i \binom{n}{i}, i = 1, 2, ..., n$ ги задоволуваат условите потребни во горното решение. Тоа следува од следната лема.

Лема 2. За секои природни броеви $0 \le m < n$ и произволен полином P, $\deg P = m$ важи

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} P(i) = 0 .$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ полиномот P е константа, па затоа го задоволува даденото равенство, бидејќи важи $P(0) - P(1) = 0$.

Нека тврдењето е точно за $n-1$ и нека $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Јасно Q е полином и важи $\deg Q = \deg P - 1 = m - 1 < n - 1$, па затоа важи

$$
\begin{aligned}
0 &= -\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} Q(i) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (P(i) - P(i+1)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} P(i) - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} P(i+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} P(i) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n-1}{i-1} P(i) \\
&= P(0) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right) P(i) + (-1)^n P(n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} P(i),
\end{aligned}
$$

т.е. тврдењето важи и за n. ■

Втор начин. Нека важи се исто како во првиот пасус на првиот начин на решавање.

Лема 3. Нека $P^*(x_1,x_2,...,x_k)$ е полином кој се анулира во сите точки на множеството

$$\{(x_1,x_2,...,x_k)\,|\,x_1,x_2,...,x_k\in\{0,1,...,n\},\,x_1+x_2+...+x_k>0\}$$

и $P^*(0,0,...,0)\neq 0$. Тогаш $\deg P^*\geq kn$.

Доказ. Со индукција по k. За $k=1$, P^* е ненулти полином со n нули, па затоа $\deg P^*\geq n$. Нека тврдењето важи за полином со $k-1$ променлива.

Нека $R(x_1,x_2,...,x_k)$ е остатокот од делењето на полиномот $P^*(x_1,x_2,...,x_k)$ со $Q(x_k)=x_k(x_k-1)...(x_k-n)$. Бидејќи $0,1,2,...,n$ се нули на полиномот Q, добиваме дека P^* и R примаат исти вредности на множеството $\{0,1,...,n\}^k$, па затоа за полиномот R се исполнети условите на лема 2 и $\deg_{x_k}R\leq n$. Нека

$$R(x_1,...,x_k)=R_n(x_1,...,x_{k-1})x_k^n+R_{n-1}(x_1,...,x_{k-1})x_k^{n-1}+...+R_0(x_1,...,x_{k-1}).$$

1) Нека $a_1,a_2,...,a_{k-1}\in\{0,1,...,n\}$ не се сите еднакви на нула. Степенот на полиномот $T(x_k)=R(a_1,a_2,...,a_{k-1},x_k)$ е помал или еднаков на n и тој се анулира за $x_k\in\{0,1,...,n\}$, па затоа мора да е $T\equiv 0$, од каде што следува $R_n(a_1,...,a_{k-1})=0$.

2) Слично, $T(x_k)=R(0,0,...,0,x_k)$ е полином со степен помал или еднаков на n, има n нули $1,2,...,n$ и важи $T(0)=R(0,0,...,0)\neq 0$, па затоа $\deg T=n$, од каде што следува дека $R_n\not\equiv 0$, како и дека $R_n(0,0,...,0)\neq 0$.

Од претходно изнесеното следува дека полиномот $R_n(x_1,...,x_{k-1})$ ја задоволува индуктивната претпоставка, па затоа

$$\deg P^*\geq\deg R\geq\deg R_n+n\geq(k-1)n+n=kn.\ \blacksquare$$

Сега тврдењето на задачата следува од лема 3 применета на полиномот P, бидејќи $P(0,0,0)\neq 0$ и $P(i,j,k)=0$ за $(i,j,k)\in S$, па е $\deg P\geq 3n$.

55. Нека $n>2$ е природен број и f е пресликување од рамнината ® во множеството реални броеви такво што $f(A_1)+f(A_2)+...+f(A_n)=0$ за секој правилен $n-$аголник $A_1A_2...A_n$. Докажи дека $f(X)=0$, за секоја $X\in$ ®.

Решение. Нека е даден правилен $n-$аголник $A_1A_2^0...A_n^0$. Со ротација околу точката A_1 за агол $\frac{2k®}{n}$ точката $A_i^0, i>1$ се пресликува во точката A_i^k. Тогаш $A_1A_2^k...A_n^k$ е правилен $n-$аголник за секој $k=0,1,\ ...,n-1$, па од условот на задачата следува

$$f(A_1)+f(A_2^k)+...+f(A_n^k)=0$$

Ако за $k=0,1,...,n-1$ ги собе-реме добиените равенства, по средувањето го добиваме равенството

$$nf(A_1)+\sum_{k=0}^{n-1} f(A_2^k)+...+\sum_{k=0}^{n-1} f(A_n^k)=0 .$$

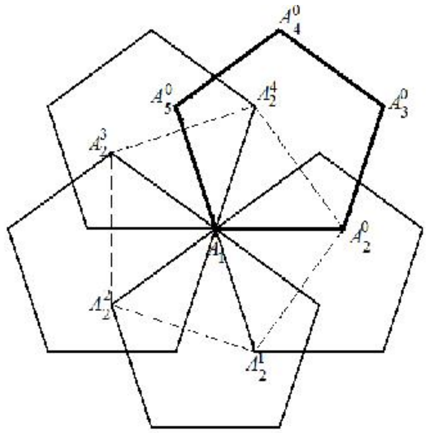
Меѓутоа, според конструкцијата многуаголникот $A_i^0 A_i^1 ... A_i^{n-1}$ е правилен, па затоа

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(A_i^k)=0 ,$$

за $i=2,...,n$. Сега, од горното равенство следува

$$nf(A_1)=0 \text{, т.е. } f(A_1)=0 ,$$

па од произволноста на точката A_1 следува тврдењето на задачата.



56. Внатре во кружница k со радиус R се наоѓаат флеки од мастило. Плоштината на секоја флека е помала или еднаква на 1. Секој радиус на кружницата, како и секоја нејзина концентрична кружница, сече најмногу една флека. Докажи дека вкупната плоштина на флеките е помала од $R\sqrt{®}$.

Решение. Нека $¨_i$ е аголната ширина на $i-$тата флека, a_i е најголемото растојание од центарот на кружницата до точките на оваа флека, b_i е најмалото растојание од центарот на кружницата до точките на оваа флека и P_i е нејзината плоштина. Бидејќи секој радиус на кружницата, како и секоја нејзина концентрична кружница сече само една флека важи

$$a_0=0<a_1\le b_2<a_2\le b_3<a_3\le ...\le b_n<a_n\le R \text{ и } \sum_{i=1}^{n} ¨_i \le 2® .$$

Од досега изнесеното следува, дека $i-$тата флека лежи во криволиниски трапез со плоштина $\frac{1}{2}(a_i^2-b_i^2)¨_i$. Според тоа,

$$P_i \le \frac{1}{2}(a_i^2-b_i^2)¨_i ,$$

па затоа постои $c_i \ge b_i$ таков што

$$\frac{1}{2}(a_i^2-c_i^2)¨_i = P_i \le 1 ,$$

односно

$$\sqrt{(a_i^2-c_i^2)¨_i} \le \sqrt{2} .$$

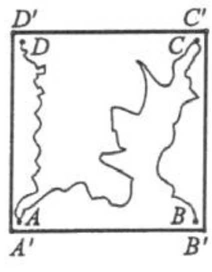
Сега, од претходно изнесеното и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} P_i &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-c_i^2)\text{¨}_i \le \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(a_i^2-c_i^2)\text{¨}_i}\\ &\le \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(a_i^2-b_i^2)\text{¨}_i} \le \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(a_i^2-a_{i-1}^2)\text{¨}_i}\\ &\le \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\text{¨}_i}\sqrt{a_i^2-a_{i-1}^2} \le \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-a_{i-1}^2)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\text{¨}_i}\\ &\le \tfrac{\sqrt{2}}{2}a_n\sqrt{2\text{®}} \le R\sqrt{\text{®}}.\end{aligned}$$

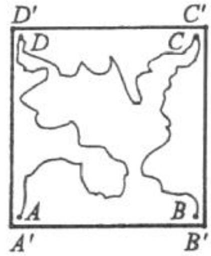
57. Даден е квадрат S со должина на страната 100. Нека $L = A_0A_1A_2...A_n$ е полигонална линија во S која самата себе не се допира и не се пресекува, таква што $A_0 \ne A_n$. Нека за секоја точка P од страните на квадратот S постои точка од линијата L чија што оддалеченост од P не е поголема од $\frac{1}{2}$.

Докажи дека на L постојат две точки X и Y меѓу кои растојанието не е поголемо од 1, а должината на линијата L меѓу тие точки не е помала од 198.

Решение. Според условите, полигоналната линија L навлегува во појас со ширина $\frac{1}{2}$ по должината на сите страни на квадратот $A'B'C'D'$. Притоа линијата L мора да ги посети околините на точките A, B, C и D (види ги цртежите), така што ќе се приближи и до темињата на квадратот на растојание $d \le \frac{1}{2}$. Зависно од редоследот по кој се посетуваат точките A, B, C, D, односно нивната околина, линијата L може да биде во облик на буквата N или во облик на буквата U. Во двата случаја точката C на линијата L се наоѓа меѓу точките A и B.



До точките од страната $A'B'$ линијата L се доближува или со нејзиниот дел од A до C или со нејзиниот дел од C до B. Врз основа на ова точките од страната $A'B'$ ги делиме на две множества од конечен број интервали. Пресекот на овие две множества не може да биде празно множество. Затоа постои точка P од страната $A'B'$ што е на растојание помало од $\frac{1}{2}$ од некоја точка X на делот на линијата меѓу точките A и C и што е истовремено на растојание помало од $\frac{1}{2}$ од некоја точка Y што припаѓа на делот на L меѓу C и B.



Од неравенството на триаголник и $d(P,X)<\frac{1}{2}$, $d(P,Y)<\frac{1}{2}$ следува $d(X,Y)<1$. Истовремено должината на линијата меѓу точките X и C не е помала од 99, бидејќи точките X и C се на растојание кое не е помало од $\frac{1}{2}$ од $A'B'$ и $D'C'$, соодветно. Од исти причини и должината на линијата меѓу точките C и Y не е помала од 99. Конечно, од претходно изнесеното следува дека должината на линијата меѓу точките X и Y не е помала од 198.

32. КОМБИНАТОРНА ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Под комбинаторна теорија на броеви обично се подразбираат задачи од теорија на броеви со голем степен на слобода, како што се распоредите на броеви, егзистенцијалните задачи или разни задачи кои содржат комбинаторни идеи. Во претходните параграфи разгледавме повеќе задачи од комбинаторна теорија на броеви, но заради нивната разновидност овде ќе дадеме дополнителни задачи од оваа интересна област.

1. Нека a_i, b_i, c_i, $i=1,2,...,N$ се цели броеви такви што за секоја тројка (a_i, b_i, c_i) барем еден од броевите е непарен. Докажи дека постојат цели броеви x, y и z такви што барем $\frac{4N}{7}$ од броевите $xa_i + yb_i + zc_i$, $i=1,2,...,N$ се непарни.
   Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x, y, z \in \{0,1\}$, при што $x+y+z>0$. Тоа значи дека имаме седум можности за тројката (x, y, z). Оние четири од нив, во кои единицата соодветствува на непарен број во (a_i, b_i, c_i), а останатите се произволни, го даваат саканиот непарен резултат. Според тоа, за барем една од седумте тројки барем $\frac{4N}{7}$ од броевите $xa_i + yb_i + zc_i$, $i=1,2,...,N$ се непарни.

2. Множеството M се состои од 1985 различни броеви, од кои ниту еден нема прост делител поголем од 26. Докажи дека од множеството M може да се изберат четири различни броја чиј производ е точен четврт степен на природен број.
   Решение. Имаме девет прости броеви кои се помали од 26. Нека
   $$x_n = 2^{a_{n1}} 3^{a_{n2}} ... 23^{a_{n9}}, \; n=1,2,3,...,1985$$
   се елементите на множеството M. Производот $x_m x_n$ е точен квадрат ако и само ако
   $$a_{m_i} \equiv a_{n_i} \pmod 2, \text{ за } i=1,2,...,9 .$$
   Бидејќи имаме $2^9 = 512$ можни подредени деветорки $(a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_9})$, еден по еден можеме да избереме $[\frac{1985-512}{2}] = 736$ дисјунктни парови елементи од M чии производи се точни квадрати. На ист начин заклучуваме дека меѓу овие 736 точни квадрати постојат два чиј производ е точен четврт степен.

3. Подмножеството M на множеството $\{1,2,3,...,15\}$ е такво што производот на некои три различни елементи на M не е точен квадрат. Колку најмногу елементи може да има M ?

Решение. Во секое од дисјунктните подмножества $\{1,4,9\},\{2,6,12\},\{3,5,15\}$ и $\{7,8,14\}$ производот на елементите е точен кватрат. Затоа M може да содржи најмногу по два елементи од овие множества и да ги содржи уште броевите 10, 11 и 13. Според тоа, $|M|\leq 11$. Да претпоставиме дека $|M|=11$. Тогаш $10\in M$ и ниту едно од дисјунктните множества $\{1,4,9\},\{2,5\},\{6,15\}$ и $\{7,8,14\}$ не е подмножество од M . Оттука следува дека $\{3,12\}\subset M$, па затоа ниту едно од множествата $\{1\},\{4\},\{9\},\{2,6\},\{5,15\}$ и $\{7,8,14\}$ не е подмножество од M . Но, тоа значи дека $|M|\leq 9$, што е противречност. Според тоа, $|M|\leq 10$. Овој број се достигнува за $M=\{1,4,5,6,7,10,11,12,13,14\}$

4. Докажи дека од секое множество од било кои десет различни двоцифрени природни броеви може да се одделат две дисјунктни подмножества такви што збировите на броевите во овие подмножества се еднакви.

Решение. Да забележиме дека доволно е да докажеме дека постојат две различни подмножества кои имаат еднаков збир на елементите. Во тој случај се исфрлат заедничките елементи.

Разгледуваме на почеток колку различни подмножества има множество со 10 елементи. Секој број може но не мора да биде во бараното множество. Празното множество мораме да го исфрлиме, па затоа бројот на сите множества е $2^{10}-1=1023$. Секој број во групата може да има најголема вредност 99 па најголемиот збир не може да биде поголем од $99\cdot 10=990$, т.е. најмногу може да има 990 различни збирови. Според принципот на Дирихле меѓу 1023 подмножества мора да има две кои имаат еднаков збир.

5. Определи го најмалиот природен број N со следново својство: ако од множеството $\{1,2,...,N\}$ произволно се избришат 2016 елементи, тогаш секогаш меѓу преостанатите елементи ќе има 2016 броеви чиј збир е еднаков на N .

Решение. Ќе докажеме дека $N=2017+2018+...+4032=1008\cdot 6049$. Прво ќе докажеме дека N не може да биде помал број. За таа цел да ги избришеме броевите од 1 до 2016. Тогаш меѓу преостанатите броеви збирот на било 2016 броеви ќе биде поголем или еднаков на $2017+2018+...+4032$.

Останува да покажеме дека бројот $N=1008\cdot 6049$ навистина ги задоволува условите на задачата. Да ги разгледаме паровите

$$(1,6048),(2,6057),...,(3024,3025)\ ,$$

кои ги има точно 3024. Јасно, ако избришеме било кои 2016 броеви, тогаш ќе останат најмалку 1008 од наведените парови во кои и двата броја нема да се избришани. Збирот на броевите во секој од наведените парови е еднаков на 6049, па затоа збирот на сите 2016 броеви во овие 1008 парови ќе биде еднаков на $N = 1008 \cdot 6049$.

6. Определи го најголемиот број природни броеви кои што може да се изберат од множеството $\{105, 106, ..., 210\}$ така што било кои два од нив се заемно прости.

Решение. Даденото множество содржи 19 прости броеви и тоа: 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 и 199. Да претпоставиме дека сме избрале 7 сложени броеви. Само еден сложен број од даденото множество не е делив со броевите 2, 3, 5, 7 и 11 (тоа е бројот $13^2 = 169$), што значи дека најмалиот прост делител е ист за барем два од тие броеви. Последното значи, дека меѓу избраните броеви може да има најмногу 6 сложени, па затоа можеме да избереме најмногу 25 броеви. Пример за 25 броеви се наведените прости броеви и сложените броевите: $2^7, 5^3, 11^2, 13^2, 3 \cdot 37, 7 \cdot 17$.

7. Даден е природен број n. Определи го максималниот број елементи во подмножество на $\{-n, -n+1, ..., n-1, n\}$, кое не содржи три елементи a, b, c (не задолжително различни), такви што $a+b+c=0$.

Решение. Бараниот број елементи е n, кога n е парен број и $n+1$, кога n е непарен број. И во двата случаја бараното множество е

$$\{-n, ..., -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, ..., n\}.$$

Лема. Нека A и B се две непразни подмножества на $\mathbb{Z}$. Тогаш множеството $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ има најмалку $|A|+|B|-1$ елементи.

Доказ. Нека $A = \{a_1, a_2, ..., a_l\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, при што $a_1 < a_2 < ... < a_l$ и $b_1 < b_2 < ... < b_m$. Тогаш

$$a_1 + b_1, a_1 + b_2, ..., a_1 + b_m, a_2 + b_m, a_3 + b_m, ..., a_l + b_m$$

е строго растечка низа од $l+m-1$ елементи, со што лемата е докажана. ■

Нека S е подмножество на $\{-n, -n+1, ..., n-1, n\}$ со саканото својство. Јасно, $0 \in S$. Да ги разгледаме множествата $A = S \cap \{-n, ..., -1\}$ и $B = S \cap \{n, ..., 1\}$. Ако множествата $A+B$ и $-S = \{-s \mid s \in S\}$ имаат заеднички елемент, тогаш ќе добиеме $a+b=-s$, т.е. $a+b+s=0$, што е противречност. Според тоа, $A+B$ и $-S = \{-s \mid s \in S\}$ се дисјунктни подмножества и согласно Лемата имаме

$$2n+1 \geq |A+B|+|-S| \geq |A|+|B|+|S| = 2|S|-1.$$

Оттука следува $|S| \leq n+1$, т.е. за непарни n тврдењето е точно. Останува да докажеме дека за парни n равенството $|S| = n+1$ не е можно. Бидејќи $A+B \subset \{-n+1,...,n-1\}$ равенството $2n+1 = |A+B|+|S|$ се достигнува само за $-n, n \in -S$, т.е. $-n, n \in S$. Според тоа, $-n \in S$ и секое од множествата $\{1, n-1\},...,\{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1\}, \{\frac{n}{2}\}$ треба да содржи елемент кој не е во B. Според тоа, $|B| \leq \frac{n}{2}$ и аналогно $|A| \leq \frac{n}{2}$, што противречи на $|S| = n+1$.

8. Дадени се природни броеви $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{101} < 5050$. Докажи дека постојат различни броеви a_i, a_j, a_k, a_m такви што $5050 \mid a_i + a_j - a_k - a_m$.

Решение. Ги разгледуваме збировите $a_i + a_j$, $i < j$. Вакви збирови има 5050. Да претпоставиме дека сите овие збирови се различни по модул 5050. Тоа значи, дека $\sum_{i<j}(a_i + a_j) \equiv \sum_{k=0}^{5049} k \equiv 2525 (\mathrm{mod}\, 5050)$, што не е можно бидејќи $\sum_{i<j}(a_i + a_j) = 100 \sum_{k=1}^{101} a_k$ е парен број. Според тоа, постојат два различни збира $a_i + a_j$ и $a_k + a_m$ такви што $a_i + a_j \equiv a_k + a_m (\mathrm{mod}\, 5050)$. Останува да забележиме дека броевите a_i, a_j, a_k, a_m се меѓусебно различни. Навистина, од $i < j$ следува дека a_i, a_j се меѓусебно различни броеви, а истото важи и за a_k, a_m. Сега, ако постои број кој припаѓа на двата пара, на пример $a_j = a_m$, добиваме $a_i \equiv a_k (\mathrm{mod}\, 5050)$ и како $0 < a_i, a_k < 5050$ заклучуваме дека $a_i = a_k$, што е противречност.

9. На таблата се запишани $N \geq 9$ различни ненегативни броеви, помали од 1. Се покажало дека за секои осум различни броеви запишани на таблата постои деветти број таков што збирот на деветте броја е цел број. Определи ги сите N за кои е ова можно.

Решение. За $N = 9$ доволно е да избереме кои било девет различни ненегативни броеви чиј збир е еднаков на 1. Ќе докажеме дека барањето од задачата не е задоволено за кој било $N > 9$. Нека го претпоставиме спротивното и да ги означиме броевите со $a_1, a_2, ..., a_n$, при што означуваме $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$ и $T = a_1 + a_2 + ... + a_7$.

Прво ќе докажеме дека за секој $i > 7$ постои единствен $j > 7$ таков што $T + a_i + a_j$ е цел број. Егзистенцијата следува од условот. Нека претпоставиме дека за некој i постојат два такви индекси j и k. Тогаш

$$1 > |a_k - a_j| = |(T + a_k + a_i) - (T + a_j + a_i)| > 0,$$

што противречи на претпоставката дека $(T + a_k + a_i) - (T + a_j + a_i)$ е цел број. Според тоа, броевите со индекси поголеми од 7 можеме да ги поделиме во парови $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., m$ така што броевите $T + x_i + y_i, i = 1, 2, ..., m$ се цели. Значи, $N = 7 + 2m$ и $m > 1$.

Да го разгледаме збирот $P = \sum_{i=1}^{m} T + x_i + y_i = T(m-1) + S$. Овој збир е цел број и $T = \frac{P-S}{m-1}$. Аналогно за $T' = a_2 + a_3 + ... + a_8$ добиваме $T' = \frac{P'-S}{m-1}$. Според тоа, $a_1 - a_8 = T - T' = \frac{P-P'}{m-1}$. Бидејќи a_1 и a_8 може да бидат било кои два броја, заклучуваме дека разликата на секои два цели броја е од видот $\frac{k}{m-1}$ за некој цел број k. Сега, ако t е најмалиот број на таблата, тогаш можните броеви на таблата се $t + \frac{k}{m-1}$ за $0 \le k \le m-2$. Според тоа, $7 + 2m = N < m$, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува $N \le 9$.

10. Даден е природен број n. Определи го минималниот број на броеви од видот $m!$, каде m е природен број со следново својство: за секој природен број $t \le n!$ збирот на неколку од броевите од видот $m!$ (можно е само еден) е еднаков на t.

Решение. Ќе докажеме, дека бараниот минимален број е еднаков на $\frac{n(n-1)}{2} + 1$. За секој $i = 1, 2, ..., n-1$ да земеме i броеви по $i!$ и да го додадеме бројот $n!$. Имаме точно $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ броеви. Ако $1 \le t < n!$, нека $r_0 = t$ и индуктивно да ги дефинираме броевите q_i и r_i на следниов начин:

$$r_{i-1} = q_i(n-i)! + r_i, \quad 0 \le r_i < (n-i)!.$$

Тогаш $t = \sum_{i=1}^{n-1} q_i(n-i)!$ и бидејќи $r_{i-1} < (n-i+1)!$ добиваме дека $q_i \le n-i$. За секој $i = 1, 2, ..., n-1$ можеме да избереме q_i броеви, сите еднакви на $(n-i)!$ и збирот на овие броеви е еднаков на t.

Да го разгледаме минималниот број на броеви, потребни за добивање на $n! - 1$. Бројот на броевите еднакви на $i!$ да го означиме со c_i. Ако $c_i \ge i+1$, тогаш можеме $i+1$ броеви еднакви на $i!$ да замениме со еден број еднаков на $(i+1)!$ и ќе добиеме противречност со минималноста на бројот на разгледуваните броеви. Тогаш

$$n!-1=\sum_{i=1}^{n-1} c_i i! \le \sum_{i=1}^{n-1} i\cdot i! = \sum_{i=1}^{n-1}((i+1)!-i!) = n!-1,$$

па затоа сите неравенства треба да се равенства, т.е. за секој i важи $c_i = i$. Бројот на броевите е $1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ и нивниот збир е $n!-1$. Останува да забележиме, дека за добивање на бројот $n!$ треба да додадеме барем уште еден број и тогаш вкупниот број е $\frac{n(n-1)}{2}+1$.

11. Во подмножеството S на множеството $\{1,2,...,2011\}$ апсолутната вредност на разликата на било кои два елементи не е 4 или 7. Определи го најголемиот можен број елементи на S.

Решение. Меѓу 11 последователни броеви $x, x+1, x+2,..., x+10$ од множеството $\{1,2,...,2011\}$, најмногу 5 припаѓаат на множеството S. Навистина, во спротивно некои два последователни членови на низата

$$x, x+4, x+8, x+1, x+5, x+9, x+2, x+6, x+10, x+3, x+7, x$$

припаѓаат на множеството S, што не е можно, бидејќи разликите на апсолутните вредности на последователните членови се 4 или 7.

Но, $2011=183\cdot 11-2$, па затоа $|S|\le 183\cdot 5=915$. Овој број се достигнува ако земеме $S=\{x \mid 1\le x\le 2011,\ x\equiv 1,3,4,6,9 (\mathrm{mod} 11)\}$.

12. Нека A е подмножество на множеството $S=\{1,2,3,...,1000000\}$ такво што $|A|=101$. Докажи дека постојат броеви $t_1,t_2,...,t_{100}\in S$ такви што множествата $A_i=\{x+t_i \mid x\in A\}$ за $i=1,2,...,100$ се меѓусебно дисјунктни.

Решение. За множеството $D=\{x-y \mid x,y\in A\}$ важи $|D|\le 101\cdot 100+1$. Понатаму, множествата $A+t_i$ и $A+t_j$ се дисјунктни ако и само ако $t_i-t_j\notin D$.

Индуктивно ќе ги избереме броевите $t_1,t_2,...,t_{100}\in S$. Елементот t_1 го избираме произволно од множеството $S\setminus D$ и истиот постои бидејќи $|S|>|D|$. Да претпоставиме дека сме ги избрале елементите $t_1,t_2,...,t_k\in S$, $k\le 99$ такви што никои два не припаѓаат на множеството D. Сега елементот t_{k+1} може да е било кој елемент на множеството S кој не припаѓа на унијата на мно-жествата $t_1+D, t_2+D,...,t_k+D$. Навистина

$$\left|\bigcup_{m=1}^{k}(t_m+D)\right| \le \sum_{m=1}^{k}|t_m+D| = k(101\cdot 100+1)\le 99\cdot 10101=999999<1000000,$$

па затоа $S\setminus \bigcup_{m=1}^{k}(t_m+D)\ne\varnothing$.

13. Докажи, дека сите природни броеви може да се распоредат во 100 непразни множества така што не постојат три броја a,b,c од три различни множества за кои важи $a+99b=c$.

Решение. Секој природен број може да се запише во облик $2^n k$, каде $2\nmid k$. За секој $i\in\{1,2,...,100\}$ во множеството A_i да ги ставиме броевите од видот $2^n k$, каде $2\nmid k$ и $n\equiv i(\mathrm{mod}100)$. Сега, ако a,b,c се три броја од три различни множества, тогаш $a=2^{100s+i}k, b=2^{100s'+j}k', c=2^{100s''+m}k''$ за некои $i,j,m\in\{1,2,...,100\}$, такви што $i\neq j\neq m\neq i$. Затоа, ако $a+99b=c$, тогаш

$$2^{100s+i}k+2^{100s'+j}\cdot 99k'=2^{100s''+m}k''.$$

Јасно, броевите $100s+i$, $100s'+j$ и $100s''+m$ се различни, па ако во последното равенство скратиме со најмалиот степен на бројот 2, добиваме дека збир на два броја со различна парност да е парен број или збир на два парни броја да е непарен број, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат три броја a,b,c од три различни множества A_i, $i\in\{1,2,...,100\}$ за кои важи $a+99b=c$, со што задачата е решена.

14. Определи го најмалиот број подмножества на кои може да се разбие множеството $M=\{1,2,...,40\}$, така што ниту едно подмножество не содржи три (не задолжително различни) елементи a,b,c за кои $a=b+c$.

Решение. Нека претпоставиме дека постои разбивање на три множества X,Y,Z кое ги задоволува условите на задачата. Едно од овие множества, да кажеме X, содржи барем шест елементи: $a_1,a_2,...,a_6$, меѓу кои a_6 е најголем. Ниту една од петте разлики не е во X, па затоа едно од множествата Y и Z, да кажеме Y, содржи најмалку три од овие разлики и нека тоа се $b_i=a_6-a_i$, $i=1,2,3$. Разликите $b_1-b_2, b_2-b_3, b_3-b_1$ не се ниту во X ниту во Y, што значи дека се во Z. Но, збирот на првите две е еднаков на третата, што е противречност.

Ќе дадеме пример на четири подмножества, со бараното својство. Имаме,

$$A_1=\{1,4,10,13,28,31,37,40\},$$
$$A_2=\{2,3,11,12,29,30,38,39\},$$
$$A_3=\{5,6,7,8,9,32,33,34,35,36\},$$
$$A_4=\{14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27\}.$$

15. Докажи го или негирај го тврдењето: Во множеството природни броеви $\{1,2,3,...,10^5\}$ постои подмножество од 1983 елементи, кое не содржи тројка броеви кои се последователни членови на некоја аритметичка прогресија.

Решение. Ќе докажеме дека тврдењето во задачата е точно. Со T_n го означуваме множеството природни броеви чиј запис во систем со основа 3 има најмногу n цифри, во кој запис сите цифри се различни од 2. Бројот на елементите на тоа множество е 2^n, а неговиот најголем елемент е

$$11...1 = 3^0 + 3^1 + ... + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Множеството T_n не содржи ниту една аритметичка тројка. Имено, ако $x, y, z \in T_n$ и $2y = x + z$, тогаш записот на бројот $2y$ во систем со основа 3 ќе ги содржи само цифрите 0 или 2, а бројот $x + z$ (ако x и y се различни броеви од T_n) мора барем на едно место да има цифра 1.

За $n = 11$ добиваме $2^{11} > 1983$, а $\frac{1}{2}(3^{11} - 1) = 88573 < 100000$, што значи дека не може да се избере множество од 2048 броеви кои ги имаат бараните својства.

16. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S. Докажи, дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S.

Решение. Јасно, не постојат два елементи на добро множество со k елементи кои припаѓаат на исто лошо множество. Затоа ни требаат барем k лоши множества за да го покриеме S .

Ќе конструираме k лоши множества кои го покриваат S. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се сите прости броеви во S. Бидејќи S ги содржи сите делители на своите елементи, секој елемент на S е од облик $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$, каде $r_i \le k - 1$ за секој i (броевите $\frac{x}{p_i^j}$, $j = 0, 1, 2, ..., r_i$, формираат добро подмножество на множеството S со $r_i + 1$ елементи).

За секој таков $x \in S$ дефинираме $h(x) = r_1 + r_2 + ... + r_n$. Ако $x, y \in S, x < y$ припаѓаат на некое добро множество, тогаш важи $1 \le h(y) - h(x) \le k - 1$. Да ги разгледаме множествата $S_m = \{x \in S \mid h(x) \equiv m (\bmod k)\}$, $m = 1, 2, ..., k$. Овие множества се дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството S. Од претходно изнесеното следува дека секое множество S_m е лошо, што значи дека тоа е бараната конструкција.

17. За секој природен број $n \geq 3$ определи го најмалиот природен број $f(n)$ со следново својство: за секој избор на множество $A \subseteq \{1,2,...,n\}$ со $f(n)$ елементи постојат $x,y,z \in A$ кои се по парови заемно прости.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m е природен број и $M = \{m, m+1, ..., m+5\}$. Тогаш секое петелементно подмножество на M содржи три броја кои се по парови заемно прости.

Доказ. Ако m е непарен број, тогаш за $a = m$, а ако m е парен број тогаш за $a = m+1$, важи a е непарен број и $A = \{a, a+2, a+4\} \subset M$. Барем еден од броевите $a+1$ и $a+3$ не е делив со 3. Тој број да го означиме со b и да го разгледаме множеството $B = \{a, a+2, a+4, b\} \subset M$. Тогаш елементите на B се по парови заемно прости, а секое петелементно подмножество на M содржи три елементи од B. Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Да го разгледаме множеството $X \subset \{1,2,3,...,n\}$ кое се состои од броевите деливи со 2 или со 3. Тогаш X го нема саканото својство, бидејќи од принципот на Дирихле следува дека во секое триелементно подмножество на X ќе има два броја со заеднички делител 2 или 3. Според тоа, секое множество со саканото својство има најмалку $|X|+1$ елемент, па затоа

$$f(n) \geq [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{3}] - [\tfrac{n}{6}] + 1 .$$

Со индукција ќе докажеме дека за секој избор на множество $A \subseteq \{1,2,...,n\}$ со $g(n) = [\frac{n}{2}] + [\frac{n}{3}] - [\frac{n}{6}] + 1$ елементи постојат $x,y,z \in A$ кои се по парови заемно прости. За забележиме дека $g(n+6) = g(n) + 4$.

Случаите $n = 3,4,5$ се тривијални, а за $n = 6$ тврдењето следува од лемата. За $n = 7$ ја применуваме лемата кога $1,7 \notin A$, а во спротивен случај тројката $\{1,7,x\}$, каде $x \neq 1,7$ е произволен елемент од A, е бараната тројка од условот на задачата. На сличен начин се разгледува и случајот $n = 8$. Нека $n \geq 9$ и $f(k) \leq g(k)$ за секој $3,4,...,n-1$. Ако пресекот $A \cap \{n-5, n-4, ..., n\}$ содржи барем 5 елементи, тогаш тврдењето следува од лемата. Ако $|A \cap \{n-5, n-4, ..., n\}| \leq 4$, тогаш во A се содржат најмалку

$$g(n) - 4 = g(n-6)$$

елементи од $\{1,2,...,n-6\}$ и меѓу нив согласно индуктивната претпоставка постојат $x,y,z \in A$ кои се по парови заемно прости.

18. Нека $A=\{1,2,...,2008\}$. Ќе велиме дека едно множество е од тип r $(r=0,1,2)$ ако тоа е подмножество од A и збирот на неговите елементи при делење со 3 дава остаток r. Нека X_r е класата множества од тип r. Определи која од класите X_0, X_1, X_2 е најголема.

Решение. Кон X_0 да го додадеме празното множество и со $X_{r,n}$ да ја означиме класата подмножества од тип r на $\{1,2,...,n\}$. По пермутација на $n+1$, $n+2, n+3$ добиваме три броја $a\equiv 0(\bmod 3), b\equiv 1(\bmod 3)$ и $c\equiv 2(\bmod 3)$. Тогаш $X_{0,n+3}$ се состои од:

- множествата од $X_{0,n}$ со додадено $\emptyset, \{a\}, \{b,c\}$ или $\{a,b,c\}$,
- множествата од $X_{1,n}$ со додадено $\{c\}$ или $\{a,c\}$,
- множествата од $X_{2,n}$ со додадено $\{b\}$ или $\{a,b\}$.

Според тоа,

$$|X_{0,n+3}|=4|X_{0,n}|+2|X_{1,n}|+2|X_{2,n}|$$

и аналогно

$$|X_{1,n+3}|=2|X_{0,n}|+4|X_{1,n}|+2|X_{2,n}|, \text{ и}$$

$$|X_{2,n+3}|=2|X_{0,n}|+2|X_{1,n}|+4|X_{2,n}|.$$

Бидејќи $|X_{0,1}|=|X_{1,1}|=1$ и $|X_{2,1}|=1$, по индукција следува дека

$$|X_{0,3n+1}|=|X_{1,3n+1}|>|X_{2,3n+1}|.$$

Но, $2008=3\cdot 669+1$ и $|X_0|=|X_{0,2008}|-1$, па затоа $|X_1|>|X_0|>|X_2|$.

19. Даден е природен број n. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ (не задолжително различни) природни броеви чиј збир е еднаков на $2S$ (S е природен број). Природниот број k го нарекуваме сепаратор ако може да се изберат k различни индекси $i_1, i_2, ..., i_k$ од множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што

$$a_{i_1}+a_{i_2}+...+a_{i_k}=S.$$

Определи го најголемиот број сепаратори (во зависност од n).

Решение. Да забележиме дека ако бројот k е сепаратот, тогаш и бројот $n-k$ е сепаратор. Исто така, да забележиме дека ако бројот 1 е сепаратот, тогаш ниту еден друг број освен $n-1$ не може да биде сепаратор. Според тоа, бројот на сепаратори е сигурно помал или еднаков на $\max\{n-3,2\}$ ($n-3$ е максимум во случај кога 1 не е сепаратор, а 2 е максимум ако 1 е сепаратор). Со χ_n да го означиме бараниот максимум. Очигледно е $\chi_1=0$, $\chi_2=1$ (на пример броевите 1, 1), $\chi_3=2$ (на пример броевите 1, 2, 3), $\chi_4=2$ (на пример броевите 1, 2, 3, 6). Ќе докажеме дека $\chi_n=n-3$ за $n\geq 5$. Веќе докажавме дека $\chi_n \le n-3$ (бидејќи $2 \le n-3$ за $n \ge 5$).

За $n = 2k$ можеме да ги земеме броевите

$$1,1,1,1,2,2,4,4,8,8,...,2^{k-2},2^{k-2}.$$

Тогаш $1+1+1+1+2+2+4+4+8+8+...+2^{k-2}+2^{k-2}=2^k$, па затоа $S=2^{k-1}$, што може да се запише како

$$2^{k-2}+2^{k-2}=2^{k-2}+2^{k-3}+2^{k-3}=...=2^{k-2}+2^{k-3}+2^{k-4}+...+2+1+1.$$

Исто така, за $n = 2k$ можеме да ги земеме броевите

$$1,1,2,2,2,4,4,8,8,...,2^{k-1},2^{k-1}.$$

Тогаш збирот на броевите $2S$ е еднаков на 2^{k+1}, т.е. $S=2^{k-1}$, што може да се запише како

$$2^{k-1}+2^{k-1}=2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-2}=...=2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-3}+...+4+2+1+1.$$

33. ТЕОРЕМА НА ХОЛ

1. Нека S е непразно множество, $\mathcal{P}(S)$ е партитивното множество на множеството S, $(a_1, a_2, ..., a_m)$ е варијација без повторување на елементи на множеството S, а $(S_1, S_2, ..., S_m)$ е варијација на елементи на множеството $\mathcal{P}(S)$. Ако $a_k \in S_k$ за секој $k \in \{1, 2, ..., m\}$, тогаш варијацијата $(a_1, a_2, ..., a_m)$ ја нарекуваме *систем различни претставници* на варијацијата на множествата $(S_1, S_2, ..., S_m)$. Елементот $a_k \in S_k$ го нарекуваме *претставник* на множеството S_k. Во натаможните разгледувања наместо систем различни претставници кратко ќе пишуваме с.р.п.

   Очигледно, потребен услов за множествата $S_1, S_2, ..., S_m$ да постои с.р.п. е за секој $k \in \{1, 2, ..., m\}$ и за секој комбинација $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ на елементи на множеството $\{1, 2, ..., m\}$ да важи $|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k}| \geq k$.

   Нека $S = \{a, b, c, d, e\}$. Определи с.р.п. за фамилијата множества

   а) $S_1 = \{a, b, c\}, S_2 = \{a, b\}, S_3 = \{a, c\}, S_4 = \{b, c, d\}, S_5 = \{d, e\}$,

   б) $T_1 = \{a, b, c\}, T_2 = \{a, b\}, T_3 = \{a, c\}, T_4 = \{b, c\}, T_5 = \{d, e\}$.

   Решение. а) Еден с.р.п. за фамилијата $(S_1, S_2, ..., S_5)$ е

   $$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c,\ a_4 = d,\ a_5 = e.$$

   Оваа фамилија има уште два с.р.п. и тоа: $a_1 = b, a_2 = a, a_3 = c, a_4 = d, a_5 = e$ и $a_1 = c, a_2 = b, a_3 = a, a_4 = d, a_5 = e$.

   б) Имаме, $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 = \{a, b, c\}$, т.е. $|T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4| = 3$, што значи дека не е исполнет потребниот услов за да една фамилија множества има с.р.п., што значи дека фамилијата T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 подмножества на множеството S нема с.р.п.

2. (*Теорема на Хол*). Нека за множествата $S_1, S_2, ..., S_m$ важи потребниот услов за егзистенција на с.р.п. и нека секое од овие множества содржи најмалку n елементи. Докажи, дека:

   а) Ако $n \leq m$, тогаш $(S_1, S_2, ..., S_m)$ има најмалку $n!$ с.р.п.

   б) Ако $n > m$, тогаш $(S_1, S_2, ..., S_m)$ има најмалку $\frac{n!}{(n-m)!}$ с.р.п.

   Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по m.

   Очигледно тврдењето важи за $m = 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за сите броеви помали од m. Ќе докажеме дека тврдењето важи и за бројот m. Ќе разгледаме два случаја.

Случај 1. Да претпоставимедека за секој $k\in\{1,2,...,m-1\}$ и за секоја комбинација $\{i_1,i_2,...,i_k\}$ на елементите на множеството $\{1,2,...,m\}$ да важи $|S_{i_1}\cup S_{i_2}\cup...\cup S_{i_k}|\geq k+1$. Нека a_1 е фиксиран елемент на множеството S_1 и $S_i^*=S_i\setminus\{a_1\}$, за $i\in\{2,3,...,m\}$. Тогаш варијацијата $(S_2^*,S_3^*,...,S_m^*)$ го задоволува потребниот услов за егзистенција на с.р.п., бидејќи за $2\leq i_1<i_2<...<i_k\leq m$ важи

$$|S_{i_1}^*\cup S_{i_2}^*\cup...\cup S_{i_k}^*|=|(S_{i_1}^*\cup S_{i_2}^*\cup...\cup S_{i_k}^*)\setminus\{a_1\}|\geq k+1-1=k\ .$$

Ако $n\leq m$, тогаш $n-1\leq m-1$, па од индуктивната претпоставка следува дека $(S_2^*,S_3^*,...,S_m^*)$ има најмалку $(n-1)!$ с.р.п. Ако $(s_2,s_3,...,s_m)$ е некој с.р.п. за $(S_2^*,S_3^*,...,S_m^*)$, тогаш $(a_1,s_2,s_3,...,s_m)$ е с.р.п. за $(S_1,S_2,...,S_m)$. Елементот a_1 може да се избере на n начини, што значи дека $(S_1,S_2,...,S_m)$ има најмалку $n\cdot(n-1)!=n!$ с.р.п. Ако $n>m$, тогаш $n-1>m-1$, па од индуктивната претпоставка следува дека $(S_2^*,S_3^*,...,S_m^*)$ има најмалку $\frac{(n-1)!}{(n-m)!}$ с.р.п. Сега, на потполно единтичен начин како и во случајот $n\leq m$ добиваме дека $(S_1,S_2,...,S_m)$ има најмалку $n\frac{(n-1)!}{(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m)!}$ с.р.п

Случај 2. Постои $k\in\{1,2,...,m-1\}$, таков што унијата на некои k од множествата $S_1,S_2,...,S_m$ содржи точно k елементи. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $|S_1\cup S_2\cup...\cup S_k|=k$. Јасно,

$$n\leq|S_1|\leq|S_1\cup S_2\cup...\cup S_k|=k<m\ .$$

па од индуктивната претпоставка следува дека $(S_1,S_2,...,S_k)$ има најмалку $n!$ с.р.п. Нека $(a_1,a_2,...,a_k)$ е еден од овие с.р.п. на $(S_1,S_2,...,S_k)$. Да означиме

$$S_i^*=S_i\setminus\{a_1,a_2,...,a_k\}\text{, за } i\in\{k+1,k+2,...,m\}\ .$$

Ќедокажеме дека за $(S_{k+1}^*,S_{k+2}^*,...,S_m^*)$ важи потребниот услов за егзистенција на с.р.п. Нека го претпоставиме спротивното,т.е. дека за $k+1\leq i_1<i_2<...<i_p\leq m$ важи неравенството $|S_{i_1}^*\cup S_{i_2}^*\cup...\cup S_{i_p}^*|<p$. Тогаш

$$|S_1\cup...\cup S_k\cup S_{i_1}^*\cup...\cup S_{i_p}^*|\leq|S_1\cup...\cup S_k|+|S_{i_1}^*\cup...\cup S_{i_p}^*|<k+p\ ,$$

што противречи на тоа дека за $(S_1,S_2,...,S_m)$ важи потребниот услов за егзистенција на с.р.п. Според тоа, за варијацијата $(S_{k+1}^*,S_{k+2}^*,...,S_m^*)$ важи потребниот услов за егзистенција на с.р.п., а како $m-k<m$ од индуктивната претпоставка следува дека $(S_{k+1}^*, S_{k+2}^*, ..., S_m^*)$ има барем еден с.р.п. Сега, лесно се докажува дека $(S_1, S_2, ..., S_m)$ има најмалку $n!$ с.р.п.

3. Нека $S=\{1,2,...,n\}$ и $S_k = S \setminus \{k\}$, за $k=1,2,...,n$. Определи го бројот на с.р.п. за варијацијата на множествата $(S_1, S_2, ..., S_n)$.

Решение. Бараниот број е еднаков на бројот на деаранжмените на множеството $S=\{1,2,...,n\}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4. Нека $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и $S_i \subseteq S$, за $i=1,2,...,m$. Матрицата $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ определена со

$$c_{jk} = \begin{cases} 1, & a_k \in S_k, \\ 0, & a_k \notin S_k, \end{cases}$$

ја нарекуваме *матрица на припадност* на елементите $a_1, a_2, ..., a_n$ на множествата $S_1, S_2, ..., S_m$.

Докажи, дека ако матрицата на припадност на елементите $a_1, a_2, ..., a_n$ на множествата $S_1, S_2, ..., S_m$ во секој ред и во секоја клона содржи по k единици, каде $1 \le k \le m$, тогаш постои с.р.п. за варијацијата на множествата $(S_1, S_2, ..., S_m)$.

Решение. Нека претпоставиме дека не постои с.р.п. за $(S_1, S_2, ..., S_m)$. Тогаш од теоремата на Хол следува дека постојат броеви $i_1, i_2, ..., i_p$ такви што важи

$$1 \le i_1 < i_2 < ... < i_p \le m \text{ и } |S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_p}| = q < p.$$

Бидејќи секој ред на матрицата C има k единици, во редовите кои соодветствуваат на броевите $i_1, i_2, ..., i_p$ има точно kp единици. Бидејќи секоја колона на матрицата C содржи точно k единици, добиваме дека секој од елементите $a_1, a_2, ..., a_n$, што значи и секој од $q-$те елементи на множеството $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_p}$, се содржи во точно k од множествата $S_1, S_2, ..., S_m$. Според тоа, во редовите со редни броеви $i_1, i_2, ..., i_p$ има најмногу kq единици. Според тоа, $kp \le kq$, т.е. $p \le q$, што е противречност. Конечно, од добиената противрешност следува дека постои с.р.п. за варијацијата на множествата $(S_1, S_2, ..., S_m)$.

5. Докажи, дека секој латински правоаголник може да се прошири до латински квадрат.

Решение. Нека $m<n$ и нека е даден латински $m\times n-$ правоаголник во чии редови се запишаи броевите $1,2,...,n$. За $k\in\{1,2,...,n\}$ со S_k да го означиме множеството од оние броеви од броевите $1,2,...,n$ кои ги нема во $k-$тата колона. Матрицата на припадност на елементите $1,2,...,n$ во множествата $S_1,S_2,...,S_n$ во секој ред и во секоја колона содржи по $n-m$ единици. Сега, од задача 4 следува дека за варијацијата $(S_1,S_2,...,S_n)$ постои с.р.п. $(x_1,x_2,...,x_n)$. Ако на дадениот латински $m\times n-$ правоаголник како $(m+1)-$ва редица ја додадеме подредената $n-$торка $(x_1,x_2,...,x_n)$, тогаш добиваме латински $(m+1)\times n-$ правоаголник. Ако $m+1=n$, тогаш тврдењето е докажано, а ако $m+1<n$, тогаш постапуваме на ист начин како претходно со додавање на нови редови се додека на добиеме латински квадрат од $n-$ ред.

6. Нека имаме n луѓе кои треба да ги распоредиме на n работни места. Секој човек е квалификуван да работи на точно r од работните места, а на секое од работните места може квалификувано да работат точно r од овие n луѓе, $r<n$. Докажи, дека луѓето може да се распоредат на работните места така што секој од нив ќе работи на работно место за кое е квалификуван.

Решение. Нека $L_1,L_2,...,L_n$ се луѓето кои треба да се распореат на работните места, $R_1,R_2,...,R_n$ се работните места и $S_1,S_2,...,S_n$ се подмножества од $\{L_1,L_2,...,L_n\}$ определени со условот на задачата, т.е. $L_k\in S_j$ ако и само ако L_k може квалификувано да работи на работното место R_j. Бидејќи секој човек е квалификуван за точно r работни места и за секое работно место се квалификувани точно r луѓе, матрицата на припадност на елементите $L_1,L_2,...,L_n$ на множествата $S_1,S_2,...,S_n$ во секој ред и секоја колона содржи точно по r единици. Сега, од задача 4 следува дека постои с.р.п. за $(S_1,S_2,...,S_n)$. Со други зборови постои пермутација $(m_1,m_2,...,m_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ таква што важи $L_{k_i}\in S_i$, за $i=1,2,...,n$ што значи дека луѓето може да се распоредат на работните места така што секој од нив ќе работи на работно место за кое е квалификуван.

7. Во еден град живеат вкупно $2k$ луѓе, при што секои двајца се или пријатели или непријатели, и секој има најмногу t непријатели. Ќе велиме дека една група жители е *пријателска* ако секои два члена на групата се пријатели. Познато е дека во градот нема пријателска група која содржи повеќе од k жители, како и дека сите жители на градот може да се распределат во две пријателски групи од по k луѓе во секоја група. Докажи, дека бројот на сите можни пријателски групи од по k луѓе е помал или еднаков на $2^{k-1}+2^{k-t}$.

Решение. Нека $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ и $B=\{b_1,b_2,...,b_k\}$ се двете пријателски групи. За произволна подгрупа C од A со S_C да ја означиме групата од сите луѓе од B, секој од кои не е пријател со барем еден човек од C. Ако $|C|>|S_C|$, тогаш групата $C\cup(B\setminus S_C)$ е пријателска и таа има

$$|C|+|B|-|S_C|>|B|=k$$

членови, што е противречност.

Тоа значи, дека множествата $S_{\{a_i\}}$ ги исполнуваат условите од теоремата на Хол за с.р.п.. Според тоа, можеме да сметаме дека a_i и b_i, за $i=1,2,...,k$ се непријатели. Тоа значи, дека секоја пријателска група од k луѓе содржи точно по еден човек од секој пар (a_i,b_i) за $i=1,2,...,k$.

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека непријатели на a_1 се $b_1,b_2,...,b_t$. Секоја пријателска група, која го содржи a_1 не ги содржи $b_1,b_2,...,b_t$, па затоа ги содржи $a_1,a_2,...,a_t$. Од секој од останатите $k-t$ парови (a_j,b_j), $j>t$ треба да избереме a_j или b_j. Според тоа, такви групи се најмногу 2^{k-t}.

Секоја пријателска група со k членови која не го содржи a_1 го содржи b_1. Од секој од останатите $k-1$ парови (a_j,b_j), $j>1$ треба да избереме a_j или b_j. Според тоа, такви групи се најмногу 2^{k-1}.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бројот на сите можни пријателски групи од по k луѓе е помал или еднаков на $2^{k-1}+2^{k-t}$.

8. Дадена е група од B момчиња и G девојчиња, каде $G\geq 2B-1$. Некои момчиња познават некои девојчиња. Докажи, дека во еден танц сите момчиња може да играат со девојки на таков начин, што секое момче кое не го познава девојчето со кое танцува, да познава само девојчиња кои не танцуваат.

Решение. Нека за секој $s=1,2,...,B$ секоја група од s момчиња заедно познава барем s девојчиња. Тогаш од теоремата на Хол за с.р.п. следува дека секое момче може да танцува со девојче кое го познава и условот на задачата е исполнет. Нека го претпоставиме спротивното и да го избереме најголемиот $s\leq B$ за кој има s момчиња кои заедно познаваат не повеќе од $s-1$ девојчиња.

Множеството на избраните s момчиња да го означиме со S, а множеството на девојчињата кои ги познаваат со L. Ако некои t од момчињата надвор од S познаваат најмногу t девојчиња надвор од L, ќе добиеме противречност со максималноста на s. Според тоа, секои t од момчињата надвор од S познаваат најмалку $t+1$ од девојчињата надвор од L. Сега, од теоремата на

Хол следува дека секое момче надвор од S може да танцува со познато девојче надвор од L. Бидејќи $B-s$ се девојчињата кои танцуваат со момчиња надвор од S, а $s-1$ е најголемиот број девојчиња познати на момчињата од S, добиваме дека надвор од L има најмалку

$$G-(B-s)-(s-1)=G+1-B\geq B$$

девојчиња кои не танцуваат. Ако момчињата од S танцуваат со некои s од останатите нетанцувачки девојчиња надвор од L тогаш условот на задачата е исполнет.

34. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. На остров живеат 100 лажливци и 100 витези. Секој има барем еден другар. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажливците секогаш лажат. Еден ден 100 жители на островот рекле: „Сите мои другари се лажливци“, а останатите 100 жители рекле: „Сите мои другари се витези“. Определи го најмалиот можен број парови другари, од кои едниот е витез, а другиот е лажливец.

   Решение. Ако најмалку 50 витези рекле „Сите мои другари се лажливци“, тогаш имаме најмалку 50 барани парови. Во спротивно, најмалку 50 лажливци рекле (и лажеле) „Сите мои другари се лажливци“, па добиваме дека секој од нив се дружи со некој витез, што значи дека повторно имаме најмалку 50 барани парови.

   Ќе докажеме дека е можно да има точно 50 парови. Нека $v_1, v_2, ..., v_{100}$ се витезите и $l_1, l_2, ..., l_{100}$ се лажливците, и нека p_i и l_i се дружат ($i = 1, 2, ..., 50$), при што ниту едниот ниту другиот нема повеќе другари. Витезите $v_{51}, v_{52}, ...,$ v_{100} се дружат меѓу себе, а лажговците $l_{51}, l_{52}, ..., l_{100}$ се дружат меѓу себе. Тогаш за $i = 1, 2, ..., 50$ сите p_i и l_i ќе речат: „Сите мои другари се лажливци“, а за $i = 51, 52, ..., 100$ сите p_i и l_i ќе речат: „Сите мои другари се витези“, со што се исполнети условите на задачата.

2. Во земјата Параноја оперираат 16 тајни агенти, од кои секој следи барем еден од останатите агенти, но никои двајца не се следат еден со друг. Познато е дека било кои 10 агенти може да се наредат во низа така што првиот го следи вториот, вториот го следи третиот итн. десеттиот го следи првиот. Докажи и дека било кои 11 агени може да се наредат во ваква низа.

   Решение. За два агенти ќе велиме дека се ортаци ако не се пратат меѓу себе. Ако некој агент прати 6 или помалку други агенти, со нивно отфрлање добиваме 10 агенти кои не може да се наредат во низа. Според тоа, секој агент прати најмалку 7 агенти. Аналогно се добива дека секој е пратен од најмалку 7 агенти. Последното значи дека секој агент има најмногу еден ортак.

   Разгледуваме произволни 11 агенти. Бидејќи ортаците формираат парови, барем еден од нив, да кажеме x, нема ортак меѓу останатите 10 агенти. Да ги подредиме овие 10 агенти во низа $a_1, a_2, ..., a_{10}$ така што a_i го следи a_{i+1} за $i = 1, 2, ..., 10$ ($a_{11} = a_1$). За секој i, или x го прати a_i или a_i го прати x, при што x прати барем еден од десетмината и е пратен од страна на барем еден од десетмината. Оттука следува дека за некој i агентот a_i го прати x, а x го прати a_{i+1}. Сега единаесетте агенти можеме да ги наредиме во низата $a_1, a_2, ..., a_i, x, a_{i+1}, ..., a_{10}$.

3. Учениците A, B, C, D и E учествувале на натпревар. Еден гледач се обидел да ги погоди резултатите на натпреварот и претпоставил дека редоследот ќе биде A, B, C, D, E, но тој не го погодил пласманот на ниту еден ученик и ниту еден пар ученици кои што се пласирале непосредно еден по друг. Друг гледач претпоставил дека резултатот ќе биде D, A, E, C, B и тој го погодил точното место на два ученика, а исто така и на два пара ученици кои се пласирале непосредно еден по друг. Кој е резултатот на натпреварувањето?

Решение. Прво да забележиме дека, ако пласманот на двајца натпреварувачи е точно предвиден и ако е точно предвиден пласманот на едниот натпреварувач, тогаш точно е предвиден и пласманот на другиот натпреварувач.

Да го разгледаме предвидувањето на вториот гледач. Во ова предвидување имаме четири парови: DA, AE, EC и CB. Два од овие пара се точно предвидени.

Нека претпоставиме дека точно се предвидени паровите кои имаат заеднички елемент (DA, AE или AE, EC или EC, CB). Тогаш ниту едно од точно предвидените места не може да припаѓа на некој од точно предвидените парови, бидејќи во овој случај ќе имаме барем три точно предвидени места. Ако двете погодени места се надвор од тројката со погоден редослед, тогаш би биле погодени сите пет места (бидејќи трите преостанати места ги пополнуваат на точен начин трите преостанати натпреварувачи). Затоа точно предвидените парови се дисјунктни.

Според тоа кои парови се точно предвидени, можни се следните случаи:

а) DA и EC. Барем едно погодено место припаѓа на подреден пар, па тој пар претставува две погодени места, а другиот пар погрешно предвидени места. Ако двете места од парот DA се точно предвидени резултатот на натпреварувањето би бил $DABEC$, што не е можно, бидејќи првата личност ќе има точно погоден пар. Ако парот EC е точен, тогаш и парот DA треба да е точно предвиден (во однос на местата) што не е можно.

б) AE и CB. Ако двете места на парот AE се точно предвидени, тогаш и парот CB (во однос на местата) е точно предвиден, што не е можно. Ако двете места на парот CB се точно предвидени, тогаш резултатот ќе биде $AEDCB$, што не е можно, бидејќи предвидувањето за A би било како и кај првата личност.

в) DA и CB. Ако двете места на DA се точно предвидени, тогаш резултатот би бил $DACBE$, што не е можно бидејќи C е на третото место како исто како и кај првата личност. Ако двете места на парот CB се точни, тогаш резултатот е $EDACB$ и се исполнети сите услови на задачата.

4. На крајбрежјето на кружен остров има 20 градови. Секој град располага со 20 борачи за учество на турнир. Не постојат двајца борачи кои имаат еднаква сила. Кога двајца борачи ќе се сретнат во борба, победува посилниот борач. За даден природен број n еден град A се нарекува посилен од друг град B, ако постојат најмалку n различни борби меѓу борач од A и борач од B, во кои победува борачот од A. Да се определи најголемата можна вредност на n, за која е можно секој град да е $n-$посилен од својот сосед кој е во насока на движењето на стрелката на часовникот.

   Решение. Да претпоставиме дека $n>290$ и дека секој град е посилен од својот сосед кој е во насока на движењето на стрелките на часовникот. Во секој град да ги подредиме борачите според нивната сила, по што од секој град го земаме десеттиот по сила борач. Нека најслабиот десетти борач е од градот S. Тогаш борачите од S можат да победат најмногу $20\cdot 20-10\cdot 11=290$ борачи од секој друг град, вклучувајќи го и соседот во насока на движењето на стрелките на часовникот, што е противречност. Значи, $n\le 290$. Ќе докажеме дека $n=290$ е бараниот број.

   Да ги подредиме и нумерираме, почнувајќи од најслабиот по сила сите 400 борачи. Нека борачите нумерирани со броевите од 1 до 210 ги наречеме слаби, а борачите нумерирани со броевите од 211 до 400 ги наречеме силни. Нека во градот $A_i, i=1,2,...,20$ се наоѓаат подредените i слаби и $20-i$ силни борачи (распоредуваме редоследно), т.е. во A_1 се борачите 1 и 211-229, во градот A_2 се борачите 2-3 и 230-247 итн. Градовите $A_i, i=1,2,...,20$ ги редиме обратно од насоката на движење на стрелките на часовникот. Понатаму, за $i=2,3,...,20$ борачите од градот A_i ги победуваат борачите од градот A_{i-1} во $i(i-1)+(20-i)\cdot 20=i^2-21i+400$ борби. Последната квадратна функција имам минимум (за целоброен аргумент) за $i=10$ и $i=20$ и тој минимум е днаков на 290. Останува да забележиме, дека борачите од A_1 ги победуваат борачите од A_{20} во $19\cdot 20=380>290$ борби.

5. Нека S е множество од 100-цифрени броеви. За број кој припаѓа на множеството S ќе велиме дека е *лош*, ако не е делив со збирот на кои било други два (не задолжително различни) броја од множеството S. Определи го најголемиот можен број на елементи на множеството S, ако е познато дека S содржи најмногу 10 лоши броеви.

   Решение. Броевите од множеството S кои не се лоши ќе ги наречеме *добри*. Да забележиме дека секој добар број може да се запише како збир на најмалку два и најмногу девет (не задолжително различни) лоши броеви. Бидејќи имаме $\binom{10+j}{9}$, $j=2,3,...,9$ збирови од по j броеви, бројот на елементите на S е помал или еднаков на $\sum_{j=1}^{9}\binom{10+j}{9}=\binom{19}{10}$.

Десетте лоши броеви се избрани од интервалот $[10^{100},\frac{10^{101}-1}{9}]$. Овој интервал содржи $\frac{10^{100}-1}{9}$ броеви, од кои можеме да избираме. Освен тоа, јасно е дека збировите на барем два и најмногу девет (не задолжително различни) броја од овој интервал се 100-цифрени броеви од овој интервал и можеме да ги разгледуваме за вклучување во S. Останува да го прецизираме изборот така што да не се добиваат еднакви збирови.

Да претпоставиме дека веќе сме избрале j лоши броеви и сите збирови од најмногу девет (не задолжително различни) од овие броеви се различни. Следниот лош број не треба да е делител на ниту еден од веќе избраните броеви и не треба да е еднаков на разликата на веќе избраните лоши броеви. Тоа ни дава не повеќе од

$$\frac{10^{10}(10^{10}-1)}{2}+9\cdot 10^{10}<10^{21}$$

(го искористивме неравенството $\binom{19}{10}<10^{10}$) можности и сега можеме да го направиме изборот на следниот $(j+1)-$ви лош број, $j+1\le 10$.

6. Неколку монети прво се поделени во 200 групи, а потоа во 300 групи. За една монета ќе велиме дека е посебна, ако при втората поделба била во група со помалку монети отколку при првата поделба. Определи го најмалиот можен број посебни монети.

Решение. Ако поделиме $200\cdot 101$ монета прво во 200 групи од по 101 монета, а потоа една од тие групи ја поделиме на 101 група од 1 монета, ќе добиеме втора поделба со 300 групи и ќе имаме точно 101 посебна монета.

Нека $x_1\le x_2\le ...\le x_{200}$ е бројот на монетите при првата поделба. Да претпоставиме дека при втората поделба има 200 групи без посебни монети и нека $y_1\le y_2\le ...\le y_{200}$ е бројот на монетите во тие групи. Бидејќи

$$x_1+x_2+...+x_{200}\ge y_1+y_2+...+y_{200},$$

постои индекс j за кој важи

$$x_1\le y_1,...,x_{j-1}\le y_{j-1},x_j\ge y_j.$$

Монетите од секоја група y_i за $1\le i\le j$ не се посебни и затоа при првата поделба тие биле во група со број монети $\le y_i$. Но, сите групи x_k за $k\ge j$ имаат повеќе монети од секоја група y_i за $1\le i\le j$. Значи, сите монети од

$y_1, y_2, ..., y_j$ се меѓу $x_1, x_2, ..., x_{j-1}$. Затоа

$$y_1 + y_2 + ... + y_j \le x_1 + x_2 + ... + x_{j-1},$$

што противречи на $x_1 \le y_1, ..., x_{j-1} \le y_{j-1}, y_j > 0$. Од добиената противречност следува дека во втората поделба има најмногу 199 групи без посебни монети. Според тоа, имаме најмалку 101 група барем со по една посебна монета.

7. Секој од n ученици има некој (позитивен) број жетони, а сите ученици заедно имаат $2n-2$ жетони. Докажи дека за секој природен број $l \le 2n-2$ постои подмножество од множеството ученици кои имаат точно l жетони.

Решение. Нека има k ученици со по еден жетон. Останатите $n-k$ ученици имаат редоследно по $a_1, a_2, ..., a_{n-k}$ жетони, при што важи $a_i \le k$ за секој i. Навистина, ако постои ученик кој има најмалку $k+1$ жетон, тогаш бидејќи другие $n-k-1$ ученици имаат барем по 2 жетони, добиваме дека вкупниот број жетони е $k \cdot 1 + 1 \cdot (k+1) + (n-k-1) \cdot 2 = 2n-1$, што е противречност.

Да означиме

$$s_0 = 0 \text{ и } s_i = a_1 + a_2 + ... + a_i \text{ за } i = 1, 2, ..., n-k.$$

За некој $i \in \{0, 1, ..., n-k\}$ важи $s_i \le l \le s_{i+1} \le s_i + k$. Значи, постојат неколку ученици кои имаат најмалку по два жетони и кои вкупно имаат s_i жетони, па со додавање уште на $l - s_i \le k$ ученици кои имаат по еден жетон го добиваме саканото подмножество.

8. Дадени се природни броеви n и k, $n \ge k$ Во група од n луѓе секој човек е член на точно еден од k клубови, означени со $C_1, C_2, ..., C_k$, при што секој клуб има барем еден член. Докажи дека меѓу сите n луѓе може да се распределат n^2 парчиња торта, така што се исполнети следниве услови:

1) Секој човек добива барем едно парче торта,
2) За секој $i, 1 \le i \le k$, секој член на клубот C_i добива a_i парчиња торта,
3) Ако $1 \le i < j \le k$, тогаш $a_i > a_j$.

Решение. За секој $i, 1 \le i \le k$ со x_i да го означиме бројот на членовите на клубот C_i. Ќе докажеме дека броевите

$$a_i = x_i + 2(x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{i+k})$$

ги задоволуваат условите на задачата. Јасно, условот $a_i > 0$ е исполнет. За секој $i, 1 \le i \le k-1$ имаме

$$a_i = x_i + x_{i+1} + a_{i+1} > a_{i+1},$$

па затоа $a_i > a_j$ кога $1 \le i < j \le k$. Вкупно се разделени

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} x_i x_j = (\sum_{i=1}^{k} x_i)^2 = n^2$$

парчиња торта.

9. Нека A_n е множеството од сите низи со должина n, составени од q букви $a_1, a_2, ..., a_q$. Со B_n да го означиме подмножеството на A_n со минимален број елементи со следново својство: За секој низа $(c_1, c_2, ..., c_n)$ од A_n постои низа $(b_1, b_2, ..., b_n)$ од B_n, таква што $c_i \ne b_i$ за секој $i = 1, 2, ..., n$. Докажи, дека ако $q > n$, тогаш $| B_n |= n+1$.

Решение. Да забележиме дека множеството $B_n = \{(a_i, a_i, ..., a_i) \mid i = 1, ..., n+1\}$ го исполнува условот на задачата. Имено, за секоја низа $(c_1, c_2, ..., c_n)$ од A_n постои елемент a_j, $j \in \{1, 2, ..., n+1\}$ кој не се среќава во таа низа, па затоа низата $(a_j, a_j, ..., a_j)$ го има саканото својство. Според тоа, $| B_n | \le n+1$. Нека претпоставиме дека $| B_n |= n$. Да ја разгледаме матрицата од ред $n \times n$, во која редиците се низите од B_n. Јасно, за низата составена од дијагоналните елементи на оваа матрица не постои елемент од B_n, што е противречност. Од добиената противречност следува $| B_n |> n$, па затоа $| B_n |= n+1$.

10. Даден е збор со најмалку 10 букви, во кој секои две соседни букви се различни. Докажи дека е можно местата на некои две соседни букви да се заменат и како резултат на тоа новодобиениот збор да не е периодичен (т.е. да не може да се подели на еднакви подзборови).

Решение. Нека дадениот збор е W со должина n со букви од азбука A. Очигледно $| A | \ge 2$. Ако по замената на местата на две соседни букви добиеме периодичен збор со основна периода p, тогаш $1 < p < n$, $p \mid n$ и секоја буква учествува во нашиот збор најмалку $\frac{n}{p} \ge 2$ пати. Јасно, $p \ge 3$, бидејќи $p = 2$ значи дека во W има две соседни еднакви букви.

Нека a е буква од W, за која минималното растојание меѓу две нејзини (различни) појавувања, е најмало можно и нека тоа растојание е еднакво на m. Тогаш $m > 1$ и нека $W = ...aw_1w_2...w_m a...$. Размената на местата на a и w_1 дава нов збор W ’ со помало минимално растојание, кое при тоа не се среќава на друго место во W ’. Последното дава противречност при $p \ge 3$.

11. Имаме $n \ge 2$ сајтови означени со $1, 2, ..., n$ и треба да ги поврземе со линкови.

За секој $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ од сајтот i до сајтот $i+1$ веќе постои линк. Можеме да додадеме нов линк од сајтот i до сајтот j ако $i<j$. Докажи дека со поставување на најмногу $3(n-1)\log_2\log_2 n$ нови линкови може да се постигне од секој сајт i до секој сајт j ($i<j$) да може да се стигне со користење на најмногу три линка.

Решение. Со $T(n)$ да го означиме најмалиот потребен број нови линкови. СО индукција ќе докажеме дека $T(n) \le 3(n-1)\log_2\log_2 n$. Ова важи за $n \le 3$ бидејќи $T(2)=T(3)=0$.

Нека $n \ge 4$ и $k \in \mathbb{N}$ е таков што $k^2 \le n < (n+1)^2$. Бидејќи функцијата T е растечка, важи $T(n) \le T((k+1)^2-1)$. Сајтовите $1,2,\dots,(k+1)^2-1$ да ги поделиме на групи $G_1, G_2, \dots, G_{k+1}$, каде

$$G_i = \{x \mid (i-1)(k+1) < x \le i(k+1),\ x<(k+1)^2\}.$$

Во секоја група има $k+1$ сајтови, освен во последната во која има k сајтови. За $1 \le r, i \le k$ додаваме линкови $r(k+1)-i \to r(k+1)$ и $r(k+1) \to r(k+1)+i$, како и сите линкови меѓу сајтовите со редни броеви деливи со $k+1$. Потоа во секоја група да го додадеме најмалиот потребен број линкови $T(k)$. Вака со додавање на $\frac{5}{2}k(k-1)+(k+1)T(k)$ нови линкови ја постигнуваме саканата цел. Ако сега докажеме дека $\frac{5}{2}k(k-1)+(k+1)T(k) \le 3(k^2-1)\log_2\log_2 k^2$, одма следува дека $T(n) \le 3(n-1)\log_2\log_2 n$. Ако ја искористиме индуктивната претпоставка за $T(k)$ потребното неравенство се сведува на неравенството $k^2+5k-6 \ge 0$, кое е точно.

12. Дадени се $2n-1$ двоелементни подмножества на множеството $\{1,2,\dots,n\}$. Докажи дека може да се изберат n од овие подмножества чија унија содржи најмногу $\frac{2}{3}n+1$ елементи.

Решение. Со индукција по k, ($k \le \frac{2n-1}{3}$) ќе докажеме дека може да се исфрлат $3k$ подмножества така што унијата на преостанатите множества има најмногу $n-k$ елементи.

За $k=0$ тврдењето е тривијално. Нека претпоставиме дека $k \ge 1$ и дека сме исфрлиле $3(k-1)$ подмножества тако што унијата на преостанатите множества не содржи повеќе од $n-k+1$ елементи. Бидејќи

$$2n-1-3(k-1) < 2(n-k+1),$$

постои елемент x_k од унијата кој се наоѓа во најмногу три од преостанатите подмножества. Значи, можеме да исфрлиме уште три подмножества така што унијата на преостанатите $2n-1-3k$ не го содржи елементот x_k, со што доказот е завршен.

Тврдењето на задачата следува за $k = [\frac{n-1}{3}]$ бидејќи

$$n-[\tfrac{n-1}{3}] \le n-\tfrac{n-3}{3} = \tfrac{2}{3}n+1 .$$

13. Нека X е множество такво што $|X|=n$. Докажи, дека ако $S=\{X_i\}_{i=1}^{r}$ е фамилија различни подмножества од X таква што $X_i \cap X_j \ne \varnothing$ за секои $i, j=1,2,...,r$, тогаш $r \le 2^{n-1}$.

Решение. Нека $Y_i = X \setminus X_i, i=1,2,..,r$. Ако $r > 2^{n-1}$, тогаш постои i таков што $X_i \in S, Y_i \in S$ и притоа важи $X_i \cap Y_i = \varnothing$. Последното противречи на дефиницијата на фамилијата S. Конечно, од добиената противречност следува $r \le 2^{n-1}$.

14. Нека затворениот интервал $[0,1]$ е разделен на две дисјунктни множества A и B, т.е. нека $A \cup B = [0,1]$ и $A \cap B = \varnothing$. Дали постои реален број a таков што $A+a=B$, каде

$$A+a=\{y, y=x+a, x\in A\} .$$

Решение. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $a>0$ (во спротивно наместо со a ќе работиме со $-a$ и ќе ги смениме улогите на множествата A и B). Најмала вредност која може да припаѓа на B е a, бидејќи во спротивен случај, ако $0<x<a, x\in B$, тогаш $x-a<a-a=0$ и $x-a\in A$ што не е можно. Според тоа, $[0,a) \subseteq A$. Но тогаш интервалот $[a,2a)$ е подмножество од B, и според тоа, тој е дисјунктен со A. Нека $y\in[2a.3a)\cap B$. Тогаш постои $x\in A$ таков што што $y=x+a$, т.е. $x=y-a$. Сега, од $2a \le y < 3a$ следува $a \le y-a < 2a$, т.е. $x=y-a\in[a,2a)\subseteq B$, што противречи на $A\cap B=\varnothing$. Значи, $[2a,3a)\cap[0,1]\subseteq A$. Нека претпоставиме дека $3a>1$. Тогаш $[2a,1]\subseteq A$ и од $1\in A$ следува $1+a\in B$, што не е можно бидејќи $B\subseteq[0,1]$, а $1+a>1$. Значи, $[2a,3a)\subseteq A$. Повторувајќи ја постапката добиваме дека $[4a,5a),[6a,7a),....,[2ka,(2k+1)a),...\subseteq A$. Понатаму, за секој позитивен реален број a, постои $k_0\in\mathbb{N}$ таков што $2k_0a>1$. Значи,

$$1<2k_0a\in[2k_0a,(2k_0+1)a)\subseteq A\subseteq[0,1],$$

што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат множества A и B и реален број a со саканите својства.

15. Нека n е природен број. Дадени се 2^n+1 различни множества, од кои некои се прогласени за црвени, а преостанатите за сини (од секоја боја има барем по едно множество). Секоја симетрична разлика на црвено и сино множество е наречена црно множество. Докажи дека има најмалку 2^n различни црни множества.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $n\in\mathbb{N}_0$. За $n=0$ тврдењето е тривијално. Нека претпоставиме дека $n\geq 1$.

Ако секое црно множество може да се добие само на еден начин, тогаш имаме $k(2^n+1-k)\geq 2^n$ различни црни множества, каде k е бројот на црвените множества. Затоа нека претпоставиме дека некое црно множество може да се добие на два начина: како $A_1\Delta B_1=A_2\Delta B_2$, каде A_1 и A_2 се различни црвени множества, а B_1 и B_2 се сини множества. Да země элемент...

Да земеме елемент a кој е точно во едно од множествата A_1, A_2. Јасно, a исто така се наоѓа во едно од множествата B_1, B_2. Да ги поделиме сите црвени множества на фамилија $\mathbb{C}_+$ од оние множества кои го содржат a и фамилија $\mathbb{C}_-$ од оние множества кои не го содржат a. Аналогно ги делиме и сините множества на фамилиии $\mathbb{S}_+$ и $\mathbb{S}_-$.

Една од фамилиите $\mathbb{C}_+\cup\mathbb{S}_+$ и $\mathbb{C}_-\cup\mathbb{S}_-$ содржи најмалку $2^{n-1}+1$ множество, а тие според индуктивната претпоставка определуваат најмалку 2^{n-1} црни множества кои не го содржат елементот a. Слично, една од фамилиите $\mathbb{C}_+\cup\mathbb{S}_-$ и $\mathbb{C}_-\cup\mathbb{S}_+$ содржи најмалку $2^{n-1}+1$ множества, а тие според индуктивната претпоставка определуваат најмалку 2^{n-1} црни множества кои го содржат елементот a. На овој начин добивме најмалку $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ различни црни множества.

16. Броевите $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}$ се заменуваат со нивниот збир и нивниот производ. За новите броеви $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{25}$ се применува истата операција итн. Докажи, дека во секој момент добиените броеви се помали од $\frac{1}{2}$.

Решение. Нека $a_1=b_1=\frac{1}{5}$, $a_{n+1}=a_n+b_n$ и $b_{n+1}=a_nb_n$, за $n\geq 1$. Со индукција ќе докажеме дека $a_n<\frac{12}{25}$ и $b_n\leq\frac{1}{25\cdot 2^{n-2}}$, за $n\geq 2$.

Јасно, за $n=2$ тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за некој

$n \geq 2$. Имаме

$$a_{n+1} = a_2 + b_2 + b_3 + ... + b_n \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{25}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-2}}) < \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25} \text{ и}$$

$$b_{n+1} = a_n b_n < \frac{b_n}{2} = \frac{1}{25 \cdot 2^{n-1}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

17. Во секое теме на правилниот $n-$аголник $P_1P_2...P_n$ е запишан бројот 1. Ја реализираме следнава операција: Избираме три произволни темиња P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, $(P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_1)$ и ги заменуваме броевите a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, запишани во нив соодветно со броевите $a_i - x$, $a_{i+1} - |x-y|$ и $a_{i+2} - y$, каде $x, y \in \mathbb{R}^+$ ги задоволуваат неравенствата $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, $a_i - x \geq 0$ и $a_{i+2} - y \geq 0$. За секоја операција броевите x и y може да се различни.

Дали по неколкукратно применување на горната операција за некој a_i, $1 \leq i \leq n$ е можно да е исполнето неравенството:

а) $a_i > 1,5$,

б) $a_i > \frac{5}{3}$.

Решение. а) Да, на пример

$$(1,1,1) \to (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}) \to (0, \frac{5}{3}, 0).$$

б) Нека претпоставиме дека $a_i > \frac{5}{3}$ по конечен број чекори. Од $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$ следува $|x-y| \leq \min\{x, y, \frac{x+y}{3}\}$. Под $i-$та операција ќе подразбираме операција врз тројката a_{i-1}, a_i, a_{i+1}. Бројот a_{i-1} ќе се зголемува само при примена на $(i-1)-$та операција и да го означиме вкупното зголемување на a_{i-1} со $\sim$. Тогаш намалувањето на a_i не е помало од $\sim$. Аналогно, нека   е вкупното зголемување на a_{i+1} по $i+1$ операции и ¥ е вкупното зголемување на a_i по i операции.

Тогаш збирот на намалувањата на $a_{i+1} + a_{i-1}$ по i оперции не е помал од 3¥.

Според тоа, $(1+\sim)+(1+\ ) \geq 3$¥, од каде следува $2 \geq 3($¥ $-\sim-\ )$, односно ¥ $-\sim-\ \ \leq \frac{2}{3}$. Оттука добиваме

$$a_i \leq 1 + ¥ - \sim - \ \ \leq 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$

што е противречност.

18. Дали постојат 2000 реални броеви (не задолжително различни), кои не се сите еднакви на 0, со следново својство: ако било кои од нив се корени на полином со степен 1000 и водечки коефициент еднаков на 1, тогаш неговите

коефициенти (освен тој пред x^{1000}) се некоја пермутација на останатите 1000 броеви?

Решение. Нека претпоставиме дека такви броеви постојат. Ако точно $k>0$ од тие броеви се еднакви на 0, тогаш за $k \geq 1000$ полиномот x^{1000} покажува дека сите 2000 броеви се еднакви на 0, што е противречност. Ако $k<1000$, тогаш полиномот со корени тие k нули и $1000-k$ од останатите броеви има слободен член еднаков на 0, т.е. има уште еден корен еднаков на 0, што е противречност. Според тоа, сите 2000 броеви се различни од 0.

Ако 1000 од тие броеви се негативни, тогаш останатите 1000 броеви се коефициенти на полином со степен 1000 со негативни корени, па затоа се позитивни. Според тоа, со сигурност имаме 1000 позитивни броеви. Ако преостанатите 1000 се корени, добиениот полином има само позитивни коефициенти и тогаш неговите корени се негативни. Значи, имаме 1000 позитивни и 1000 негативни броеви. Повторно имаме противречност, бидејќи од Виетовите формули следува дека знаците на коефициентите на полином со 1000 позитивни корени наизменично се менуваат.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека не постојат реални броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

19. Археолог на n страници треба да напише труд за градот Хераклеа. На секоја страна може да има само текст или само слики. Трудот треба да е поделен во неколку параграфи, но во секој параграф мора да има и текст и слики. На колку начини археологот може да ги уреди сликите и текстот во параграфот така што ќе бидат исполнети сите барани услови?

Решение. Нека a_n е бараниот број начини на кои археологот може да го напише трудот и нека $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, при што сметаме дека постои еден начин археологот да напише моногарфија на нула страници, т.е. $a_0=1$.

Параграф кој има m страни може да се напише на $b_m=2^m-2$ начини, бидејќи треба да избереме непразно подмножество различно од $\{1,2,\ldots,m\}$ за слики, а останатото би било текст. Притоа земаме дека $b_0=0$. Нека $B(x)$ е генераторната функција за низата $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогаш

$$B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-2)x^n=\frac{2x}{1-2x}-\frac{2x}{1-x}=\frac{2x^2}{(1-2x)(1-x)}.$$

Сега, ако трудот има k параграфи, тогаш бројот на начините истиот да се напише на n страници е еднаков на коефициентот пред x^n во $B^k(x)$. Археологот сам избира колку параграфи ќе има неговиот труд, па затоа важи

$$A(x)=1+B(x)+B^2(x)+...+B^k(x)+...=\frac{1}{1-B(x)},$$

што е добро дефинирано бидејќи $b_0=0$. Значи,

$$A(x)=\frac{1}{1-\frac{2x^2}{(1-2x)(1-x)}}=\frac{(1-x)(1-2x)}{1-3x}=\frac{2x^2-3x+1}{1-3x}=\frac{7}{9}-\frac{2}{3}x+\frac{\frac{2}{9}}{1-3x}$$

$$=\frac{7}{9}-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n=1+\sum_{n=2}^{\infty}2\cdot 3^{n-2}x^n,$$

од каде следува дека за $n>1$ археологот трудот може да го напише на $a_n=2\cdot 3^{n-2}$ начини.

20. Определи го бројот на зборовите со должина n составени од буквите a,b,c,d кои содржат непарен број букви b.

Решение. Нека бараниот број зборови го означиме со q_n, а со p_n да го означиме бројот на зборовите со должина n составени од буквите a,b,c,d кои содржат парен број букви b. Тогаш $q_n+p_n=4^n$.

Збор со должина $n+1$ со непарен број букви b може да се добие од збор со должина n со непарен број букви b на кој се допишува една од буквите a,c,d или од збор со должина n со парен број букви b на кој се допишува буквата b. Со други зборови имаме $q_{n+1}=3q_n+p_n$. Ако во последната равенка замениме $p_n=4^n-q_n$, добиваме

$$q_{n+1}=2q_n+4^n. \qquad (1)$$

Понатаму, бидејќи имаме само еден збор со должина 1, кој содржи непарен број букви b, добиваме $q_1=1$, па ако замениме во (1), добиваме $q_0=0$. Сега, ако $Q(x)$ е генераторната функција на низата $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$, добиваме

$$\frac{Q(x)-0}{x}=2Q(x)+\frac{1}{1-4x},$$

од каде наоѓаме

$$Q(x)=\frac{x}{(1-2x)(1-4x)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-4x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-2x}$$

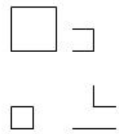
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n-2^n)x^n.$$

Конечно, од последното равенство следува $q_n=\frac{1}{2}(4^n-2^n)$, за $n\in\mathbb{N}_0$.

Забелешка. Вториот дел од задачата може да се доврши и со решавање на диференцната равенка (1) при почетен услов $q_0=0$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

21. Определи ги диференцната равенка и генераторната функцијаза бројот на начините на кои може во целост да се покрие табла со димензии $2\times n$ со помош на:
а) квадрати со димензии 1×1 и 2×2,
б) квадрат со димензии 1×1 и L тримино,
при што квадратите и триминото не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата.



Решение. а) Со a_n да го означиме бројот на соодветните покривања на таблата $2\times n$. Ако во долниот лев агол е квадратот 1×1, тогаш над него мора да е квадрат 1×1, па останува табла $2\times(n-1)$ која може да се покрие на a_{n-1} начини. Ако во долниот лев агол е квадрат 2×2, тогаш останува табла $2\times(n-2)$ која може да се покрие на a_{n-2} начини. Затоа важи

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \qquad (1)$$

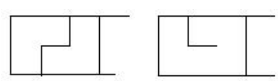
Јасно, почетните услови се $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Оттука, ако ставиме $a_0 = 1$ лесно се добива дека генераторната функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $A(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

Да забележиме дека $a_n = f_{n+1}, n \in \mathbb{N}_0$, каде $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ е низата Фибоначиеви броеви.

б) Со a_n да го означиме бројот на соодветните покривања на таблата $2\times n$. Ако на левата страна имаме две квадратчиња едно над друго, тогаш ни преостанува табла $2\times(n-1)$ која може да се покрие на a_{n-1} начини (цртеж десно).

Ако на левата страна се квадатче и L тримино, тогаш во секој од четирите можни случаи ни преостанува табла $2\times(n-2)$ која може да се покрие на a_{n-2} начини (цртеж лево).

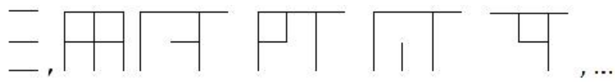
Ако на левата страна има две L тримина, тогаш во секој од двата можни случаја ни преостанува табла $2\times(n-3)$ која може да се покрие на a_{n-3} начини (цртеж десно).



Од претходните разгледувања следува диференцната равенка

$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3}, \qquad (2)$$

со почетни услови $a_1 = 1, a_2 = 5$ и $a_3 = 11$ (види цртеж).



Сега лесно се добива дека генераторната функција во случајов е

$$A(x) = \frac{1}{1-x-4x^2-2x^3} .$$

22. (*Бесконечен принцип на Дирихле*). Ако елементите на едно бесконечно множество S се обоени во k бои, тогаш S содржи бесконечно монохроматско множество S_1. Докажи!

Решение. Нека во $i-$тата од дадените k бои е обоено конечно подмножество S_i и нека $|S_i| = n_i$. Тогаш од принципот на збир следува

$$|S| \leq \sum_{i=1}^{k} |S_i| = \sum_{i=1}^{k} n_i < \infty ,$$

што противречи на тоа дека множеството S е бесконечно. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

23. (*Теорема за монотона низа на П. Ердош и Г. Секереш*). За низата реални броеви $\{a_i\}$ ќе велиме дека е монотона ако таа монотоно расте или монотоно опаѓа, т.е. ако $a_{i+1} \geq a_i$ за секој $i \in \mathbb{N}$ или $a_{i+1} \leq a_i$ за секој $i \in \mathbb{N}$. Докажи дека секоја бесконечна низа реални броеви содржи монотона подниза.

Решение. Без доказ ќе го користиме *бесконечниот принцип на Ремзи*, кој гласи:

Нека сите $r-$елементни подмножества на бесконечното множество S се обоени во k бои. Докажи, дека S содржи бесконечно подмножество S_1 такво, што сите $r-$елементни подмножества на S_1 се обоени во една иста боја.

Да го обоиме секое двоелементно подмножество на низата $\{a_i\}$ во сино или црвено според следново правило: го боиме (a_i, a_j), $i < j$ во црве-но, ако $a_i \leq a_j$ и во сино ако $a_i > a_j$. Според бесконечниот принцип на Ремзи множеството $S = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ содржи бесконечно подмножество S_1, такво што сите двоелементни подмножества на S_1 се обоени во една иста боја. Ако таа боја е црвена, тогаш елементите на S_1 формираат растечка подниза на S. Ако бојата е сина, тогаш елементите на S_1 формираат опаѓачка подниза на S.

24. Докажи, дека секое бесконечно множество $S = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ точки во рамнината такви, што никои три од нив не се колинеарни, содржи бесконечно подмножество S_1, чии елементи се темиња на бесконечен конвексен многуаголник.

Решение. *Прв начин*. Го боиме секое четириелементно подмножество на S во сино или црвено според следново правило: во црвено, ако четирите точки

формираат конвексен четириаголник, а во спротивно го боиме во сино. Според бесконечниот принцип на Ремзи S содржи такво бесконечно подмножество S_1, такво што сите четириалементни подмножества на S_1 се обоени во иста боја. Оваа боја не е сина, бидејќи секое петелементно подмножество содржи конвексно четириелементно подмножество. Според тоа, сите четириелементни подмножества на S_1 се конвексни. Сега лесно се докажува дека елементите на S_1 се темиња на бесконечен многуаголник. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.
Втор начин. Го боиме секое триелементно подмножество на S во сино или црвено според следново правило: Подмножеството $\{a_i, a_j, a_k\}$, каде $i < j < k$ го боиме во црвено, ако при движењето од a_i преку a_j до a_k се движиме во насока на движењето на стрелките на часовникот, а во спротивно го боиме во сино. Согласно бесконечниот принцип на Ремзи постои бесконечно подмножество S_1 на S, чии триелементи подмножества се обоени во една иста боја. Но, тоа значи дека сите триелементни подмножества на S_1 имаат иста ориентација, т.е. елементите на S_1 се темиња на конвескен многуаголник.

ЛИТЕРАТУРА

1. Amini, A. R.: *Fibonacci Numbers a Long Division Formula*, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
2. Anderson, J. A.: *Diskretna matematika sa kombinatorikom*, CET, Beograd, 2005
3. Andreescu, T., Feng, Z.: *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhauser, Boston, 2003
4. Askey, R. A.: *Fibonacci and Lucas Numbers*, Mathematics Teacher, 98, 2005
5. Bakula, B., Franušić, Z.: *Matrice s Fibonaccijevim brojevima,* math.e 26
6. Balakrishman: *Combinatorics*, Schaum's Outlines McGraw-Hill, 1995.
7. Ban, S., Rukavina, S.: *Latinski kvadrati*, Matematičko-fizički list, LXII 4 (2011. – 2012.)
8. Bender, E. A., Williamson, S. G.: *Foundations of combinatorics with applications*, Dover Publications, New York, 2006.
9. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
10. Benjamin, A. T.: *The Lucas Triangle Recounted*, http://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/LucasTriangle.pdf
11. Cameron, P. J.: *Notes on Combinatorics*, School of Mathematical Sciences at Queen Mary, University of London
12. Carstensen, J., Muminagić, A.: *Fibonaccital -og polynomiers division*, Matematik Magasinet 40/2008
13. Carstensen, J.: *Blandet om Fibonaccit-og Lucastal*, Matematik Magasinet 68/2013
14. Čavrak, H.: *Katalanovi brojevi*, Hrvatski elektronski ćasopis, 7
15. Chen, C.C. , Koh, K.M.: *Principles and Tehniques in Combinatorics*, Word Scientific, Singapore - New York-London-Hong Kong, 1992
16. Cull P., Elahive M., Robson R.: *Difference equations: From rabbits to chaos*, Springer, 2005
17. Cull, P., Flahive, M., Robson, R.: *Difference Equations: From Rabbits to Chaos*, Springer, 2005
18. Cvitković, M.: *Kombinatorika (zbirka zadataka)*, Element, Zagreb, 1994.
19. Cvitković,M.: *Kombinatorik: zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2018
20. Dakić, B.: *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995
21. Davis, T.: Catalan Numbers, http://www.geometer.org/mathcircles, 2001.
22. Dogančić, E., Martinjak, I.: Catalanovi brojevi I putevi u celobrojnoj mreži, Osječki matematički list, 18, 2018
23. Dokić, B.: Stirlingovi brojevi, Osječki matematički list, 13, 2013
24. Dravec, H.: *Kombinatorne igre*, Osječki matematički list, 6, 2006

25. Drino, Dž., Murica, M.: *Neki načini dokazivanja identiteta s Fibonaccijevim brojevima*, Matematičko-fizički list, LXVIII, 4, 2017/18
26. Dujella, A.: *Fibonaccijevi brojevi i geometrija*, Matka14 (1995), 60–65.
27. Dujella, A.: *Fibonaccijevi brojevi,* Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000
28. Engel, A.: *Problem-Solving Strategies,* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
29. Erdös, P., Graham, R. L., Montgomery, P., Rotschild, B. L., Spenver, J. H., Straus, E. G.: *Euclidean Ramsey theorems* I, J. Combin. Theory (A) 14/1973
30. Erdös, P., Graham, R. L., Montgomery, P., Rotschild, B. L., Spenver, J. H., Straus, E. G.: *Euclidean Ramsey theorems* II, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 10/1973
31. Erdös, P., Graham, R. L., Montgomery, P., Rotschild, B. L., Spenver, J. H., Straus, E. G.: *Euclidean Ramsey theorems* III, North Holland, Amsterdam, 1975
32. Erdös, P., Szekeres, G.: *A combinatorial problem in geometry,* Composito Math., 2/1935
33. Flajolet, P., Sedgewick, R.: *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2009.
34. Fomin, S., Reading, N.: *Root systems and generalized associahedra,* IAS/Park City Mathematics Institute, 2004
35. Fults, J. L.: *Magic squares*, Open Court Publishing Company, La Salle Illinois, 1974
36. Goulden, I. P., Jackson, D. M.: *Combinatorial enumeration,* John Wiley & Sons, New York, 1983.
37. Graham, L., Knuth, D., Patashnik, O.: *Concrete mathematics,* Addison-Wesley, Boston, 2003
38. Hilton, P., Pedersen, J.: Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/CatalanInPascal.shtml
39. Ho, L. K., Wing, L. T., Yin, L. K.: *Double Counting,* Mathematical Excallibur, Vol. 13, No. 4, 2008
40. Jamak, H.: *Osnovni principi I metode prebrojavanja*, Evolventa (JAMTK), 1 (1) (2018), 6-12
41. Jojić, D.: *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011
42. Jurić, N.: *Jedno svojstvo Fibonaccijevih brojeva,* Matematičko-fizički list, LXV, 4, 2014/15
43. Klavžar, S.: *Zeckendorfov izrek in Fibonaccijeve kocke*, Obzornik za matematiko in fiziko, 50(6), 2003
44. Knott, R.: *Lucas Numbers*, http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/lucasNbs.html#pascal
45. Koshy, T.: *Catalan Numbers with Applications,* Oxford University Press, 2009.
46. Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications,* John Wiley and Sons, New York, 2001
47. Koshy, T.: *Trigonometric Functions and Fibonacci and Lucas Arrays,* Mathematical Spectrum, Vol. 42, Number 3, 2009

48. Kovačić, B.: *O vezi Lucasovih brojeva i Pascalova trokuta*, Matematičko-fizički list, Zagreb, LXIV, 1, 2013
49. Kurnik. Z.: *Metoda rekurzija*, Matematika i škola, 24, 2004
50. Loehr, N. A.: *Combinatorics*, Chapman and Hall, United Kingdom, 2017
51. Luhász, R.: Ramsey type theorems in the plane, J. Combin. Theory (A) 27/1979
52. Mahendra J., Rieper, R. G.: *Continued fractions and Catalan problems*, 2000
53. Majstorović, S.: *Dirichletov princip*, Osječki matematički list, 6, 2006
54. Maldenović, P., Petrović, V.: Stereometrija – izabrani problem, Matematiskop, Beograd, 2002
55. Martinjak, I.: *O Eulerovom teoremu o particijama*, Osječki matematički list, 16, 2016
56. Martinjak, I.: *Poopćenja Cassinijevog identiteta*, Matematičko-fizički list, LXVI, 2, 2015/16
57. Melham, R. S.: *A Fibonacci Identity in the Spirit of Simson and Gelin-Cesàro*, Fibonacci Quart. 41 (2) (2003), 142–143.
58. Merris, R.: Combinatorics, 2nd ed., John Wiley and Sons, 2003
59. Miklos Bona: *A walk through combinatorics: An introduction to enumeration and graph theory*, University of Floria, SAD, 2006
60. Milanović, M.: *Lucas Numbers and Pascal Triangle*, http://milan.milanovic.org/math/english/fibo/fibo3.html
61. Murovec, D.: *Male tajne Fibonaccijevih brojeva*, Matematičko-fizički list, LVI, 1, 2005/06
62. Nurkanović, A., Muminagić, A.: *Nestandardni dokazi nekih osobina Fibonaccievih brojeva*, Evolventa (JAMTK) 1(2)/2018
63. Richard P. Stanley, Catalan Numbers, Cambridge University Press 2015.
64. Riordan, J.: *Combinatorial Identities*, John Willey & Sons, 1968
65. Rosen, K. H.: *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill, 1998
66. Schwenk, A. J.: Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?, Mathematics Magazine, 64/5, 1991
67. Stanley, R.: Catalan Numbers, Cambridge University Press, 2015
68. Stevanović, D., Ćirić, M., Simić, S., Baltić, V. *Diskretna matematika: osnove kombinatorike i teorije grafova*,Prirodno matematički fakultet u Nišu, 2007
69. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. *Diskretna matematika: osnove kombinatorike I teorije grafova, zbirka rešenih zadataka*, DMS, Beograd, 2004
70. Stojadinović, T.: *On Catalan numbers*, The teaching of mathematics,Vol. XVIII, 1, 2015
71. Tošić, R.: *Kombinatorika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodnomatematički fakultet, Novi Sad, 1999.
72. Veljan, D.: *Kombinatorika i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001
73. Wilf, H. S.: *Generatingfunctionology*, University of Pennsylvania, 2006
74. Wilf, H.S.: *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994
75. Баралић, Ђ.: *Идентитети са биномним коефицијентима*, Тангента

76. Велинов, Д.: *Генераторни функции*, Математички талент, 2021, https://matematickitalent.mk
77. Велинов, Д.: *Инаријанти и монинваријанти*, Математички талент, 2021, https://matematickitalent.mk
78. Велинов, Д.: *Некои карактеристични задачи од комбинаторика*, Математички талент, 2021, https://matematickitalent.mk
79. Велинов, Д.: *Рекурентни релации*, Сигма, Скопје
80. Виленкин, Н. Я.: *Комбинаторика*, Наука, Москва, 1969
81. Гарднер, М.: *Математически развлечения*, Том 2,София, Наука и изкуство, 1977
82. Герганов, И.: Задачи в триъгълна решетка, Математка 6/2012, София
83. Герганов, И.: Преброяване върху триъгълна решетка, Математка 1/2012, София
84. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
85. Гуревич, Е.: *Тайна древнего талисмана*, Москва, Наука, 1969
86. Давидов, Љ.: *Генераторни функции*, Сигма, Скопје
87. Давидов, Љ.: *Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми*, Сигма, Скопје
88. Ђукић, Д.: *Задаци о скуповима*, Београд, 2015, www.imo.org.yu/sc
89. Ђукић, Д.: *Задаци са распоредима бројева*, Београд, 2016, www.imo.org.yu/sc
90. Ђукић, Д.: *Инваријанте*, Београд, 2013, www.imo.org.yu/sc
91. Ђукић, Д.: *Комбинаторна геометрија*, Београд, 2016, www.imo.org.yu/sc
92. Ђукић, Д.: *Комбинаторна теорија бројева*, Београд, 2016, www.imo.org.yu/sc
93. Ђукић, Д.: *Математичке игре погађања*, Београд, 2015, www.imo.org.yu/sc
94. Ђукић, Д.: *Партиције природног броја*, Београд, 2013, www.imo.org.yu/sc
95. Ђукић, Д.: *Холова теорема*, Београд, 2016, www.imo.org.yu/sc
96. Ерусалимский, Я. М.: *Дискретная математика*, Везувская книга, Москва, 2004
97. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: *Тригонометрија, хипеболични функции и Фибоначиеви броеви*, Математички талент, Скопје, 2023, https://matematickitalent.mk
98. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: *Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
99. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: *Паскаловиот триаголник и бројот е*, Сигма, Скопје, 2020
100. Колев, Е.: Задачи за фудболни турнири, Математика 3/2015, София
101. Макарова, Н.: *Волшебный мир магических квадратов*, Саратов, 2009
102. Малчески, А., Малчески, Р.: *Разбивање на броеви*, Математика$^{+}$, София, 1997
103. Малчески, Р., Малческа, В. : *Математика* 1 – *алгебарски структури (трето издание)*, Армаганка, Скопје, 2020

104. Малчески, Р., Малческа, В.: *Математика* 5 *– дискретна математика (второ издание)*, Армаганка, Скопје, 2020
105. Малчески, Р., Малчески, А. Малчески, С.: *Меѓународни математички олимпијади* 1959-2019, Математички талент, Скопје, 2022
106. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: *Балкански математички молимпијади* 1984-2020, Математички талент, Скопје, 2022
107. Малчески, Р., Малчески, С., Велинов, Д.: *Логички и комбинаторни задачи за натпревари за учениците од VI до IX одделение*, Математички талент, Скопје, 2023
108. Малчески, Р., Малчески, С.: *Боење и покривање*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
109. Малчески, Р., Малчески, С.: *Математика на правоаголна табла (втор дел)*, Математички талент, Скопје, 2023, https://matematickitalent.mk
110. Малчески, Р., Малчески, С.: *Математика на правоаголна табла (прв дел)*, Математички талент, Скопје, 2023, https://matematickitalent.mk
111. Малчески, Р., Малчески, С.: *Сојузни натпревари по математика за ученици-те од средното образование* 1960-1991, Математички талент, Скопје, 2022
112. Малчески, Р., Муминагиќ, А.: *Некои релации за Фибоначиевите и Лукасовите броеви*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
113. Малчески, Р., Муминагиќ, А.:*Три идентитети за Фибоначиевите броеви*, *Математички талент*, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
114. Малчески, Р., Цветковски, З.: *Задачи со боење и покривање*, Математички талент, Скопје, 2022, https://matematickitalent.mk
115. Малчески, Р., Цветковски, З.: *Принцип на Дирихле*, Математички талент, Скопје, 2022, https://matematickitalent.mk
116. Малчески, Р., Цветковски, З.: *Решавање на комбинаторни задачи со доведување до противречност*, Математички талент , Скопје, 2022, https://matematickitalent.mk
117. Малчески, Р.: *Метод на инваријанти*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
118. Малчески, Р.: *Метод на инваријанти*, Сигма, Скопје,2014
119. Малчески, Р.: *Боење броеви и фигури*, Математички талент, Скопје, 2023
120. Малчески, Р.: *Збирка задачи по теорија на броеви*, Математички талент, Скопје, 2022
121. Малчески, Р.: *Паркетирания и приложения*, Математика +, София, 2001
122. Малчески, Р.: *Теорија на броеви*, Математички талент, Скопје, 2022
123. Малчески, Р.: *Триаголни броеви*, Сигма, Скопје, 1995
124. Малчески, Р.: *Фибоначиеви броеви*, Сигма, Скопје, 2009
125. Малчески, С., Малчески, Р.: *Подготвителни задачи за математички олимпијади - комбинаторика*, Математички талент, Скопје, 2023, https://matematickitalent.mk

126. Малчески, С., Малчески, Р.: *Принцип на Дирихле (прв дел)*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
127. Малчески, С., Малчески, Р.: *Принцип на Дирихле*, Математички талент, 2020, https://matematickitalent.mk
128. Малчески, С., Малчески, Р.: *Принципи на Дирихле (втор дел)*, Математички талент, Скопје, 2021, https://matematickitalent.mk
129. Малчески, С.: *Игри и стратегии*, Математички талент, 2021, https://matematickitalent.mk
130. Малчески, С.: *Игри и стратегии-втор дел*, Математички талент, 2023, https://matematickitalent.mk
131. Младеновић, П.: *Комбинаторика (четврто издање)*, ДМ Србије, Београд, 2013
132. Муминагиќ, А., Малчески, Р.: *Триаголни броеви* 2, Армаганка, Скопје, 2020
133. Плотников, А. Д.: *Дискретная математика*, Новое знание, Москва, 2005
134. Сойфер. А.: Няколко щрихи от математично оцветяване, Математика+, София
135. Стевановић, Д., Балтић, В., Симић, С., Ћирић, М.: *Дискретна математика (основе комбинаторике и теорије графова)*, Друштво математичара Србија, Београд,
136. Тодоровска, К., Целакоска-Јорданова, В.: Магични квадрати, Математички омнибус, 7, 2020
137. Тошић, Р.: *Комбинаторика*, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1999
138. Тошић, Р.: *Математика и игре*, Тангента, Београд, 1998
139. Тошић, Р.: *Математичке игре*, Агенција Ваљевац, Вањево, 1999
140. Филеп, Л., Березнай, Г.: *История на цифрите*, София, Техника, 1988
141. Хаджииванов, Н.: *Комбинаторни задачи за две шахматни дами*, Математика 5/2012, София
142. Цветковски, З., Малчески, Р.: *Една класа линеарни Диофантови равенки и нивна примена*, Математички талент, Скопје, https://matematickitalent.mk
143. Цветковски, З., Малчески, Р.: *Игри и стратегии*, Математички талент, Скопје, 2022, https://matematickitalent.mk
144. Цветковски, З., Малчески, Р.: *Метод на инваријанти* 2, Математички талент, 2022, https://matematickitalent.mk