

Ensayos Económicos

Ajuste estacional en tiempos de cambios económicos fuertes

Jens Mehrhoff

Modelos de Equilibrio General Dinámico y Estocástico (EGDE): una introducción

Guillermo Escudé

Efectos de la estructura productiva desequilibrada y de los esquemas cambiarios sobre el ciclo del empleo en la Argentina

Demian Panigo, Pablo Chena, Ana Gárriz

El uso de garantías en el sistema bancario argentino

Ricardo Bebczuk, Máximo Sangiácomo

59

Julio - Septiembre de 2010



ie | BCRA
INVESTIGACIONES ECONÓMICAS

Modelos de Equilibrio General Dinámico y Estocástico (EGDE): una introducción

Guillermo Escudé*

Banco Central de la República Argentina

Resumen

Los modelos de Equilibrio General Dinámico y Estocástico (EGDE) se han convertido en una forma cada vez más utilizada de estudiar complejos fenómenos dinámicos y estocásticos en diversos campos de la economía. Son utilizados cada vez más por tomadores de decisiones que quieren analizar los efectos de diferentes decisiones de política, o que quieren contar con proyecciones hechas con métodos rigurosos. Con este trabajo se brinda una primera aproximación a este campo fascinante de la modelación matemática del quehacer humano, dando no solo una síntesis de cómo se construyen los modelos EGDE sino también mostrando cómo se puede obtener su solución y calibrar o estimar con métodos econométricos a sus parámetros utilizando software construido con tal propósito.

Clasificación JEL: C32, C63.

Palabras clave: modelos EGDE, estimación bayesiana.

* Una primera versión de este trabajo fue escrito como contribución al libro "Progresos en Economía Computacional", editado por Omar O. Chisari, Asociación Argentina de Economía Política y presentado en la Academia Nacional de Ciencias Económicas el 29 de agosto de 2008 y en la Reunión Anual de la A.A.E.P. el 19 de noviembre del mismo año. La presente versión contiene algunas correcciones y extensiones. Agradezco a Omar O. Chisari por su estímulo para escribir este trabajo y a Nicolás Grosman por sus comentarios sobre la primera versión, algunos de los cuales tuve en cuenta al redactar esta nueva versión. Las opiniones vertidas en este trabajo no se corresponden necesariamente con las de del BCRA o sus autoridades. Email: gescude@bcra.gov.ar.

Dynamic Stochastic General Equilibrium Models (DSGE): an Introduction

Guillermo Escudé

Central Bank of Argentina

Summary

Dynamic and Stochastic General Equilibrium (DSGE) models have become a frequent choice of modeling methodology for complex dynamic and stochastic phenomena in different branches of economics. They are increasingly used by decision-makers to analyze various policy decisions or to generate rigorous forecasts. This paper seeks to provide a first approximation to this fascinating field within the mathematical modeling of human endeavor. It synthesizes how DSGE models are constructed and also illustrates how they are solved and how their parameters are calibrated or econometrically estimated, using software especially designed for such a purpose.

JEL: C32, C63.

Key words: DSGE models, bayesian estimation.

I. Introducción

Los modelos de Equilibrio General Dinámico y Estocástico (EGDE) se han convertido en forma creciente en los últimos años en un vehículo para sistematizar, analizar y proyectar complejos procesos económicos susceptibles de ser analizados con métodos cuantitativos modernos, incluyendo el análisis de las políticas macroeconómicas. Parten de la tradición del equilibrio general comenzada con el trabajo pionero de León Walras: “Elementos de economía política pura, o teoría de la riqueza social” (de 1874) y modernizada con métodos matemáticos y conceptos económicos desarrollados muy posteriormente. En particular, se suele especificar el comportamiento de agentes económicos: familias, empresas, gobierno, etc., así como los mercados en que interactúan, precisando la estructura de cada mercado. En la literatura macroeconómica, lo más común es que coexistan mercados con competencia perfecta (con o sin libre entrada) con mercados con competencia monopolística. Este último concepto, generado por Edward Chamberlin en su revolucionaria “Teoría de la Competencia Monopolística” (de 1933), pudo ser tratado en forma matemática más precisa a partir del trabajo de Dixit y Stiglitz (1977).¹ En los modelos macroeconómicos microfundados el comportamiento de (al menos) los agentes privados es modelado en base a objetivos (utilidad, beneficios) y restricciones (presupuestarias y/u otras) explícitos. Y el funcionamiento de la economía está dado por condiciones de equilibrio de mercado que tienen la función de enlazar dichos comportamientos entre sí. Durante muchas décadas la teoría del equilibrio general fue esencialmente estática. Si bien muchos trabajos incluían mercados intertemporales, como la “Teoría del Valor”, de Gerard Debreu (de 1959), el tiempo aparecía colapsado en un instante en el que todas las transacciones se definían para todos los tiempos y puntos geográficos. La introducción explícita del tiempo y de la incertidumbre, así como de los métodos matemáticos dinámicos y estocásticos de las ciencias naturales (ecuaciones diferenciales y en diferencias, determinísticas y estocásticas), se fue realizando paulatinamente en el cuerpo principal de la teoría económica a través de un prolongado período.

En el caso de modelos macroeconómicos dinámicos en los que las autoridades ejercen una política económica sistemática (monetaria, cambiaria, fiscal, etc.), ésta puede representarse a través de una *regla de política simple*, la cual puede o no tener retroalimentación (*feedback*). Por ejemplo, en el caso de una “regla de Taylor”

¹ Véase también Blanchard y Kiyotaki (1987), la colección de modelos de competencia monopolística en Bénassy (2002), y el modelo canónico de la Macroeconomía Nuevo Keynesiana en Galí (2008).

para la política de tasa de interés de un Banco Central, éste determina la tasa de interés como función de otras variables endógenas, como la inflación o el PIB. Tales variables retroalimentan a la determinación de la tasa de interés. En cambio, si se representa una política de tipo de cambio fijo, el Banco Central mantiene el tipo de cambio nominal constante, existiendo una regla de política (sumamente sencilla) sin retroalimentación. En lugar de una regla de política simple, el fijador de políticas puede tener una *regla de política óptima*. En este caso se explicita una función objetivo que representa las preferencias del fijador de políticas y se obtiene una regla de retroalimentación que surge de optimizar el valor esperado de la función objetivo bajo las restricciones que impone el resto de la economía. Un modelo macroeconómico puede tener más de una regla de política (simple u óptima). Diversos trabajos han tratado reglas fiscales junto con reglas de tasa de interés. Varios trabajos del autor de este trabajo (a través del modelo EGDE ARGEM y algunas variantes más sencillas) han considerado reglas de retroalimentación simultáneas, tanto simples como óptimas, para la tasa de interés y la tasa de depreciación nominal de la moneda, ambas manejadas por el banco central en un marco consistente.

Una aplicación particularmente importante de los modelos EGDE a la macroeconomía es el desarrollo de los modelos Nuevo Keynesianos. Éstos partieron de los modelos de "Ciclo Económico Real" (Real Business Cycle o RBC) y agregaron la "pegajosidad" de precios (*price stickiness*) para obtener resultados dinámicos más realistas.² La forma más usual de modelar la "pegajosidad" es la que surge de Calvo (1983) y consiste en asignar a los infinitos productores monopolísticos una probabilidad α de no poder modificar el precio en cualquier período dado. Esto genera una dicotomía entre los productores que eligen el precio que maximiza su beneficio esperado y los productores que deben contentarse con mantener el precio del período anterior. Y da lugar a la Ecuación de Phillips Nuevo Keynesiana, una ecuación en diferencias que típicamente da la dinámica de una tasa de inflación en base a la de sus determinantes (parciales, en la medida en que se trate de una ecuación dentro de un sistema de ecuaciones). En el caso de la inflación de precios de bienes producidos, tal determinante suele ser el costo marginal, o si la función de producción agregada es suficientemente sencilla, la brecha del producto. Desarrollos posteriores han permitido que dicha ecuación se ajuste mejor a los datos mediante una ampliación

² Si bien el término "pegajosidad" no ha sido muy utilizado en las traducciones al castellano, es la traducción correcta de la palabra en inglés "stickiness", a veces traducida como "rigidez". Ésta última tiene un correlato exacto en inglés ("rigidity") y tiene un significado algo diferente. Por ello, me parece correcto dar a cada palabra su traducción más exacta.

del esquema para permitir que los productores que no pueden optimizar en el presente puedan al menos indexar sus precios a la inflación pasada, existiendo diversas variantes concretas. Por supuesto, un modelo macroeconómico puede tener varias ecuaciones de Phillips, en la medida que tenga varios índices de precios que reflejen fijación de precios en un contexto de competencia monopolística. Por ejemplo, los modelos ARGEM y ARGEMmy del autor de este trabajo tienen 4 y 3 ecuaciones de Phillips, respectivamente, para las dinámicas de las inflaciones de precios domésticos, salarios, bienes importados y (en el caso de ARGEM) bienes manufacturados exportados.

Por limitaciones de espacio, en este trabajo nos limitaremos a sintetizar los principales conceptos que subyacen a los modelos EGDE en general, incluyendo su calibración y estimación, y a desarrollar e implementar en Dynare/MATLAB un modelo EGDE muy sencillo, de economía cerrada, sin gobierno y sin “pegajosidad” de precios. Por consiguiente, no tendremos lugar para reglas de política ni para la ecuación de Phillips. Dichas ampliaciones, y muchas otras, pueden verse en Walsh (2003), en Woodford (2003) y en Galí (2008). El plan del resto del trabajo es el siguiente. En la sección II hacemos una descripción general de los modelos EGDE y en la sección III le damos una cierta estructura matemática al modelo, su aproximación lineal o log-lineal, y su solución. En la sección IV detallamos un modelo macroeconómico sencillo, donde hay competencia monopolística en la producción de bienes, y encontramos su estado estacionario no estocástico (EENE). En la sección V se muestra cómo utilizar el programa Dynare desde MATLAB para resolver el modelo de la sección anterior y realizar simulaciones estocásticas. En la sección VI se presentan conceptos básicos de la estimación Bayesiana de un modelo EGDE. En la sección VII se muestra cómo utilizar Dynare/MATLAB para estimar los parámetros del modelo de la sección IV. La sección VIII concluye el trabajo.

II. Formulación de los modelos EGDE

En la modelación del comportamiento humano, las expectativas con respecto al futuro constituyen una importante complicación en comparación con la forma de modelar los procesos dinámicos en las ciencias naturales. En las últimas décadas, la llamada “revolución de las Expectativas Racionales” ha permitido una primera forma rigurosa de modelar las expectativas.³ Se trata de un método utilizado en

³ El trabajo pionero fue de John F. Muth “Rational Expectations and the Theory of Price Movements”, de 1966. Véase Blanchard y Fisher Lectures (1989) para múltiples aplicaciones.

forma muy generalizada por los economistas para modelar el comportamiento humano. Se usa muy ampliamente, no porque sea particularmente realista sino porque es la manera más sencilla de modelar el comportamiento de manera tal que no se dé la situación también poco realista de que los individuos se equivoquen todo el tiempo de manera sistemática. Más recientemente se ha desarrollado una ampliación del modelo de expectativas racionales mediante la teoría del aprendizaje (*learning*). En los modelos con aprendizaje los agentes sí se equivocan pero van aprendiendo sobre la marcha cómo ajustar sus expectativas de manera que las expectativas racionales sólo se obtienen como límite de ese proceso.⁴

Los equilibrios dinámicos en modelos económicos determinísticos (o sea, sin incertidumbre) que tienen variables definidas como expectativas de acontecimientos futuros constituyen senderos de ensilladura (*saddlepaths*) que tienden hacia un estado estacionario que constituye un punto de ensilladura (*saddlepoint*). Mientras el valor de las variables predeterminadas (también llamadas variables “de estado”) está ligado a su valor pasado, el valor de las no-predeterminadas está determinado por el salto necesario para ubicarse en un sendero no explosivo (ver Begg, 1982). Por eso también son llamadas variables “de salto”. El supuesto de expectativas racionales en los modelos dinámicos pero determinísticos es denominado *previsión perfecta*. Esto se debe a que la trayectoria futura de las variables sujetas a expectativas coincide exactamente con el valor esperado (bajo certidumbre). Tanto en el caso particular de previsión perfecta como en el más general de expectativas racionales, se supone que los agentes conocen el modelo de la economía y forman previsiones correctas con respecto al futuro. En caso de modelos con incertidumbre, o sea, estocásticos, es el valor esperado (en el sentido probabilístico) por los agentes para las variables futuras el que debe coincidir con los valores que se derivan de la solución del modelo. Pues se supone que los agentes conocen las distribuciones de probabilidades supuestas para las variables estocásticas que afectan al modelo pero no las realizaciones particulares de esas variables.

Para formular modelos EGDE se comienza modelando los procesos decisorios de los agentes económicos (privados y/o públicos) mediante problemas de optimización estocástica. Esto da lugar a condiciones de primer orden (como la ecuación de Euler del proceso de decisión de una familia). También se obtienen

⁴ Para este tópico el libro crucial es Evans y Honkapohja (2001).

otras ecuaciones tales como condiciones de equilibrio de mercados, identidades entre variables (como la definición de la tasa de inflación en términos de los niveles de precio en los periodos t y $t - 1$), reglas de política, etc. Algunas de las ecuaciones típicamente contienen funciones auxiliares, como primas de riesgo, costos de transacción, costos de ajuste, etc., que ayudan a hacer la dinámica del modelo más ajustada a la dinámica observada de las variables involucradas.

Algunas de las ecuaciones del modelo estarán influenciadas por perturbaciones estocásticas (para que el modelo sea de EGDE y no simplemente EGD). Es usual que al menos algunas de las ecuaciones contengan variables exógenas dotadas de una dinámica representada por procesos estocásticos autorregresivos (típicamente AR(1)). Tales ecuaciones pueden simplemente adicionarse a las ecuaciones que surgen de la teoría y entonces las variables correspondientes pueden ser tratadas como las demás variables endógenas.

El modelo dinámico normalmente contiene diversos parámetros: algunos provenientes de la teoría económica (como el factor de descuento intertemporal o diversas elasticidades), algunos contenidos en funciones auxiliares que pueden ser más *ad hoc*, y otros provenientes de los procesos estocásticos exógenos (como los coeficientes de persistencia o las varianzas -y quizás covarianzas- de las variables estocásticas i.i.d. que afectan a tales ecuaciones). Una parte importante del proceso de construcción y solución de modelos EGDE que estamos describiendo consiste en darles valores numéricos a los parámetros. Ello puede hacerse mediante calibración o mediante estimación econométrica. En realidad, típicamente se calibra por lo menos un subconjunto de los parámetros. Y cada vez más se estima econométricamente a otro subconjunto. La necesidad de calibrar en forma directa a algunos de los parámetros responde a los problemas de identificación que usualmente presentan los modelos EGDE, los que dificultan la estimación econométrica de los mismos. Para la calibración, pueden utilizarse los grandes ratios del estado estacionario de la economía particular que se desea modelar (Consumo/PIB, etc.), o bien valores de parámetros provenientes de estudios anteriores parecidos, o provenientes de estudios microeconómicos relevantes. En el caso de estimación econométrica pueden utilizarse métodos clásicos ("frecuentistas") o métodos Bayesianos. Es cada vez más frecuente el uso de métodos Bayesianos para obtener los valores estimados de algunos de los parámetros de los modelos EGDE. Los métodos Bayesianos permiten complementar la información contenida en los datos (series de tiempo) con información experta del investigador a través de la elección atinada de distribuciones *a priori* para los parámetros a estimar.

Cuando hay variables nominales o crecimiento económico, muchas de las variables no serán estacionarias (en el sentido de las series de tiempo). Por ello, para obtener una solución del modelo es usual previamente transformar a muchas de las variables para que sean estacionarias. En particular, se suele expresar a las variables en términos reales, dividiéndolas por un índice de precios representativo de la evolución de las variables nominales. Y cuando hay crecimiento se debe transformar a las variables que crecen (en forma ya sea determinística ya sea estocástica) para convertirlas en estacionarias (eliminando la tendencia). Es posible que haya más de una tendencia estocástica, en cuyo caso el proceso de transformación puede ser más complicado.

Los modelos dinámicos cuyas variables son estacionarias suelen tener un “estado estacionario no estocástico” (EENE)⁵ que describe la situación (estática) hacia la cual tiende la economía (representada mediante la transformación de todas las variables de manera tal que sean estacionarias) en el largo plazo cuando las variables estocásticas adoptan sus valores medios. En la metodología usual aplicada a los modelos EGDE es necesario obtener el (o los⁶) EENE del modelo para obtener su solución. Para ello, se procede a eliminar los rezagos o adelantos de las variables y darles los valores medios (esperados) a las variables estocásticas. Se obtiene así un modelo estático que típicamente tendrá al menos algunas ecuaciones no lineales. Este modelo impone restricciones conjuntamente sobre los parámetros del modelo y los valores de EENE de las variables del modelo. Cuando el modelo es medianamente grande, puede ser muy dificultoso resolver ese modelo estático (que representa el remoto futuro), dados los valores para todos los parámetros del mismo. En ese caso el proceso de construcción del EENE asociado a un conjunto de valores numéricos de los parámetros tiene aspectos casi artesanales y constituye una etapa muy importante del proceso de solución. En la próxima sección veremos cómo puede obtenerse el EENE de un modelo concreto aunque muy sencillo.

⁵ Lamentablemente, en el español se utiliza la misma palabra “estacionario” para la estacionaridad en el sentido de series de tiempo y para el “estado estacionario” (en inglés *steady state*), que es un concepto totalmente diferente (de no variación en el tiempo) referido al punto al cual tienden las trayectorias de equilibrio en el horizonte infinito.

⁶ Más adelante veremos que el tamaño (el módulo) de las raíces de la ecuación característica (o, en forma equivalente, de los eigenvalores generalizados) del modelo es crucial para la unicidad y estabilidad de sus soluciones. Cuando el modelo presenta una “raíz unitaria” (un eigenvalor de valor unitario), existen infinitos EENE y debe seleccionarse uno de ellos si se quiere obtener una solución del modelo. Alternativamente, puede eliminarse la raíz unitaria modificando el modelo.

Usualmente no es posible obtener una solución analítica para el modelo dinámico no lineal y debe recurrirse a una aproximación lineal de las ecuaciones no lineales del modelo.⁷ Lo más frecuente es trabajar con una aproximación log-lineal, o sea, lineal en los logaritmos de las variables del modelo. A continuación ilustramos este proceso mediante dos ejemplos muy sencillos. En primer lugar, supongamos que una de las ecuaciones del modelo es:

$$x_t = ay_t^b, \quad (1)$$

donde a y b son parámetros y x_t e y_t son variables endógenas. En el EENE se tiene $x = ay^b$. Luego, dividiendo término a término la ecuación (1) por su expresión de EENE se tiene:

$$\frac{x_t}{x} = \left(\frac{y_t}{y} \right)^b. \quad (2)$$

Definimos el desvío logarítmico de una variable x_t con respecto a su EENE como:

$$\widehat{x}_t \equiv \log\left(\frac{x_t}{x}\right).$$

Entonces tomando logaritmos de (2) se tiene la expresión log-lineal de (1):

$$\widehat{x}_t = b\widehat{y}_t.$$

Cabe señalar que en este caso no se trata de una aproximación sino de una transformación exacta. Para ver el caso de una aproximación tomemos un segundo ejemplo de ecuación no-lineal:

$$x_t = ay_t^b + z_t^c, \quad (3)$$

donde hemos agregado un parámetro c y una variable z_t . En este caso al dividir por la ecuación del EENE se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{x_t}{x} &= \frac{ay_t^b + z_t^c}{ay^b + z^c} = \frac{ay^b}{ay^b + z^c} \left(\frac{y_t}{y} \right)^b + \frac{z^c}{ay^b + z^c} \left(\frac{z_t}{z} \right)^c \\ &= A \left(\frac{y_t}{y} \right)^b + (1-A) \left(\frac{z_t}{z} \right)^c, \end{aligned} \quad (4)$$

⁷ A veces también se utiliza una aproximación de segundo orden (o cuadrática).

donde para abreviar notación en la última igualdad se ha definido:

$$A \equiv \frac{ay^b}{ay^b + z^c}.$$

Al tomar logaritmos de ambos lados de (4) se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &\equiv \log \left(A \left(\frac{y_t}{y} \right)^b + (1-A) \left(\frac{z_t}{z} \right)^c \right) \\ &= \log \left(A e^{\log \left(\frac{y_t}{y} \right)^b} + (1-A) e^{\log \left(\frac{z_t}{z} \right)^c} \right) \\ &= \log \left(A e^{b\hat{y}_t} + (1-A) e^{c\hat{z}_t} \right) \equiv f(\hat{y}_t, \hat{z}_t). \end{aligned}$$

En este caso obtenemos una función no-lineal $f(\hat{y}_t, \hat{z}_t)$ que debe ser aproximada en forma log-lineal. El Teorema de Taylor dice que una aproximación lineal (o sea, descartando todos los términos de la serie de Taylor de orden mayor que uno) en torno al punto (0,0) (o sea, donde las variables x e y están en sus valores de EENE) es:

$$f(\hat{y}_t, \hat{z}_t) = f(0,0) + f_1(0,0)\hat{y}_t + f_2(0,0)\hat{z}_t,$$

donde f_i denota la derivada parcial de f con respecto a la variable i -ésima. A partir de la definición de $f(\hat{y}_t, \hat{z}_t)$ (y usando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que la derivada de $\log(x)$ con respecto a x es $1/x$ y la derivada de e^{bx} con respecto a x es be^{bx}) se comprueba fácilmente que:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \log(Ae^{b0} + (1-A)e^{c0}) = \log(1) = 0, \\ f_1(\hat{y}_t, \hat{z}_t) &= \frac{1}{Ae^{b\hat{y}_t} + (1-A)e^{c\hat{z}_t}} A b e^{b\hat{y}_t}, \\ f_1(0,0) &= Ab, \\ f_2(\hat{y}_t, \hat{z}_t) &= \frac{1}{Ae^{b\hat{y}_t} + (1-A)e^{c\hat{z}_t}} (1-A) c e^{c\hat{z}_t}, \\ f_2(0,0) &= (1-A)c. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la aproximación log-lineal de $f(\hat{y}_t, \hat{z}_t)$ es:

$$f(\widehat{y}_t, \widehat{z}_t) = Ab\widehat{y}_t + (1-A)c\widehat{z}_t.$$

y por lo tanto la aproximación log-lineal de (3) es:

$$\widehat{x}_t = Ab\widehat{y}_t + (1-A)c\widehat{z}_t.$$

Cuando hay muchas ecuaciones y algunas de ellas son muy complicadas, puede ser muy ardua la tarea de obtener las aproximaciones log-lineales de las ecuaciones del modelo a mano. En ese caso conviene aprender a utilizar las herramientas (como el *Symbolic Math Toolbox* de MATLAB) que tienen programas como MATLAB o SCILAB para hacer esa aproximación. O bien puede utilizarse un programa como Dynare que lo hace automáticamente utilizando esas mismas herramientas de MATLAB o SCILAB. Una vez que se tiene una representación del modelo log-lineal definido en torno a un EENE se pasa a la etapa de obtener una solución.

III. Conceptos formales sobre los modelos EGDE y su solución

Existen diversos métodos, todos interrelacionados, para obtener la solución de la aproximación log-lineal de un modelo EGDE. Para la mayoría de los métodos de solución es importante distinguir entre las variables endógenas que son predeterminadas (también llamadas variables de estado) y las no-predeterminadas (también llamadas variables de salto). Las variables predeterminadas tienen condiciones iniciales. El trabajo pionero es el de Blanchard y Kahn (1980). También está el método de coeficientes indeterminados de McCallum (1983), el de la descomposición QZ de Klein (2000), el de Sims (2000), el de King y Watson (1998), y el de Uhlig (1990). En Uhlig (1990) y en Campbell (1992) se explica como log-linealizar ecuaciones con algo más de profundidad de lo que se vio arriba. Los capítulos 4 a 8 del curso de Soderling (2003) son muy didácticos para resolver modelos monetarios EGDE tanto con reglas simples de política como con reglas óptimas. Actualmente existen abundantes programas de MATLAB gratuitamente accesibles por Internet para resolver este tipo de modelos. Entre ellos están Dynare del CEPREMAP de París y AIM de la Reserva Federal.

Un modelo EGDE puede sintetizarse mediante un sistema de ecuaciones (normalmente no lineales), dinámicas y estocásticas, junto con la caracterización de

las variables estocásticas que las afectan. Por ejemplo, las siguientes expresiones muestran en forma estilizada 1) las ecuaciones del modelo expresadas en forma vectorial, donde f es un vector de funciones, cada una de las cuales depende de (al menos un subconjunto de) las variables y parámetros indicados, W_t es el vector de variables endógenas, ε_t es el vector de variables estocásticas, y θ es el vector de parámetros, 2) la media del vector de variables estocásticas ε_t (en este caso las medias son nulas), 3) la matriz de varianzas y covarianzas Σ de las variables estocásticas (que se supone constante en el tiempo):

$$\begin{aligned} E_t f(W_{t+1}, W_t, W_{t-1}, \theta, \varepsilon_{t+1}) &= 0 \\ E_t(\varepsilon_{t+1}) &= 0 \\ E_t(\varepsilon_{t+1} \varepsilon_{t+1}') &= \Sigma, \end{aligned}$$

Las ecuaciones pueden contener variables con más de un rezago y más de un adelanto. Pero en general pueden introducirse nuevas variables para eliminar rezagos y adelantos⁸ hasta obtener este formato (si se va a utilizar el método de Uhlig, por ejemplo), o bien en un formato aún más sencillo que elimina las variables rezagadas (si se va a utilizar el método de Klein o el de Sims, por ejemplo). En estos últimos casos, pueden definirse los vectores $W_{1,t} = W_{t-1}$ y $X_t = (W_t, W_{1,t})$ y escribir el sistema de ecuaciones del modelo como:

$$E_t f(X_{t+1}, X_t, \theta, \varepsilon_{t+1}) = 0.$$

Como ya dijimos, dado que típicamente contienen ecuaciones no lineales, los modelos EGDE no son en general resolubles en forma analítica. Por consiguiente, es usual recurrir a la aproximación lineal (de primer orden en una expansión de Taylor) o cuadrática (de segundo orden) de las ecuaciones que no son lineales. Tomemos el caso de la aproximación lineal puesta en el formato adecuado para usar el método de Klein. Se tiene entonces el sistema en el formato:

$$A(\theta)E_t X_{t+1} = B(\theta)X_t + C(\theta)\varepsilon_{t+1}, \quad (5)$$

donde hemos enfatizado que al menos algunos de los coeficientes de las matrices A , B y C dependen de algunos de los elementos del vector de parámetros θ .

⁸ Véanse los detalles en Binder y Pesaran (1999).

A menudo se tiene un modelo cuya aproximación de primer orden tiene:

1. procesos autoregresivos de primer orden (AR(1)):

$$Z_t = MZ_{t-1} + C_0 \varepsilon_t,$$

donde M es una matriz cuadrada estable (con todos sus eigenvalores menores que uno),

2. ecuaciones sin términos expectacionales del tipo $E_t x_{t+1}$ (para alguna variable endógena x_t), algunas de las cuales pueden contener términos que reflejan *shocks* estocásticos, y algunas de las cuales pueden ser puramente estáticas,

3. ecuaciones que incluyen términos expectacionales. En tal caso la estructura de las matrices A , B y C sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{10}(\theta) & A_{11}(\theta) & 0 \\ A_{20}(\theta) & A_{21}(\theta) & A_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t+1} \\ Y_{1,t+1} \\ E_t Y_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{00}(\theta) & 0 & 0 \\ B_{10}(\theta) & B_{11}(\theta) & B_{12}(\theta) \\ B_{20}(\theta) & B_{21}(\theta) & B_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0(\theta) \\ C_1(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{t+1}.$$

A los efectos de la solución del modelo pueden colapsarse las dos primeras filas de ecuaciones definiendo los vectores $X_{1,t} = (Z_t, Y_{1,t})$, $X_{2,t} = Y_{2,t}$, donde la segunda igualdad sólo denota un cambio de notación. Usando una notación evidente para las submatrices de las matrices de la ecuación precedente, queda entonces:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^0(\theta) & 0 \\ A_{21}^0(\theta) & A_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t+1} \\ E_t X_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^0(\theta) & B_{12}^0(\theta) \\ B_{21}^0(\theta) & B_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{t+1}.$$

Se tiene entonces el vector de variables endógenas X_t dividido en el subvector de variables predeterminadas $X_{1,t}$ (o variables de estado) y el subvector de variables no predeterminadas $X_{2,t}$ (o de salto). El primer bloque de ecuaciones (que corres-

ponde a las variables predeterminadas) muestra el conjunto de ecuaciones que no incluyen términos expectacionales, algunas o todas de las cuales pueden estar afectadas por *shocks* i.i.d. ε_{t+1}^j . Y en el segundo bloque de ecuaciones (que corresponde a variables no predeterminadas) todas las ecuaciones contienen algún término expectacional y ninguna está afectada por *shocks* i.i.d. Se tiene así una mayor especificación de la estructura del modelo que la que se tiene en (5).

Definamos la *innovación* (o *error de pronóstico a un paso adelante*) en t de una variable x como $x_{t+1} - E_t x_{t+1}$. Obsérvese que si tomamos el valor esperado en t de la primera fila de ecuaciones y restamos la ecuación resultante de la primera fila de ecuaciones obtenemos (suponiendo que A_{11}^0 es inversible):

$$X_{1,t+1} - E_t X_{1,t+1} = A_{11}^0(\theta)^{-1} C(\theta) \varepsilon_{t+1}.$$

O sea, el vector de innovaciones de las variables predeterminadas es exógeno, pues el vector de *shocks* ε_{t+1} es exógeno. Como dice Klein (2000), las variables predeterminadas pueden definirse como aquellas variables que tienen un valor inicial exógeno y cuyas innovaciones son exógenas. No sucede lo mismo con las variables incluidas en $X_{2,t}$.

Dejemos de lado por el momento la parte estocástica de la ecuación (5) y concentrémonos en el par (o "lápiz") de matrices (A, B) , ambos de $n \times n$. El problema del "eigenvalor generalizado" es una generalización del problema del eigenvalor para el caso de una sola matriz. En el problema de eigenvalor se trata de encontrar escalares λ_j y vectores x_j tales que $Ax_j = \lambda_j x_j$, o sea, tales que $(A - \lambda_j I)x_j = 0$. Los eigenvalores son las raíces (en general complejas) de la ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$. En el caso generalizado se trata de encontrar escalares λ_j y vectores x_j tales que:

$$Ax_j = \lambda_j Bx_j.$$

A los escalares λ_j se los denomina "eigenvalores generalizados" y a los vectores x_j "eigenvectores generalizados". Obsérvese que si B es no singular, λ_j y x_j son los eigenvalores y eigenvectores de la matriz $B^{-1}A$. Pero si $\det(B) = 0$ puede tenerse uno o más eigenvalores infinitos $\lambda_j = \infty$, con lo que se quiere representar que $Bx_j = 0$. Cuando existe un λ tal que:

$$\det(A - \lambda B) \neq 0$$

se dice que el par de matrices (A,B) es *regular*. En caso contrario, se dice que es singular. Sólo los pares regulares nos interesan aquí.⁹

Cualquiera que sea el método de solución que se utilice, para que exista una solución y ésta sea única, deben satisfacerse las llamadas *condiciones de Blanchard-Khan*:

1. El número ng de eigenvalores generalizados fuera del disco unitario (o sea, tales que $|\lambda_j| > 1$, sean finitos o infinitos, reales o complejos) debe ser igual al número ns de variables de salto, o sea, de variables que en alguna ecuación figuran en su valor esperado (en t) para $t + 1$.

Si $ng > ns$, el modelo es explosivo: no existe solución convergente.

Si $ng < ns$, el modelo es indeterminado: existen infinitas soluciones convergentes.

2. Como el método de solución consiste en expresar a las variables de salto de la solución como función lineal de las variables de estado de la solución, también debe cumplirse una condición de inversibilidad de una cierta submatriz cuadrada. Ésta es la llamada “condición de rango” (Véase Klein, 2000; y Soderlind, 2003).

Si la solución existe y es única puede expresarse como una ecuación de transición¹⁰ para las variables predeterminadas:

$$X_{1,t} = D(\theta)X_{1,t-1} + E(\theta)\varepsilon_t$$

y una ecuación que liga a las variables no-predeterminadas con las predeterminadas contemporáneas:

$$X_{2,t} = F(\theta)X_{1,t}.$$

Se ha enfatizado que las matrices que dan la solución también dependen de los parámetros del modelo (así como las matrices A , B y C). Insertando la primera en la segunda, también puede expresarse la solución como:

⁹ Si el par (A,B) es regular y B es singular se sabe que el par tiene p eigenvalores generalizados finitos y $n - p$ eigenvalores generalizados infinitos, donde p es el grado del polinomio característico $\det(A - \lambda B)$.

¹⁰ También se dice “ecuación de política”, pero no necesariamente en el sentido de política gubernamental, sino en el más general de política de los agentes económicos, sean públicos o privados.

$$\begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(\theta) & 0 \\ F(\theta)D(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E(\theta) \\ F(\theta)E(\theta) \end{bmatrix} \varepsilon_t$$

o sea, con notación obvia para las matrices:

$$X_t = M(\theta)X_{t-1} + N(\theta)\varepsilon_t. \quad (6)$$

(Ver Binder y Pesaran (1999) y Soderling (2003) para más detalles).

Una vez que se ha resuelto el modelo satisfactoriamente, es útil analizar sus propiedades determinísticas mediante el análisis impulso-respuesta. Con este método se obtienen las respuestas dinámicas de las variables endógenas del modelo ante perturbaciones de una sola vez de los *shocks* i.i.d. La observación de estos gráficos usualmente constituye una forma de resumir el funcionamiento dinámico de la parte determinística del modelo. Son útiles para analizar los mecanismos de transmisión de la política, para lo cual se incorporan *shocks* a las reglas de política. También sirven para ayudar en la calibración de parámetros y para detectar errores o deficiencias del modelo.

IV. Ejemplo sencillo de un modelo EGDE

En esta sección se desarrolla con bastante detalle un modelo sencillo que es representativo de la tradición del Ciclo Económico Real (*Real Business Cycle* - RBC) y que es debido a Jesús Fernández-Villaverde.¹¹

Supongamos que la familia representativa tiene la siguiente función de utilidad intertemporal:

$$E_t \sum_{l=0}^{\infty} \beta^l \left[\log c_t + \psi \left(\log(1-l_t) \right) \right], \quad (7)$$

donde c es el consumo, l es el trabajo, β es el factor de descuento intertemporal, y ψ es un parámetro que da la magnitud de la utilidad que proporciona el ocio (tiempo sin ejercer trabajo remunerativo) en relación con la del consumo. La familia está sujeta a sus restricciones presupuestarias (una para cada t):

¹¹ Puede encontrarse este ejemplo y otros en su sitio de Internet (<http://www.econ.upenn.edu/~jesusfv/>).

$$c_t + k_{t+1} = w_t l_t + r_t k_t + (1 - \delta) k_t, \quad (8)$$

donde w_t es el salario y k_t es el *stock* de capital.

Se observa que la familia ahorra acumulando un stock de capital que se deprecia a la tasa δ , y que obtiene ingresos laborales y un rendimiento r_t sobre su stock de capital.

Usando (8) para eliminar c_t de (7), la función a maximizar es:

$$E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log(w_t l_t + r_t k_t + (1 - \delta) k_t - k_{t+1}) + \psi(\log(1 - l_t)) \right].$$

Las condiciones de primer orden dan:

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left(\frac{1}{c_{t+1}} (1 + r_{t+1} - \delta) \right)$$

$$\psi \frac{c_t}{1 - l_t} = w_t$$

para $t = 0, 1, \dots$. A la primera de estas ecuaciones, que es dinámica, se suele llamar "ecuación de Euler".

Suponemos ahora que hay unas empresas perfectamente competitivas que producen (o empaquetan) los bienes finales tomando como insumos los bienes producidos por empresas monopolísticamente competitivas. Estas últimas son infinitas y están indexadas en el intervalo $[0, 1]$. Cada una produce una variedad diferente, si bien las variedades son algo sustituibles entre sí en el consumo. La empresa representativa de las que producen los bienes finales tiene una función de producción de tipo CES (elasticidad de sustitución constante):

$$y_t = \left(\int_0^1 (y_{it})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (9)$$

donde $\varepsilon > 1$ es la elasticidad de sustitución para cualquier par de variedades. El problema que enfrenta la empresa que produce el bien final es determinar la cantidad que comprará de cada variedad (en calidad de insumos) de manera tal

que se maximice su beneficio, tomando como dado el precio de cada variedad (que es fijado por cada monopolista, como veremos más abajo):

$$\max_{y_{it}} \left\{ p_t y_t - \int_0^1 p_{it} y_{it} di \right\} = \max_{y_{it}} \left\{ p_t \left(\int_0^1 (y_{it})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - \int_0^1 p_{it} y_{it} di \right\}.$$

La derivada con respecto a y_{it} del último término entre llaves es:

$$\begin{aligned} & p_t \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \left(\int_0^1 (y_{it})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} (y_{it})^{-\frac{1}{\varepsilon}} - p_{it} \\ &= p_t \frac{y_t}{(y_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}} (y_{it})^{-\frac{1}{\varepsilon}} = p_t \left(\frac{y_{it}}{y_t} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} - p_{it}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al igualarla a cero se tiene la condición de primer orden:

$$p_{it} = p_t \left(\frac{y_{it}}{y_t} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad (10)$$

o bien:

$$y_{it} = y_t \left(\frac{p_{it}}{p_t} \right)^{-\varepsilon}. \quad (11)$$

Introduciendo (11) en (9), luego de elevar ambos lados a $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$ se obtiene:

$$(y_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \int_0^1 \left[y_t \left(\frac{p_{it}}{p_t} \right)^{-\varepsilon} \right]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di = (y_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} (p_t)^{\varepsilon-1} \int_0^1 (p_{it})^{1-\varepsilon} di.$$

Simplificando, se tiene el índice de precios (dual de (9)):

$$p_t = \left(\int_0^1 (p_{it})^{1-\varepsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \quad (12)$$

Además, introduciendo (11) en la parte del costo del beneficio del productor del bien final:

$$\int_0^1 p_{it} y_{it} di = \int_0^1 p_{it} y_t \left(\frac{p_{it}}{p_t} \right)^{-\varepsilon} di = y_t (p_t)^{\varepsilon} \int_0^1 (p_{it})^{1-\varepsilon} di = y_t (p_t)^{\varepsilon} (p_t)^{1-\varepsilon} = y_t p_t,$$

donde la penúltima igualdad utiliza (12). Por consiguiente, el beneficio del productor final es nulo y el producto de los índices de precios y de cantidades da la suma (integral) de los valores de todas las variedades producidas. Además, (10) constituyen las funciones de demanda que enfrenta cada uno de los productores monopolísticos de las diferentes variedades.

Pasamos ahora al problema de los productores (monopolísticos) de bienes. Se supone que cada productor i dispone de la misma función de producción de rendimientos constantes a escala:

$$y_{it} = k_{it}^{\alpha} \left(e^{z_t} l_{it} \right)^{1-\alpha} \quad (13)$$

donde la productividad z_t sigue un proceso estocástico:

$$z_t = \rho z_{t-1} + e_t, \quad 0 < \rho < 1.$$

Aquí e_t es un *shock* estocástico distribuido a lo largo del tiempo en forma independiente e idéntica (i.i.d.). Más precisamente, suponemos que para todo t , $e_t \sim \mathbf{N}(0, \sigma_z)$. Para maximizar beneficios, el monopolista debe minimizar costos para un nivel de producto dado, o sea:

$$\min_{w_t, r_t} (w_t l_{it} + r_t k_{it}) \text{ sujeto a } k_{it}^{\alpha} \left(e^{z_t} l_{it} \right)^{1-\alpha} = y_{it}.$$

El Lagrangiano es:

$$w_t l_{it} + r_t k_{it} - mc_t \left[k_{it}^{\alpha} \left(e^{z_t} l_{it} \right)^{1-\alpha} - y_{it} \right],$$

donde hemos llamado mc_t al multiplicador de Lagrange, puesto que mide el aumento en el costo ante un aumento marginal en la producción y_{it} (que en la minimización es constante). Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_{it}}{l_{it}} mc_t$$

$$r_t = \alpha \frac{y_{it}}{k_{it}} mc_t.$$

Dividiendo término a término para eliminar el costo marginal se tiene:

$$\frac{k_{it}}{l_{it}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{w_t}{r_t}.$$

En particular, esto significa que todos los monopolistas eligen el mismo ratio entre los dos factores de producción, por lo cual ese ratio debe ser el de los factores agregados:

$$\frac{k_{it}}{l_{it}} = \frac{k_t}{l_t}. \quad (14)$$

Además, de las dos condiciones de primer orden se comprueba que el costo marginal es igual al costo medio:

$$mc_t = \frac{w_t l_{it} + r_t k_{it}}{y_{it}},$$

lo que debe ser obvio pues hay rendimientos constantes a escala.

Volviendo a la función de producción (13), se deduce directamente que:

$$\frac{y_{it}}{l_{it}} = \left(\frac{k_{it}}{l_{it}} \right)^\alpha \left(e^{z_t} \right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{y_{it}}{k_{it}} = \left(\frac{l_{it}}{k_{it}} e^{z_t} \right)^{1-\alpha}.$$

Como ya vimos que los ratios entre factores son iguales para todos los monopolistas, también lo son las productividades medias del trabajo y del capital. Por consiguiente, las condiciones de primer orden pueden también escribirse en forma independiente del i particular:

$$w_t = (1-\alpha) \frac{y_t}{l_t} mc_t$$

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} mc_t.$$

Más aún, la función de producción puede directamente escribirse en términos agregados:¹²

¹² Cuando el modelo incorpora "pegajosidad" de precios, como en el modelo básico Nuevo Keynesiano, la dispersión de precios hace que la función de producción agregada contenga un factor adicional, que refleja la dispersión de precios. Véase Woodford (2003) y Yun (2005).

$$y_t = k_t^\alpha \left(e^{\tilde{z}_t} l_t \right)^{1-\alpha}$$

Ahora que ya tenemos las demandas de factores que minimizan el costo podemos pasar a la fijación de precios de cada monopolista. Para ello podemos plantear el beneficio como:

$$p_{it} y_{it} - p_t (w_t l_{it} + r_t k_{it}) = p_{it} y_{it} - p_t mc_t y_{it} = (p_{it} - p_t mc_t) y_{it}.$$

El monopolista maximiza su beneficio sujeto a la función de demanda proveniente del productor de bienes finales (9) suponiendo que no tiene influencia alguna en el índice agregado de precios, o sea:

$$\max (p_{it} - p_t mc_t) y_{it} \text{ sujeto a } y_{it} = y_t \left(\frac{p_{it}}{p_t} \right)^{-\varepsilon}.$$

O bien, maximiza:

$$(p_{it} - p_t mc_t) y_t \left(\frac{p_{it}}{p_t} \right)^{-\varepsilon} = y_t (p_t)^\varepsilon \left[(p_{it})^{1-\varepsilon} - p_t mc_t (p_{it})^{-\varepsilon} \right].$$

Con un poco de álgebra, puede ponerse la condición de primer orden como:

$$p_{it} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} p_t mc_t,$$

o sea, el precio es un *markup* sobre el costo marginal nominal.¹³ Cuanto mayor es la elasticidad de sustitución ε entre las variedades menor es ese *markup*. Además, también el precio es el mismo para todos los monopolistas. Por consiguiente, el precio de cada monopolista es igual al del agregado: $p_{it} = p_t$, y el costo marginal es simplemente la inversa del *markup*:¹⁴

$$mc_t = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

¹³ La existencia de “pegajosidad” de precios complica bastante la fijación del precio y da lugar a la “ecuación de Phillips Nuevo Keynesiana”. Ver Walsh (2003), capítulo 5 y Woodford (2003), capítulo 3.

¹⁴ En la ecuación de Phillips Nuevo Keynesiana, esto tendría validez sólo en el EENE pero no en la trayectoria que conduce a él.

Luego, también podemos escribir las condiciones de primer orden del problema de minimización de costos de la siguiente manera:

$$w_t = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t}$$

$$r_t = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \alpha \frac{y_t}{k_t}$$

Por último, definimos la inversión bruta:

$$i_t = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t,$$

y expresamos la condición de equilibrio en el mercado de bienes:

$$y_t = c_t + i_t.$$

Podemos ahora juntar las siguientes 8 ecuaciones que conforman un modelo macroeconómico EGDE que en principio determina la evolución de las variables $c_t, i_t, y_t, r_t, w_t, l_t, k_t$ y z_t en un entorno del EENE, dados valores de los parámetros $\beta, \psi, \alpha, \delta, \varepsilon, \rho, \sigma$.

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left(\frac{1}{c_{t+1}} (1 + r_{t+1} - \delta) \right)$$

$$w_t = \psi \frac{c_t}{1 - l_t}$$

$$y_t = k_t^\alpha (e^{z_t} l_t)^{1-\alpha}$$

$$l_t = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) (1 - \alpha) y_t / w_t$$

$$k_t = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \alpha y_t / r_t$$

$$y_t = c_t + i_t$$

$$i_t = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$$

$$z_t = \rho z_{t-1} + e_t, \quad 0 < \rho < 1, e_t \sim \mathbf{N}(0, \sigma).$$

Para resolver el modelo, primero debemos obtener el EENE que corresponde a un conjunto de valores de los parámetros. Para ello, se puede suponer que las

variables endógenas están en sus valores de EENE. Denotemos dichos valores mediante las respectivas variables sin subíndice de tiempo. Para que una variable endógena x_t esté en estado estacionario, en todo t debe ser:

$$E_t x_{t+1} = x_t = x_{t-1} = x.$$

Además, la variables estocástica debe estar en su valor medio (o esperado), por lo cual la última ecuación queda así:

$$(1-\rho)z = E(e) = 0,$$

lo que implica $z = 0$. Entonces, el resto del sistema de ecuaciones del EENE se reduce a:

$$\begin{aligned} 1 &= \beta(1+r-\delta) \\ w &= \psi \frac{c}{1-l} \\ y &= k^\alpha l^{1-\alpha} \\ wl &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)(1-\alpha)y \\ rk &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\alpha y \\ y &= c+i \\ i &= \delta k \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones determina r :

$$r = \frac{1}{\beta} - (1-\delta).$$

Para las demás variables endógenas, mediante simple sustitución se llega a las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left(1 - \delta \left(\frac{k}{l}\right)^{1-\alpha}\right) \frac{l}{1-l} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)(1-\alpha)}{\psi} \\ \left(\frac{k}{l}\right)^{1-\alpha} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\alpha}{r} \end{aligned}$$

a partir de las cuales se deduce primero:

$$l = \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} - \delta \frac{\alpha}{r}\right) \frac{\psi}{1-\alpha}}$$

y luego, secuencialmente:

$$k = \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} l$$

$$i = \delta k$$

$$y = k^\alpha l^{1-\alpha}$$

$$c = y - i$$

$$w = \psi \frac{c}{1-l}$$

Por consiguiente, dados valores “sensatos” de los parámetros podemos obtener el correspondiente EENE en forma secuencial. Obsérvese que los valores de los parámetros deben garantizar que estas variables sean positivas, o sea, deben cumplirse ciertas restricciones de signo. En muchos casos, además, puede haber múltiples EENE para un mismo conjunto de valores de los parámetros y habrá que elegir uno de ellos (suponiendo que estén separados, o sea, que exista un pequeño entorno de cada uno de ellos que no contiene a ningún otro).

V. Uso de Dynare y MATLAB para resolver el modelo y realizar simulaciones estocásticas

Dynare es un conjunto de programas desarrollado en CEPREMAP, París, que se monta sobre MATLAB¹⁵ y permite hacer muchas cosas, en particular, resolver modelos EGDE y estimar parámetros de modelos EGDE. En esta sección se ilustra el uso de Dynare/MATLAB para resolver el modelo EGDE desarrollado en la sección precedente y para usar la solución para realizar simulaciones estocásticas. Para ello es necesario escribir un archivo con extensión “.mod” (desde MATLAB, por ejemplo). Supongamos que el archivo se llama “RBC_FV.mod”. A los efectos de poner aclaraciones dentro del código, es útil saber que todo texto que siga al

¹⁵ Hay versiones de Dynare para SCILAB, para OCTAVE, y para otros programas de base. Sin embargo, tienden a actualizarse más lentamente que las versiones para MATLAB.

símbolo “/” en el mismo renglón es ignorado por Dynare en el archivo “.mod” (a diferencia de MATLAB, que ignora lo que sigue al símbolo “%” en los archivos “.m”). Además, todo texto que figure entre los símbolos “/*” y “*/” es ignorado por DYNARE aunque esté en renglones diferentes.

El código debe contener la siguiente estructura (de bloques):

- el preámbulo: lista los nombres de las variables y parámetros,
- el modelo: lista las ecuaciones que integran el modelo,
- los *shocks*: define las perturbaciones estocásticas que afectan al modelo,
- cálculos: instruye a Dynare para que realice determinados cálculos.

Los bloques están conformados por instrucciones específicas, algunas de las cuales deben necesariamente estar en el código (mientras que otras pueden no estar, pues eso depende de lo que uno quiera que Dynare haga). El siguiente es el código del archivo “RBC_FV.mod” que implementa el modelo que vimos (abajo explicamos qué significa cada cosa):

```
close all;
```

```
// 1. Nombres de las variables (endógenas y exógenas)
```

```
var y c k i l w r z;
```

```
varexo e;
```

```
// 2. Nombres de los parámetros y especificación de sus valores
```

```
parameters beta psi delta alpha rho sigma epsilon;
```

```
alpha = 0.33;
```

```
beta = 0.99;
```

```
delta = 0.023;
```

```
psi = 1.75;
```

```
rho = 0.95;
```

```
sigma = (0.007/(1-alpha));
```

```
epsilon = 10;
```

```
// 3. Ecuaciones del modelo
```

```
model;
```

```

(1/c) = beta*(1/c(+1))*(1+r(+1)-delta);
psi*c/(1-l) = w;
y = (k(-1)^alpha)*(exp(z)*1)^(1-alpha);
w = y*((epsilon-1)/epsilon)^(1-alpha)/l;
r = y*((epsilon-1)/epsilon)*alpha/k;
c+i = y;
i = k-(1-delta)*k(-1);
z = rho*z(-1)+e;
end;

```

// 4. Valores del EENE

```

/*
initval;
y=0.7;
c=0.50;
k=8.00;
i=0.18;
l=0.30;
w=1.77;
r=0.03;
z=0.00;
end;
*/

```

// 5. Nombres de los shocks estocásticos y especificación de sus varianzas
shocks;

```

var e = sigma^2;
end;

```

// 6. Pedido de cálculos

```

check;
steady;
stoch_simul(periods=1000,order=1,irf=60);
rplot y c;

```

El comando “close all;” pide que se cierren los gráfico abiertos. No es necesario pero a menudo es conveniente cuando el modelo tiene muchas variables y uno lo corre varias veces.

Un punto muy importante sobre el bloque que comienza con “model;” es que difiere con respecto al modelo teórico que vimos arriba en lo que concierne a la variable k . La convención de Dynare es que toda variable del período t (y que, por consiguiente, no lleva ninguna especificación temporal) debe ser decidida en ese período. En el modelo teórico, k_t es decidida en $t-1$ (o sea, en t se decide k_{t+1}). Por ello, siempre que aparece esa variable en el código del modelo, aparece rezagada un período con respecto a la especificación del modelo teórico. Si uno escribiera el modelo exactamente como vimos en la sección teórica, Dynare no podría resolverlo pues no se cumplirían las condiciones de Blanchard-Khan. Si uno lo intenta, Dynare produce el siguiente mensaje de error:

Blanchard Kahn conditions are not satisfied: indeterminacy

El mensaje especifica que hay más variables adelantadas (o que “miran hacia delante”) que eigenvalores fuera del disco unitario. Esto se debe a que Dynare automáticamente cuenta cuántas variables están seguidas de $(+n)$ (donde n es un número natural) y encuentra que hay tres tales variables: c , r , y k . Pero al calcular los eigenvalores generalizados encuentra que sólo hay dos fuera del disco unitario. Esto significa que hay infinitos senderos que conducen al EENE, o sea, indeterminación. En cambio, al rezagar k en el código, Dynare sólo contará dos variables seguidas de $(+1)$, o sea, se cumplirán las condiciones de Blanchard-Kahn.

Los valores del EENE dados mediante el bloque que comienza con “initval;” pueden ser aproximados. Siempre que sean lo suficientemente precisos, Dynare utiliza métodos numéricos para obtener el EENE exacto. Además, puede omitirse el bloque si se tiene un archivo “.m” aparte que calcula el EENE, pues en ese caso, aunque estuviera el bloque, Dynare lo ignoraría. Obsérvese que hemos anulado ese bloque pues usamos un archivo de MATLAB “RBC_FV_steadystate.m” que instruye a MATLAB cómo calcular el EENE. Abajo mostramos el código de ese archivo.

El comando “check;” pide que se calculen los eigenvalores generalizados y se informe si se cumplen las condiciones de Blanchard y Kahn. El comando “steady;” pide que se calcule e informe el EENE. El comando “stoch_simul(periods=1000, order=1, irf=60);” pide que se realice una simulación estocástica para 1000 períodos (luego de obtener una aproximación de primer orden y resolver el modelo con el método de Klein, que es el *default*) y que se muestre el gráfico de las funciones

de impulso-respuesta de todas las variables para 60 períodos. Hay muchas otras opciones para este comando que pueden verse en Grifoli (2007). Si no se desea que se grafiquen las funciones de impulso-respuesta para todas las variables (lo cual es frecuente si el modelo es grande), se listan las variables a graficar. Por ejemplo, si el comando es “stoch_simul(periods=1000, order=1, irf=60) y c;” sólo se graficarán las funciones de impulso-respuesta correspondientes a y y c . El comando “rplot y c;” pide que se grafiquen las series simuladas y , c , para los 1000 períodos.

Dynare automáticamente busca si en la carpeta en que está el archivo “.mod” existe un archivo “.m” de tipo función con el mismo nombre pero con “_steadystate” agregado al final. Si existe, ignora el bloque “initval;-end;” del archivo “.mod”. Si no existe, utiliza el valor aproximado de ese bloque para calcular el valor exacto.

El contenido del archivo función “RBC_FV_steadystate.m” podría ser el siguiente:

```
function [ys,check]=RBC_FV_steadystate(junk,ys)
alpha = 0.33;
beta = 0.99;
delta = 0.023;
psi = 1.75;
rho = 0.95;
sigma = (0.007/(1-alpha));
epsilon = 10;
z = 0;
r=1/beta+delta-1;
l=1/(1+((epsilon/(epsilon-1))-(delta*alpha/r))*(psi/(1-alpha)));
k=((1-1/epsilon)*alpha/r)^(1/(1-alpha))*l;
i=delta*k;
y=k^alpha*l^(1-alpha);
c=y-i;
w=psi*c/(1-l);
check=0;
ys=[
y
c
k
i
```

```
l  
w  
r  
z  
];
```

Es necesario especificar los mismos valores para los parámetros dados en el archivo “.mod”. Obsérvese que hemos volcado en el archivo exactamente los mismos pasos que encontramos arriba para calcular en forma secuencial el EENE del modelo. El vector “ys” será utilizado por Dynare para realizar la aproximación lineal de las ecuaciones del modelo en un pequeño entorno del EENE computado.

Para ejecutar el archivo “.mod” se escribe en la línea de comando de MATLAB:

```
Dynare RBC_FV
```

Para que MATLAB procese este comando es necesario que el directorio vigente (*Current Directory*) sea aquel en el que se encuentra el archivo “RBC_FV”. Si no fuera así, es muy fácil utilizar la ventanita *Current Directory* para modificarlo. Además, el directorio en el que están los archivos de Dynare deben estar en el Sendero (*Path*) de MATLAB. Si no fuera así, es necesario utilizar el comando de MATLAB *Set Path* para incluir ese directorio en el Sendero. Suponiendo que todo está bien, luego de unos 3 segundos, aparece en la pantalla:

1. Un informe sobre los eigenvalores del modelo:

```
EIGENVALUES:  
  Modulus      Real      Imaginary  
  0.95         0.95      0  
  0.9521       0.9521    0  
  1.074        1.074     0  
  2.24E+15     -2.24E+15 0
```

There are 2 eigenvalue(s) larger than 1 in modulus
for 2 forward-looking variable(s)

The rank condition is verified.

2. El EENE computado:

STEADY-STATE RESULTS:

y	0.892084
c	0.707986
k	8.00426
i	0.184098
l	0.302733
w	1.7769
r	0.033101
z	0

3. El número y tipo de variables del modelo:

MODEL SUMMARY

Number of variables:	8
Number of stochastic shocks:	1
Number of state variables:	2
Number of jumpers:	2
Number of static variables:	4

Obsérvese que el modelo contiene las 8 variables endógenas c_t , i_t , y_t , r_t , w_t , l_t , k_t y z_t , así como un *shock* estocástico e_t . Además, dos de las variables aparecen rezagadas: k_t y z_t (las variables de estado), y dos de las variables aparecen adelantadas: c_t y r_t (las variables de salto). Por último, hay 4 variables (i_t , y_t , w_t , l_t) que no aparecen ni rezagadas ni adelantadas (las variables estáticas).

4. La matriz de covarianza de los *shocks* exógenos:

MATRIX OF COVARIANCE OF EXOGENOUS SHOCKS

Variables	e
e	0.000109

5. La solución numérica del modelo:

POLICY AND TRANSITION FUNCTIONS

	y	i	l	w	k	z	c	r
Constant	0.892084	0.184098	0.302733	1.776903	8.004256	0	0.707986	0.033101
k(-1)	0.019712	-0.024926	-0.008644	0.090002	0.952074	0	0.044638	-0.003206
z(-1)	0.834868	0.625969	0.135264	0.868999	0.625969	0.95	0.208899	0.028389
e	0.878809	0.658915	0.142383	0.914736	0.658915	1	0.219894	0.029884

Cada variable está expresada como función lineal de las variables de estado y los *shocks* estocásticos. Esto es lo mismo que (6), excepto que aquí aparece la transpuesta de $[M(\theta)^1N(\theta)]$, donde $M(\theta)^1$ es $M(\theta)$ sin las columnas de ceros (que corresponden a X_2), y se reordenan las variables para que las estáticas aparezcan en primer lugar.

6. Los 4 primeros momentos de las variables simuladas:

MOMENTS OF SIMULATED VARIABLES

VARIABLE	MEAN	STD. DEV.	VARIANCE	SKEWNESS	KURTOSIS
y	0.896929	0.02996	0.000898	0.176342	-0.460896
c	0.711097	0.016527	0.000273	-0.030178	-0.638589
k	8.05272	0.259642	0.067414	-0.067516	-0.667294
i	0.185831	0.016676	0.000278	0.343519	-0.350055
l	0.302951	0.0034	0.000012	0.334313	-0.36738
w	1.785268	0.045879	0.002105	0.034035	-0.581609
r	0.03308	0.000759	0.000001	0.131732	-0.458343
z	0.00444	0.030183	0.000911	0.24479	-0.40871

7. Las correlaciones entre las variables simuladas:

CORRELATION OF SIMULATED VARIABLES

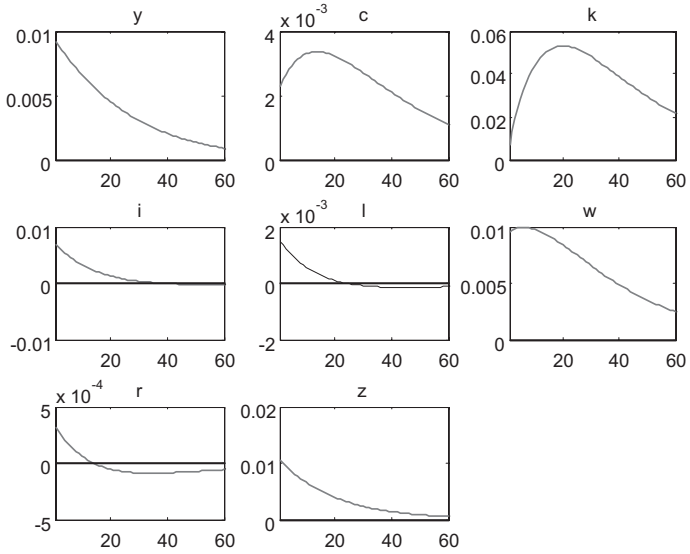
VARIABLE	y	c	k	i	l	w	r	z
y	1	0.9014	0.7594	0.9032	0.7786	0.962	0.3904	0.991
c	0.9014	1	0.9662	0.6284	0.4302	0.9854	-0.0467	0.8353
k	0.7594	0.9662	1	0.4068	0.1831	0.9082	-0.3025	0.6654
i	0.9032	0.6284	0.4068	1	0.9726	0.7518	0.7477	0.9526
l	0.7786	0.4302	0.1831	0.9726	1	0.5778	0.8817	0.8557
w	0.962	0.9854	0.9082	0.7518	0.5778	1	0.1243	0.9168
r	0.3904	-0.0467	-0.3025	0.7477	0.8817	0.1243	1	0.5102
z	0.991	0.8353	0.6654	0.9526	0.8557	0.9168	0.5102	1

8. Las primeras 5 autocorrelaciones de las variables simuladas:

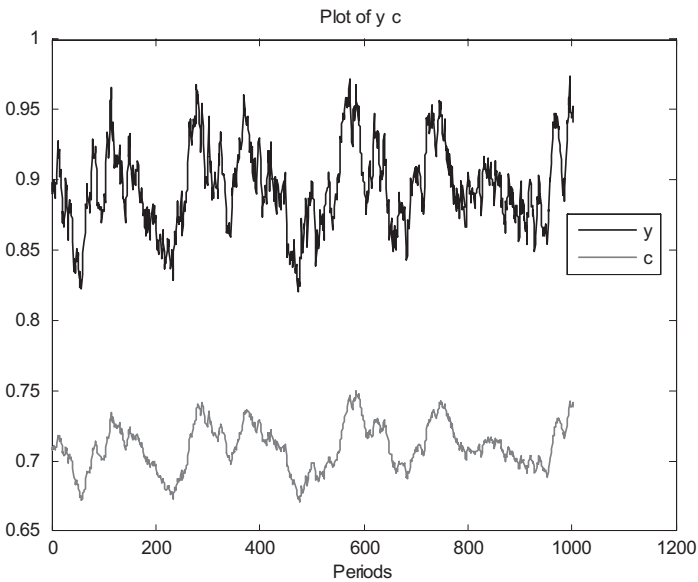
AUTOCORRELATION OF SIMULATED VARIABLES

VARIABLE	1	2	3	4	5
y	0.9547	0.907	0.8623	0.8185	0.778
c	0.9927	0.9785	0.9628	0.9451	0.9263
k	1.0009	0.9944	0.9852	0.9735	0.9596
i	0.9132	0.8299	0.7539	0.6821	0.6186
l	0.9008	0.807	0.7219	0.642	0.5717
w	0.9808	0.956	0.9311	0.9051	0.8795
r	0.9093	0.8241	0.746	0.6727	0.6078
z	0.941	0.8814	0.8262	0.7731	0.7249

9. Los gráficos de las funciones de impulso-respuesta:



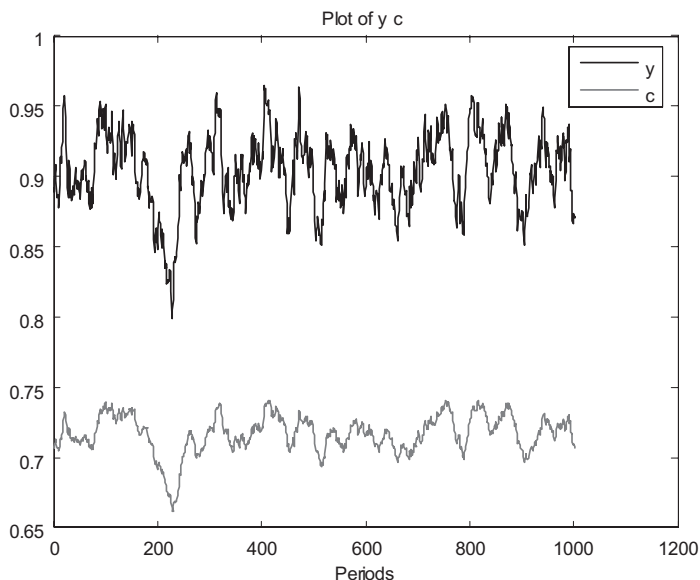
10. Los gráficos de las variables simuladas que se pidió:



11. El tiempo que llevó hacer los cálculos:

Total computing time : 0h00m03s

Obviamente, si se vuelve a correr el archivo todo será igual excepto lo que tiene que ver con la simulación estocástica. Por ejemplo, el gráfico de las variables simuladas en una segunda corrida es:



Cuando se desee obtener la misma simulación estocástica con varias corridas diferentes, puede agregarse la opción "simul_seed=n" al comando "stoch_simul", donde n es un número entero que determina la "semilla" para el generador de números aleatorios (o más bien pseudo-aleatorios).

A veces uno desea ver las funciones de impulso-respuesta con porcentajes (o tanto por uno) en el eje de ordenadas. Pues cuando el modelo es grande las variables pueden tener valores de estado estacionario muy diversas que uno no siempre recuerda. En cambio, siempre es claro lo que significa un impacto relativo: por ejemplo, un aumento de un desvío estándar en el *shock* aumenta a la variable y en 0,03 (o sea, el 3%). Para ello, es necesario hacer algunas modificaciones al código. Las variables que figuran en el archivo ".mod" deben estar definidas en logaritmos. Para ello puede, por ejemplo, en el preámbulo llamarse a la variable

del producto ly (en lugar de y) y reemplazar en el bloque del modelo la variable y por la expresión $\exp(ly)$. Se hace lo mismo para todas las variables endógenas. En el archivo “.m” que calcula el EENE se mantiene todo igual excepto que al final debe agregarse ecuaciones que definan los logaritmos de las variables. Por ejemplo, para cada variable se agrega una ecuación del siguiente tipo:

$$ly = \log(y);$$

y al final se define el vector de *outputs* ys , mediante las variables endógenas ly , etc. Puede o no seguirse el mismo procedimiento para las variables sujetas a procesos autoregresivos, como z . Para hacerlo en nuestro ejemplo, sin embargo, habría que escribir la ecuación del proceso autorregresivo en forma no lineal:

$$\exp(lz) = \exp(lz(-1))^{\rho} * \exp(e);$$

y en las ecuaciones de la función de producción reemplazar z por lz . Además, en el archivo “.m” para el cómputo del EENE, habría que especificar $z=1$ (en lugar de $z=0$). Con esos cambios, las funciones de impulso-respuesta resultantes tienen el mismo aspecto, excepto que ahora también z está en logaritmo, o sea, se trata de un cambio en tanto por uno de la variable sometida al *shock* y se ve las respuestas también en tanto por uno (como antes de hacer los cambios correspondientes a z).

VI. Conceptos básicos de la estimación Bayesiana de un modelo EGDE

El enfoque Bayesiano de la econometría tiene un buen fundamento en la teoría de la decisión (ver Bauwens *et al.*, 1999), aun cuando la mayoría de los econométricos se ocupan más de hacer “informes científicos” (*scientific reporting*) que de tomar decisiones. Un grupo creciente de econométricos, sin embargo, se orienta hacia el apoyo de decisiones de política económica (en bancos centrales, ministerios, etc.). El enfoque Bayesiano tiene mucho que aportar a las decisiones bajo incertidumbre. A diferencia de la econometría clásica (o “frecuentista”), los Bayesianos consideran que es lícito y deseable que el investigador tome en cuenta la información (a menudo subjetiva) que pueda tener sobre los parámetros a estimar antes de tomar en cuenta a los datos. Hay cierta diferencia en la interpretación misma de las probabilidades entre las dos escuelas. Mientras que los “clásicos” fundamentan la probabilidad en la frecuencia de los acontecimientos

(de allí el mote de “frecuentistas”) los Bayesianos consideran que representa fundamentalmente la incertidumbre (expresada a menudo como la disposición a realizar apuestas sobre resultados inciertos), que es en gran medida subjetiva. De allí que mientras los “clásicos” tratan a los parámetros θ como constantes fijas pero desconocidas, los Bayesianos los toman como variables aleatorias y les asignan una densidad probabilística *a priori*.

La estimación Bayesiana puede verse como un puente entre la calibración y la estimación por Máxima Verosimilitud (MV). Se reemplaza la calibración (de al menos un subconjunto) de los parámetros por la especificación de una densidad *a priori* de los parámetros a estimar:

$$p(\theta/M)$$

donde M denota un modelo particular y θ los parámetros de ese modelo. La densidad *a priori* puede ser muy poco informativa o informativa en diversos grados según los desvíos estándares supuestos. Por ejemplo, si se usa una densidad uniforme sólo se está dando información sobre los valores mínimo y máximo del parámetro, por lo cual sería una densidad poco informativa si se trata de un intervalo relativamente amplio. En cambio, las densidades normal, gama, beta, etc., suelen ser más informativas. Desde aquí damos por sentado que se trata de un modelo en particular y eliminamos la M de la densidad *a priori* y de las restantes densidades.

La distribución conjunta de los datos Y_T y de los parámetros θ , $\Pi(Y_T, \theta)$ puede factorizarse de dos maneras diferentes:

$$\Pi(Y_T, \theta) = p(Y_T / \theta) p(\theta),$$

$$\Pi(Y_T, \theta) = p(Y_T) P(\theta / Y_T),$$

donde Y_T contiene las observaciones hasta el período T . En la primera factorización $p(Y_T / \theta)$ es la densidad de muestreo, o sea, la densidad de los datos condicional en el valor de los parámetros, y en la segunda, $P(Y_T)$ es la densidad predictiva (o marginal) de muestreo. Dividiendo la segunda factorización por la primera (término a término) surge la versión de densidad del Teorema de Bayes:

$$P(\theta / Y_T) = \frac{p(Y_T / \theta) p(\theta)}{p(Y_T)}, \quad (15)$$

el cual juega un papel central en el enfoque Bayesiano. Puede interpretarse como una fórmula que muestra cómo a partir de los datos (provenientes de un experimento de muestreo particular) se ve modificada la densidad *a priori* $p(\theta)$ y convertida en la densidad *a posteriori* $P(\theta/Y_T)$.

La función de verosimilitud surge directamente de la densidad de muestreo:

$$\lambda(\theta; Y_T) = p(Y_T / \theta),$$

donde λ es considerada como función de θ . En el caso de modelos dinámicos la densidad de muestreo es recursiva:

$$p(Y_T / \theta) = p(y_0 / \theta) \prod_{i=1}^T p(y_i / Y_{i-1}, \theta).$$

Además, la densidad predictiva (o marginal) de muestreo (que figura en el denominador de (15)) es sólo una constante, pues proviene de integrar la densidad de muestreo sobre todos los valores posibles de θ . Luego, la densidad *a posteriori* es proporcional al producto de la función de verosimilitud y la densidad *a priori*:

$$P(\theta / Y_T) \propto \lambda(\theta; Y_T) p(\theta).$$

A ese producto se lo denomina “densidad *a posteriori* no normalizada” $K(\theta / Y_T)$. Puede verse a la estimación Bayesiana como una extensión de la estimación de MV. Pues consiste en obtener los parámetros que maximizan la densidad *a posteriori* no normalizada (o, lo que es lo mismo, el logaritmo de la densidad *a posteriori* no normalizada):

$$\max_{\theta} \ln K(\theta / Y_T) = \ln \lambda(\theta / Y_T) + \ln p(\theta). \quad (16)$$

La estimación por MV puede verse entonces como el caso particular (o límite) de la estimación Bayesiana en que la densidad *a priori* es nada informativa (y por consiguiente es como si desapareciera el segundo término del lado derecho de (16)).

Se observa que la solución del modelo EGDE (6) tiene la forma de un vector autorregresivo (VAR). Sin embargo, a diferencia de los VAR no restringidos que se ve en gran parte de la literatura (e.g. Hamilton, 1994), estos VAR están (muy)

restringidos. Se observa, en particular, una abundancia de ceros, una parte de los cuales se observan directamente en la estructura de la matriz:

$$M(\theta) \equiv \begin{bmatrix} D(\theta) & 0 \\ F(\theta)D(\theta) & 0 \end{bmatrix},$$

reflejando que las únicas variables que aparecen rezagadas en (6) son las variables predeterminadas (en un VAR no restringido, aparecerían los valores rezagados de todas las variables en cada ecuación). Tales restricciones implican que para estimar los VAR que surgen de la solución del modelo EGDE sean necesarias técnicas distintas que las usuales. Las llamadas “restricciones inter-ecuaciones” (“*cross-equation restrictions*”) surgen del supuesto de expectativas racionales, ya que parámetros que sólo aparecen asociados a variables esperadas en el futuro desaparecen a los efectos de la estimación. Por otro lado, diferentes variables pueden estar afectadas por los mismos parámetros y *shocks* estocásticos, haciendo que diferentes series de datos contengan información relevante para más de una variable y planteando difíciles problemas de identificación.

En general, los métodos de estimación pueden clasificarse según la cantidad de información que utilicen. Los métodos de “información plena” (*full information*) tratan de explotar el conjunto de restricciones inter-ecuaciones que el modelo EGDE genera. Tales son la estimación de Máxima Verosimilitud (MV- *Maximum Likelihood*) y los métodos de estimación Bayesianos. Los métodos de “información limitada” (*limited information*) usan menos información, o sea, explotan sólo algunas de las restricciones que plantea el modelo. Si bien son menos eficientes, tienen la ventaja de que evitan contaminar la estimación con errores de especificación en partes del modelo que pueden no ser de interés central. El Método Generalizado de Momentos (GMM), por ejemplo, es un método de información limitada. En este trabajo, solamente vemos métodos de información plena (y estos sólo muy someramente).

Dos problemas típicos que debe afrontar el que desee estimar un modelo EGDE son: 1) el potencial error de especificación del modelo, 2) la falta de identificación o bien la débil identificación (ver An y Schorfheide, 2007). Debido a que a menudo los modelos EGDE presentan menos *shocks* aleatorios que variables (potencialmente) observables, o sea, variables para las que se podría utilizar alguna serie de datos en la estimación, la estimación por MV está afectada por el hecho de que en tales casos la matriz de covarianzas del modelo EGDE será singular.

Se trata de un problema de error de especificación, pues puede argumentarse que en un modelo suficientemente “realista” habrían más *shocks* que (o al menos tantos *shocks* como) variables. En la literatura se conoce esta cuestión como el *problema de la singularidad estocástica*. Se han propuesto muchas maneras de solucionar este problema, entre las cuales están las obvias de agregar *shocks* adicionales, ya sea estructurales (en las ecuaciones del modelo), ya sea errores de medición de las variables observables (las que se han de contrastar con los datos). Otro enfoque es el de encontrar procedimientos que permitan estimar a pesar de la singularidad. Por supuesto, hay muchas otras fuentes posibles de errores de especificación.

Los problemas de identificación surgen debido a que no se tienen suficientes observaciones informativas o bien porque existen diferentes valores de los parámetros que dan lugar a la misma distribución de probabilidades de las variables a estimar.

Es usual en la macroeconomía que no todas las variables del modelo sean observables. Puede haber variables no observables, o latentes, que no tienen una contrapartida directa en los datos a utilizar.¹⁶ Para estimar parámetros con métodos de información plena, puede ampliarse la solución (6) obtenida de un modelo (lineal o aproximado linealmente) para incluir un segundo bloque de ecuaciones que contiene: 1) la relación entre las variables del modelo X_t y las variables observables Y_t (que tenemos como series de tiempo), 2) posibles errores de medición η_t de estas variables:

$$\begin{aligned} X_t &= M(\theta)X_{t-1} + N(\theta)\varepsilon_t \\ Y_t &= QX_t + \eta_t. \end{aligned} \tag{17}$$

Se suele llamar a este par de ecuaciones la *representación de espacio de estados* del sistema (o modelo) lineal, donde la primera ecuación es la *ecuación de estados* y la segunda es la *ecuación de observaciones*. Además, se hace el supuesto de que ε_t y η_t tienen distribuciones normales¹⁷ y especificamos los valores esperados y las matrices de covarianzas de los *shocks* del modelo ε_t y de los errores de medición η_t :

¹⁶ A diferencia de los problemas que surgen por el supuesto de expectativas racionales, las variables latentes son muy comunes en los sistemas usados en la ingeniería y en las ciencias exactas.

¹⁷ Si los *shocks* y errores no fueran normales, no podría utilizarse el filtro de Kalman y habría que recurrir, por ejemplo, al “filtro de partículas” (“*particle filter*”).

$$E_t(\varepsilon_t) = 0, \quad E_t(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma_\varepsilon$$

$$E_t(\eta_t) = 0, \quad E_t(\eta_t \eta_t') = \Sigma_\eta.$$

Esto coloca la solución del modelo EGDE en un formato conveniente pues permite aplicar el filtro de Kalman para la estimación recursiva de la función de verosimilitud $\lambda(\theta; Y_T)$. En Hamilton (1994) se muestra que el filtro de Kalman permite calcular el pronóstico lineal de cuadrados mínimos de las variables de estado condicional en las observaciones pasadas:

$$\widehat{X}_{t+1|t} \equiv \widehat{E}(X_{t+1} | \mathbf{Y}_t)$$

donde $\mathbf{Y}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_1)$ es el vector de observaciones pasadas, y $\widehat{E}(X_{t+1} | \mathbf{Y}_t)$ es la proyección lineal de X_{t+1} sobre \mathbf{Y}_t . Cada pronóstico tiene una matriz asociada de error cuadrático medio (ECM):

$$P_{t|t-1} \equiv E \left[(X_{t+1} - \widehat{X}_{t+1|t})(X_{t+1} - \widehat{X}_{t+1|t})' \right].$$

La función de verosimilitud está dada por:¹⁸

$$\lambda_{\widehat{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}}(Y_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = (2\pi)^{-n/2} |Q'P_{t|t-1}Q + \Sigma_\eta|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (Y_t - Q' \widehat{X}_{t|t-1})' [Q'P_{t|t-1}Q + \Sigma_\eta]^{-1} (Y_t - Q' \widehat{X}_{t|t-1}) \right]$$

Es típico que la función de verosimilitud presente secciones planas, o con muy poca curvatura, haciendo que no pueda encontrarse un estimador de MV mediante procedimientos numéricos. Si bien la estimación Bayesiana utiliza a la función de verosimilitud, aún una densidad *a priori* poco informativa puede introducir suficiente curvatura en la densidad *a posteriori* no normalizada $K(\theta/Y_T)$ para permitir la maximización numérica y el uso de técnicas de simulación de Monte Carlo con Cadenas de Markov (MCMC) para obtener una aproximación de la densidad *a posteriori*.

¹⁸ El capítulo sobre el filtro de Kalman en Hamilton (1994) es muy informativo. La estimación de modelos EGDE por MV está muy clara en Ruge-Murcia (2005). Para los métodos Bayesianos, ver An y Schorfheide (2007) y Griffoli (2007).

Los métodos numéricos se han ido convirtiendo en herramientas indispensables en la econometría, tanto clásica como Bayesiana. En la econometría clásica, se los usa principalmente para maximizar una función objetivo (como la de verosimilitud). En el enfoque Bayesiano se desea computar la densidad *a posteriori* no normalizada (DAPNN), que puede describirse mediante sus diversos momentos. Como normalmente no tiene forma analítica, el problema típico es el de evaluar numéricamente integrales que corresponden a los momentos de la DAPNN. Por ser métodos numéricos, se trata de una aproximación. El valor esperado de una función $g(\theta)$ bajo una densidad $p(\theta)$ es:

$$E[g(\theta)] = \int g(\theta)p(\theta)d\theta.$$

Si $g(\theta) = \theta$ (o sea, $g(\cdot)$ es la función identidad), se tiene la media de la distribución *a posteriori* (DAP). Si en cambio $g(\theta) = [\theta - E(\theta)][\theta - E(\theta)]'$, se tiene la matriz de covarianzas de la DAP, etc. La mayoría de las reglas de aproximación de la integral utilizan un promedio finito ponderado:

$$\int g(\theta)p(\theta)d\theta \approx \sum_{j=1}^n w_j g(\theta_j)p(\theta_j).$$

En los métodos MCMC, se utilizan procedimientos aleatorios para elegir los valores θ_j (y a veces las ponderaciones w_j). Los métodos MCMC son algoritmos para muestrear distribuciones de probabilidad mediante la construcción de una cadena de Markov que tiene una cierta distribución deseada como distribución de equilibrio. Se utiliza el estado de la cadena luego de un elevado número de pasos como muestra de la distribución deseada. La calidad de la muestra mejora a medida que aumenta el número de pasos. El punto delicado es determinar cuantos pasos se necesitan para que exista convergencia a la distribución estacionaria dentro de un margen aceptable de error. Existen diferentes métodos MCMC, entre ellos los de Metropolis-Hastings (MH).¹⁹ En lugar de utilizar ponderaciones, como arriba, MH utiliza un mecanismo de rechazo para decidir si una extracción aleatoria pertenece o no a la DAP.

¹⁹ Nicholas Metropolis, fue el primero (por orden alfabético) de cuatro autores de un artículo de 1953 que propuso estos algoritmo en la física matemática (o estadística). W. Keith Hastings hizo en 1970 una extensión.

VII. Uso de Dynare para estimar el modelo

Primero se intenta obtener la solución del modelo EGDE partiendo de un vector de parámetros θ . Si ese valor implica que no se cumplen las condiciones de Blanchard-Kahn, se le da un valor de cero a la DAPN. Si se cumplen, se utiliza el filtro de Kalman para evaluar la función de verosimilitud asociada a (17). Dynare computa el modo de la DAPNN maximizando (16) con respecto a θ utilizando métodos numéricos. Luego computa la DAPNN de los parámetros. Para ello utiliza una variante de MH llamada “Metropolis Caminata Aleatoria” (*Random Walk Metropolis - RWM*). Los pasos son los siguientes (ver Griffoli, 2007):

1. Elige un θ_0 de partida, típicamente el modo computado,
2. Extrae una propuesta θ^* a partir de una distribución “saltarina” (*jumping*):

$$J(\theta^* | \theta^{t-1}) = \mathbf{N}(\theta^{t-1}, c\Sigma_m),$$

donde Σ_m es la inversa del Hessiano computado en el modo de la DAP, y c es un factor de escala,

3. Computa el ratio de aceptación:

$$r = \frac{P(\theta^* / Y_T)}{P(\theta^{t-1} / Y_T)} = \frac{K(\theta^* / Y_T)}{K(\theta^{t-1} / Y_T)},$$

4. Acepta o rechaza la propuesta θ^* según la siguiente regla:

$$\theta^t = \begin{cases} \theta^* & \text{con probabilidad } \min(r, 1) \\ \theta^{t-1} & \text{con probabilidad } 1 - \min(r, 1). \end{cases}$$

5. Se repiten los pasos 2-4 muchas veces.

La razón por la cual se sigue esta complicada secuencia es que se trata de visitar todo el dominio de la DAP. A veces es mejor dar unos pasos hacia abajo con la esperanza de obtener luego grandes pasos hacia arriba (en lugar de haber preferido siempre privilegiar pequeños pasos hacia arriba). El factor de escala juega un papel importante en esto. Si c es demasiado pequeño, la tasa de aceptación será demasiado alta y es más probable que la búsqueda se estanque cerca de un máximo local. Pero

si es demasiado grande, la tasa de aceptación será demasiado baja y puede ser que se busque demasiado en las colas de la distribución de probabilidades.

Por último, la densidad predictiva (o marginal) de muestreo $p(Y_T)$ permite comparar modelos diferentes. Existen dos maneras diferentes de computarla (en forma aproximada). En la “aproximación de Laplace”, se supone que la forma funcional de la DAPNN es Gaussiana. Esta es la manera más sencilla, ya que no requiere pasar por el algoritmo RWM. La otra forma de computar la densidad marginal de muestreo es la “estimación de promedio armónico”, que usa la información proveniente de RWM. Dynare calcula ambas, como vemos abajo.

En lo que resta de esta sección se ilustra cómo puede emplearse Dynare para que utilice datos artificiales (o sintéticos) generados por una simulación estocástica del modelo (como se vio arriba) para estimar, mediante MV así como los métodos Bayesianos vistos en la sección anterior, los parámetros del modelo. Por supuesto, lo más usual sería estimar los parámetros a partir de series de tiempo de datos observados. Pero como no tenemos tales datos para una economía concreta y este modelo concreto, recurrimos a fabricarlos. Para ello agregamos a continuación del comando “`stoch_simu(.)`” el comando “`datatomfile('simuldataRBC',[]);`”. Este le pide a Dynare que se guarden los datos simulados en un archivo “.m” (por ello “tomfile”, o sea, “*to m-file*”) nuevo denominado “simuldataRBC”.

Para la estimación puede usarse el mismo archivo que detallamos arriba o bien uno nuevo similar al anterior pero: 1) sin especificar los valores de los parámetros que se van a estimar (en este caso todos), 2) especificando las variables observables mediante el comando “`varobs y;`” (ya que en este caso se supone que sólo la serie artificial para la variable “y” se usa en la estimación), 3) agregando un bloque adicional que estipula, a) en el caso de la estimación por MV, un valor inicial para la estimación recursiva de la función de verosimilitud mediante el filtro de Kalman (y, si se desea, límites mínimo y máximo para cada parámetro a estimar), b) en el caso de la estimación Bayesiana, las densidades *a priori* de los parámetros a estimar, así como sus medias y desvíos estándar.

En el caso de MV, puede agregarse el siguiente bloque para especificar los valores iniciales para comenzar el algoritmo de Kalman:

```
estimated_params;  
alpha,          0.33;
```

```

beta,      0.98;
delta,    0.023;
psi,      1.72;
rho,      0.93;
epsilon,  10.5;
stderr e, 0.012;
end;

```

así como los comandos:

```

varobs y,
estimation(datafile=simuldataRBC);

```

Se especifica que “y” es la variable observable y se da el nombre del archivo que contiene los datos a utilizar. Las demás variables se toman como latentes (y son estimadas en base al filtro de Kalman). Como se supone que la variable misma es observable, en este caso no es necesario agregar una ecuación que la vincule con las variables de estado, o sea, una ecuación de observación. Por ejemplo, si la serie de datos contuviera los factores de crecimiento de “y” habría que agregar al bloque “model;-end;” del archivo “.mod” la ecuación de observación “gy=y/y(-1)”, declarando previamente la nueva variable endógena “gy” en el preámbulo y “gy=1” en el bloque “initval;-end;” (o bien en el archivo “RBC_FV_steadystate”).

Se obtiene el siguiente resultado:

```

RESULTS FROM MAXIMUM LIKELIHOOD
parameters

```

	Estimate	s.d.	t-stat
alpha	0.3918	0.0157	24.9421
beta	1.0299	0.0023	442.6259
delta	0.1199	0.0019	63.8126
psi	1.7194	0.0192	89.7515
rho	0.9308	0.0362	25.7374
epsilon	10.5002	0.107	98.1394
standard deviation of shocks			
	Estimate	s.d.	t-stat
e	0.0134	0.0018	7.5992

Total computing time : 0h01m00s

Como se ve, la estimación de β resulta mayor que uno, lo cual no tiene sentido económico. Podemos poner límites a ese parámetro cambiando el renglón correspondiente de “estimated_params;-end” por “beta, 0.98, 0.9, 0.999;”. En este caso, el resultado es:

RESULTS FROM MAXIMUM LIKELIHOOD

parameters

	Estimate	s.d.	t-stat
alpha	0.3956	0.0994	3.9797
beta	0.999	0.0082	122.1242
delta	0.0758	0.0336	2.2582
psi	1.7154	0.1593	10.7704
rho	0.9342	0.0111	84.2912
epsilon	10.5002	20.0331	0.5241

standard deviation of shocks

	Estimate	s.d.	t-stat
e	0.013	0.0027	4.8678

Total computing time : 0h00m31s

Si bien ahora la estimación de β está dentro del rango indicado, se observa que está justo en el límite superior, lo cual señala problemas. La estimación Bayesiana permitirá mejorar la estimación mediante el uso de densidades *a priori*.

En el caso Bayesiano, agregamos el siguiente bloque para especificar las densidades *a priori*, así como las medias y los errores estándar de cada parámetro:

estimated_params;

```
alpha,      beta_pdf,      0.35,    0.02;
beta,       beta_pdf,      0.99,    0.002;
delta,      beta_pdf,      0.025,   0.003;
psi,        gamma_pdf,    1.75,    0.02;
rho,        beta_pdf,      0.95,    0.05;
epsilon,    gamma_pdf,    10,      0.003;
stderr e,   inv_gamma_pdf, 0.01,    inf;
end;
```

En nuestro caso se estipularon densidades beta para cuatro de los parámetros, gamma para ψ y ϵ , y gamma invertida (tipo1) para el error estándar de e . En el caso de α , β , δ , y ρ , se trata de parámetros que según la teoría deberían estar entre 0 y 1. Por ello se utiliza la distribución beta, que tiene soporte en ese rango.

Además, obsérvese que se le dio un error estándar muy bajo a la densidad *a priori* para β , justamente para evitar que se alejara mucho del valor medio asignado: 0,99. La idea es que, al utilizar métodos Bayesianos, el investigador utiliza información adicional a la que está en los datos. Esa información incluye su confianza en el modelo y la teoría en que se basa: en este caso esa teoría indica que β debe estar entre 0 y 1. En el caso de los parámetros ψ , que mide la utilidad del ocio en relación con la del consumo, y ε , que mide la elasticidad de sustitución entre variedades de bienes, se podría tener cualquier valor positivo. Por ello en ambos casos se utilizó como densidad *a priori* la densidad gamma, que tiene su soporte en $(0, \infty)$. Por último, en el caso del error estándar de e , que también puede tener cualquier valor positivo, se utilizó como *a priori* la densidad gamma-inversa. Esta tiene soporte también en $(0, \infty)$, pero tiene la particularidad de que tiende a alejarse del cero, razón por la cual a veces se la utiliza para evitar que el error estándar dé excesivamente pequeño. En el caso de algunas densidades *a priori* (como la beta generalizada, la gamma generalizada, y la uniforme) debe agregarse un tercer y un cuarto parámetro.

Los comandos a utilizar son los siguientes:

```
varobs y;  
estimation(datafile=simuldataRBC,nobs=200,first_obs=500,mh_replic=2000,  
mh_nblocks=2,mh_drop=0.45,mh_jscale=0.8,mode_check,forecast=12);
```

Se pide a Dynare que:

1. Utilice el archivo de datos simulados "simuldataRBC".
2. Utilice 200 observaciones (de las 2100 generadas).
3. Que comience por la número 500.
4. Que calcule el modo de la densidad posterior utilizando el algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) para construir la densidad *a posteriori*, con 2000 replicaciones.
5. Que lo haga con dos cadenas paralelas de MH.
6. Que deseche el primer 45% de las extracciones de MH y sólo use las restantes.

7. Que utilice una escala de 0,8 para la distribución “saltarina” (*jumping*) en el algoritmo de MH. Esta escala determina qué porcentaje de las extracciones se aceptan (se suele considerar adecuada una tasa de aceptación entre el 20% y el 40%).

8. Que produzca gráficos para cada uno de los parámetros estimados con la distribución posterior calculada puesta de cabeza en un entorno del modo calculado. Se trata de un diagnóstico para detectar errores: por ejemplo, que el modo no esté en el valle de la densidad posterior.

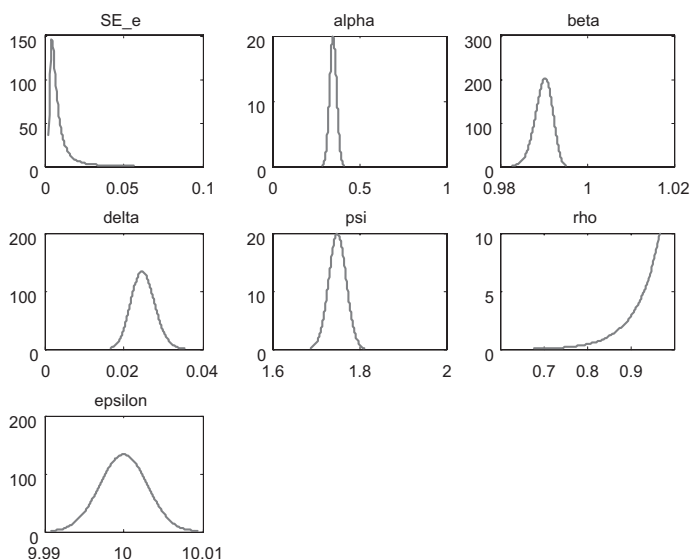
9. Que produzca gráficos de la distribución posterior de un pronóstico para 12 períodos posteriores al fin de la muestra usada en la estimación.

Debe haber al menos tantos *shocks* como variables observables para evitar el problema de la singularidad estocástica. En este caso, como hay sólo un *shock* no puede haber más de una variable observable.

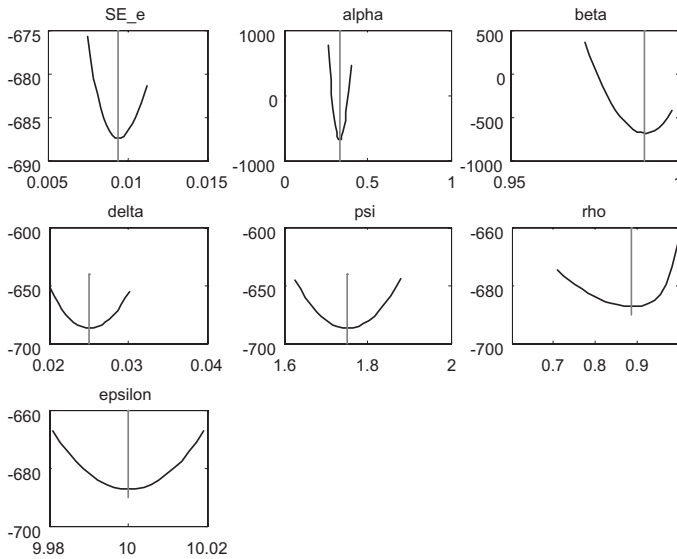
Dynare produce, entre otros, los siguientes resultados:

Gráficos

1. Las densidades *a priori*

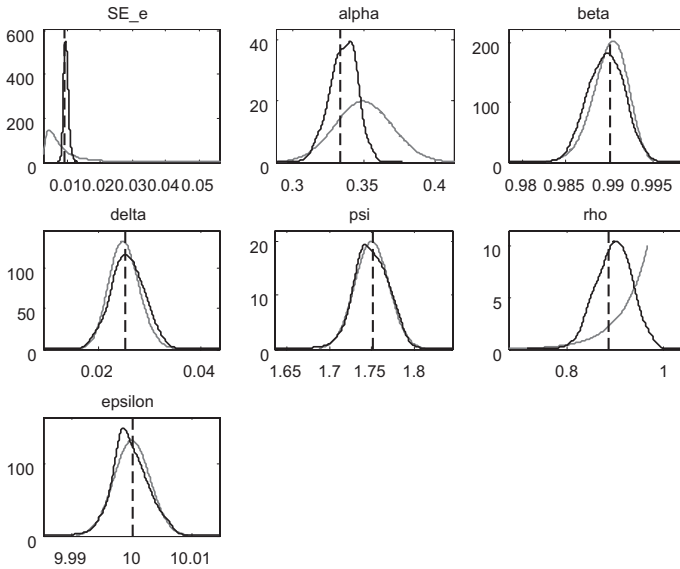


2. Los gráficos del modo y la densidad a posteriori invertida



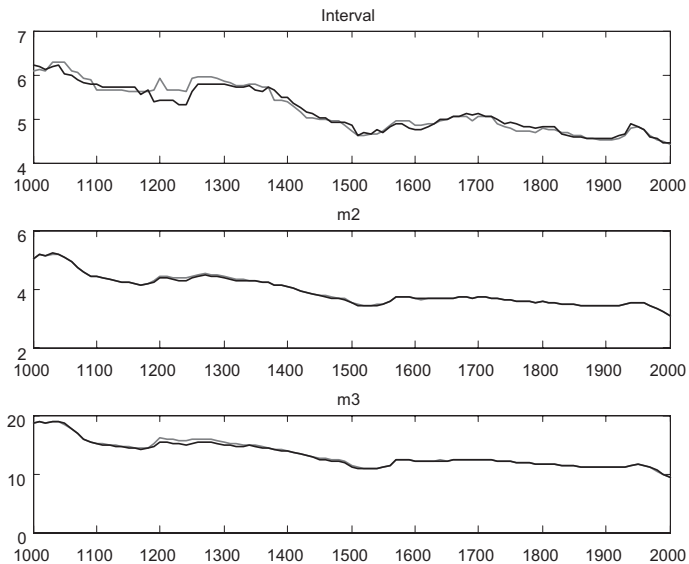
Se ve que para todos los parámetros el pico de la densidad construida a partir de métodos de simulación coincide con el modo obtenido por optimización, como debe ser. A veces esto no es así, señalando problemas. Se observa que en este caso la estimación de β está dentro del rango aceptable desde un punto de vista económico. También puede pedirse esta opción para la estimación por MV. No lo hicimos para ahorrar espacio.

3. Una comparación de las densidades posteriores y *a priori*



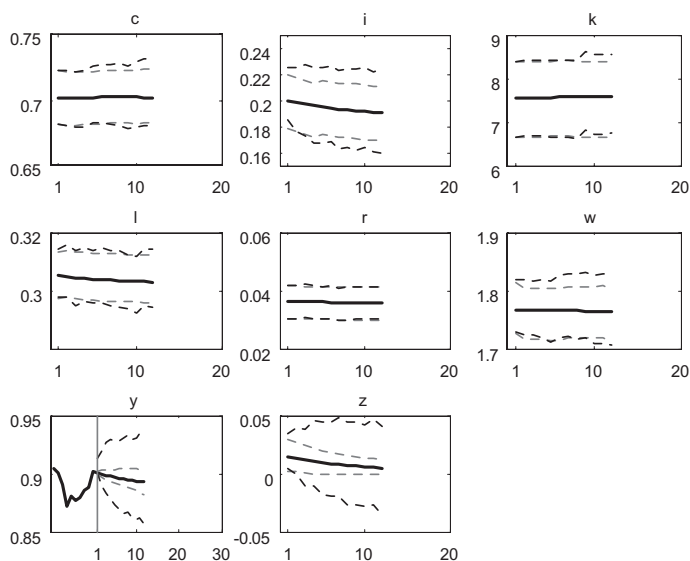
La línea vertical segmentada representa el modo de la densidad posterior calculado numéricamente. No es bueno que la distribución posterior sea demasiado diferente de la densidad *a priori*, pero tampoco que sea demasiado parecida. En el primer caso, puede ser conveniente cambiar la densidad *a priori* o su media o varianza. En el segundo caso, los datos no están aportando a la estimación: se impone la densidad *a priori*. Lo ideal es que los datos hagan su aporte. Por supuesto, esto depende de muchas cosas. Con pocos datos, es probable que aporten poco. Se observa que para varios de los parámetros (particularmente ψ), los “datos” no han aportado información adicional a la dada mediante la densidad *a priori*, a pesar de que, como generamos datos artificiales, pudimos utilizar una serie larga. En cambio, para α y el error estándar de e el modo de la densidad posterior está alejado del modo de la densidad *a priori* y la varianza es menor (es más alta y estrecha la densidad). En estos casos, los “datos” han hecho su aporte, corrigiendo a la densidad *a priori*. Otra consideración es que es deseable que la densidad posterior se parezca a una normal. Pues lo que hace MH es construir una aproximación Gaussiana en torno al modo del posterior. Densidades posteriores bimodales señalan problemas.

4. Un diagnóstico multivariado de convergencia de las cadenas paralelas



El eje horizontal representa las diferentes iteraciones de MH solicitadas. Las líneas oscuras (claras) representan medidas de los vectores de parámetros dentro de (entre) las cadenas solicitadas. Hay tres medidas: “interval” representa un intervalo de confianza del 80% en torno a la media, “m2” mide la varianza y “m3” el tercer momento. Además del diagnóstico multivariado que mostramos, Dynare produce un gráfico de este tipo para cada parámetro (diagnósticos univariados) que omitimos para no ocupar demasiado espacio. Las líneas clara y oscura convergen, como es ideal. Sin embargo, también sería deseable que estuvieran más planas, al menos en la parte final, para estar seguros de que hay convergencia en el tiempo. Cabe observar que típicamente se pide un número mucho mayor de replicaciones, lo que si bien demanda mucho más tiempo de cómputo hace más probable que se llegue a la convergencia deseada.

5. Pronósticos de las variables



Se observan dos bandas de confianza. La primera describe la incertidumbre debida a los parámetros y la segunda incluye, además, la incertidumbre relacionada con los *shocks* futuros. Se observa que el pronóstico para *y* parte desde el fin de la muestra. Para las variables no observables, Dynare muestrea a partir de la distribución posterior de los parámetros.

Cuadros

Dynare produce también cuadros que resumen los principales resultados numéricos. El primero contiene los resultados de la optimización numérica:

RESULTS FROM POSTERIOR MAXIMIZATION

parameters	prior mean	mode	s.d	t-stat	prior	pstdev
alpha	0.35	0.3333	0.0093	35.8586	beta	0.02
beta	0.99	0.9899	0.0027	370.2191	beta	0.002
delta	0.025	0.0251	0.0031	8.2057	beta	0.003
psi	1.75	1.7509	0.02	87.5862	gamm	0.02
rho	0.95	0.8861	0.035	25.297	beta	0.05
epsilon	10	10	0.0016	6395.2438	gamm	0.003

standard deviation of shocks

	prior mean	mode	s.d.	t-stat	prior	pstdev
e	0.01	0.0093	0.0006	16.2292	invg	Inf

Log data density [Laplace approximation] is 653.728950.

La primera y última columnas muestran la media y el desvío estándar de las densidades *a priori*. La segunda y tercera columnas dan el modo y el desvío estándar calculadas por medio de métodos de optimización numérica. El estadístico t del modo se basa en el supuesto (probablemente erróneo en el caso de estimación Bayesiana) de que la distribución es normal. Se observa abajo la aproximación de Laplace del logaritmo de la densidad predictiva (o marginal) de muestreo.

El segundo cuadro incluye los resultados de la simulación MCMC:

ESTIMATION RESULTS

Log data density is 654.324042.

parameters	prior mean	post. mean	conf.	interval	prior	pstdev
alpha	0.35	0.3355	0.3206	0.3493	beta	0.02
beta	0.99	0.9896	0.9866	0.9927	beta	0.002
delta	0.025	0.0256	0.021	0.0302	beta	0.003
psi	1.75	1.7481	1.7167	1.777	gamm	0.02
rho	0.95	0.8991	0.8399	0.9628	beta	0.05
epsilon	10	10	9.9957	10.005	gamm	0.003
standard deviation of shocks						
	prior mean	post.	mean conf.	interval	prior	pstdev
e	0.01	0.0097	0.0085	0.0108	invg	Inf

En este cuadro se muestra los resultados de la simulación MH (así como la repetición de información sobre las densidades *a priori*). En la segunda columna se ve la media de la densidad posterior y en las siguientes dos columnas un intervalo de confianza. Se observa arriba de todo la estimación de promedio armónico del logaritmo de la densidad predictiva (o marginal) de muestreo.

Además de lo visto hay muchas opciones adicionales. Dynare produce en forma automática una gran cantidad de archivos con los resultados de las corridas, incluyendo los gráficos en formato pdf.

VIII. Conclusión

Los modelos EGDE se han convertido en una forma cada vez más utilizada de estudiar complejos fenómenos dinámicos y estocásticos en diversos campos de la economía. Son utilizados cada vez más por tomadores de decisiones que quieren analizar los efectos de diferentes decisiones de política, o que quieren

contar con proyecciones hechas con métodos rigurosos. Con este trabajo hemos querido brindar una primera aproximación para quienes quieran acercarse a este campo fascinante de la modelación matemática del quehacer humano, dando no solo una síntesis de cómo se construyen los modelos EGDE sino también mostrando cómo se pueden resolver y calibrar o estimar sus parámetros utilizando *software* construido con tal propósito.

Referencias

An, Sungbae, y Frank Schorfheide (2007), “Bayesian analysis of DGE models”, *Econometric Review*, 26 (2-4), pp. 113-172.

Bauwens, Luc, Michel Lubrano, y Jean-Francois Richard (1999), *Bayesian inference in dynamic econometric models*, Advanced Texts in Econometrics, Oxford University Press.

Begg, David (1982), *The Rational Expectations Revolution in Macro-Economics: Theories and Evidence*, Johns Hopkins Univ Press, septiembre.

Beltran, Daniel O., y David Draper (2008), “Estimating the parameters of a Small Open Economy DSGE Model: Identifiability and Inferential Validity”, Board of Governors of the Federal Reserve System, International Finance Discussion Papers, N° 955, noviembre.

Bénassy, Jean-Pascal (2002), *The Macroeconomics of Imperfect Competition and Nonclearing Markets: A Dynamic General Equilibrium Approach*, MIT Press.

Binder, Michael, y M. Hashem Pesaran (1999), *Multivariate rational expectations models and macroeconomic modeling: A review and some new results*, Handbook of Applied Econometrics. Volume I: Macroeconomics.

Blanchard, Oliver Jean y Stanley Fisher (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

Blanchard, Oliver Jean y Charles M. Kahn (1980), “The solution of linear difference models under rational expectations”, *Econometrica*, Vol. 48, N° 5, julio.

Blanchard, Olivier Jean y Kiyotaki, Nobuhiro (1987), “Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand”. *American Economic Review*, septiembre, 77(4), pp. 647-66.

Calvo, Guillermo (1983), “Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework”, *Journal of Monetary Economics*, 12, N° 3 (septiembre), pp. 983-998.

Campbell, John Y. (1992), "Inspecting the mechanism: an analytical approach to the stochastic growth model", NBER, Working Paper N° 4188, octubre.

Del Negro, Marco, y Frank Schorfheide (2006), "How good is what you've got? DSGE-VAR as a toolkit for evaluating DSGE models", *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Atlanta, segundo trimestre.

Dixit, Avinash K. y Stiglitz, Joseph E. (1977), "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *American Economic Review*, junio, 67(3), pp. 297-308.

Evans, George W. y Seppo Honkapohja (2001), *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton University Press.

Galí, Jordi (2008), *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton University Press.

Griffoli, Tommaso Manzini (2007), "Dynare v4 - User Guide", marzo (puede bajarse del sitio de internet de Dynare).

Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

Juillard, M. (1996), "Dynare: a program for the resolution and simulation of dynamic models with forward variables through the use of a relaxation algorithm", CEPRE-MAP working papers 9602, CEPREMAP.

Juselius, Katarina, y Massimo Franchi (2007), "Taking a DSGE model to the data meaningfully", The Open Access, *Open Assessment E-Journal*, N° 2007-4, junio.

Kim, K. y A. R. Pagan (1999), *The econometric analysis of calibrated macroeconomic models*, Handbook of Applied Econometrics. Volume I: Macroeconomics.

King, Robert G. y Mark W. Watson (1998), "The solution of singular linear difference systems under rational expectations", *International Economic Review*, Vol. 39, N° 4, noviembre.

Klein, Paul (2000), "Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model", *Journal of Economic Dynamics & Control*, 24, pp. 1405-1423.

McCallum, B. T. (1983), “On non-uniqueness in rational expectations models: An attempt at perspective”, *Journal of Monetary Economics*, 11, pp. 139-168.

McCallum, B. T. (1998), “Solutions to linear rational expectations models: A compact exposition”, NBER, abril.

Ruge-Murcia, Francisco J. (2007), “Methods to Estimate Dynamic Stochastic General Equilibrium Models”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(8), agosto, pp. 2599-2636. Una versión preliminar puede encontrarse en el sitio: <http://www.cireq.umontreal.ca/publications/17-2003-cah.pdf>.

Sims, Christopher (2000), “Solving linear rational expectations models”, enero, sitio de internet de Chris Sims.

Soderling, Paul (2003), “Lecture Notes for Monetary Policy”, PhD course at UNISG, octubre, sitio de internet de Paul Soderling.

Uhlig, Harald (1995), “A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily”, Tilburg University, Center for Economic Research, Discussion Paper 97, sitio de internet de Harald Uhlig.

Walsh, Carl (2003), *Monetary Theory and Policy*, segunda edición, The MIT Press.

Woodford, Michael (2003), *Interest and Prices*, Princeton University Press.

Yun, Tack (2005), “Optimal Monetary Policy with Relative Price Distortions”, *American Economic Review*, marzo.