

# Ensayos Económicos

---

## **Metas de inflación: un enfoque crítico**

Philip Arestis

## **El euro: ¿por qué falló y cómo seguir adelante?**

Jesper Jespersen

## **Sobre sinergias y controversias en la génesis y evolución de los enfoques de cartera**

Eduardo Ariel Corso

## **Análisis de la integración de la regulación y supervisión financiera al banco central**

Edgardo Demaestri, Gustavo Ferro

# 68

Junio de 2013



*ie* | BCRA  
INVESTIGACIONES ECONÓMICAS

# Sobre sinergias y controversias en la génesis y evolución de los enfoques de cartera

**Eduardo Ariel Corso\***

BCRA – UBA

## Resumen

El presente trabajo describe las principales interrelaciones entre la teoría monetaria y la teoría de cartera que caracterizaron el surgimiento y las primeras décadas de evolución de ésta última. Adicionalmente, se exploran las críticas y controversias surgidas a partir de los trabajos originales de Markowitz y Tobin, como así también los enfoques de cartera resultantes de estos debates.

*Clasificación JEL:* E41, G11.

*Palabras clave:* demanda de dinero, enfoque de media-varianza, Harry Markowitz, James Tobin, modelos de portafolio con momentos de orden superior, preferencia por liquidez, teoría de cartera, teoría monetaria.

---

\* El autor agradece muy especialmente los valiosos comentarios de Sebastian Katz como así también las sugerencias recibidas por dos referís anónimos. Las opiniones vertidas en el presente trabajo son del autor y no se corresponden necesariamente con las del BCRA o sus autoridades. Email: eduardo.corso@bcra.gov.ar.

# Cross Fertilizations and Controversies in the Origins and Evolution of Portfolio Selection Models

**Eduardo Ariel Corso**

BCRA – UBA

## **Summary**

This paper describes the main cross fertilizations between monetary theory and portfolio theory, which characterized the origins and evolution of the latter. In addition, we explore the critics and controversies arising from the seminal works of Markowitz and Tobin, as well as the new generation of optimal portfolio models that emerged from these discussions.

*JEL:* E41, G11.

**Keywords:** Harry Markowitz, higher-order moments approach to portfolio selection, James Tobin, liquidity preference, mean-variance approach, money demand, monetary theory, portfolio theory.

*“...when I defended my dissertation as a student in the Economics Department of the University of Chicago, Professor Milton Friedman argued that portfolio theory was not Economics, and that they could not award me a Ph.D. degree in Economics for a dissertation which was not in Economics. I assume that he was only half serious, since they did award me the degree without long debate. As to the merits of his arguments, at this point I am quiet willing to concede: at the time I defended my dissertation, portfolio theory was not part of Economics. But now it is”.*

*Harry Markowitz, junio de 1991*

## **I. Introducción**

En toda rama del conocimiento, el estudio de una literatura específica puede ser abordado desde diversas perspectivas dependiendo del criterio analítico que se utilice.

Un criterio interesante para tamizar la literatura de selección óptima de cartera consiste en identificar aquellos elementos cuyos desarrollos hayan sido motivados desde la teoría monetaria, o por el contrario, sean ellos los que actuaron como disparadores de avances en el campo monetario. La presente nota persigue dos objetivos dentro de esta línea exploratoria. En primer lugar, argumentar que el nacimiento de los enfoques modernos de selección óptima de cartera (ESOC) se encuentra profundamente relacionado con avances específicos en teoría monetaria, motivados por la revolución marginalista. En segundo lugar, describir una controversia específica en el seno del enfoque de media-varianza (MV), cuya solución implicó el surgimiento de una nueva generación de modelos de selección óptima de cartera.

Con este fin, comenzaré describiendo las sinergias entre la teoría monetaria y los criterios de selección de cartera que dieron origen al enfoque MV para la elección de las tenencias óptimas de activos financieros. Posteriormente, describiré las diversas críticas y debates a los que fueron expuestas las primeras versiones de este criterio de selección, y que derivaron en el desarrollo de una nueva generación de modelos.

## II. De la revolución marginalista a los enfoques de media-varianza

Como fuera mencionado en la introducción, una línea exploratoria para abordar el estudio de los enfoques de selección óptima de cartera consiste en identificar aquellos elementos cuyos desarrollos hayan sido motivados desde la teoría monetaria, o por el contrario, sean ellos los que actuaron como disparadores de avances en el campo monetario. Este criterio no es infundado, y descansa en el hecho de que ambos programas de investigación han sido canales a través de los cuales el herramental marginalista permeó en el pensamiento económico. La génesis del ESOC se encuentra enraizada en la teoría económica neoclásica de la década de 1950, y sus representantes pioneros han sido Harry Markowitz (1952, 1956 y 1959), Andrew D. Roy (1952) y James Tobin (1958), a partir del desarrollo de los enfoques de media-varianza como criterios de selección óptima de cartera. La revolución marginalista constituyó una condición *sine qua non* para el surgimiento del ESOC, dado que el mismo es intensivo en la aplicación de técnicas de optimización en el margen. Como se evidencia a lo largo de este trabajo, la teoría monetaria y la teoría moderna de cartera han tenido una profusa interacción durante los primeros treinta años de existencia de esta última, de manera que muchos de los avances observados en ambas corrientes son el resultado de fertilización cruzada.

En los tiempos de la revolución marginalista en economía, y durante las primeras tres décadas del siglo XX, el estudio de los fenómenos monetarios se vio fuertemente impulsado por los avances acontecidos en el campo de la teoría del valor, cuyo principal objeto de estudio es la determinación de los precios relativos. Un autor sobresaliente en este campo que posteriormente devendría en uno de los principales teóricos monetarios del siglo XX, ha sido Sir John Hicks. Armado del herramental marginalista, en su “*Suggestion for Simplifying the Theory of Money*” de 1935, Hicks sostuvo que la teoría monetaria debía ser integrada a la teoría del valor. Esta idea, que se encuentra enraizada en el trabajo de León Walras, implicó conceptualmente una diferencia sustancial respecto al pensamiento cuantitativista, en el que las cuestiones monetarias se incorporaban a una estructura de precios relativos dada. En el pensamiento de Hicks, el dinero forma parte del proceso de determinación de precios relativos.<sup>1</sup> En ese mismo trabajo, sugirió que la teoría monetaria no debía basarse en un análisis de las cuentas de ingreso, sino de las cuentas de capital. Es decir, en un enfoque de

---

<sup>1</sup> Una sugerencia en el mismo sentido puede encontrarse en Marschak (1938).

hojas de balance, en clara alusión a la teoría del capital.<sup>2</sup> Adicionalmente, en la Sección IV introdujo en el análisis de la demanda de dinero la noción de riesgo.<sup>3</sup> James Tobin y Don Patinkin recogerían el guante arrojado por Hicks abogando por una revolución marginalista para la teoría monetaria, integrando el dinero en la teoría del valor, en lo que se conoce como la tradición Walras-Hicks-Patinkin.

Durante los años en que John Hicks incursionaba en la teoría monetaria, la teoría de la demanda de dinero de Keynes se transformaba, partiendo de una visión *Marshalliana* de la teoría cuantitativa,<sup>4</sup> en su “*A Tract on Monetary Reform*” de 1924, y evidenciando una evolución en su “*A Treatise on Money*” de 1930 que resultaría en su enfoque de “demanda especulativa” del dinero, noción que salió a la luz en 1936, en el capítulo XV de “*The General Theory of Employment, Interest and Money*”. De acuerdo con Keynes, si un individuo percibía que el precio de un determinado activo se encontraba en un nivel bajo respecto al precio que esperaba tendría transcurrido un período determinado (que constituía su horizonte de inversión), compraría el activo (deshaciéndose de dinero) con el objeto de obtener ganancias de capital una vez que el precio se incrementara. Esta teoría era capaz de explicar la existencia de una relación negativa entre la tasa de interés y la demanda de saldos monetarios, tal como la evidencia sugería a nivel agregado, pero a nivel individual la demanda resultaba dicotómica.<sup>5</sup> Sin embargo, ¿cómo congeniaba Keynes su interpretación de la demanda especulativa dicotómica a nivel individual con el hecho de que a nivel agregado los agentes mantenían en su poder tanto dinero como otros instrumentos financieros? La respuesta keynesiana a este interrogante fue la heterogeneidad en las expectativas.

Formado en la tradición Keynesiana, James Tobin no se conformó con la interpretación dada por Keynes al hecho de que bajo ciertas condiciones los individuos sustituyeran dinero por otros instrumentos financieros con rol de reserva

---

<sup>2</sup> “*My suggestion is that monetary theory needs to be based again upon a similar analysis, but this time, not of an income account, but of a capital account, a balance sheet.*” John Hicks (1935), p. 12.

<sup>3</sup> Específicamente, hizo referencia al rol del riesgo como condicionante de la demanda de activos financieros: “*The risk-factor comes into our problem in two ways: first, as affecting the expected period of investment; and second, as affecting the expected net yield of investment*” (p.7). En referencia a las fuentes de riesgo, Hicks sostuvo: “*Where risk is present, the particular expectation of a riskless situation is replaced by a band of possibilities, each of which is considered more or less probable. It is convenient to represent these probabilities to oneself, in statistical fashion, by a mean value, and some appropriate measure of dispersion. (No single measure will be wholly satisfactory, but here this difficulty may be overlooked).*” (p.8). Sin embargo, en su trabajo de 1935 nunca hizo referencia al concepto de desvío estándar o alguna otra medida específica para referirse al riesgo. De todos modos, constituyó un antecedente directo de los enfoques de cartera en teoría monetaria.

<sup>4</sup> También denominada versión de Cambridge de la teoría cuantitativa.

<sup>5</sup> El agente destinará la totalidad de sus saldos especulativos o bien a demandar dinero, o bien a la tenencia de instrumentos que brinden un retorno.

de valor. El descontento de Tobin respecto de la demanda especulativa keynesiana descansaba sobre dos elementos (ver Tobin, 1983): la dicotomía a nivel individual, y la infundada inelasticidad del precio futuro de los instrumentos que brindaban retorno, respecto a cambios en el precio actual del activo. Si bien era cierto que a nivel agregado los agentes mantenían diversos instrumentos financieros además del dinero, eso mismo se verificaba empíricamente a nivel individual. Con el objeto de llevar la interpretación de la demanda especulativa de dinero a un nivel superador del alcanzado por Keynes, Tobin aceptó la sugerencia de Hicks, y recurrió a los avances que paralelamente se estaban dando en el campo de las finanzas. El nexo fue la tesis doctoral de Harry Markowitz.<sup>6</sup> Con el objeto de explorar este vínculo, es necesario retornar al campo de las finanzas.

Hacia el año 1950, Harry Markowitz era un estudiante de doctorado de la Universidad de Chicago, que había sido invitado como miembro estudiante a la *Cowles Commission for Research in Economics*,<sup>7</sup> bajo el liderazgo de Tjalling Koopmans y Jacob Marschak.<sup>8</sup> Por aquel entonces, el ámbito académico relativo a la teoría de las decisiones económicas en contextos de incertidumbre —principal campo de interés de Markowitz— se encontraba conmovido por la representación de la teoría de la utilidad esperada realizada por John von Neuman y Oskar Morgenstern.<sup>9</sup> Aquel contexto resultaba particularmente estimulante para Markowitz.<sup>10</sup> Al momento de elegir un tema para su disertación, Markowitz consideró aplicar técnicas estadísticas y matemáticas para el estudio del mercado de valores. Cuando Markowitz comentó a Marschak (tutor de su tesis doctoral) la idea, a éste le pareció razonable (ver Markowitz, 1999), y le explicó que Alfred Cowles estaba interesado en ese tipo de aplicaciones, remitiéndolo al Profesor Marshall Ketchum, quien le proporcionó una lista de bibliografía especializada entre la que se encontraban los trabajos de Graham y Dodd, Wiesenberger y John Burr Williams.<sup>11</sup> El trabajo de Williams resultó una pieza fundamental, gatillando en Markowitz un proceso creativo que devendría en el enfoque de media-varianza.

---

<sup>6</sup> Harry Markowitz (1952).

<sup>7</sup> Fundada por Alfred Cowles en 1932 con el objeto de financiar programas de investigación en economía.

<sup>8</sup> Ambos profesores de Markowitz en Chicago. Unos años antes, Jacob Marschak se había tornado popular en el ámbito de las finanzas tras resumir la representación de la teoría de la utilidad esperada propuesto por von Neuman y Morgenstern de forma interpretable para economistas (Marschak, 1946).

<sup>9</sup> Von Neumann y Morgenstern (1944).

<sup>10</sup> Para una descripción detallada del contexto en el que Markowitz desarrolló su tesis doctoral, ver Fox (2010).

<sup>11</sup> John Burr Williams (1938).

Williams afirmaba que el precio de una acción equivalía al valor presente esperado de sus dividendos. El pensamiento de Markowitz fue el siguiente:<sup>12</sup> si un inversor sólo toma en cuenta el valor esperado de las acciones, debería entonces estar interesado en maximizar el valor esperado de su portafolio, pero la maximización del valor esperado de un portafolio (sujeto a la restricción de presupuesto con inversiones no negativas) no implicaba que la diversificación fuera deseable. Sin embargo, la diversificación era una práctica común. En otras palabras, la elección tenía implícita una solución de esquina —vgr. el inversor opta por el activo que posee un retorno esperado máximo—. <sup>13</sup> De acuerdo con Markowitz, lo que faltaba en el criterio de Williams era una medida de riesgo.<sup>14</sup> Sin embargo, aquella intuición que experimentó Markowitz durante la lectura del trabajo de Williams, no hubiera sido posible sin un adecuado bagaje teórico. Por un lado, su profesor de microeconomía en Chicago había sido Leonard Savage, de quien había incorporado la noción de que un agente racional que toma decisiones en contextos de incertidumbre actúa en función de “creencias de probabilidad” cuando desconocía las probabilidades objetivas. Es decir, para el planteo del problema de decisión en contextos de incertidumbre era irrelevante si las probabilidades provenían de distribuciones objetivas o subjetivas.<sup>15</sup> Adicionalmente, se había formado con Tjalling Koopmans en análisis de conjuntos eficientes. De esta manera, Markowitz encontró natural plantear el problema que enfrentaba el inversor de Williams en términos de un *trade-off* entre el retorno esperado y la varianza de su portafolio. El enfoque fue plasmado en su trabajo “*Portfolio Selection*”, de 1952. Ese mismo año, Markowitz se incorporó en la corporación RAND (Research and Development), donde interactuó asiduamente con George Dantzig, de quien aprendió las técnicas de optimización que utilizaría para computar las fronteras de media-varianza en su trabajo de 1956 y en el apéndice A de su trabajo “*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*” de 1959. Sin embargo, como afirmara el propio Markowitz, no es claro que ese libro hubiera sido escrito si no fuera por la invitación de James Tobin a participar en

---

<sup>12</sup> Ver Markowitz (1999).

<sup>13</sup> En este punto resulta interesante marcar un paralelismo entre el descontento de James Tobin por la solución dicotómica de la demanda especulativa a nivel individual propuesta por Keynes, y el descontento de Markowitz por la solución de esquina implícita en el criterio de selección de cartera de Williams.

<sup>14</sup> “*What was missing from the analysis, I thought, was a measure of risk. Standard deviation or variance came to mind. On examining the formula for the variance of a weighted sum of random variables [...], I was elated to see the way covariance entered. Clearly, effective diversification required avoiding securities with high covariance*” Markowitz (1999).

<sup>15</sup> La teoría de la probabilidad subjetiva de Savage, desarrollada en su *The Foundations of Statistics*, de 1954, se contrapone a la probabilidad objetiva considerada en la teoría de la utilidad esperada como fuera formulada por Von Neumann y Morgenstern. Adicionalmente, es una crítica a la distinción entre riesgo e incertidumbre propuesta por Knight en 1921, en su *Risk, Uncertainty and Profit*. Esta distinción sería retomada por Ellsberg, con el planteo de su paradoja de 1961.

la *Cowles Foundation* en la Universidad de Yale.<sup>16</sup> La enriquecedora interacción entre Markowitz y Tobin resultaría en mutuos avances, tanto para la teoría monetaria como para el campo de las finanzas. Para comprender los alcances de esta interacción, es necesario retornar al campo de la teoría monetaria.

Como fuera mencionado previamente, la explicación dada por Keynes a la sustitución entre dinero y bonos a través de su demanda especulativa de dinero no satisfacía a James Tobin. En el enfoque de media-varianza de Markowitz, Tobin encontró la clave para superar el enfoque de Keynes. En la primera parte de su trabajo "*Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*" de 1958, Tobin presentó una de las argumentaciones más elegantes que ha producido la teoría monetaria para explicar la demanda de dinero, desarrollando la decisión óptima de un agente que debe elegir entre dinero y bonos a perpetuidad. Específicamente, la pregunta que buscó responder en dicha sección fue la siguiente: ¿por qué un agente decidiría mantener en su cartera una determinada proporción de dinero, cuyo retorno nominal es cero, en lugar de asignarlo a bonos que brindan un retorno? La respuesta de Tobin fue que, en términos nominales, si bien los bonos poseen un retorno positivo, los mismos están sujetos a riesgo (varianza), mientras que si bien es cierto que el dinero no rinde ningún retorno nominal, el riesgo asociado por poseerlo es cero, lo cual en un ejercicio de optimización en el entorno de media-varianza justificaría tenencias positivas óptimas de dinero y bonos. De esta manera, Tobin logró racionalizar una demanda óptima de dinero que no tenía una solución dicotómica a nivel individual. La participación relativa del dinero y los activos riesgosos en el portafolio del agente dependería de sus preferencias, y de la estructura estocástica de los retornos. *La preferencia por liquidez* devino en una versión de demanda de dinero superadora de la demanda especulativa de Keynes.<sup>17</sup>

En el resto del trabajo, Tobin se concentró en analizar el caso en el que el agente tiene múltiples alternativas al dinero (múltiples activos riesgosos), obteniendo un resultado que se conoce en la literatura como *teorema de separación de Tobin*.

---

<sup>16</sup> En su carácter de director.

<sup>17</sup> Mantener activos monetarios provee a los agentes de mayor flexibilidad, dado que pueden convertirlo en bienes de consumo de cualquier tipo, en cualquier momento, en cualquier estado de la naturaleza, pero a precios inciertos. En efecto, si bien el argumento de Tobin es también válido en el caso en que los agentes consideren los retornos reales, contextos de tasas de inflación altas y variables pueden implicar que los agentes óptimamente decidan mantener tenencias mínimas de activos monetarios. La incertidumbre en el precio al que el dinero es intercambiado por bienes es la contracara de su ineficiente rol como reserva de valor —para un análisis pormenorizado de la relación entre el rol de reserva de valor de un activo y su liquidez, ver Olivera (1980)—, bajo condiciones de elevada volatilidad nominal.

Asumiendo un ejercicio de selección de cartera para  $n$  activos riesgosos y un activo libre de riesgo (dinero), y sin considerar la posibilidad de endeudamiento, Tobin demostró que para un conjunto dado de medias, varianzas y covarianzas, entre todos los portafolios eficientes que contenían dinero, la composición de la cartera que constituye el activo riesgoso es la misma.<sup>18, 19</sup>

Si bien de lo hasta aquí expuesto queda claro que los avances de Markowitz influyeron significativamente en la evolución de la teoría monetaria, ¿en qué sentido los avances de James Tobin coadyuvaron en el progreso de la teoría de cartera? La respuesta a esta pregunta se compone de dos elementos. El primero de ellos es el *teorema de separación de Tobin*, descrito anteriormente, que constituyó el primer antecedente del *capital asset pricing model* (CAPM) desarrollado posteriormente por William Sharpe (1964), John Lintner (1965) y Jan Mossin (1966).<sup>20</sup> El segundo elemento lo constituye las críticas recibidas por el enfoque de media-varianza en su versión Tobiniana, motivando profundos debates de los que resultarían significativos avances.

### III. Las críticas a la forma funcional de las demandas tobinianas de activos

Una característica distintiva de la formalización de las demandas de activos tobinianas es su linealidad respecto a los retornos relativos, y su homogeneidad de grado uno respecto al nivel del portafolio (Tobin 1969). En consecuencia, una pregunta que naturalmente surgió a partir de su enfoque fue ¿bajo que condiciones las demandas de activos financieros cumplen con estas propiedades? Dos trabajos representativos de aquel debate fueron B. Friedman y V. Vance Roley (1972) y Courakis (1989). Friedman y Vance Roley argumentaron que bastaba con que la función de utilidad supuesta tuviera un coeficiente de aversión al riesgo relativo constante y que los retornos siguieran una distribución de probabilidad conjunta normal, para que las demandas de activos fueran del tipo propuesto por Tobin. Sin embargo, posteriormente Courakis desestimó las conclusiones de ambos autores, argumentando que las condiciones por ellos propuestas no eran suficientes. Si bien era cierto que los retornos debían seguir una

---

<sup>18</sup> Tobin consideró sólo el riesgo de mercado.

<sup>19</sup> En palabras de Tobin: "...the proportionate composition of the non-cash assets is independent of their aggregate share of the investment balance. This fact makes it possible to describe the investor's decisions as if there were a single non-cash asset, a composite formed by combining the multitude of actual non-cash assets in fixed proportions." (p. 84).

<sup>20</sup> Ver Markowitz, 1999.

distribución normal conjunta, la presencia de coeficientes de aversión al riesgo relativo constantes no alcanzaba. Las demandas tendrían la forma propuesta por Tobin sólo cuando la función de utilidad implícita fuera del tipo exponencial negativa, expresada sobre los retornos y no sobre el nivel del portafolio (ver Courakis, 1989).

Es interesante destacar que, si bien las críticas a las formas funcionales de las demandas de activos tobinianas han sido valiosos disparadores para profundizar el análisis de las propiedades transferidas por diversas funciones de utilidad a las demandas de instrumentos financieros, no tuvieron impacto sobre la relevancia de los enfoques tobinianos de equilibrio general como marco de referencia para pensar problemas de índole macroeconómico. Para comprender el por qué de esta inmunidad, es necesario considerar el rol de los microfundamentos en el método de este autor. Tobin restringía el uso de la microeconomía en los enfoques macroeconómicos a *iluminar* los argumentos referentes al funcionamiento de diversos mercados. Es decir, partía de la premisa de que el comportamiento macroeconómico era el resultado de la interacción de comportamientos individuales, pero también comprendía que, dada la multiplicidad y heterogeneidad de estos comportamientos, era imposible establecer un fundamento completo del comportamiento macroeconómico en los comportamientos individuales. De esta manera, utilizaba a la microeconomía como una herramienta argumentativa que buscaba aclarar la exposición de razonamientos. Una interesante reflexión respecto al uso realizado por Tobin de los microfundamentos en la teoría monetaria se encuentra en Solow (2004).

Operativamente, al aplicar estas demandas al análisis de la estructura financiera de la economía, los enfoques de raíz tobiniana planteaban una condición de equilibrio para cada mercado. En función de las ofertas relativas de activos, de la estructura de riesgos percibidos de los retornos y del coeficiente de aversión al riesgo supuesto —que afectaban los valores paramétricos de las demandas de activos— y de los retornos percibidos (argumentos de las demandas), el modelo determina una estructura de retornos relativos. Estos enfoques dieron origen a cuatro líneas principales de literatura.

La primera tiene su origen en el trabajo de Tobin (1965), en el que aplica su enfoque al modelo de crecimiento de Solow (1956). De acuerdo con Tobin, si el retorno del capital aumenta respecto al de otros activos financieros, las familias incrementarán la participación del capital en su portafolio respecto a los

restantes instrumentos de ahorro. Este cambio en la composición del portafolio producirá un mayor ratio capital/trabajo, mayor productividad del trabajo, y en consecuencia, un mayor ingreso per cápita. La tasa de crecimiento económico se acelera durante la transición desde los niveles bajos del ratio capital/trabajo a los niveles altos que ocurre luego de una caída de los retornos de los instrumentos financieros —ver Fry (1988)—. Este resultado se conoce en la literatura con el nombre de efecto Tobin.<sup>21</sup> Posteriormente, Miguel Sidrauski (1967a, 1967b) mostró que, suponiendo que los individuos optimizaban con un horizonte infinito, el ratio capital/trabajo de estado estacionario del modelo de Tobin permanecería inalterado ante cambios en la estructura de retornos relativos. Sin embargo, Allan Drazen (1981a) replicó los resultados obtenidos por Tobin, en un marco de optimización con horizonte finito. Otros trabajos representativos de esta línea de investigación son Fischer (1979a, 1979b), y Drazen (1981b). El modelo de Sidrauski devendría en el punto de partida de los enfoques de dinero en la función de utilidad (MIU, por su nombre en inglés).

La segunda línea está constituida por la adaptación de los enfoques tobinianos de equilibrio general a la especificidades del sistema financiero norteamericano. Gurley y Shaw (1960) resultó un trabajo pionero, tendiendo un puente entre la teoría monetaria y la práctica de la política monetaria.<sup>22</sup> La FED adoptaría posteriormente estos enfoques como marcos de análisis de impacto macro-financiero de diversas medidas de política monetaria —como ejemplo de estos enfoques prácticos ver Ando y Modigliani (1969), Backus, Brainard, Smith y Tobin (1980)—.

Una tercera línea, también influida por el trabajo de Gurley y Shaw, refiere al uso de estos enfoques para el estudio de los efectos de diversas medidas de política sobre las características del proceso de intermediación financiera.<sup>23</sup> Estos efectos se ven condicionados por las características de los intermediarios y de los instrumentos financieros considerados. Trabajos representativos de esta línea son Tobin (1963, 1970), Brainard y Tobin (1963), Brainard (1964), Tobin (1982).

Por último, una cuarta línea surge de la aplicación de los enfoques tobinianos al estudio de los movimientos de capitales en economías abiertas, en respuesta a los enfoques que sólo consideraban ajustes flujo. Representantes de esta línea son los trabajos de McKinnon y Oates (1966), McKinnon (1969) y Branson (1974).

---

<sup>21</sup> Tobin (1969, 1981).

<sup>22</sup> Algunos autores denominan a esta tradición Marschak-Tobin-Gurley y Shaw como monetarismo walrasiano —ver Perry Mehrling (1997, 2011)—.

<sup>23</sup> Estos autores acuñan el término *inside-outside money*.

En el ámbito local, durante la segunda mitad de la década del ochenta y principios de los años noventa, la literatura concerniente a la aplicación de enfoques de raíz tobiniana fue prolífica. Los estudios del CEDES (Centro de Estudios de Estado y Sociedad) se constituyeron en referentes de su aplicación a economías pequeñas y abiertas a los flujos de capitales —ver por ejemplo Damill y Fanelli (1988), Fanelli (1988), Damill, Fanelli, Frenkel y Rozenwurcel (1989) y Fanelli y Frenkel (1990)—. El trabajo de Frenkel (1982) estuvo entre los precursores en vincular formalmente la sensibilidad de la prima por riesgo al estado de otro conjunto de variables de la economía más allá de las consideradas por el enfoque de cartera —para una interesante reflexión sobre este aporte específico de Frenkel ver Finkman y Katz (2012)—. En el enfoque tobiniano las primas por riesgo ya eran endógenas, dependientes de la estructura de riesgo relativo percibido por el agente, de su grado de aversión al riesgo, y de la oferta relativa de activos. Esto surge claramente de observar la especificación de las demandas tobinianas —ver Burdisso y Corso (2011) para una derivación formal de las mismas—. El aporte de Frenkel consiste en incorporar otras variables como determinantes, que aporten información al agente respecto a los posibles cambios en la estructura de riesgo percibida.

#### **IV. De las críticas al modelo MV a los enfoques contemporáneos de selección de cartera**

Más de una década después de la publicación de sus trabajos fundacionales, el enfoque de Tobin-Markowitz fue sujeto de una serie de críticas que podría encuadrarse bajo el título de *la controversia del enfoque de media-varianza*. El disparador de la misma fue la supuesta generalidad de su aplicación propuesta por Tobin en su trabajo de 1958. Si bien Tobin reconocía que bajo el supuesto de una función de utilidad cuadrática su enfoque era indiscutiblemente aplicable independientemente de las distribuciones consideradas, trató de obtener un resultado general para cualquier distribución de probabilidad subjetiva de los retornos representable por sus dos primeros momentos, en los casos en que no se asumiera una función de utilidad cuadrática.

Las críticas más sólidas recibidas por Tobin correspondieron a los trabajos de Martin Feldstein (1969) y Karl Borch (1969). Feldstein atacó directamente la demostración de Tobin que sustentaba la generalización de la aplicación del enfoque para cualquier distribución de probabilidad de los retornos de los activos caracterizadas

por sus dos primeros momentos. De acuerdo con Feldstein la demostración de Tobin descansaba sobre un supuesto fundamental, que consistía en asumir que una distribución caracterizada por sus dos primeros momentos  $f(x, \mu, \sigma)$  podía estandarizarse como  $f(z; 0, 1)$ , con  $z = (x - \mu)/\sigma$  (ver punto A.1 del apéndice). Sin embargo, tal como fuera argumentado por Feldstein, esta no es una propiedad válida para todas las distribuciones de probabilidad definidas por dos parámetros, sino sólo para la distribución normal.<sup>24</sup> La crítica daba por tierra con la generalización propuesta por Tobin.

Karl Borch, por su parte, argumentó que la representación de las preferencias en términos de la media y la varianza era inconsistente con los axiomas básicos de la utilidad esperada subjetiva. Para una función de utilidad no especificada, Borch propuso el caso de tres loterías definidas por una distribución del tipo Bernoulli. Para los valores paramétricos supuestos (ver punto A.4 del apéndice), la elección en términos de media y varianza resulta en curvas de indiferencia que indefectiblemente se cortan, lo cual implica una inconsistencia con la teoría axiomática de la utilidad esperada.

La respuesta de Tobin salió a la luz en el mismo número del *Review of Economic Studies* en el que fueron publicados los dos trabajos críticos mencionados.<sup>25</sup> En su respuesta, Tobin reconoció la potencia del argumento de Feldstein, pero desestimó la crítica de Borch. De acuerdo con Tobin, el hecho que Borch encontrara una distribución de probabilidad particular (Bernoulli) que implique un ordenamiento incorrecto de las preferencias en términos de media y varianza, para una función de utilidad no especificada, no era sorprendente. Por el contrario, sí reconoció el carácter general de la crítica de Feldstein. Como consecuencia, en ese mismo documento Tobin sentenció los dos supuestos bajo los cuales su criterio era aplicable, dando por finalizada la controversia del enfoque de media-varianza. Estrictamente hablando, las elecciones de cartera de un inversor que maximiza la utilidad esperada puede ser representada en términos de la media y la varianza de su distribución de probabilidad subjetiva de los retornos sólo si al menos uno de los siguientes supuestos se cumplen:

- a) La función de utilidad del inversor es cuadrática.
- b) Los retornos de los activos  $r_i$  están normalmente distribuidos.

---

<sup>24</sup> En términos diferentes a los de Feldstein, esta crítica ya había sido planteada por Samuelson (1967).

<sup>25</sup> Volumen 36, N° 1 (enero de 1969).

Más allá de los avances conceptuales que implicó la controversia del enfoque de media y varianza, su resolución dejó en evidencia que, si bien se trataba de un criterio intuitivo para pensar las decisiones de los agentes en contextos de incertidumbre, su aplicabilidad era limitada.

Suponer que el agente posee una función de utilidad cuadrática tiene implicancias inaceptables desde el punto de vista económico —vgr. la utilidad marginal de la riqueza  $u'(W) = \alpha_0 - \alpha_2 W$  eventualmente se torna negativa—. En otras palabras, la función de utilidad cuadrática  $u(W)$  determina curvas de indiferencia con propiedades aceptables sólo sobre un rango limitado del dominio de la función (ver Pratt, 1964; Samuelson, 1970; y Hirshleifer y Riley, 1992). Por otro lado, el supuesto de normalidad de los retornos es muy restrictivo, no encontrando respaldo en la evidencia.<sup>26</sup>

Tres años después de la respuesta de Tobin, Sho-Chieh Tsiang publicó un trabajo (Tsiang, 1972) que constituye un nexo entre el enfoque de media-varianza, y los enfoques con momentos de orden superior. Tsiang repensó las críticas planteadas por Feldstein y Borch, a la luz del siguiente teorema que había demostrado Marcel Richter en 1960, y sobre el que descansaba el supuesto tobiniano de utilidad cuadrática:<sup>27</sup>

*"Cuando un inversor que maximiza su utilidad esperada posee preferencias respecto a su cartera que pueden ser representadas en términos de los primeros  $n$  momentos sobre los retornos de su cartera, entonces su función de utilidad es un polinomio de grado  $n$  sobre los retornos" (ver apéndice).*

Sin embargo, las funciones de utilidad polinómicas son incompatibles con los cuatro supuestos que debe cumplir un agente racional averso al riesgo:

- a) Utilidad marginal de la riqueza positiva —vgr.  $u'(W) > 0$  —.
- b) Utilidad marginal de la riqueza decreciente con el nivel de riqueza —vgr.  $u''(W) < 0$  —.

---

<sup>26</sup> Existe una extensa literatura que sugiere que los retornos están generados por distribuciones asimétricas y con colas pesadas (ver por ejemplo Mandelbrot). Por otra parte, la aplicación del Teorema Central del Límite como argumento de normalidad en el retorno del portafolio no es convincente, dado que no necesariamente los portafolios poseen un número significativamente elevado de activos, ni sus participaciones en el total de la cartera son similares.

<sup>27</sup> Ver Richter (1960).

- c) Coeficiente de aversión al riesgo absoluto decreciente o constante ante una aumento del nivel de riqueza —vgr.  $d[-u''(W)/u'(W)]/dW \leq 0$  —.
- d) El coeficiente de aversión al riesgo relativo creciente o constante respecto al nivel de riqueza —vgr.  $d[-W \cdot u''(W)/u'(W)]/dW \geq 0$  —.

Las funciones de utilidad polinómicas no pueden satisfacer estos requisitos simultáneamente. Por su parte, las funciones de utilidad bien comportadas en términos de los puntos (a)-(d), como la exponencial negativa  $U(W) = \zeta - \beta \cdot e^{-\delta W}$ , la de potencia  $U(W) = [1/(1-\delta)] \cdot W^{1-\delta}$  y la logarítmica  $U(W) = \log(W)$ , no son polinomios. El elemento clave del trabajo de Tsiang es que las funciones no polinómicas generalmente pueden ser expandidas por series de Taylor siempre que sean continuas y diferenciables. Es decir, la función  $u(W)$  puede escribirse como una aproximación de Taylor en un entorno del punto  $W_0$  como:

$$u(W) = u(W_0) + u'(W_0)(W - W_0) + \frac{u''(W_0)(W - W_0)^2}{2!} + \frac{u'''(W_0)(W - W_0)^3}{3!} + \dots + \frac{u^{(n-1)}(W_0)(W - W_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \quad (1)$$

Donde  $R_n$  es el residuo de Taylor.

De esta manera, la función de utilidad deviene en un polinomio del desvío de  $W$  respecto a  $W_0$ . Si  $W_0$  es el valor esperado del portafolio, la utilidad esperada resulta:

$$E[U(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(W) f(W - W_0) d(W - W_0) \quad (2)$$

$$= u(W_0) + u''(W_0) \frac{m_2}{2!} + u'''(W_0) \frac{m_3}{3!} + \dots + u^{(n-1)}(W_0) \frac{m_{n-1}}{(n-1)!} + E(R)$$

Donde  $f(W - W_0)$  es la función de densidad y  $m_2, m_3, \dots, m_{n-1}$  son los momentos segundo, tercero, y los sucesivos momentos centrados de orden superior de la distribución de los retornos del portafolio  $W$ .

Si la serie (2) converge, de manera que el residuo resulta despreciable, entonces la función de utilidad puede ser expresada como una función de los primeros  $(n-1)$  momentos centrales de la distribución de  $W$ , como si se tratara de un polinomio de grado  $(n-1)$  en  $W$ . El número de momentos  $n$  considerados deberá ser elegido de manera de asegurar la precisión de la aproximación. A través de esta expresión, Tsiang logró vincular el teorema de Richter respecto a formas de utilidad polinómicas, con funciones de utilidad bien comportadas desde el punto de vista económico.

Tsiang (1972) aportó una página adicional a la controversia del enfoque de media-varianza. En efecto, si la convergencia de la serie es lo suficientemente rápida, de manera que la aproximación resulta aceptablemente precisa, los términos más allá del momento segundo pueden ser desechados, de manera que la utilidad esperada se determina de forma aproximada por los dos primeros momentos (media y varianza), aún si la función de utilidad no es cuadrática y la distribución de probabilidad de los retornos no es normal.

Por otro lado, por medio de la expresión (2) Tsiang logró imprimirle un cariz diferente al problema de selección óptima de cartera. La pregunta crucial pasó a ser la siguiente: **¿bajo qué condiciones la velocidad de convergencia de la aproximación de Taylor es consistente con una secuencia determinada de momentos muestrales de la distribución de retornos de los activos?** A la luz de esta pregunta, el enfoque de media-varianza devino en un caso particular, de un **problema más amplio al que denominaremos problema de selección de cartera con momentos de orden superior.**

En la línea del aporte de Tsiang, autores como Loistl (1976) y M. Hasset, R. S. Sears y G. L. Trennepohl (1982), describieron los problemas en los que se puede incurrir en el caso de realizar un análisis imprudente de la convergencia de la aproximación de Taylor. Sin embargo, una vez resuelta la pregunta respecto a la velocidad de convergencia —y por ende respecto al orden de la aproximación—, existe una pregunta adicional fundamental para evaluar si el enfoque por aproximación de Taylor es aplicable. Esta pregunta, de muy larga data, se denomina problema de los momentos (ver apéndice) y puede resumirse como: **dada una secuencia de momentos, ¿existe una distribución de probabilidad consistente con ella?**

El aporte de Tsiang puede ser entendido como un escalón fundamental para el surgimiento de una nueva generación de modelos de selección óptima de

cartera. En efecto, la ecuación (2) resume las dos líneas resolutivas más utilizadas con posterioridad en la literatura. Por un lado (miembro izquierdo) la maximización directa de la utilidad esperada. Por el otro (miembro derecho) la maximización del valor esperado de una aproximación por series de Taylor a la función de utilidad supuesta. Paralelamente, puso aún más de manifiesto la debilidad —motivada por lo restrictivo de sus supuestos—, de los enfoques de media-varianza como criterio de decisión.

Posteriormente, el trabajo de Robert Lucas (1978) “*Asset Prices in an Exchange Economy*” implicó una transformación en los enfoques de valuación de activos, dando origen a los enfoques de valuación basados en consumo, y marcando un nuevo punto de inflexión en el rumbo de la teoría de cartera. A diferencia del paradigma del CAPM, en el que la “cantidad” de riesgo de un activo viene dado por la correlación entre su retorno y el del portafolio del mercado, en el modelo propuesto por Lucas la cantidad de riesgo viene dada por la covarianza entre el retorno del activo en cuestión y la tasa de crecimiento del consumo per cápita de la economía. El enfoque de Lucas permitió profundizar el análisis sobre la determinación de la prima de riesgo, como así también del retorno de un activo libre de riesgo —i.e. con covarianza cero respecto del consumo per cápita—.

A lo largo de los últimos años, si bien continúan observándose aplicaciones específicas de los enfoques MV, como por ejemplo en la literatura de dolarización financiera, su relevancia ha caído vertiginosamente.<sup>28</sup> Sin embargo, en paralelo al creciente desuso de este enfoque, la literatura vinculada a selección óptima de cartera ha evidenciado un crecimiento extraordinario. Tres líneas de desarrollo relevantes son las siguientes:

En primer lugar, es extensa la producción de literatura concerniente a aplicaciones de los enfoques de selección óptima de cartera con momentos de orden superior —ver por ejemplo Prakash, Chang y Pactwa (2003), Jurczenko y Maillet (2006), Guidolin y Timmermann, (2008), Harvey, Liechty, Liechty y Muller (2010) y Jondeau y Rockinger (2012)—.

---

<sup>28</sup> Específicamente, la rama de la literatura de dolarización financiera que de acuerdo con la tipología desarrollada por Ize y Levy Yeyati (2006) se denomina paradigma de cartera con riesgo de mercado. Este paradigma interpreta a la dolarización financiera como el resultado de una elección de cartera óptima por parte de acreedores y deudores aversos al riesgo, que buscan responder así a la distribución de probabilidad de los rendimientos reales en cada moneda en un mundo con riesgo de mercado —pero sin riesgo de crédito—. Los modelos de asignación más utilizados en esta literatura son el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) y el *Consumption Capital Asset Pricing Model* (CCAPM). Para un ejemplo de la aplicación del modelo CAPM ver Ize y Levy Yeyati (2003).

Otra línea extensamente explorada ha sido la literatura de valuación de activos derivada del trabajo de Lucas (1978). Importantes afluentes de esta línea han sido los desarrollos que siguieron al trabajo de Mehra y Prescott (1985), “*Equity Premium: A Puzzle*”.

Por último, una tercera línea que se ha convertido en un importante impulsor de los enfoques de cartera a lo largo de los últimos años tiene su origen en los avances en teoría de decisión bajo incertidumbre. En efecto, los “puzzles” derivados del supuesto REE (equilibrio de expectativas racionales, por su nombre en inglés) y las críticas al paradigma de la utilidad esperada subjetiva han motivado el desarrollo de nuevas representaciones de preferencias. Entre ellas se destacan los enfoques que contemplan ambigüedad —i.e. un agente enfrenta ambigüedad cuando no es capaz de asignar valores de probabilidad únicos a eventos estocásticos—.

Desde 1989 hasta la actualidad, la literatura de decisión en contextos de incertidumbre ha producido al menos seis enfoques para representar preferencias en contextos ambigüos: 1) el enfoque de utilidad esperada *max-min*, 2) el enfoque de utilidad esperada de Choquet, 3) el enfoque de preferencias suaves 4) el enfoque de preferencias multiplicativas, 5) el enfoque de preferencias variacionales, y por último, el enfoque de utilidad esperada de segundo orden. La literatura de aplicación de estos enfoques a tópicos financieros es también muy amplia, destacándose las aplicaciones a selección óptima de cartera, a la resolución del *equity premium puzzle*, al estudio del nivel de participación en los mercados financieros, a la determinación de la estructura temporal de las tasas de interés, al comportamiento de manada en los mercados financieros, a la explicación de la presencia de volatilidad excesiva en las cotizaciones de los activos financieros y como respuesta a episodios de *flight to quality*, entre otros tópicos.

## V. Conclusión

El objetivo principal de este ensayo ha sido describir las sinergias interdisciplinarias y los debates fundamentales que caracterizaron el surgimiento y primeros años de evolución de los enfoques de selección óptima de cartera.

Principalmente, se ha analizado el vínculo entre los interrogantes surgidos en el seno de la teoría de la demanda de dinero y el surgimiento del enfoque de

media-varianza, a la vez que se caracterizaron los desarrollos identificados con la figura de James Tobin, que posteriormente dieron origen al CAPM —*i.e.* el enfoque de preferencia por liquidez, y el teorema de separación de dos fondos—.

Adicionalmente, se describieron los debates acontecidos tras los trabajos pioneros de Markowitz y Tobin, como así también las críticas a las formas funcionales de las demandas de activos tobinianas. Estos debates dieron origen a los enfoques de selección de cartera con momentos de orden superior, de los que el modelo MV es un caso particular.

Por último, se ha enfatizado el hecho que en las últimas dos décadas la teoría de selección óptima de cartera ha cobrado un nuevo impulso, motorizada principalmente por los avances en teoría de decisión bajo incertidumbre.

## Anexo

### A.1. La demostración de Tobin (1958)

En su trabajo de 1958, Tobin presentó la siguiente demostración de que las preferencias de agentes aversos al riesgo con distribuciones subjetivas sobre los retornos caracterizables por los dos primeros momentos, pueden representarse por medio curvas de indiferencia convexas sobre ambos momentos. La demostración consiste en los siguientes cinco puntos:

- 1) La utilidad esperada asociada con la distribución  $f(x; \mu, \sigma)$ , denotada por  $E[U(\mu, \sigma)]$  se define como:

$$\begin{aligned} E[U(\mu, \sigma)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) f(x; \mu, \sigma) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(\mu + \sigma z) f(z; 0, 1) dz \end{aligned}$$

- 2) Supongamos que el inversor se encuentra indiferente entre dos distribuciones  $f(x; \mu, \sigma)$  y  $f(x; \mu', \sigma')$ . Es decir,  $E[U(\mu, \sigma)] = E[U(\mu', \sigma')]$  y los dos puntos  $(\mu, \sigma)$ ,  $(\mu', \sigma')$  se encuentran sobre la misma curva de indiferencia.

- 3) La utilidad marginal decreciente implica que para cada  $z$ ,

$$\frac{1}{2}U(\mu + \sigma z) + \frac{1}{2}U(\mu' + \sigma' z) < U\left(\frac{\mu + \mu'}{2} + \frac{\sigma + \sigma'}{2} z\right)$$

- 4) Aplicando el operador expectativas a ambos lados de la desigualdad anterior, resulta:

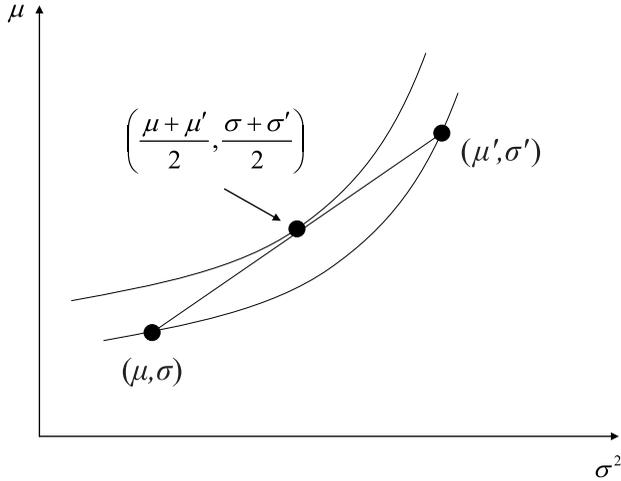
$$\frac{1}{2}E[U(\mu + \sigma z)] + \frac{1}{2}E[U(\mu' + \sigma' z)] < E\left[U\left(\frac{\mu + \mu'}{2} + \frac{\sigma + \sigma'}{2} z\right)\right]$$

Dado que  $E[U(\mu, \sigma)] = E[U(\mu', \sigma')]$ , la expresión anterior resulta:

$$E\left[U\left(\frac{\mu + \mu'}{2}, \frac{\sigma + \sigma'}{2}\right)\right] > E[U(\mu, \sigma)] = E[U(\mu', \sigma')]$$

- 5) Dado que el punto  $\left(\frac{\mu + \mu'}{2}, \frac{\sigma + \sigma'}{2}\right)$  se encuentran sobre una línea recta entre los puntos  $(\mu, \sigma)$  y  $(\mu', \sigma')$ , corresponde a la curva de indiferencia más elevada (por el punto (IV)), entonces la curva de indiferencia es convexa.

**Gráfico A.1 / Representación de la demostración de Tobin**



**A.2. La demostración de Richter (1960)**

Supongamos un agente que posee la siguiente función de utilidad polinómica de grado dos respecto del retorno de su cartera  $r_p$ :

$$U(r_p) = \alpha \cdot r_p - \beta \cdot r_p^2 + \gamma$$

La utilidad esperada resulta de aplicar el operador expectativas a ambos miembros de la ecuación anterior:

$$E[U(r_p)] = \alpha \cdot E[r_p] - \beta \cdot E[r_p^2] + \gamma$$

Que resulta en:

$$E[U(r_p)] = \alpha \cdot \mu_p - \beta \cdot \sigma_p^2 + \gamma$$

### A.3. La crítica de Feldstein (1969)

El supuesto crucial del primer paso de la demostración de Tobin (ver punto A.1 de este anexo) es asumir que toda distribución de probabilidad caracterizable por los primeros dos momentos  $f(x; \mu, \sigma)$  puede “estandarizarse” como:  $f(z; 0, 1)$ , con  $z = (x - \mu)/\sigma$ . Pero esto no es una propiedad de todas las distribuciones de dos parámetros. Sólo para un limitado conjunto de distribuciones definidas por dos parámetros la media y el desvío son equivalentes a medidas de ubicación y escala. Algunas distribuciones de probabilidad relevantes, como la lognormal y la beta, no pueden transformarse de la forma propuesta en la demostración de Tobin.

### A.4. La crítica de Borch<sup>29</sup>

Considérense dos loterías, con la siguiente estructura de pagos:

**Lotería A:** Paga 0 con probabilidad 0,5 y 2 con probabilidad 0,5.

**Lotería B:** Paga -2 con probabilidad 0,2 y 3 con probabilidad 0,8.

La media y la varianza de ambas loterías resultan:<sup>30</sup>

**Lotería A:**

$$\mu'_1 = \sum x \cdot p(x) = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 2 = 1$$

$$\mu_2 = \sum (x - \mu'_1)^2 \cdot p(x) = (0 - 1)^2 \cdot 0,5 + (2 - 1)^2 \cdot 0,5 = 1$$

Lotería B:

$$\mu'_1 = \sum x \cdot p(x) = 0,2 \cdot (-2) + 0,8 \cdot 3 = 2$$

$$\mu_2 = \sum (x - \mu'_1)^2 \cdot p(x) = (-2 - 2)^2 \cdot 0,2 + (3 - 2)^2 \cdot 0,8 = 4$$

---

<sup>29</sup> Esta representación corresponde a Borch (1974).

<sup>30</sup> Nótese que  $\mu'_i$  hace referencia al momento no centrado de orden  $i$ , mientras que  $\mu_i$  hace referencia al momento centrado de orden  $i$ . La nomenclatura de los momentos no centrados y centrados corresponde a Kendall y Stuart (1977).

Supóngase adicionalmente, que el agente está indiferente entre ambas loterías, de manera que se encuentran sobre la misma curva de indiferencia en el plano  $(\mu, \sigma^2)$ : Incorporemos una tercera lotería C, con la siguiente estructura de pagos:

**Lotería C:** Paga 0 con probabilidad 0,5 y 4 con probabilidad 0,5.

De manera que la media y la varianza de la **lotería C** resulta:

**Lotería C:**

$$\mu'_1 = \sum x \cdot p(x) = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 4 = 2$$

$$\mu_2 = \sum (x - \mu'_1)^2 \cdot p(x) = (0 - 2)^2 \cdot 0,5 + (4 - 2)^2 \cdot 0,5 = 4$$

La utilidad esperada de la lotería C es mayor que la de la lotería A, y por lo tanto debería ser más atractiva para el agente. Sin embargo, en términos de media y varianza las loterías C y B son equivalentes (2, 4), lo que implica que, bajo este criterio, el agente debería estar indiferente entre la lotería A y la C. Esto último es evidencia de que un ordenamiento de preferencias en términos de media y varianza no es una representación correcta de la utilidad esperada para cualquier distribución de probabilidad.

## A.5. El problema de los momentos

Dada una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $R^n$ , se denomina a  $y_\alpha := \int x^\alpha \mu(dx)$  como su momento de orden  $\alpha$ . El problema de los momentos busca caracterizar a la secuencia  $y = (y_\alpha)_{\alpha \in Z_+^n}$  de manera que se corresponda con la secuencia de momentos de alguna medida no negativa  $\mu$ . En caso de serlo, se dice que  $\mu$  es la medida representada por  $y$ , siendo  $\mu$  una medida de probabilidad en el caso que  $y_0 = 1$ . El problema fue formulado por primera vez por el matemático holandés Thomas Jan Stieltjes en su "*Recherches sur les fractions continues*" de 1894 — ver Shohat y Tamarkin (1943)—, donde propuso y resolvió el siguiente problema, bajo el título de problema de los momentos:

Encontrar una función limitada, no decreciente,  $\psi(x)$ , en el intervalo  $[0, \infty)$  tal que sus momentos:

$$\int_0^{\infty} x^n d\psi(x), n=0, 1, 2, \dots$$

sean iguales a un conjunto de valores:

$$\int_0^{\infty} x^n d\psi(x) = \mu_n, n=0, 1, 2, \dots$$

Tras no haber sido estudiado por alrededor de 20 años, el problema de los momentos retornó a la escena de la literatura matemática en la obra de Hamburger y otros autores, como Riesz, Carleman y Hausdorff. A lo largo de las últimas dos décadas, se obtuvieron significativos avances respecto a la solución del problema truncado y multivariado (ver Lasserre, 2010).

## Referencias

- Ando, A. y F. Modigliani (1969).** “Econometric Analysis of Stabilization Policies”, *American Economic Review*, American Economic Association, Vol. 59(2), pp. 296-314, mayo.
- Backus, D., W. C. Brainard, G. Smith y J. Tobin, (1980).** “A Model of U.S. Financial and Nonfinancial Economic Behavior”, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 12 (2), mayo.
- Borch, K. (1969).** “A Note on Uncertainty and Indifference Curves”, *Review of Economic Studies*, Vol. 36 (1), pp. 1-4, enero.
- Borch, K. (1974).** “The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment”, *The American Economic Review*, Vol. 64 (3), pp. 428-430, junio.
- Brainard, W. (1964).** “Financial Intermediaries and a Theory of Monetary Control”, *Yale Economic Essays*, 4(2), pp. 431-482.
- Brainard, W. C. y J. Tobin (1963).** “Financial Intermediaries and the Effectiveness of Monetary Controls”, *American Economic Review*, 52(2).
- Brainard, W. C. y J. Tobin (1968).** “Pitfalls in Financial Model Building”, *The American Economic Review*, Vol. 58, N° 2, mayo.
- Branson, W. H. (1974).** “Stocks and Flows in International Monetary Analysis”, en A. Ando, R. Herring y R. Martson (eds.), *International Aspects of Stabilization Policies*, Federal Reserve Bank of Boston Conference Series N° 12, pp. 27-50.
- Burdisso, T. y E. A. Corso (2011).** “Incertidumbre y dolarización de cartera. El caso argentino en el último medio siglo”, *Ensayos Económicos*, N° 63, BCRA, julio-septiembre.
- Courakis (1989).** “Does Constant Relative Risk Aversion Imply Asset Demands that are Linear in Expected Returns?”, *Oxford Economic Papers*, New Series, Vol. 41 (3), pp. 553-566, julio.

**Damill, M. y J. M. Fanelli (1988).** “Decisiones de Cartera y Transferencias de Riqueza en un Período de Inestabilidad Macroeconómica”, *Documento CEDES*, N° 12.

**Damill, M., J. M. Fanelli, R. Frenkel y G. Rozenwurcel (1989).** *Déficit Fiscal, Deuda Externa y Desequilibrio Financiero*. CEDES, Buenos Aires, Editorial Tesis.

**Drazen, A. (1981a).** “The Permanent Effects of Inflation on Development and Choice of Production Technique”, en A. Razin y J. Flanders (eds.), *Development in an Inflationary World*, New York, Academic Press.

**Drazen, A. (1981b).** “Inflation and Capital Accumulation under a Finite Horizon”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 8, Issue 2, pp. 247-260.

**Ellsberg, D. (1961).** “Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms”, *Quarterly Journal of Economics*, 75 (4), pp. 643-669.

**Epstein, L. G. y M. Schneider (2010).** “Ambiguity and Asset Markets”, *NBER Working Paper Series*, Working Paper N° 16181.

**Fanelli, J. M. (1988).** “Desequilibrio Macroeconómico, Restricciones Financieras y Políticas de Estabilización”, Tesis de Doctorado. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

**Fanelli, J. M. y R. Frenkel (1990).** “Un Marco de Consistencia para el Análisis de Ajuste y el Cambio Estructural en América Latina: Metodología y Hechos Estilizados”, Documento CEDES N° 44.

**Feldstein, M. S. (1969).** “Mean-Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 36 (1), pp. 5-12, enero.

**Finkman, J. y S. Katz, (2012).** “Prima de Riesgo Variable y Expectativas Inestables: Una nota sobre la contribución de Roberto Frenkel al Desarrollo de un Concepto Crítico”. Mimeo.

**Fischer, S. (1979a).** “Anticipations and the Nonneutrality of Money”, *Journal of Political Economy*, Vol. 87, N° 2, abril.

**Fischer, S. (1979b).** "Capital Accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Model", *Econometrica*, Vol. 47, N° 6, noviembre.

**Fox, J. (2010).** *The Myth of the Rationale Market: A History of Risk, Reward, and Delusion on Wall Street*, New York, Harper Collins Publisher.

**Frenkel, R. (1982).** "Mercado Financiero, Expectativas Cambiarias y Movimientos de Capital", *Desarrollo Económico*, Vol. 22, N° 87, octubre-noviembre.

**Friedman, B. M. y V. Vance Roley (1979).** "A Note on the Derivation of Linear Homogeneous Asset Demand Functions", NBER Working Paper N° 345.

**Fry, M. J. (1988).** *Money, Interest and Banking in Economic Development*, First Edition, Baltimore and London, The Johns Hopkins University Press.

**Guidolin, M. y A. Timmermann (2008).** "Optimal Portfolio Choice under Regime Switching, Skew and Kurtosis Preferences", *Review of Financial Studies*, 21 (2), pp. 889-935.

**Gurley, J. G., y E. S. Shaw (1960).** *Money in a Theory of Finance*, First Edition, Washington D.C., The Brookings Institution.

**Harvey, C. R., J. C. Liechty, M. W. Liechty and y P. Muller (2010).** "Portfolio Selection with Higher Moments", *Quantitative Finance*, Vol. 10, Issue 5.

**Hasset, M., R. S. Sears y G. L. Trennepohl (1982).** "Asset Preference and the Measurement of Expected Utility: Some Problems", BEBR, Faculty Working Paper N° 892.

**Hicks, J. (1935).** "A Suggestion for Simplifying the Theory of Money", en J. Hicks, *Critical Essays in Monetary Theory*.

**Hirshleifer, J. y J. G. Riley (1992).** *The Analytics of Uncertainty and Information*, Cambridge University Press.

**Ize, A. y E. Levy Yeyati (2003).** "Financial dollarization", *Journal of International Economics*, Vol. 59(2), pp. 323-347, marzo.

**Jondeau, E. y M. Rockinger (2012).** "On the Importance of Time Variability in Higher Moments for Asset Allocation", *Journal of Financial Econometrics*, 10 (1), pp. 84-123.

**Jurczenko, E. y B. Maillet (2006).** *Multi-moment Asset Allocation and Pricing Models*, E. Jurczenko y B. Maillet (eds.), New York, John Wiley & Sons.

**Kendall, M. G. y A. Stuart (1977).** *The Advanced Theory of Statistic*, London, Charles Griffin & Company Limited.

**Keynes, J. M. (1924).** *A Tract on Monetary Reform*, London, Macmillan.

**Keynes, J. M. (1930).** *A Treatise on Money*, London, Macmillan.

**Keynes, J. M. (1936).** *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Chapter XV, Book IV.

**Knight, F. (1921).** *Risk, Uncertainty and Profit*, Boston, Houghton Mifflin Company.

**Lasserre, J. B. (2010).** "Moments, Positive Polynomials and Their Applications", Imperial College Press Optimization Series, Vol. 1, 57 Shelton Street, Covent Garden, London.

**Lintner, J. (1965).** "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, N° 1, pp. 13-37, febrero.

**Loistl, O. (1976).** "The Erroneous Approximation of Expected Utility by Means of a Taylor's Series Expansion: Analytic and Computational Results", *The American Economic Review*, Vol. 66, N° 5, pp. 904-910, diciembre.

**Lucas, R. (1978).** "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica*, Vol. 46, N° 6, pp. 1429-1445, noviembre.

**Mandelbrot, B. (1963).** "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, Vol. 35, pp. 394-419.

**Markowitz, H. (1952).** “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance*, Vol. VII, N° 1, marzo.

**Markowitz, H. (1956).** “The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints”, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 3, pp. 111-133.

**Markowitz, H. (1959).** *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, New York, John Wiley & Sons.

**Markowitz, H. M. (1991).** “Foundation of Portfolio Theory”, *The Journal of Finance*, Vol. XLVI, N° 2, junio.

**Markowitz, H. M. (1999).** “The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960”, *Perspectives*, julio - agosto.

**Marschak, J. (1938).** “Money and the Theory of Assets”, *Econometrica*, Vol. 6, pp. 311-325.

**Marschak, J. (1946).** “Neumann’s and Morgernstern’s Approach to Statistic Economics”, *Journal of Political Economy*, p. 106, abril.

**Mehra, R. y E. C. Prescott (1985).** “The Equity Premium: A Puzzle”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, Issue 2, pp. 145-161, marzo.

**McKinnon, R. I. (1969).** “Portfolio Balance and International Payments Adjustment”, en R.A. Mundell y A. K. Swoboda (eds.); *Monetary Problems of the International Economy*, pp. 199-234, Chicago, Chicago University Press.

**McKinnon, R. I., y W. Oates (1966).** “The Implications of International Economic Integration for Monetary, Fiscal and Exchange rate Policy”, Princeton Studies in International Finance N° 16, International Finance Section, Princeton University.

**Mehra, R., y E. Prescott (1985).** “The Equity Premium: A Puzzle”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, Issue 2, pp. 145-161, marzo.

**Mehrling, P. (1997).** *The Money Interest and the Public Interest. American Monetary Thought, 1920-1970*, Cambridge, Harvard University Press.

**Mehrling, P. (2011).** *The New Lombard Street. How the Fed Became the Dealer of Last Resort*, Princeton, Princeton University Press.

**Mossin, J. (1966).** "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, Vol. 35, N° 4, pp. 768-783, octubre.

**Olivera, J. H. (1980).** "Las categorías monetarias", *Revista de la Universidad de Buenos Aires*, Volumen Tercero.

**Prakash, A., C. Chang, y T. Pactwa (2003).** "Selecting a Portfolio with Skewness: Recent Evidence from US, European, and Latin American Equity Markets", *Journal of Banking and Finance*, Vol. 27, pp. 1375-90.

**Pratt, J. W. (1964).** "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, N° 32, pp. 122-136, enero-abril.

**Roy, A. D. (1952).** "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica*, Vol. 20, N° 3, pp. 43-44, julio.

**Richter, M. (1960).** "Cardinal Utility, Portfolio Selection and Taxation", *The Review of Economic Studies*, Vol. 27, N° 3, pp. 152-166, junio.

**Samuelson, P. A. (1967).** "General Proof that Diversification Pays", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 2, N° 1, pp. 1-13, marzo.

**Samuelson, P. A. (1970).** "The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higher Moments", *The Review of Economic Studies*, Vol. 37, N° 4, pp. 537-542, octubre.

**Savage, L. (1954).** *Foundations of Statistics*, New York, John Wiley & Sons.

**Sharpe, W. (1964).** "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, Vol. 19, N° 3, pp. 425-442, septiembre.

**Shohat, J. A., y J. D. Tamarkin (1943).** *The Problem of Moments*, New York, American Mathematical Society.

**Sidrauski, M. (1967a).** “Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy”, *The American Economic Review*, Vol. 57, N° 2, Papers and Proceedings of the Seventy-ninth Annual Meeting of the American Economic Association, pp. 534-544, mayo.

**Sidrauski, M. (1967b).** “Inflation and Economic Growth”, *Journal of Political Economy*, Vol. 75, N° 6, pp. 796-810, diciembre.

**Solow, R. M. (1956).** “A Contribution to the Theory of Economic Growth”, *Quarterly Journal of Economics*, 70(1), pp. 65-94.

**Solow, R. M. (2004).** “The Tobin Approach to Monetary Theory”, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 36, N° 4, agosto.

**Tobin, J. (1958).** “Liquidity Preference as Behavior Towards Risk”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 25, N° 2, pp. 65-86, febrero.

**Tobin, J. (1963).** “Commercial Banks as Creators of Money”, en Deane Carson (ed.), *Banking and Money Studies*, for the Comptroller of the Currency, U.S. Treasury, Homewood, Ill.: Richard D. Irwin, Inc., pp. 408-419.

**Tobin, J. (1965).** “Money and Economic Growth”, *Econometrica*, Vol. 33, N° 4, octubre.

**Tobin, J. (1969).** “A General Equilibrium Approach to Monetary Theory”, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 1, pp. 15-29, febrero.

**Tobin, J. (1970).** “Deposit Interest Ceilings as a Monetary Control”, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 2, N° 1, pp. 4-14, febrero.

**Tobin, J. (1982).** “Money and Finance in the Macroeconomic Process”, Nobel Lecture realizada en Estocolmo el 8 de diciembre, publicada en *Les Prix Nobel*, 1982.

**Tobin, J. (1983).** “Liquidity Preference, Separation, and Asset Pricing”, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 3, p. 53, marzo.

**Tsiang, S. C. (1972).** “The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money”, *The American Economic Review*, Vol. 62, N° 3, pp. 354-371, junio.

**Von Neumann, J., y O. Morgenstern (1944).** *Theory of Games and Economic Behavior*, 3rd ed., 1967, Princeton, Princeton University Press.

**Wiesenberger, A., and Company; Investment Companies.** New York, ediciones anuales desde 1941.

**Williams, J. B. (1938).** *The Theory of Investment Value*, Cambridge, Harvard University Press.